Acyklické digrafy

Stanislav Palúch

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

26. apríla 2020

Acyklický digraf, orientovaný strom

Definícia

Acyklický digraf *je taký digraf, ktorý neobsahuje orientovaný cyklus.*

Definícia

Orientovaný strom *je neorientovane súvislý digraf, ktorý neobsahuje polocyklus.*

Poznámka

Ak $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je acyklický digraf, potom nemôže obsahovať hrany* (u, v) *a* (v, u) *súčasne, lebo by v tomto prípade obsahoval i cyklus* $(u, (u, v), v, (v, u), u)$.

Poznámka

$(u, (u, v), v, (u, v), u)$ *nie je polocyklus, lebo obsahuje tú istú orientovanú hranu* (u, v) *dvakrát.*

Acyklický digraf, orientovaný strom

Definícia

Acyklický digraf *je taký digraf, ktorý neobsahuje orientovaný cyklus.*

Definícia

Orientovaný strom *je neorientovane súvislý digraf, ktorý neobsahuje polocyklus.*

Poznámka

Ak $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je acyklický digraf, potom nemôže obsahovať hrany* (u, v) *a* (v, u) *súčasne, lebo by v tomto prípade obsahoval i cyklus* $(u, (u, v), v, (v, u), u)$.

Poznámka

$(u, (u, v), v, (u, v), u)$ *nie je polocyklus, lebo obsahuje tú istú orientovanú hranu* (u, v) *dvakrát.*

Acyklický digraf, orientovaný strom

Definícia

Acyklický digraf *je taký digraf, ktorý neobsahuje orientovaný cyklus.*

Definícia

Orientovaný strom *je neorientovane súvislý digraf, ktorý neobsahuje polocyklus.*

Poznámka

Ak $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je acyklický digraf, potom nemôže obsahovať hrany* (u, v) *a* (v, u) *súčasne, lebo by v tomto prípade obsahoval i cyklus* $(u, (u, v), v, (v, u), u)$.

Poznámka

$(u, (u, v), v, (u, v), u)$ *nie je polocyklus, lebo obsahuje tú istú orientovanú hranu* (u, v) *dvakrát.*

Acyklický digraf, orientovaný strom

Definícia

Acyklický digraf *je taký digraf, ktorý neobsahuje orientovaný cyklus.*

Definícia

Orientovaný strom *je neorientovane súvislý digraf, ktorý neobsahuje polocyklus.*

Poznámka

Ak $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je acyklický digraf, potom nemôže obsahovať hrany* (u, v) *a* (v, u) *súčasne, lebo by v tomto prípade obsahoval i cyklus* $(u, (u, v), v, (v, u), u)$.

Poznámka

$(u, (u, v), v, (u, v), u)$ *nie je polocyklus, lebo obsahuje tú istú orientovanú hranu* (u, v) *dvakrát.*

Acyklický digraf

Ku každému acyklickému digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$ možno zostrojiť graf $G' = (V, H')$ s tou istou množinou vrcholov V a s množinou hrán H' definovanou

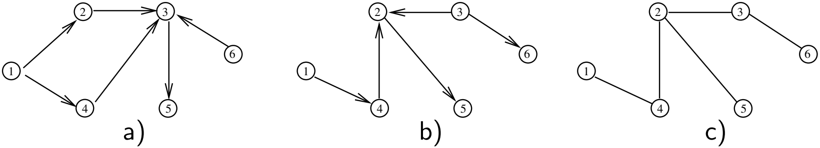
$$H' = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in H\} \ . \tag{1}$$

H' je vlastne množina hrán H, v ktorej „zabudneme“ na orientáciu.

Pretože acyklický digraf môže pre každdú dvojicu vrcholov $u \in V$, $v \in V$, kde $u \neq v$, obsahovať najviac jednu z orientovaných hrán (u, v), (v, u), platí

$$|H'| = |H|.$$

Acyklický digraf



Obr.: a) Neorientovane súvislý acyklický digraf,

ktorý nie je orientovaným stromom.

b) Orientovaný strom $\overrightarrow{G}$. c) Neorientovaný strom príslušný k $\overrightarrow{G}$.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

a) *Digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je orientovaný strom.*

b) *V digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *existuje pre každé* $u, v \in V$ *jediná u–v polocesta.*

c) *Digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je neorientovane súvislý a každá orientovaná hrana množiny H je mostom.*

(Mostom v orientovanom digrafe rozumieme takú orientovanú hranu, po vybratí ktorej stúpne počet komponentov digrafu).

d) *Digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je neorientovane súvislý a* $|H| = |V| - 1$.

e) *V digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *platí* $|H| = |V| - 1$ *a* $\overrightarrow{G}$ *neobsahuje polocyklus.*

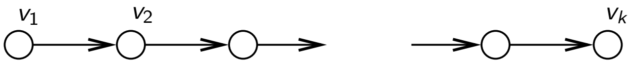
Vlastnosti acyklických digrafov

Veta

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je acyklický digraf.
Potom V obsahuje aspoň jeden vrchol z taký, že $\mathrm{ideg}(z) = 0$ a aspoň jeden vrchol u taký, že $\mathrm{odeg}(u) = 0$.

Dôkaz.

Nech
$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, (v_{k-1}, v_k), v_k)$$
je orientovaná cesta v digrafe $\overrightarrow{G}$ s najväčším počtom hrán.
Ukážeme, že $\mathrm{odeg}(v_k) = 0$.



Keby $\mathrm{odeg}(v_k) > 0$,
existovala by aspoň jedna hrana (čiarkovane) vychádzajúca z v_k,
ktorá predlžuje cestu $\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k)$ (spor s tým, že je najdlhšia)
alebo uzaviera cyklus (spor s acykličnosťou $\overrightarrow{G}$)

Veta

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je acyklický digraf.
Potom V obsahuje aspoň jeden vrchol z taký, že $\mathrm{ideg}(z) = 0$
a aspoň jeden vrchol u taký, že $\mathrm{odeg}(u) = 0$.

DÔKAZ.

Nech
$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, (v_{k-1}, v_k), v_k)$$
je orientovaná cesta v digrafe $\overrightarrow{G}$ s najväčším počtom hrán.
Ukážeme, že $\mathrm{odeg}(v_k) = 0$.

Keby $\mathrm{odeg}(v_k) > 0$,
existovala by aspoň jedna hrana (čiarkovane) vychádzajúca z v_k,
ktorá predlžuje cestu $\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k)$ (spor s tým, že je najdlhšia)
alebo uzaviera cyklus (spor s acykličnosťou $\overrightarrow{G}$)

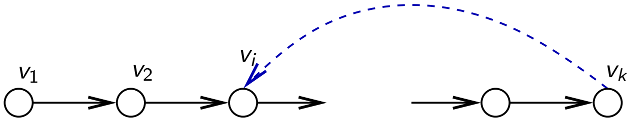
Veta

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je acyklický digraf.
Potom V obsahuje aspoň jeden vrchol z taký, že $\mathrm{ideg}(z) = 0$
a aspoň jeden vrchol u taký, že $\mathrm{odeg}(u) = 0$.

Dôkaz.

Nech
$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, \dots, (v_{k-1}, v_k), v_k)$$

je orientovaná cesta v digrafe $\overrightarrow{G}$ s najväčším počtom hrán.
Ukážeme, že $\mathrm{odeg}(v_k) = 0$.



Keby odeg$(v_k) > 0$,
existovala by aspoň jedna hrana (čiarkovane) vychádzajúca z v_k,
ktorá predlžuje cestu $\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k)$ (spor s tým, že je najdlhšia)
alebo uzaviera cyklus (spor s acykličnosťou $\overrightarrow{G}$)

Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu

Veta

Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je acyklický práve vtedy, keď jeho vrcholy možno usporiadať do postupnosti

$$v_1, v_2, \dots, v_n \tag{2}$$

(t.j, prečíslovať) tak, že platí:

$$Ak\ (v_i, v_k) \in H \quad potom \quad i < k. \tag{3}$$

Definícia

Očíslovanie vrcholov $v_1, v_2, \dots, v_n$ acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$, pre ktoré platí:

$$ak\ (v_i, v_k) \in H,\ \ potom\ i < k,$$

nazveme **monotónnym očíslovaním** *vrcholov acyklického digrafu.*

Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu

Veta

Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je acyklický práve vtedy, keď jeho vrcholy možno usporiadať do postupnosti

$$v_1, v_2, \dots, v_n \tag{2}$$

(t.j, prečíslovať) tak, že platí:

$$Ak\ (v_i, v_k) \in H \quad potom \quad i < k. \tag{3}$$

Definícia

Očíslovanie vrcholov $v_1, v_2, \dots, v_n$ acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$, pre ktoré platí:

$$ak\ (v_i, v_k) \in H,\ \ potom\ i < k,$$

nazveme **monotónnym očíslovaním** *vrcholov acyklického digrafu.*

Algoritmus

Algoritmus I. na monotónne očíslovanie acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

- **Krok 1.** *Polož $i := 1$.*
- **Krok 2.** $\{$*Digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *obsahuje aspoň jeden taký vrchol* $v \in V$, *že* $\mathrm{ideg}(v) = 0.\}$
  Vezmi taký vrchol $v \in V$, *že* $\mathrm{ideg}(v) = 0$ *a polož* $v_i := v$.
- **Krok 3.** *Ak* $V - \{v\} = \emptyset$ *STOP,*
  inak $\overrightarrow{G} := \overrightarrow{G} - \{v\}$, $i := i + 1$ *a Goto Krok 2.*

♣

Algoritmus

Algoritmus I. na monotónne očíslovanie acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

- **Krok 1.** *Polož* $i := 1$.
- **Krok 2.** $\{$*Digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *obsahuje aspoň jeden taký vrchol* $v \in V$*, že* $\mathrm{ideg}(v) = 0.\}$
  Vezmi taký vrchol $v \in V$*, že* $\mathrm{ideg}(v) = 0$ *a polož* $v_i := v$.
- **Krok 3.** *Ak* $V - \{v\} = \emptyset$ *STOP,*
  inak $\overrightarrow{G} := \overrightarrow{G} - \{v\}$, $i := i + 1$ *a Goto Krok 2.*

♣

Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu

Algoritmus

Algoritmus I. na monotónne očíslovanie acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

- **Krok 1.** *Polož* $i := 1$.
- **Krok 2.** $\{$*Digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *obsahuje aspoň jeden taký vrchol* $v \in V$, *že* $\mathrm{ideg}(v) = 0.\}$
  Vezmi taký vrchol $v \in V$, *že* $\mathrm{ideg}(v) = 0$ *a polož* $v_i := v$.
- **Krok 3.** *Ak* $V - \{v\} = \emptyset$ *STOP,*
  inak $\overrightarrow{G} := \overrightarrow{G} - \{v\}$, $i := i + 1$ *a Goto Krok 2.*

♣

Algoritmus

Algoritmus II. na monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

- **Krok 1.** *Pre každé $v \in V$ priraď značku $d(v) := \mathrm{ideg}(v)$. Urči podmnožinu V_0 vrcholovej množiny V s nulovou značkou d, t. j.*

$$V_0 = \{v \mid v \in V,\ d(v) = 0\}.$$

Polož $k := |V_0|$ a prvky z množiny V_0 zoraď do ľubovoľnej postupnosti $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_k$. Polož $i := 1$.

- **Krok 2.** *Postupne pre každý vrchol w výstupnej hviezdy vrchola v_i taký, že $w \neq v_i$, urob:*
$d(w) := d(w) - 1$. Ak $d(w) = 0$ potom zaraď vrchol w na koniec postupnosti $\mathcal{P}$, t. j. polož $k := k + 1$, $v_k := w$.

- **Krok 3.** *Ak $k = n = |V|$ STOP, inak polož $i := i + 1$ a GOTO Krok 2.*

Algoritmus

Algoritmus II. na monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

- **Krok 1.** *Pre každé $v \in V$ priraď značku $d(v) := \mathrm{ideg}(v)$. Urči podmnožinu V_0 vrcholovej množiny V s nulovou značkou d, t. j.*

$$V_0 = \{v \mid v \in V,\ d(v) = 0\}.$$

  Polož $k := |V_0|$ a prvky z množiny V_0 zoraď do ľubovoľnej postupnosti $\mathcal{P} = v_1, v_2, \ldots, v_k$. Polož $i := 1$.

- **Krok 2.** *Postupne pre každý vrchol w výstupnej hviezdy vrchola v_i taký, že $w \neq v_i$, urob:*
  $d(w) := d(w) - 1$. Ak $d(w) = 0$ potom zaraď vrchol w na koniec postupnosti $\mathcal{P}$, t. j. polož $k := k + 1$, $v_k := w$.

- **Krok 3.** *Ak $k = n = |V|$ STOP, inak polož $i := i + 1$ a GOTO Krok 2.*

Algoritmus

Algoritmus II. na monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

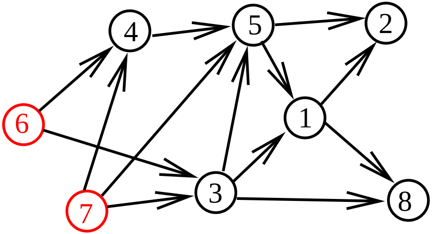
- **Krok 1.** *Pre každé $v \in V$ priraď značku $d(v) := \mathrm{ideg}(v)$. Urči podmnožinu V_0 vrcholovej množiny V s nulovou značkou d, t. j.*

  $$V_0 = \{v \mid v \in V,\ d(v) = 0\}.$$

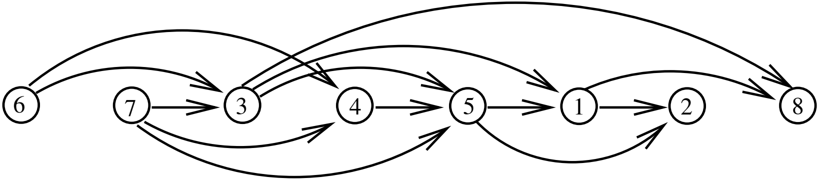
  Polož $k := |V_0|$ a prvky z množiny V_0 zoraď do ľubovoľnej postupnosti $\mathcal{P} = v_1, v_2, \ldots, v_k$. Polož $i := 1$.
- **Krok 2.** *Postupne pre každý vrchol w výstupnej hviezdy vrchola v_i taký, že $w \neq v_i$, urob:*
  $d(w) := d(w) - 1$. Ak $d(w) = 0$ potom zaraď vrchol w na koniec postupnosti $\mathcal{P}$, t. j. polož $k := k + 1$, $v_k := w$.
- **Krok 3.** *Ak $k = n = |V|$ STOP, inak polož $i := i + 1$ a GOTO Krok 2.*

♣

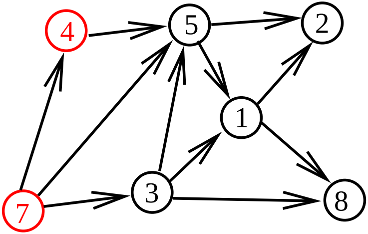
Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu



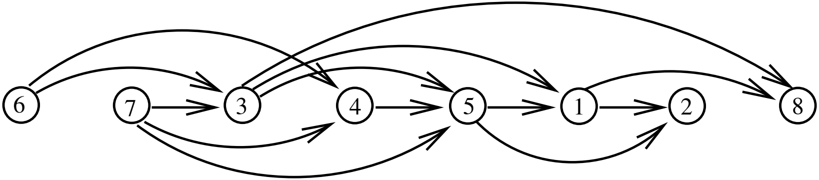
i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
		$d(v)$							
-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
3	3	**1**	2			**1**			**1**
4	4	1	2			**0**			1
5	5	**0**	**1**						1
6	1		**0**						**0**
7	2								
8	8								



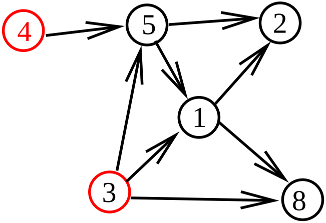
Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu



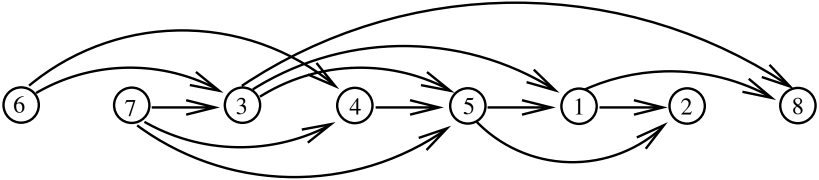
i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
		$d(v)$							
-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
3	3	**1**	2			**1**			**1**
4	4	1	2			**0**			1
5	5	**0**	**1**						1
6	1		**0**						**0**
7	2								
8	8								



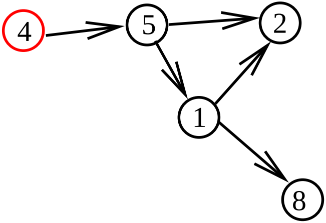
Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu



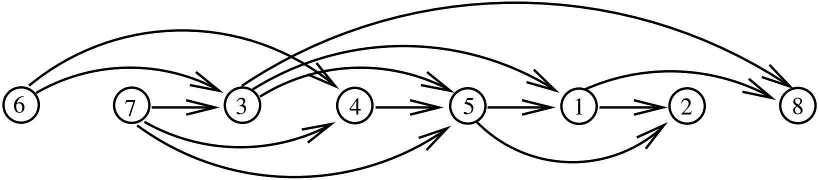
i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
		$d(v)$							
-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
3	3	**1**	2			**1**			**1**
4	4	1	2			**0**			1
5	5	**0**	**1**						1
6	1		**0**						**0**
7	2								
8	8								



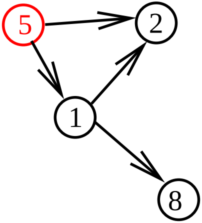
Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu



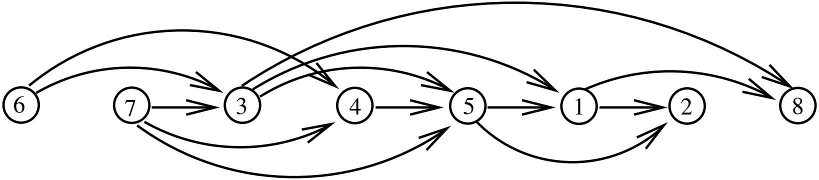
i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
		$d(v)$							
-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
3	3	**1**	2			**1**			**1**
4	4	1	2			**0**			1
5	5	**0**	**1**						1
6	1		**0**						**0**
7	2								
8	8								



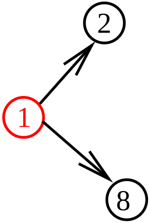
Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu



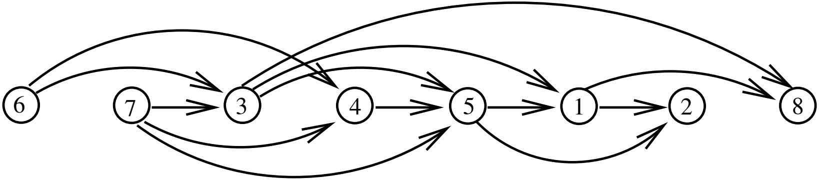
i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
					$d(v)$				
-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
3	3	**1**	2			**1**			**1**
4	4	1	2			**0**			1
5	5	**0**	**1**						1
6	1		**0**						**0**
7	2								
8	8								



Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu

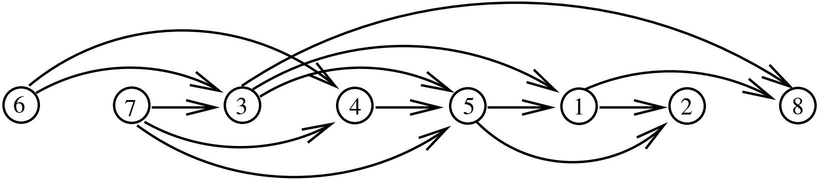


i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
					$d(v)$				
-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
3	3	**1**	2			**1**			**1**
4	4	1	2			**0**			1
5	5	**0**	**1**						1
6	1		**0**						**0**
7	2								
8	8								



Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu

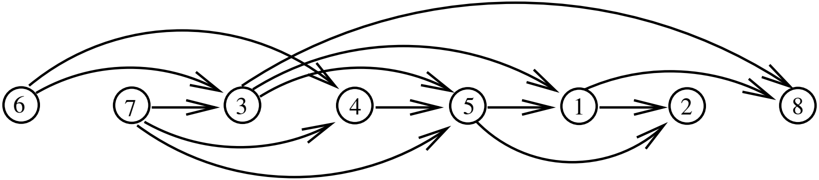
	i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
			$d(v)$							
	-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
2	1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
	2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
	3	3	**1**	2			**1**			**1**
	4	4	1	2			**0**			1
	5	5	**0**	**1**						1
	6	1		**0**						**0**
8	7	2								
	8	8								



Monotónne očíslovanie vrcholov acyklického digrafu

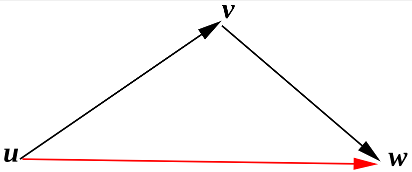
i	$v(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
					$d(v)$				
-	-	2	2	2	2	3	0	0	2
1	6	2	2	**1**	**1**			0	2
2	7	2	2	**0**	**0**	**2**			2
3	3	**1**	2			**1**			**1**
4	4	1	2			**0**			1
5	5	**0**	**1**						1
6	1		**0**						**0**
7	2								
8	8								

8



Definícia

Hovoríme, že acyklický digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je **tranzitívny**, *ak pre ľubovoľné dve orientované hrany $(u, v) \in H$, $(v, w) \in H$ existuje orientovaná hrana $(u, w) \in H$.*



V tranzitívnom digrafe ku každej dvojici hrán (u, v), (v, w) existuje aj "priama" hrana (v, w).

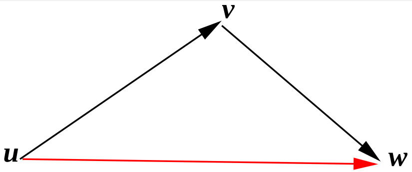
Veta

Acyklický digraf $\overrightarrow{G}$ je tranzitívny práve vtedy, keď ku každej orientovanej u–v ceste v $\overrightarrow{G}$ existuje orientovaná hrana $(u, v) \in H$.

Tranzitívny digraf

Definícia

Hovoríme, že acyklický digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je* **tranzitívny**, *ak pre ľubovoľné dve orientované hrany* $(u, v) \in H$, $(v, w) \in H$ *existuje orientovaná hrana* $(u, w) \in H$.



V tranzitívnom digrafe ku každej dvojici hrán (u, v), (v, w) existuje aj "priama" hrana (v, w).

Veta

Acyklický digraf $\overrightarrow{G}$ *je tranzitívny práve vtedy, keď ku každej orientovanej* u–v *ceste v* $\overrightarrow{G}$ *existuje orientovaná hrana* $(u, v) \in H$.

Definícia

Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}_T$ je **tranzitívny uzáver** *digrafu $\overrightarrow{G}$, ak $\overrightarrow{G}_T$ je minimálny tranzitívny digraf obsahujúci ako podgraf digraf $\overrightarrow{G}$.*

Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}_R$ je **tranzitívna redukcia** *digrafu $\overrightarrow{G}$, ak $\overrightarrow{G}_R$ je minimálny faktorový podgraf digrafu $\overrightarrow{G}$ s rovnakou dosiahnuteľnosťou vrcholov ako digraf $\overrightarrow{G}$.*

a) Digraf $\overrightarrow{G}$. b) Tranzitívny uzáver $\overrightarrow{G}_T$ digrafu $\overrightarrow{G}$.
c) Tranzitívna redukcia $\overrightarrow{G}_R$ digrafu $\overrightarrow{G}$.

Definícia

Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}_T$ *je* **tranzitívny uzáver** *digrafu* $\overrightarrow{G}$, *ak* $\overrightarrow{G}_T$ *je minimálny tranzitívny digraf obsahujúci ako podgraf digraf* $\overrightarrow{G}$.

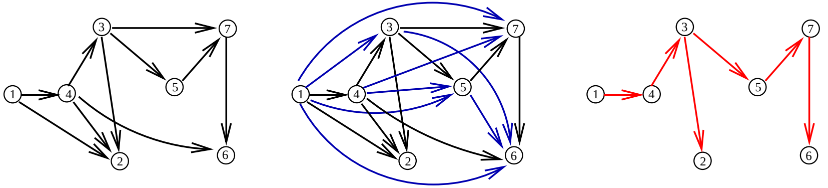
Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}_R$ *je* **tranzitívna redukcia** *digrafu* $\overrightarrow{G}$, *ak* $\overrightarrow{G}_R$ *je minimálny faktorový podgraf digrafu* $\overrightarrow{G}$ *s rovnakou dosiahnuteľnosťou vrcholov ako digraf* $\overrightarrow{G}$.

a) Digraf $\overrightarrow{G}$. b) Tranzitívny uzáver $\overrightarrow{G}_T$ digrafu $\overrightarrow{G}$.
c) Tranzitívna redukcia $\overrightarrow{G}_R$ digrafu $\overrightarrow{G}$.

Definícia

Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}_T$ je **tranzitívny uzáver** *digrafu $\overrightarrow{G}$, ak $\overrightarrow{G}_T$ je minimálny tranzitívny digraf obsahujúci ako podgraf digraf $\overrightarrow{G}$.*

Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}_R$ je **tranzitívna redukcia** *digrafu $\overrightarrow{G}$, ak $\overrightarrow{G}_R$ je minimálny faktorový podgraf digrafu $\overrightarrow{G}$ s rovnakou dosiahnuteľnosťou vrcholov ako digraf $\overrightarrow{G}$.*

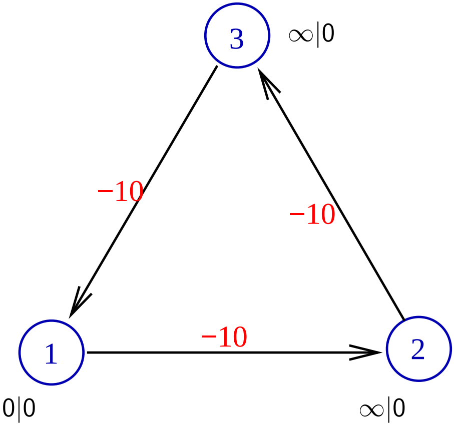


a) b) c)

a) Digraf $\overrightarrow{G}$. b) Tranzitívny uzáver $\overrightarrow{G}_T$ digrafu $\overrightarrow{G}$.
c) Tranzitívna redukcia $\overrightarrow{G}_R$ digrafu $\overrightarrow{G}$.

Problém najkratšej cesty v prípade všeobecných cien hrán

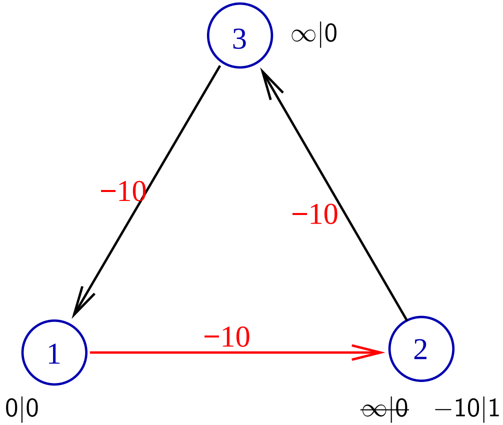
Ak v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, h, c)$ existuje orientovaný cyklus zápornej ceny, algoritmy na hľadanie najkratšej cesty zlyhávajú.



V acyklických digrafoch je však problém najkratšej cesty polynomiálne riešiteľný aj v prípade všeobecnej ceny hrán.

Problém najkratšej cesty v prípade všeobecných cien hrán

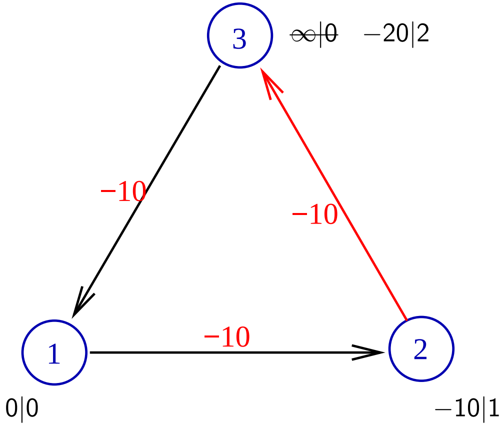
Ak v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, h, c)$ existuje orientovaný cyklus zápornej ceny, algoritmy na hľadanie najkratšej cesty zlyhávajú.



V acyklických digrafoch je však problém najkratšej cesty polynomiálne riešiteľný aj v prípade všeobecnej ceny hrán.

Problém najkratšej cesty v prípade všeobecných cien hrán

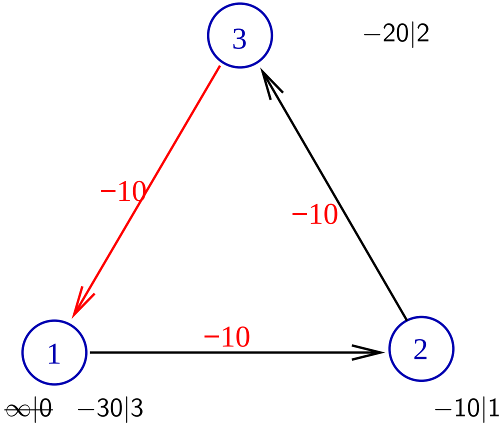
Ak v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, h, c)$ existuje orientovaný cyklus zápornej ceny, algoritmy na hľadanie najkratšej cesty zlyhávajú.



V acyklických digrafoch je však problém najkratšej cesty polynomiálne riešiteľný aj v prípade všeobecnej ceny hrán.

Problém najkratšej cesty v prípade všeobecných cien hrán

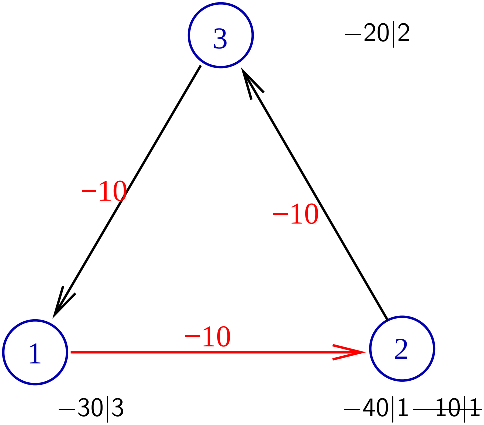
Ak v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, h, c)$ existuje orientovaný cyklus zápornej ceny, algoritmy na hľadanie najkratšej cesty zlyhávajú.



V acyklických digrafoch je však problém najkratšej cesty polynomiálne riešiteľný aj v prípade všeobecnej ceny hrán.

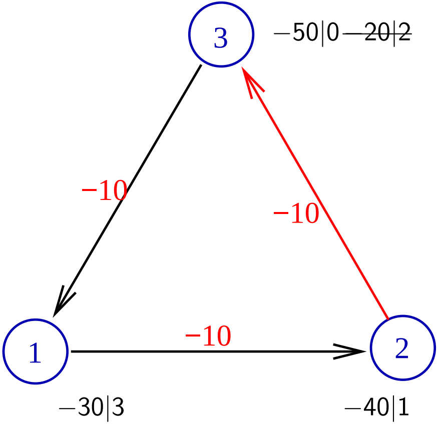
Problém najkratšej cesty v prípade všeobecných cien hrán

Ak v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, h, c)$ existuje orientovaný cyklus zápornej ceny, algoritmy na hľadanie najkratšej cesty zlyhávajú.



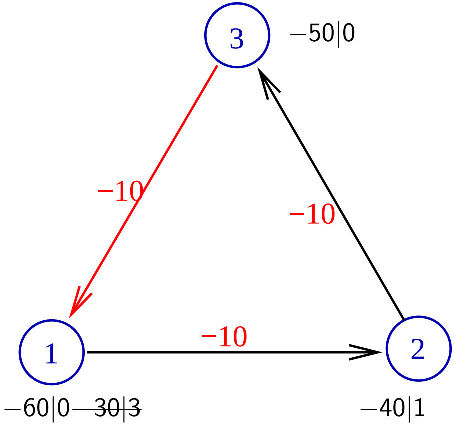
V acyklických digrafoch je však problém najkratšej cesty polynomiálne riešiteľný aj v prípade všeobecnej ceny hrán.

Ak v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, h, c)$ existuje orientovaný cyklus zápornej ceny, algoritmy na hľadanie najkratšej cesty zlyhávajú.



V acyklických digrafoch je však problém najkratšej cesty polynomiálne riešiteľný aj v prípade všeobecnej ceny hrán.

Ak v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, h, c)$ existuje orientovaný cyklus zápornej ceny, algoritmy na hľadanie najkratšej cesty zlyhávajú.



V acyklických digrafoch je však problém najkratšej cesty polynomiálne riešiteľný aj v prípade všeobecnej ceny hrán.

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najkratších orientovaných u–v **ciest** *z pevného vrchola* $u \in V$ *do všetkých dosiahnuteľných vrcholov* $v \in V$ *v hranovo ohodnotenom acyklickom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *s všeobecnou cenou hrany* $c(h)$.

- **Krok 1.** *Monotónne očísluj vrcholy digrafu* $\overrightarrow{G}$, *nech* $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ *je postupnosť vrcholov digrafu* $\overrightarrow{G}$ *zoradená podľa monotónneho očíslovania. Zisti index vrchola* u *v postupnosti* $\mathcal{P}$. *Nech* i *je index taký, že* $u = v_i$.
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol* $v \in V$ *priraď značky* $t(v)$, $x(v)$. *Polož* $t(u) := 0$, $t(j) := \infty$ *pre všetky* $j \neq u$, $j \in V$. *Polož* $x(j) := 0$ *pre všetky* $j \in V$.
- **Krok 3.** *Pre všetky vrcholy* w *výstupnej hviezdy vrchola* v_i *také, že* $w \neq v_i$, *urob:*
  Ak $t(w) > t(v_i) + c(v_i, w)$,
  potom $t(w) = t(v_i) + c(v_i, w)$, *a* $x(w) := v_i$.
- **Krok 4.** $i := i + 1$. *Ak* $i = n$ *STOP, inak GOTO Krok 3.*

Najkratšia cesta v acyklickom digrafe

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najkratších orientovaných u–v **ciest** *z pevného vrchola* $u \in V$ *do všetkých dosiahnuteľných vrcholov* $v \in V$ *v hranovo ohodnotenom acyklickom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *s všeobecnou cenou hrany* $c(h)$.

- **Krok 1.** *Monotónne očísluj vrcholy digrafu* $\overrightarrow{G}$, *nech* $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ *je postupnosť vrcholov digrafu* $\overrightarrow{G}$ *zoradená podľa monotónneho očíslovania. Zisti index vrchola* u *v postupnosti* $\mathcal{P}$. *Nech* i *je index taký, že* $u = v_i$.
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol* $v \in V$ *priraď značky* $t(v)$, $x(v)$.
  Polož $t(u) := 0$, $t(j) := \infty$ *pre všetky* $j \neq u$, $j \in V$.
  Polož $x(j) := 0$ *pre všetky* $j \in V$.
- **Krok 3.** *Pre všetky vrcholy* w *výstupnej hviezdy vrchola* v_i *také, že* $w \neq v_i$, *urob:*
  Ak $t(w) > t(v_i) + c(v_i, w)$,
  potom $t(w) = t(v_i) + c(v_i, w)$, *a* $x(w) := v_i$.
- **Krok 4.** $i := i + 1$. *Ak* $i = n$ *STOP, inak GOTO Krok 3.*

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest *z pevného vrchola $u \in V$ do všetkých dosiahnuteľných vrcholov $v \in V$ v hranovo ohodnotenom acyklickom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s všeobecnou cenou hrany $c(h)$.*

- **Krok 1.** *Monotónne očísluj vrcholy digrafu $\overrightarrow{G}$, nech $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ je postupnosť vrcholov digrafu $\overrightarrow{G}$ zoradená podľa monotónneho očíslovania. Zisti index vrchola u v postupnosti $\mathcal{P}$. Nech i je index taký, že $u = v_i$.*
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol $v \in V$ priraď značky $t(v)$, $x(v)$.*

  Polož $t(u) := 0$, $t(j) := \infty$ pre všetky $j \neq u$, $j \in V$.

  Polož $x(j) := 0$ pre všetky $j \in V$.
- **Krok 3.** *Pre všetky vrcholy w výstupnej hviezdy vrchola v_i také, že $w \neq v_i$, urob:*
  Ak $t(w) > t(v_i) + c(v_i, w)$,

  potom $t(w) = t(v_i) + c(v_i, w)$, a $x(w) := v_i$.
- **Krok 4.** *$i := i + 1$. Ak $i = n$ STOP, inak GOTO Krok 3.*

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest *z pevného vrcholu $u \in V$ do všetkých dosiahnuteľných vrcholov $v \in V$ v hranovo ohodnotenom acyklickom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s všeobecnou cenou hrany $c(h)$.*

- **Krok 1.** *Monotónne očísluj vrcholy digrafu $\overrightarrow{G}$, nech $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ je postupnosť vrcholov digrafu $\overrightarrow{G}$ zoradená podľa monotónneho očíslovania. Zisti index vrchola u v postupnosti $\mathcal{P}$. Nech i je index taký, že $u = v_i$.*
- **Krok 2.** *Pre každý vrchol $v \in V$ priraď značky $t(v)$, $x(v)$.*
  Polož $t(u) := 0$, $t(j) := \infty$ pre všetky $j \neq u$, $j \in V$.
  Polož $x(j) := 0$ pre všetky $j \in V$.
- **Krok 3.** *Pre všetky vrcholy w výstupnej hviezdy vrchola v_i také, že $w \neq v_i$, urob:*
  Ak $t(w) > t(v_i) + c(v_i, w)$,
  potom $t(w) = t(v_i) + c(v_i, w)$, a $x(w) := v_i$.
- **Krok 4.** *$i := i + 1$. Ak $i = n$ STOP, inak GOTO Krok 3.*

Najdlhšia cesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *je hranovo ohodnotený digraf,* $u \in V$, $v \in V$.
Najdlhšia orientovaná u–v **cesta** *v digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *je tá orientovaná* u–v *cesta, ktorá má zo všetkých* u–v *ciest najväčšiu dĺžku.*
Analogicky definujeme najdlhšiu cestu v hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$.

Poznámka

- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, *v ktorom je* $c(h) \geq 0$ *pre* $\forall h \in H$, *je polynomiálne riešiteľná.*
- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, *v ktorom cena hrany môže nadobúdať aj záporné hodnoty, je vo všeobocnosti ťažká – nemáme pre ňu polynomiálny algoritmus.*
- *Úloha hľadania najdlhšej cesty v digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *môže byť prevedená na úlohu hľadania nakratšej cesty v digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, \overline{c})$, *kde* $\overline{c}(h) = -c(h)$. *Vo všeobecnom prípade je to ťažká úloha.*

Najdlhšia cesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený digraf, $u \in V$, $v \in V$.

Najdlhšia orientovaná *u–v* **cesta** *v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je tá orientovaná u–v cesta, ktorá má zo všetkých u–v ciest najväčšiu dĺžku.*

Analogicky definujeme najdlhšiu cestu v hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$.

Poznámka

- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, v ktorom je $c(h) \geq 0$ pre $\forall h \in H$, je polynomiálne riešiteľná.*
- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, v ktorom cena hrany môže nadobúdať aj záporné hodnoty, je vo všeobocnosti ťažká – nemáme pre ňu polynomiálny algoritmus.*
- *Úloha hľadania najdlhšej cesty v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ môže byť prevedená na úlohu hľadania nakratšej cesty v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, \overline{c})$, kde $\overline{c}(h) = -c(h)$. Vo všeobecnom prípade je to ťažká úloha.*

Najdlhšia cesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený digraf, $u \in V$, $v \in V$.
Najdlhšia orientovaná *u–v* **cesta** *v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je tá orientovaná u–v cesta, ktorá má zo všetkých u–v ciest najväčšiu dĺžku.*
Analogicky definujeme najdlhšiu cestu v hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$.

Poznámka

- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, v ktorom je $c(h) \geq 0$ pre $\forall h \in H$, je polynomiálne riešiteľná.*
- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, v ktorom cena hrany môže nadobúdať aj záporné hodnoty, je vo všeobocnosti ťažká – nemáme pre ňu polynomiálny algoritmus.*
- *Úloha hľadania najdlhšej cesty v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ môže byť prevedená na úlohu hľadania nakratšej cesty v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, \overline{c})$, kde $\overline{c}(h) = -c(h)$. Vo všeobecnom prípade je to ťažká úloha.*

Najdlhšia cesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený digraf, $u \in V$, $v \in V$.
Najdlhšia orientovaná *u–v* **cesta** *v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je tá orientovaná u–v cesta, ktorá má zo všetkých u–v ciest najväčšiu dĺžku.*
Analogicky definujeme najdlhšiu cestu v hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c)$.

Poznámka

- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, v ktorom je $c(h) \geq 0$ pre $\forall h \in H$, je polynomiálne riešiteľná.*
- *Úloha hľadania najkratšej cesty v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, v ktorom cena hrany môže nadobúdať aj záporné hodnoty, je vo všeobocnosti ťažká – nemáme pre ňu polynomiálny algoritmus.*
- *Úloha hľadania najdlhšej cesty v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ môže byť prevedená na úlohu hľadania nakratšej cesty v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, \overline{c})$, kde $\overline{c}(h) = -c(h)$. Vo všeobecnom prípade je to ťažká úloha.*

Projekt – Metódy časového plánovania

- Projekt sa skladá z elementárnych činností
- Elementárna činnosť – je činnosť, ktorú z prijatého rozlišovacieho hľadiska považujeme za nedeliteľnú.
- Pre každú elementárnu činnosť je daný čas vykonávania, ktorý je nemenný. Jednotlivé elementárne činnosti však môžu mať vo všeobecnosti rôzne časy vykonávania.
- Niektoré elementárne činnosti sa môžu vykonávať súčasne, avšak niektoré činnosti môžu začať až po ukončení iných činností.

Definícia

Budeme hovoriť, že činnosť A **predchádza** *činnosti B a písať $A \prec B$, ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.*
Ak $A \prec B$, budeme tiež hovoriť že činnosť A je **predchodca** *činnosti B alebo činnosť B je* **následník** *činnosti A.*
Vzťah $A \prec B$ je binárnou reláciou na množine všetkých elementárnych činností.
Budeme ju volať **precedenčná relácia** *alebo* **relácia precedencie.**

Projekt – Metódy časového plánovania

- Projekt sa skladá z elementárnych činností
- Elementárna činnosť – je činnosť, ktorú z prijatého rozlišovacieho hľadiska považujeme za nedeliteľnú.
- Pre každú elementárnu činnosť je daný čas vykonávania, ktorý je nemenný. Jednotlivé elementárne činnosti však môžu mať vo všeobecnosti rôzne časy vykonávania.
- Niektoré elementárne činnosti sa môžu vykonávať súčasne, avšak niektoré činnosti môžu začať až po ukončení iných činností.

Definícia

Budeme hovoriť, že činnosť A **predchádza** *činnosti B a písať $A \prec B$, ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.*
Ak $A \prec B$, budeme tiež hovoriť že činnosť A je **predchodca** *činnosti B alebo činnosť B je* **následník** *činnosti A.*
Vzťah $A \prec B$ je binárnou reláciou na množine všetkých elementárnych činností.
Budeme ju volať **precedenčná relácia** *alebo* **relácia precedencie.**

Projekt – Metódy časového plánovania

- Projekt sa skladá z elementárnych činností
- Elementárna činnosť – je činnosť, ktorú z prijatého rozlišovacieho hľadiska považujeme za nedeliteľnú.
- Pre každú elementárnu činnosť je daný čas vykonávania, ktorý je nemenný. Jednotlivé elementárne činnosti však môžu mať vo všeobecnosti rôzne časy vykonávania.
- Niektoré elementárne činnosti sa môžu vykonávať súčasne, avšak niektoré činnosti môžu začať až po ukončení iných činností.

Definícia

Budeme hovoriť, že činnosť A **predchádza** *činnosti B a písať $A \prec B$, ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.*
Ak $A \prec B$, budeme tiež hovoriť že činnosť A je **predchodca** *činnosti B alebo činnosť B je* **následník** *činnosti A.*
Vzťah $A \prec B$ je binárnou reláciou na množine všetkých elementárnych činností.
Budeme ju volať **precedenčná relácia** *alebo* **relácia precedencie.**

Projekt – Metódy časového plánovania

- Projekt sa skladá z elementárnych činností
- Elementárna činnosť – je činnosť, ktorú z prijatého rozlišovacieho hľadiska považujeme za nedeliteľnú.
- Pre každú elementárnu činnosť je daný čas vykonávania, ktorý je nemenný. Jednotlivé elementárne činnosti však môžu mať vo všeobecnosti rôzne časy vykonávania.
- Niektoré elementárne činnosti sa môžu vykonávať súčasne, avšak niektoré činnosti môžu začať až po ukončení iných činností.

Definícia

Budeme hovoriť, že činnosť A **predchádza** *činnosti B a písať $A \prec B$, ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.*
Ak $A \prec B$, budeme tiež hovoriť že činnosť A je **predchodca** *činnosti B alebo činnosť B je* **následník** *činnosti A.*
Vzťah $A \prec B$ je binárnou reláciou na množine všetkých elementárnych činností.
Budeme ju volať **precedenčná relácia** *alebo* **relácia precedencie.**

Projekt – Metódy časového plánovania

- Projekt sa skladá z elementárnych činností
- Elementárna činnosť – je činnosť, ktorú z prijatého rozlišovacieho hľadiska považujeme za nedeliteľnú.
- Pre každú elementárnu činnosť je daný čas vykonávania, ktorý je nemenný. Jednotlivé elementárne činnosti však môžu mať vo všeobecnosti rôzne časy vykonávania.
- Niektoré elementárne činnosti sa môžu vykonávať súčasne, avšak niektoré činnosti môžu začať až po ukončení iných činností.

Definícia

Budeme hovoriť, že činnosť A **predchádza** *činnosti B a písať $A \prec B$, ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.*
Ak $A \prec B$, budeme tiež hovoriť že činnosť A je **predchodca** *činnosti B alebo činnosť B je* **následník** *činnosti A.*
Vzťah $A \prec B$ je binárnou reláciou na množine všetkých elementárnych činností.
Budeme ju volať **precedenčná relácia** *alebo* **relácia precedencie.**

Poznámka

Relácia precedencie $\prec$ je **tranzitívna**, *t. j. platí:*

$$\text{Ak } A \prec B,\ B \prec C, \text{ potom aj } A \prec C.$$

Ak elementárna činnosť B musí čakať na skončenie činnosti A a činnosť C musí čakať na skončenie činnosti B, tým skôr musí činnosť C čakať na ukončenie činnosti A.

Relácia precedencie $\prec$ je **antireflexívna**, *t. j.:*

$$\text{Pre žiadne } A \in \mathcal{E} \text{ neplatí } A \prec A.$$

V opačnom prípade by začiatok činnosti A musel čakať na jej vlastný koniec, čo je technologický nezmysel.
Dôsledok: Z toho ďalej vyplýva, že neexistuje postupnosť činností $A_1, A_2, \ldots, A_n$ taká, že

$$A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_n \prec A_1,$$

lebo potom by z tranzitivity vyplývalo $A_1 \prec A_1$.

Poznámka

Relácia precedencie $\prec$ je **tranzitívna***, t. j. platí:*

$$\text{Ak } A \prec B,\ B \prec C, \text{ potom aj } A \prec C.$$

Ak elementárna činnosť B musí čakať na skončenie činnosti A a činnosť C musí čakať na skončenie činnosti B, tým skôr musí činnosť C čakať na ukončenie činnosti A.

Relácia precedencie $\prec$ je **antireflexívna***, t. j.:*

$$\text{Pre žiadne } A \in \mathcal{E} \text{ neplatí } A \prec A.$$

V opačnom prípade by začiatok činnosti A musel čakať na jej vlastný koniec, čo je technologický nezmysel.
Dôsledok: Z toho ďalej vyplýva, že neexistuje postupnosť činností $A_1, A_2, \dots, A_n$ taká, že

$$A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_n \prec A_1,$$

lebo potom by z tranzitivity vyplývalo $A_1 \prec A_1$.

Bezprostredná precedencia. Úloha časového plánovania.

Definícia

Hovoríme, že
činnosť A **bezprostredne predchádza** *činnosti B a píšeme $A \lessdot B$,*
ak $A \prec B$ a neexistuje činnosť C taká, že $A \prec C$ a súčasne $C \prec B$.

Ak $A \lessdot B$ budeme tiež hovoriť že
činnosť A je **bezprostredný predchodca** *činnosti B,*
alebo
činnosť B je **bezprostredný následník** *činnosti A.*

Definícia

Úloha časového plánovania *$\mathcal{U}$ je daná množinou elementárnych činností $\mathcal{E}$, precedenčnou reláciou $\prec$ na množine $\mathcal{E}$ a reálnou funkciou $p : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ priraďujúcou každej činnosti $A \in \mathcal{E}$ jej trvanie $p(A)$ (p – processing time).*

Bezprostredná precedencia. Úloha časového plánovania.

Definícia

Hovoríme, že
činnosť A **bezprostredne predchádza** *činnosti B a píšeme $A \prec\!\!\prec B$,*
ak $A \prec B$ a neexistuje činnosť C taká, že $A \prec C$ a súčasne $C \prec B$.

Ak $A \prec\!\!\prec B$ budeme tiež hovoriť že
činnosť A je **bezprostredný predchodca** *činnosti B,*
alebo
činnosť B je **bezprostredný následník** *činnosti A.*

Definícia

Úloha časového plánovania *$\mathcal{U}$ je daná množinou elementárnych činností $\mathcal{E}$, precedenčnou reláciou $\prec$ na množine $\mathcal{E}$ a reálnou funkciou $p : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ priraďujúcou každej činnosti $A \in \mathcal{E}$ jej trvanie $p(A)$ (p – processing time).*

Definícia

Digraf precedencie $\prec$ *alebo* **precedenčný digraf** *pre príslušnú úlohu* $\mathcal{U}$ *časového plánovania je vrcholovo ohodnotený digraf*

$$\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\prec} = (V, H, p),$$

ktorého množinou vrcholov je množina všetkých elementárnych činností, ohodnotenie $p(v) > 0$ *vrchola* $v \in V$ *je čas spracovania príslušnej elementárnej činnosti a množinou orientovaných hrán je*

$$H_{\prec} = \{(A, B)|\ A, B \in V,\ \ A \prec B\}.$$

Definícia

Digraf bezprostrednej precedencie $\prec\!\!\prec$ *pre príslušnú úlohu* $\mathcal{U}$ *časového plánovania je vrcholovo ohodnotený digraf*

$$\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\prec\!\prec} = (V, H_{\prec\!\prec}, p),$$

ktorého množinou vrcholov je množina všetkých elementárnych činností, ohodnotenie $p(v) > 0$ *vrchola* $v \in V$ *je čas spracovania príslušnej elementárnej činnosti a množinou orientovaných hrán je*

$$H_{\prec\!\prec} = \{(A, B)|\ A, B \in V,\ \ A \prec\!\!\prec B\}.$$

Digraf precedencie

Definícia

Digraf precedencie $\prec$ *alebo* **precedenčný digraf** *pre príslušnú úlohu* $\mathcal{U}$ *časového plánovania je vrcholovo ohodnotený digraf*

$$\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\prec} = (V, H, p),$$

ktorého množinou vrcholov je množina všetkých elementárnych činností, ohodnotenie $p(v) > 0$ *vrchola* $v \in V$ *je čas spracovania príslušnej elementárnej činnosti a množinou orientovaných hrán je*

$$H_{\prec} = \{(A, B) |\ A, B \in V,\ A \prec B\}.$$

Definícia

Digraf bezprostrednej precedencie $\prec\!\!\prec$ *pre príslušnú úlohu* $\mathcal{U}$ *časového plánovania je vrcholovo ohodnotený digraf*

$$\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\prec\!\!\prec} = (V, H_{\prec\!\!\prec}, p),$$

ktorého množinou vrcholov je množina všetkých elementárnych činností, ohodnotenie $p(v) > 0$ *vrchola* $v \in V$ *je čas spracovania príslušnej elementárnej činnosti a množinou orientovaných hrán je*

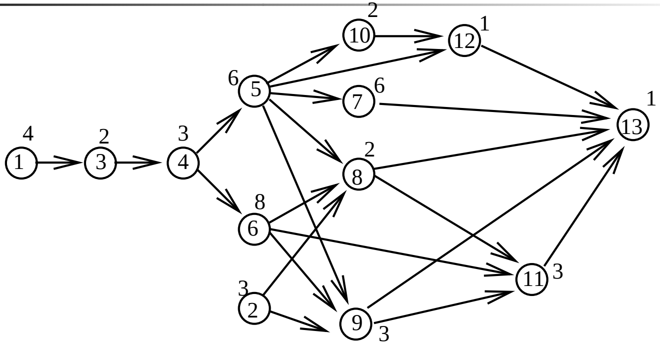
$$H_{\prec\!\!\prec} = \{(A, B) |\ A, B \in V,\ A \prec\!\!\prec B\}.$$

Technologická tabuľka projektu

Technologická tabuľka projektu

Činnosť	Číslo	Trvanie činnosti	Následné činnosti
Výkopy	1	4	3
Inžinierske siete	2	3	8 9
Bednenie základov	3	2	4
Betónovanie základov	4	3	5 6
Obvodové múry	5	6	7 8 9 10 12
Priečky	6	8	8 9 11
Strecha	7	6	13
Elektrické inštalácie	8	2	11 13
Vodovodné inštalácie	9	3	11 13
Vonkajšie omietky	10	2	12
Vnútorné omietky	11	3	13
Okná, dvere	12	1	13
Kolaudácia	13	1	-

Digraf precedencie k technologickej tabuľke



Činnosť	Číslo	Trvanie činnosti	Následné činnosti
Výkopy	1	4	3
Inžinierske siete	2	3	8 9
Bednenie základov	3	2	4
Betónovanie základov	4	3	5 6
Obvodové múry	5	6	7 8 9 10 12
Priečky	6	8	8 9 11
Strecha	7	6	13
Elektrické inštalácie	8	2	11 13
Vodovodné inštalácie	9	3	11 13
Vonkajšie omietky	10	2	12
Vnútorné omietky	11	3	13
Okná, dvere	12	1	13
Kolaudácia	13	1	-

Rozvrh

Vytvoriť **rozvrh** pre danú úlohu $\mathcal{U}$ časového plánovania znamená každej elementárnej činnosti A priradiť časový interval $\langle b_A, c_A)$, $b_A < c_A$ v ktorom sa bude činnosť A vykonávať.

- b_A – začiatok vykonávania činnosti A (b – beginning time)
- c_A – koniec vykonávania činnosti A (c – completion time)

Prípustný rozvrh úlohy $\mathcal{U}$ je taký rozvrh pre úlohu $\mathcal{U}$, kde pre ľubovoľné elementárne činnosti A, B platí:

1. $c_A - b_A = p(A)$
2. ak $A \prec B$, potom $b_A < c_A \leq b_B < c_B$

Poznámka

Všimnime si, že na základe vlastnosti 1. prípustného rozvrhu stačí pre každú elementárnu činnosť A určiť jej začiatok b_A, čas ukončenia sa vypočíta ako $c_A = b_A + p(A)$.

Rozvrh

Vytvoriť **rozvrh** pre danú úlohu $\mathcal{U}$ časového plánovania znamená každej elementárnej činnosti A priradiť časový interval $\langle b_A, c_A)$, $b_A < c_A$ v ktorom sa bude činnosť A vykonávať.

- b_A – začiatok vykonávania činnosti A (b – beginning time)
- c_A – koniec vykonávania činnosti A (c – completion time)

Prípustný rozvrh úlohy $\mathcal{U}$ je taký rozvrh pre úlohu $\mathcal{U}$, kde pre ľubovoľné elementárne činnosti A, B platí:

1. $c_A - b_A = p(A)$
2. ak $A \prec B$, potom $b_A < c_A \leq b_B < c_B$

Poznámka

Všimnime si, že na základe vlastnosti 1. prípustného rozvrhu stačí pre každú elementárnu činnosť A určiť jej začiatok b_A, čas ukončenia sa vypočíta ako $c_A = b_A + p(A)$.

Trvanie projektu

- Prípustných rozvrhov pre daný problém časového plánovania je veľa, z nich by sme chceli vybrať optimálny z nejakého hľadiska.
- Veľmi často sa ako kritérium optimality berie $C_{\max}$ čas ukončenia poslednej činnosti, teda

$$C_{\max} = \max\{c_A \mid A \in \mathcal{E}\},$$

  pričom sa predpokladá, že projekt začína v čase 0.

  Veličinu $C_{\max}$ budeme nazývať **trvanie rozvrhu** (anglicky **makespan**.)
- Základnou otázkou časového plánovania je pre danú úlohu $\mathcal{U}$ určiť prípustný rozvrh taký, aby príslušné trvanie rozvrhu $C_{\max}$ bolo minimálne.
- Označme T minimum zo všetkým možných trvaní prípustných rozvrhov. Veličinu T budeme nazývať **trvanie projektu**.

Najskôr možný začiatok, najneskôr nutný koniec, časová rezerva

- Začiatok vykonávania projektu stanovíme do času 0.
- **Najskôr možný začiatok** $z(A)$ elementárnej činnosti A je najmenší (t. j. prvý) časový okamih meraný od začiatku vykonávania projektu, kedy možno začať činnosť pri dodržaní precedenčnej relácie $\prec$.
- Ak už máme najskôr možný začiatok $z(A)$ pre každú elementárnu činnosť A, **trvanie projektu** T určíme ako

$$T = \max\{z(A) + p(A) \mid A \in \mathcal{E}\}$$

- Ak už poznáme hodnotu trvania projektu T, chceme pre každú elementárnu činnosť A poznať **najneskôr nutný koniec** $k(A)$ činnosti A definovaný ako najväčší (t. j. posledný) časový okamih meraný od od začiatku vykonávania projektu, po ktorý sa ukončenie činnosti A môže oneskoriť bez predĺženia trvania projektu T.
- **Časová rezerva** $R(A)$ činnosti A je

$$R(A) = k(A) - z(A) - p(A).$$

Najskôr možný začiatok, najneskôr nutný koniec, časová rezerva

- Začiatok vykonávania projektu stanovíme do času 0.
- **Najskôr možný začiatok** $z(A)$ elementárnej činnosti A je najmenší (t. j. prvý) časový okamih meraný od začiatku vykonávania projektu, kedy možno začať činnosť pri dodržaní precedenčnej relácie $\prec$.
- Ak už máme najskôr možný začiatok $z(A)$ pre každú elementárnu činnosť A, **trvanie projektu** T určíme ako

$$T = \max\{z(A) + p(A) \mid A \in \mathcal{E}\}$$

- Ak už poznáme hodnotu trvania projektu T, chceme pre každú elementárnu činnosť A poznať **najneskôr nutný koniec** $k(A)$ činnosti A definovaný ako najväčší (t. j. posledný) časový okamih meraný od od začiatku vykonávania projektu, po ktorý sa ukončenie činnosti A môže oneskoriť bez predĺženia trvania projektu T.
- **Časová rezerva** $R(A)$ činnosti A je

$$R(A) = k(A) - z(A) - p(A).$$

Najskôr možný začiatok, najneskôr nutný koniec, časová rezerva

- Začiatok vykonávania projektu stanovíme do času 0.
- **Najskôr možný začiatok** $z(A)$ elementárnej činnosti A je najmenší (t. j. prvý) časový okamih meraný od začiatku vykonávania projektu, kedy možno začať činnosť pri dodržaní precedenčnej relácie $\prec$.
- Ak už máme najskôr možný začiatok $z(A)$ pre každú elementárnu činnosť A, **trvanie projektu** T určíme ako

$$T = \max\{z(A) + p(A) \mid A \in \mathcal{E}\}$$

- Ak už poznáme hodnotu trvania projektu T, chceme pre každú elementárnu činnosť A poznať **najneskôr nutný koniec** $k(A)$ činnosti A definovaný ako najväčší (t. j. posledný) časový okamih meraný od od začiatku vykonávania projektu, po ktorý sa ukončenie činnosti A môže oneskoriť bez predĺženia trvania projektu T.
- **Časová rezerva** $R(A)$ činnosti A je

$$R(A) = k(A) - z(A) - p(A).$$

Najskôr možný začiatok, najneskôr nutný koniec, časová rezerva

- Začiatok vykonávania projektu stanovíme do času 0.
- **Najskôr možný začiatok** $z(A)$ elementárnej činnosti A je najmenší (t. j. prvý) časový okamih meraný od začiatku vykonávania projektu, kedy možno začať činnosť pri dodržaní precedenčnej relácie $\prec$.
- Ak už máme najskôr možný začiatok $z(A)$ pre každú elementárnu činnosť A, **trvanie projektu** T určíme ako

$$T = \max\{z(A) + p(A) \mid A \in \mathcal{E}\}$$

- Ak už poznáme hodnotu trvania projektu T, chceme pre každú elementárnu činnosť A poznať **najneskôr nutný koniec** $k(A)$ činnosti A definovaný ako najväčší (t. j. posledný) časový okamih meraný od od začiatku vykonávania projektu, po ktorý sa ukončenie činnosti A môže oneskoriť bez predĺženia trvania projektu T.
- **Časová rezerva** $R(A)$ činnosti A je

$$R(A) = k(A) - z(A) - p(A).$$

Najskôr možný začiatok, najneskôr nutný koniec, časová rezerva

- Začiatok vykonávania projektu stanovíme do času 0.
- **Najskôr možný začiatok** $z(A)$ elementárnej činnosti A je najmenší (t. j. prvý) časový okamih meraný od začiatku vykonávania projektu, kedy možno začať činnosť pri dodržaní precedenčnej relácie $\prec$.
- Ak už máme najskôr možný začiatok $z(A)$ pre každú elementárnu činnosť A, **trvanie projektu** T určíme ako

$$T = \max\{z(A) + p(A) \mid A \in \mathcal{E}\}$$

- Ak už poznáme hodnotu trvania projektu T, chceme pre každú elementárnu činnosť A poznať **najneskôr nutný koniec** $k(A)$ činnosti A definovaný ako najväčší (t. j. posledný) časový okamih meraný od od začiatku vykonávania projektu, po ktorý sa ukončenie činnosti A môže oneskoriť bez predĺženia trvania projektu T.
- **Časová rezerva** $R(A)$ činnosti A je

$$R(A) = k(A) - z(A) - p(A).$$

- **Kritická činnosť** je taká činnosť A, pre ktorú je $R(A) = 0$.
- **Kritická cesta** v digrafe $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$ je taká orientovaná cesta, ktorá má maximálny súčet ohodnotení vrcholov.

Poznámka

Dá sa ukázať, že

- *Kritické cesty v $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$ obsahujú len kritické činnosti.*
- *Súčet ohodnotení vrcholov každej kritickej cesty v $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$ sa rovná trvaniu projektu T.*

Kritické činnosti, kritická cesta

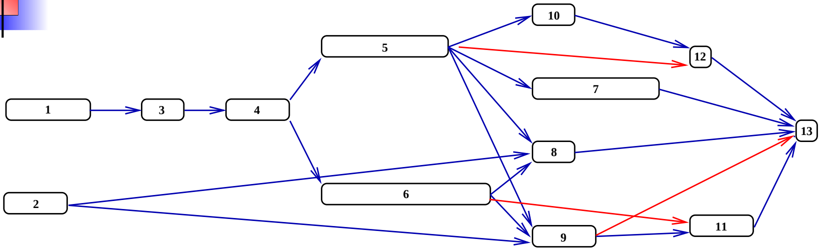
- **Kritická činnosť** je taká činnosť A, pre ktorú je $R(A) = 0$.
- **Kritická cesta** v digrafe $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$ je taká orientovaná cesta, ktorá má maximálny súčet ohodnotení vrcholov.

Poznámka

Dá sa ukázať, že

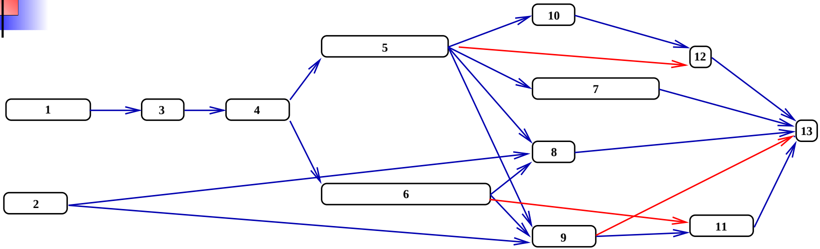
- *Kritické cesty v* $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$ *obsahujú len kritické činnosti.*
- *Súčet ohodnotení vrcholov každej kritickej cesty v* $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$ *sa rovná trvaniu projektu* T.

Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností



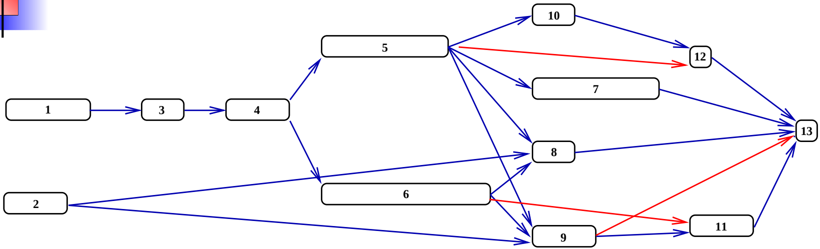
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností

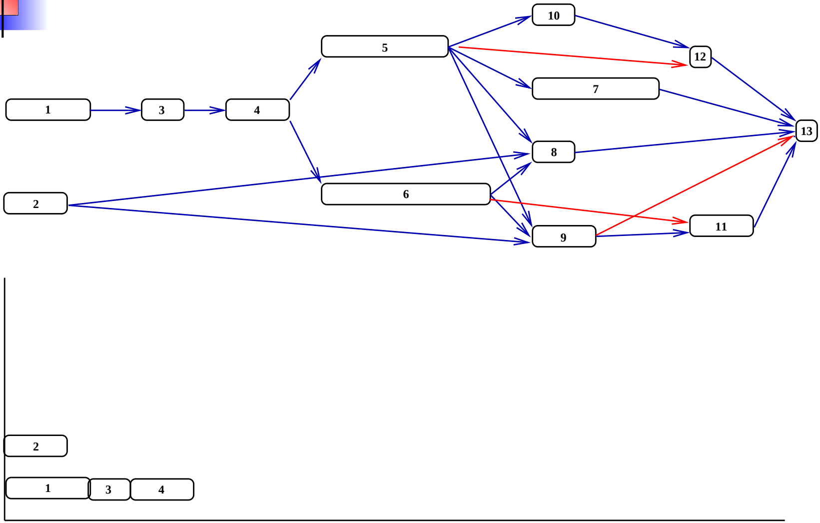


Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

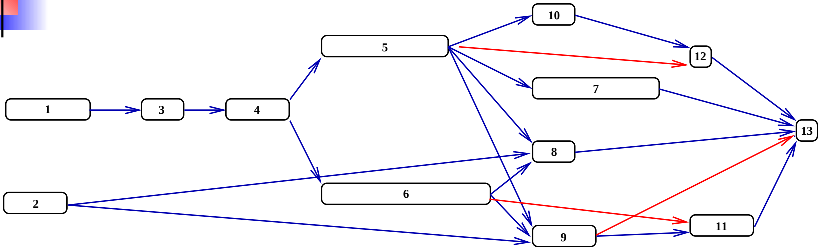
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností

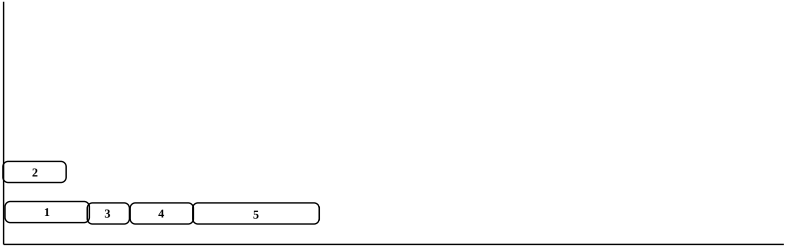


Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.



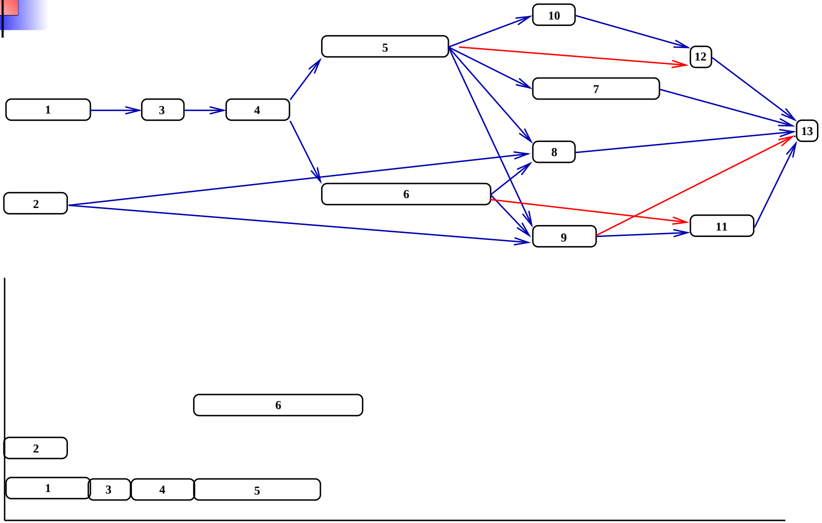
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.





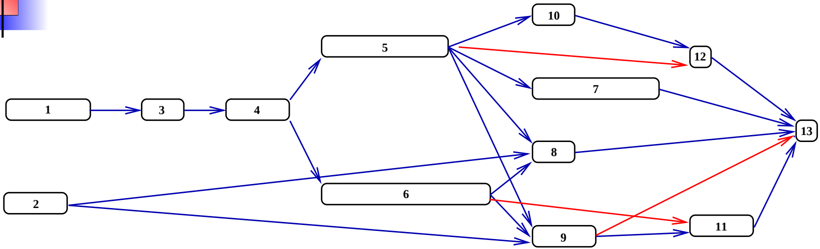
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

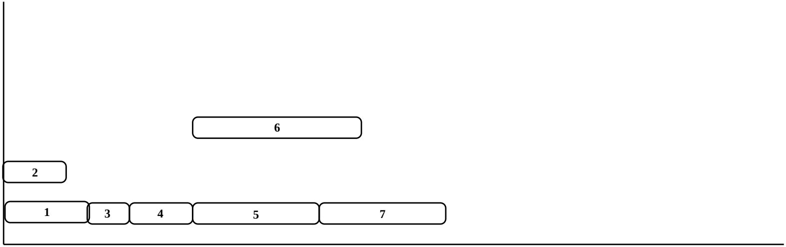
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností



Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

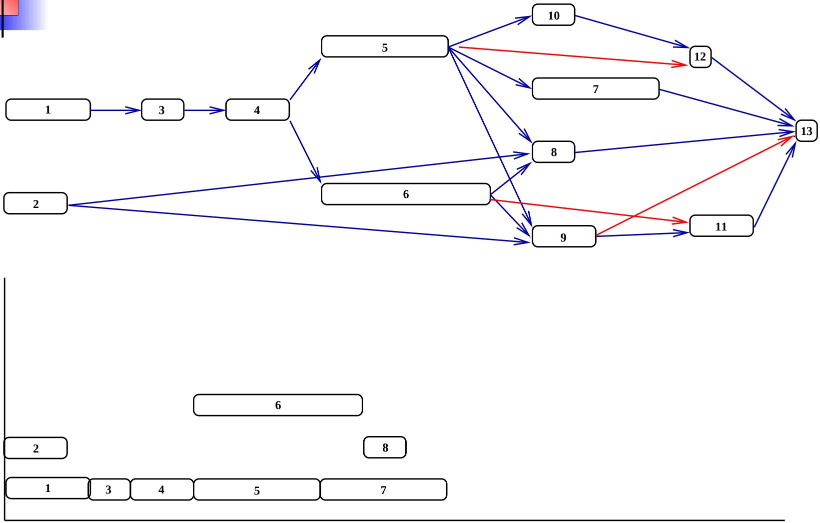
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností





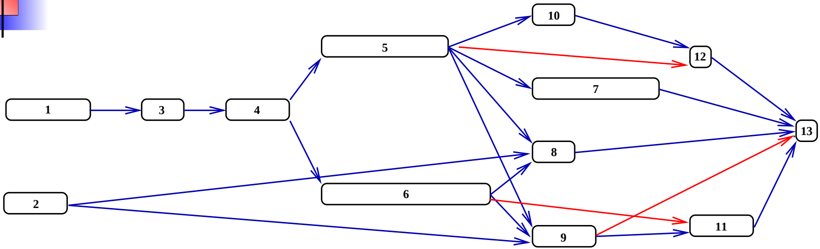
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

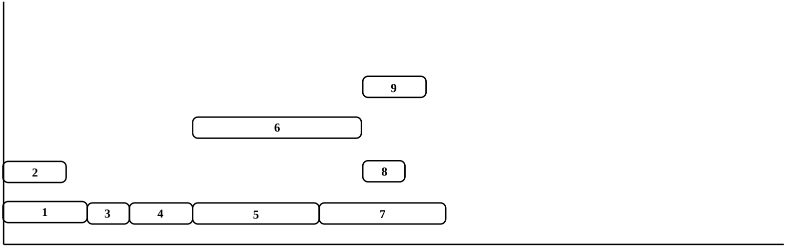
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností



Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

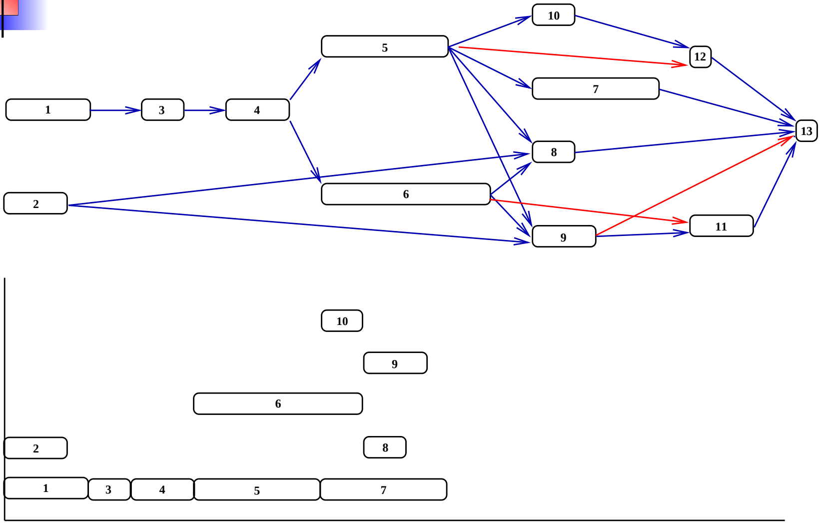
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností





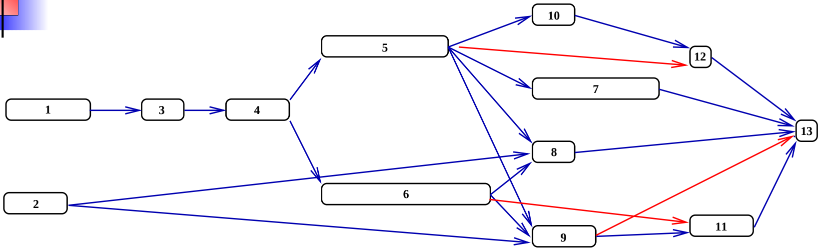
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

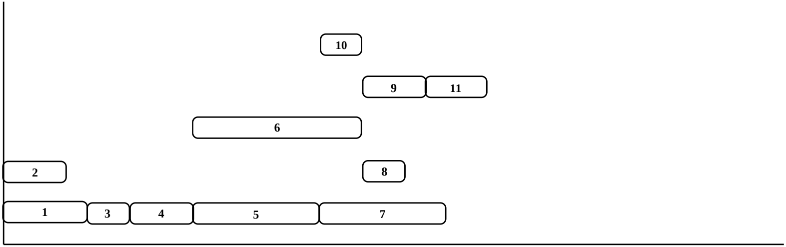
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností



Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

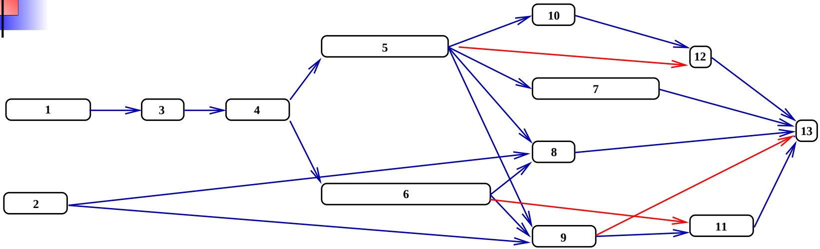
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností

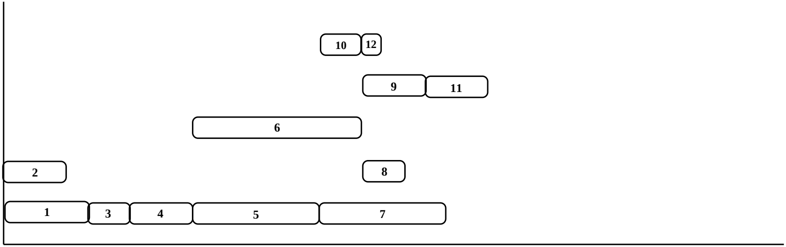




Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

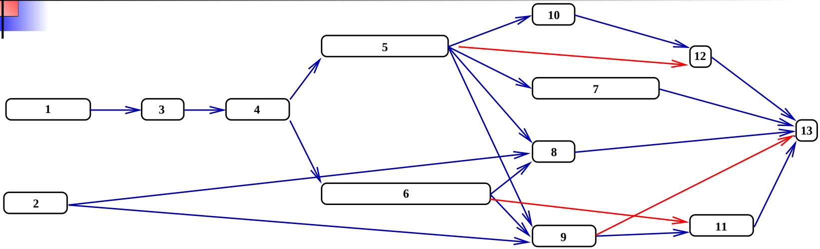
Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností

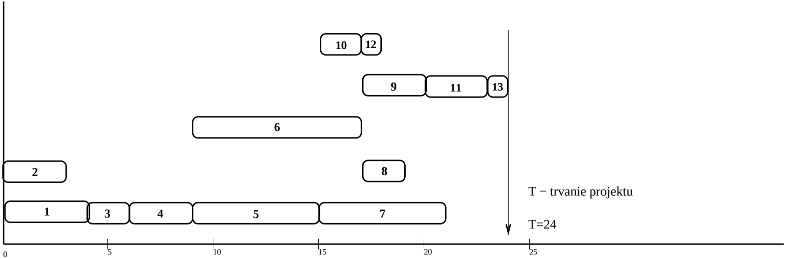




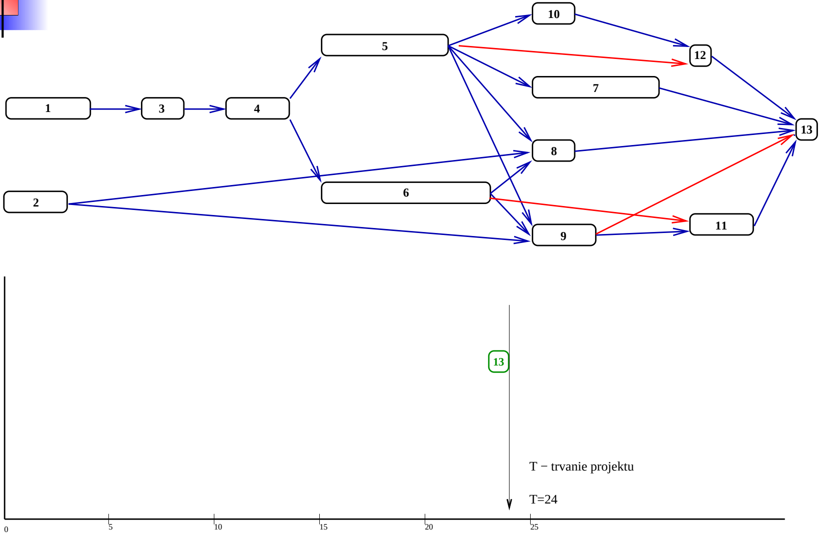
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

Určovanie najskôr možných časových polôh element. činností



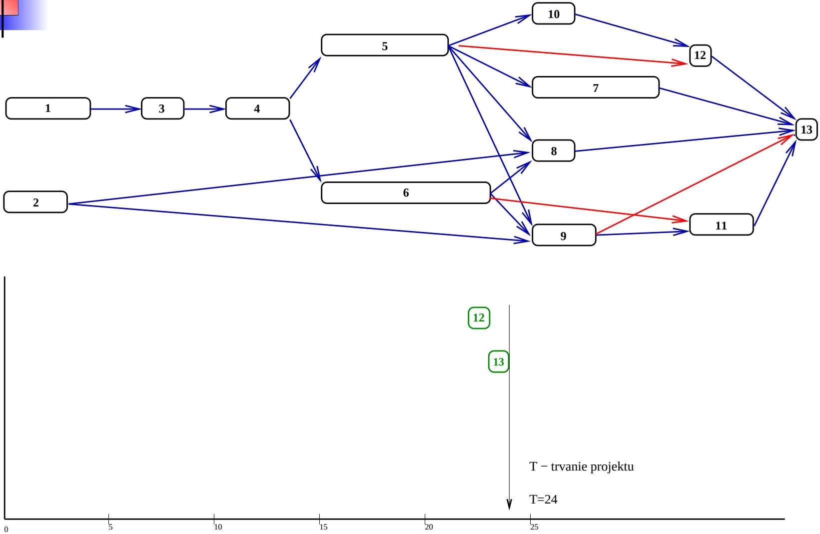


Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

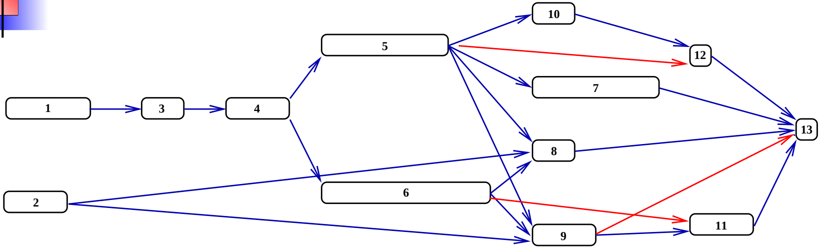


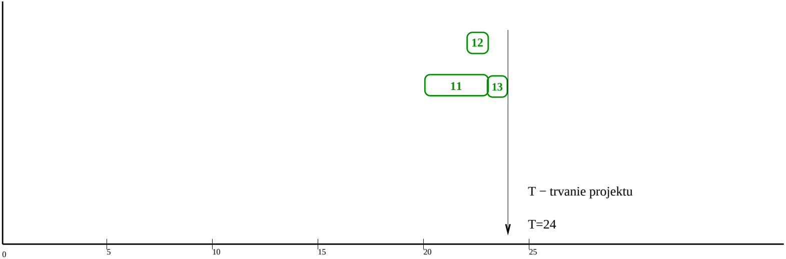
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

Určovanie najneskôr nutných časových polôh element. činností

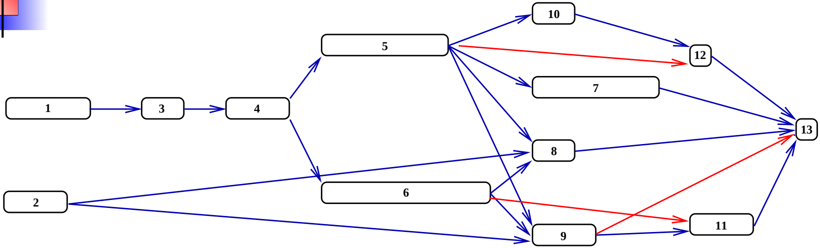


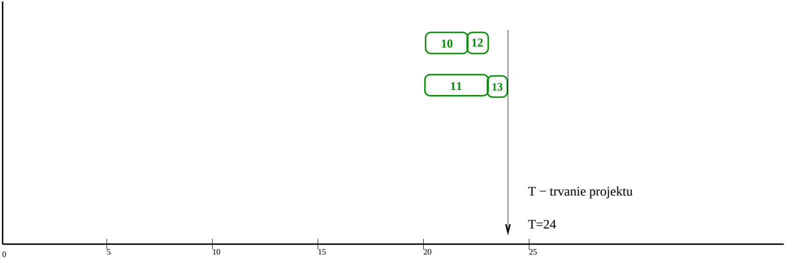
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.



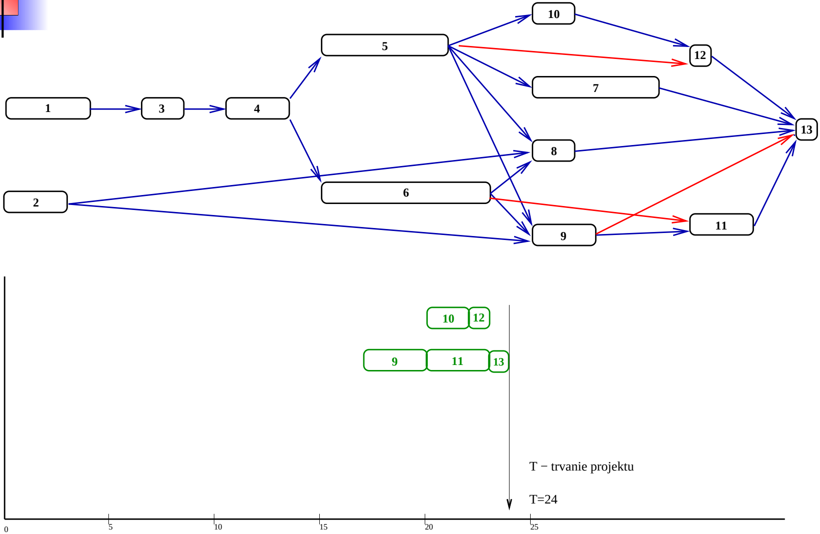


Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.



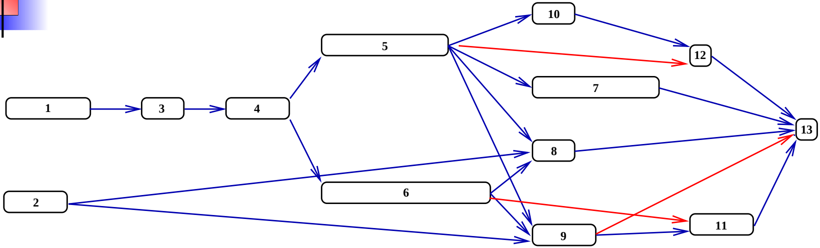


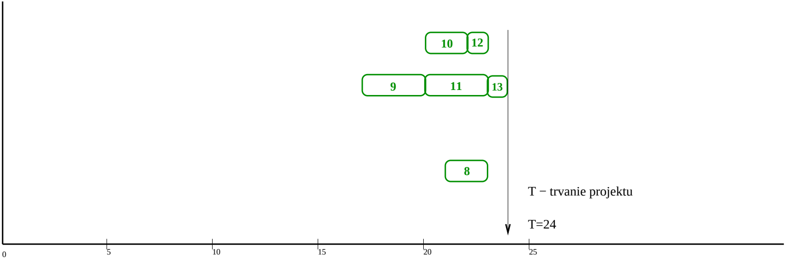
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.



Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

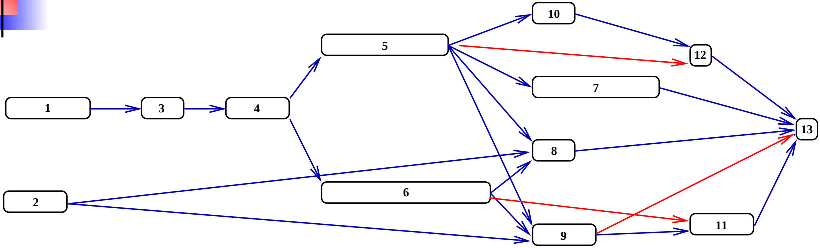
Určovanie najneskôr nutných časových polôh element. činností

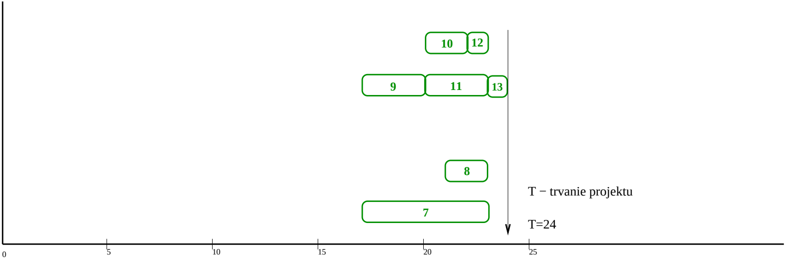




Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

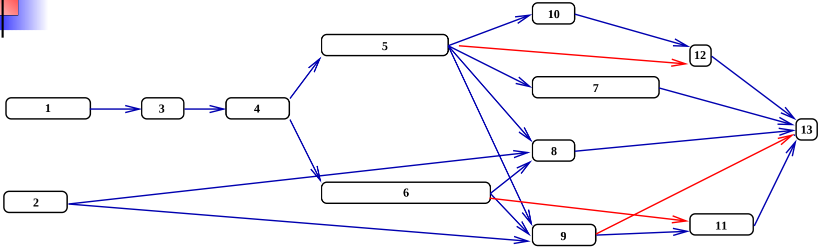
Určovanie najneskôr nutných časových polôh element. činností

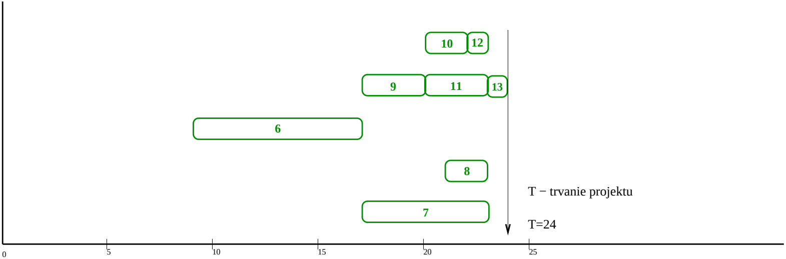




Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

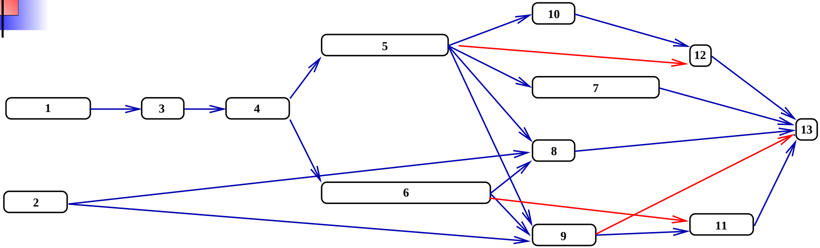
Určovanie najneskôr nutných časových polôh element. činností

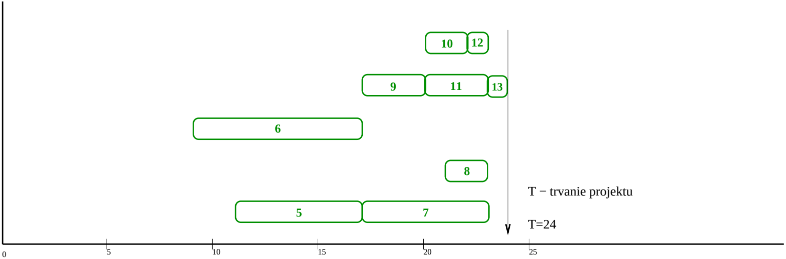




Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

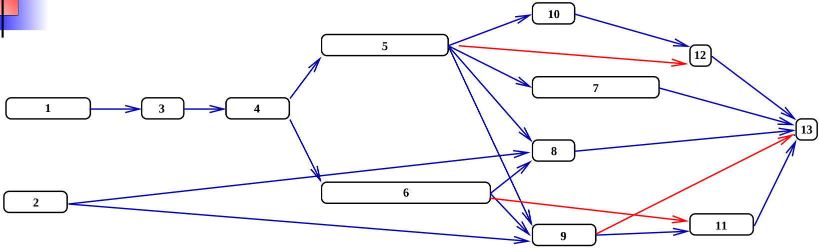
Určovanie najneskôr nutných časových polôh element. činností

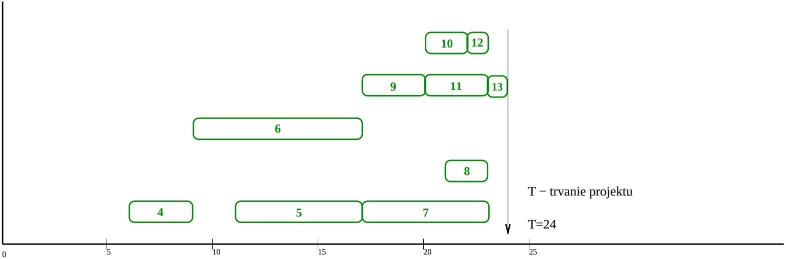




Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

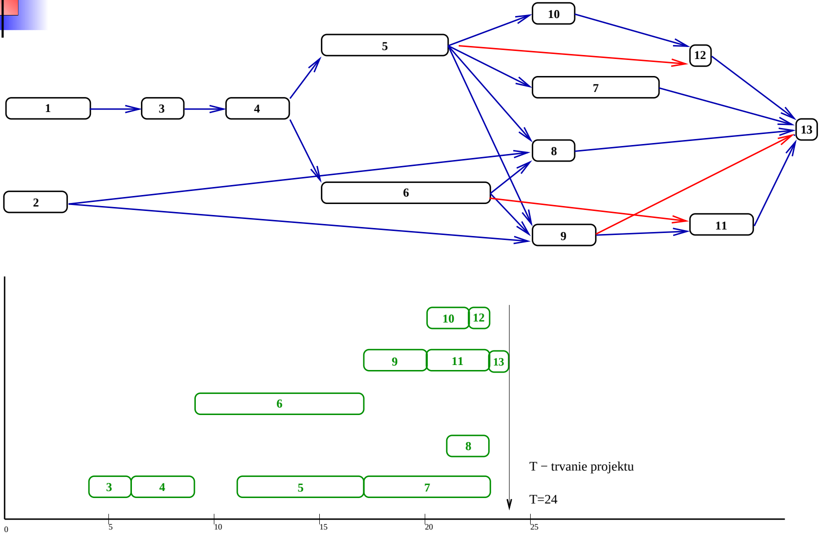
Určovanie najneskôr nutných časových polôh element. činností



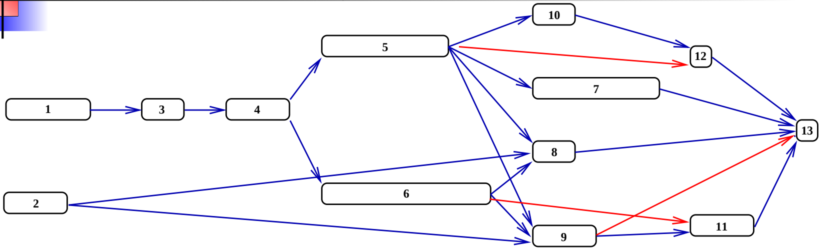


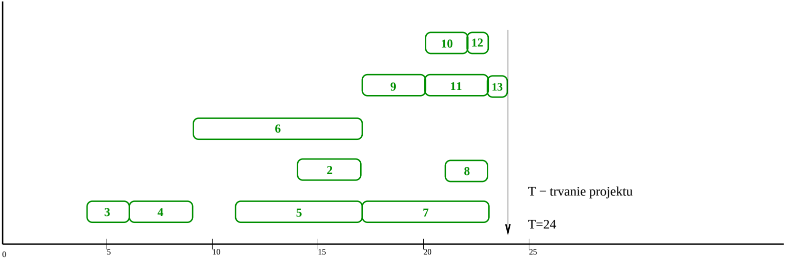
Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

Určovanie najneskôr nutných časových polôh element. činností

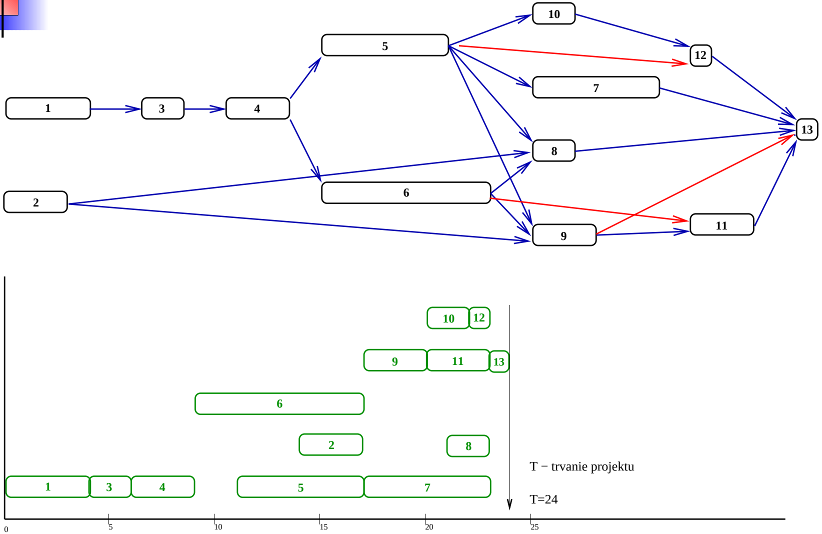


Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.



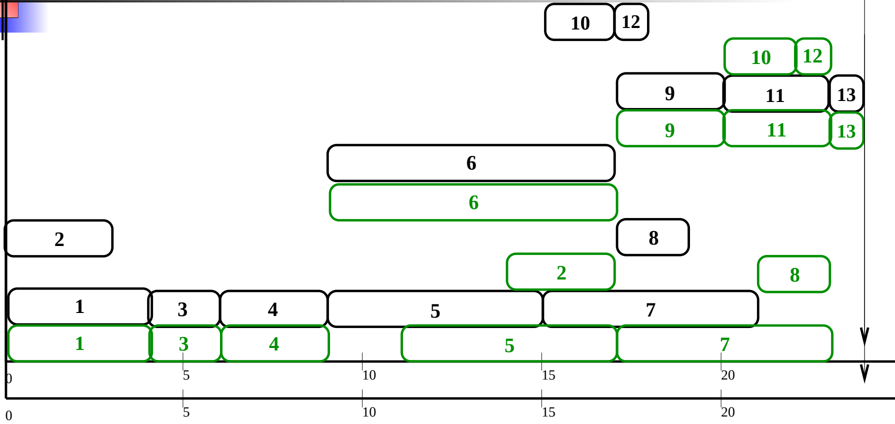


Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.



Hrany vyznačené červenou farbou nie sú hranami bezprostrednej precedencie. Neovplyvňujú výsledok, mierne predlžujú výpočet.

Porovnanie



Čierne – najskôr možné časové polohy činností

Zelené – najneskôr nutné časové polohy činností

Algoritmus

Algoritmus II. na určenie najskôr možných začiatkov $z(v)$ elementárnych činností v digrafe $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll} = (V, H, p)$.

- **Krok 1.** *Vytvor monotónne očíslovanie $v_1, v_2, \dots, v_n$ vrcholov digrafu $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$.*
- **Krok 2.** *Každému vrcholu $v \in V$ priraď dve značky $z(v)$, $x(v)$. Pre každé $v \in V$ inicializačne polož $x(v) := 0$, $z(v) := 0$.*
- **Krok 3.** *Postupne pre $k = 1, 2, \dots, n-1$ urob:*

  Polož $r = v_k$.
  Pre všetky také vrcholy w výstupnej hviezdy vrchola r, že $w \neq r$, urob:
  Ak $z(w) < z(r) + p(r)$,
  potom $z(w) := z(r) + p(r)$ a $x(w) := r$.

- **Krok 4.** *Vypočítaj trvanie projektu*

$$T := \max\{z(w) + p(w) \mid w \in V,\ \mathrm{odeg}(w) = 0\}$$

Algoritmus

Algoritmus II. na určenie najskôr možných začiatkov $z(v)$ **elementárnych činností v digrafe** $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll} = (V, H, p)$**.**

- **Krok 1.** *Vytvor monotónne očíslovanie* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *vrcholov digrafu* $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$.
- **Krok 2.** *Každému vrcholu* $v \in V$ *priraď dve značky* $z(v)$, $x(v)$. *Pre každé* $v \in V$ *inicializačne polož* $x(v) := 0$, $z(v) := 0$.
- **Krok 3.** *Postupne pre* $k = 1, 2, \dots, n-1$ *urob:*

  Polož $r = v_k$.
  Pre všetky také vrcholy w *výstupnej hviezdy vrchola* r, *že* $w \neq r$, *urob:*
  Ak $z(w) < z(r) + p(r)$,
  potom $z(w) := z(r) + p(r)$ *a* $x(w) := r$.

- **Krok 4.** *Vypočítaj trvanie projektu*

$$T := \max\{z(w) + p(w) \mid w \in V,\ \mathrm{odeg}(w) = 0\}$$

Algoritmus

Algoritmus II. na určenie najskôr možných začiatkov $z(v)$ **elementárnych činností v digrafe** $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll} = (V, H, p)$**.**

- **Krok 1.** *Vytvor monotónne očíslovanie* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *vrcholov digrafu* $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$.
- **Krok 2.** *Každému vrcholu* $v \in V$ *priraď dve značky* $z(v)$, $x(v)$. *Pre každé* $v \in V$ *inicializačne polož* $x(v) := 0$, $z(v) := 0$.
- **Krok 3.** *Postupne pre* $k = 1, 2, \dots, n-1$ *urob:*

  Polož $r = v_k$.
  Pre všetky také vrcholy w *výstupnej hviezdy vrchola* r, *že* $w \neq r$, *urob:*
  Ak $z(w) < z(r) + p(r)$,
  potom $z(w) := z(r) + p(r)$ *a* $x(w) := r$.
- **Krok 4.** *Vypočítaj trvanie projektu*

$$T := \max\{z(w) + p(w) \mid w \in V,\ \mathrm{odeg}(w) = 0\}$$

Algoritmus

Algoritmus II. na určenie najskôr možných začiatkov $z(v)$ **elementárnych činností v digrafe** $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll} = (V, H, p)$.

- **Krok 1.** *Vytvor monotónne očíslovanie* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *vrcholov digrafu* $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$.
- **Krok 2.** *Každému vrcholu* $v \in V$ *priraď dve značky* $z(v)$, $x(v)$. *Pre každé* $v \in V$ *inicializačne polož* $x(v) := 0$, $z(v) := 0$.
- **Krok 3.** *Postupne pre* $k = 1, 2, \dots, n-1$ *urob:*

  Polož $r = v_k$.
  Pre všetky také vrcholy w *výstupnej hviezdy vrchola* r, *že* $w \neq r$, *urob:*
  Ak $z(w) < z(r) + p(r)$,
  potom $z(w) := z(r) + p(r)$ *a* $x(w) := r$.

- **Krok 4.** *Vypočítaj trvanie projektu*

$$T := \max\{z(w) + p(w) \mid w \in V,\ \mathrm{odeg}(w) = 0\}$$

Algoritmus

Algoritmus II. na určenie najneskôr nutných koncov $k(v)$ **elementárnych činností v digrafe** $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll} = (V, H, p)$**.**

- **Krok 1.** *Vytvor monotónne očíslovanie* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *vrcholov digrafu* $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$.
- **Krok 2.** *Každému vrcholu* $v \in V$ *priraď dve značky* $k(v)$, $y(v)$.
  Nech T *je trvanie projektu.*
  Pre každé $v \in V$ *inicializačne polož* $k(v) := T$, $y(v) := 0$.
- **Krok 3.** *Postupne pre* $i = n-1, n-2, \dots, 1$ *urob:*

  Polož $r = v_i$.
  Pre všetky vrcholy w *výstupnej hviezdy vrchola* r *také, že* $w \neq r$, *urob:*
  Ak $k(r) > k(w) - p(w)$,
  potom $k(r) := k(w) - p(w)$ *a* $y(r) := w$.

♣

Algoritmus

Algoritmus II. na určenie najneskôr nutných koncov $k(v)$ elementárnych činností v digrafe $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll} = (V, H, p)$.

- **Krok 1.** *Vytvor monotónne očíslovanie $v_1, v_2, \dots, v_n$ vrcholov digrafu $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$.*
- **Krok 2.** *Každému vrcholu $v \in V$ priraď dve značky $k(v)$, $y(v)$.*
  Nech T je trvanie projektu.
  Pre každé $v \in V$ inicializačne polož $k(v) := T$, $y(v) := 0$.
- **Krok 3.** *Postupne pre $i = n-1, n-2, \dots, 1$ urob:*

  Polož $r = v_i$.
  Pre všetky vrcholy w výstupnej hviezdy vrcholа r také, že $w \neq r$, urob:
  Ak $k(r) > k(w) - p(w)$,
  potom $k(r) := k(w) - p(w)$ a $y(r) := w$.

♣

Algoritmus

Algoritmus II. na určenie najneskôr nutných koncov $k(v)$ elementárnych činností v digrafe $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll} = (V, H, p)$.

- **Krok 1.** *Vytvor monotónne očíslovanie $v_1, v_2, \dots, v_n$ vrcholov digrafu $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$.*
- **Krok 2.** *Každému vrcholu $v \in V$ priraď dve značky $k(v)$, $y(v)$.*
  Nech T je trvanie projektu.
  Pre každé $v \in V$ inicializačne polož $k(v) := T$, $y(v) := 0$.
- **Krok 3.** *Postupne pre $i = n-1, n-2, \dots, 1$ urob:*

  Polož $r = v_i$.
  Pre všetky vrcholy w výstupnej hviezdy vrchola r také, že $w \neq r$, urob:
  Ak $k(r) > k(w) - p(w)$,
  potom $k(r) := k(w) - p(w)$ a $y(r) := w$.

♣

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy			Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností															
v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy | Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
												$z(i)$						
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
												$z(i)$						
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy | Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy			Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností															
v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
											$z(i)$							
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy			Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností															
v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výstupné hviezdy			Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností															
v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy			Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností															
v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$z(i)$												
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
												$z(i)$						
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najskôr možných začiatkov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najskôr možných začiatkov činností

v	$p(v)$	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$z(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
												$z(i)$						
			-		-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	3	1	4	0			4										
2	3	8 9	2	3	0								3	3				
3	2	4	3	2	4				6									
4	3	5 6	4	3	6					9	9							
5	6	7 8 9 10 12	5	6	9							15	15	15	15		15	
6	8	8 9 11	6	8	9								17	17		17		
7	6	13	7	6	15													21
8	2	11 13	8	2	17											19		
9	3	11 13	9	3	17											20		
10	2	12	10	2	15												17	
11	3	13	11	3	20													23
12	1	13	12	1	17													
13	1	-	13	1	23													

$$T = \max\{z(v) + p(v) \mid v \in V\} = 24.$$

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy   Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy   Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v) - p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy   Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v)=\min\{k(i)-p(i) \mid i\in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy		Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností																
v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v)=\min\{k(i)-p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy		Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností																
v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v)=\min\{k(i)-p(i) \mid i\in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v)=\min\{k(i)-p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy — Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy   Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

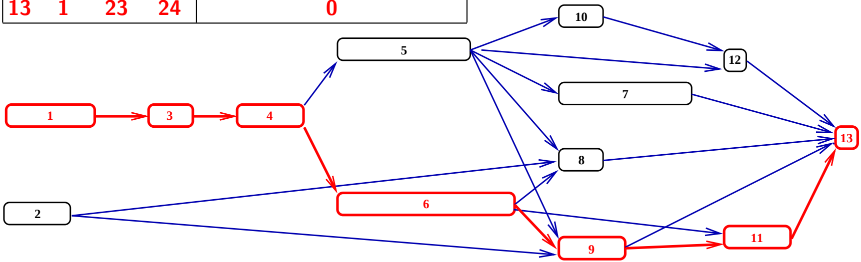
Výpočet najneskôr nutných koncov

Výstupné hviezdy   Tabuľka pre výpočet najneskôr nutných koncov činností

v	$V^+(v)$	v	$p(v)$	$k(v)-p(v)$	$k(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$k(v) = \min\{k(i) - p(i) \mid i \in V^+(v)\}$												
		-		-	-	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
13	-	13	1	23	24													24
12	13	12	1	22	23												23	
11	13	11	3	20	23											23		
10	12	10	2	20	22										22			
9	11 13	9	3	17	20									20				
8	11 13	8	2	18	20								20					
7	13	7	6	17	23							23						
6	8 9 11	6	8	9	17						17							
5	7 8 9 10 12	5	6	11	17					17								
4	5 6	4	3	6	9				9									
3	4	3	2	4	6			6										
2	8 9	2	3	14	17		17											
1	3	1	4	0	4	4												

Kritické činnosti, kritická cesta

v	$p(v)$	$z(v)$	$k(v)$	$R(v) = k(v) - z(v) - p(v)$
1	**4**	**0**	**4**	**0**
2	3	0	17	14
3	**2**	**4**	**6**	**0**
4	**3**	**6**	**9**	**0**
5	6	9	17	2
6	**8**	**9**	**17**	**0**
7	6	15	23	2
8	2	17	20	1
9	**3**	**17**	**20**	**0**
10	2	15	22	3
11	**3**	**20**	**23**	**0**
12	1	17	23	5
13	**1**	**23**	**24**	**0**



Klasická interpretácia metódy CPM

Majme úlohu časového plánovania $\mathcal{U}$ danú množinou elementárnych činností $\mathcal{E}$, precedenčnou reláciou $\prec$ na množine $\mathcal{E}$ a reálnou funkciou $c : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ priraďujúcou každej činnosti $A \in \mathcal{E}$ jej trvanie $p(A)$.

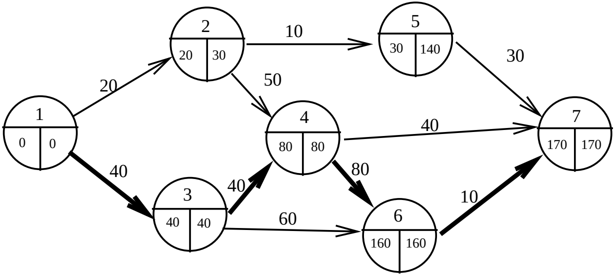
Sieťový digraf je neorientovane súvislý acyklický hranovo ohodnotený digraf $G = (V, H, p)$, obsahujúci práve jeden vrchol z, z ktorého sú všetky ostatné vrcholy dosiahnuteľné – **začiatok vykonávania projektu** a práve jeden vrchol k, ktorý je dosiahnuteľný zo všetkých ostatných vrcholov – **koniec vykonávania projektu**.

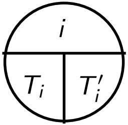
Hrany sieťového digrafu predstavujú elementárne činnosti – každej úlohe $A \in \mathcal{E}$ pridelená práve jedna hrana ohodnotená dĺžkou spracovania $p(A)$ príslušnej činnosti A.

Vrcholy – predstavujú časové začiatky a konce spracovania elementárnych činností.

Klasická interpretácia metódy CPM

Predpokladáme, že $V = \{1, 2, \dots n\}$ a že $z = 1$, $k = n$.





T_i – Najskôr možný začiatok činností vychádzajúcich z vrchola i

T_i' – Najneskôr nutný koniec činností vchádzajúcich do vrchola i

Diagram sieťového digrafu, aký nájdete v mnohých učebniciach.

Ako ho zostrojiť z technologickej tabuľky bez fiktívnych činností s nulovým trvaním, väčšinou autori taktne zamlčia.

Trvanie projektu, kritické činnosti, kritická cesta, časová rezerva

Označme $d_{\max}(x,y)$ dĺžku najdlhšej orientovanej x–y cesty.

Pre každý vrchol i sieťového digrafu vypočítame T_i, t. j. najskôr možný začiatok činností vychádzajúcich z vrchola i, ako

$$T_i = d_{\max}(1,i)$$

a T'_i najneskôr nutný koniec činností vchádzajúcich do vrchola i ako

$$T'_i = T_n - d_{\max}(i,n)$$

Hodnota T trvania projektu je

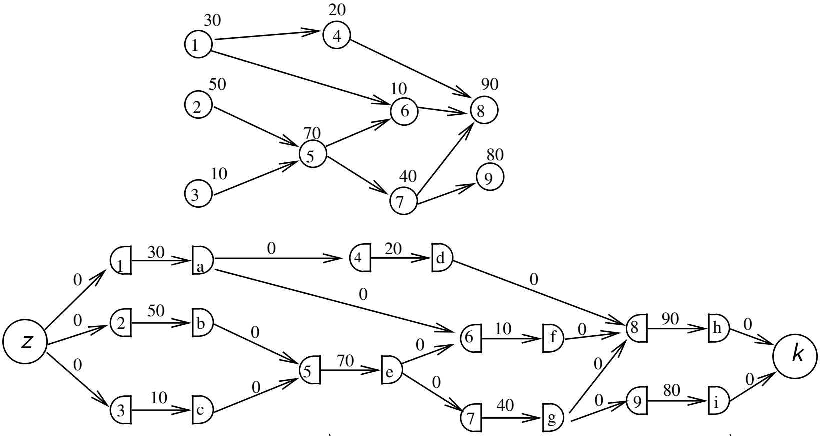
$$T = T_n.$$

Každú orientovanú cestu dĺžky trvania projektu T_n v sieťovom digrafe nazveme **kritickou cestou** (kritických ciest môže existovať aj viac).

Činnosti ležiace na niektorej kritickej ceste sa nazývajú **kritické činnosti**.

Časová rezerva R_i **vo vrchole** i je $R_i = T'_i - T_i$.

Konštrukcia sieťového digrafu



Konštrukcia sieťového digrafu $\overrightarrow{G}_S$ (dole) z precedenčného digrafu $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\ll}$ (hore).

Konštrukcia sieťového digrafu

1. Zostroj graf bezprostrednej precedencie $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$.
2. Hrany digrafu $\overrightarrow{\mathbb{G}}_{\lll}$ prehlás za fiktívne činnosti s trvaním 0.
3. Pridaj dva vrcholy z a k.
4. Pridaj orient. hrany (z, v) pre všetky v také, že $\mathrm{ideg}(v) = 0$. Tieto hrany budú považované za fiktívne činnosti s trvaním 0.
5. Pridaj orient. hrany $(v), k$ pre všetky v také, že $\mathrm{odeg}(v) = 0$.Tieto hrany budú považované za fiktívne činnosti s trvaním 0.
6. Rozdeľ každý vrchol predstavujúci činnosť na vstupnú a výstupnú časť a pridaj orientovanú hranu vedúcu zo vstupnej do výstupnej časti. Ohodnoť túto hranu trvaním príslušnej činnosti.