Toky v sieťach

Stanislav Palúch

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

25. mája 2020

Sieť

Definícia

Sieťou *nazveme neorientovane súvislý hranovo ohodnotený digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, *v ktorom ohodnotenie* $c(h) > 0$ *každej hrany* $h \in H$ *je celočíselné a predstavuje priepustnosť hrany* h, *a v ktorom existuje*

- *práve jeden vrchol* z *taký, že* $\mathrm{ideg}(z) = 0$ – **zdroj** *a*
- *práve jeden vrchol taký* u, *že* $\mathrm{odeg}(u) = 0$ – **ústie**.

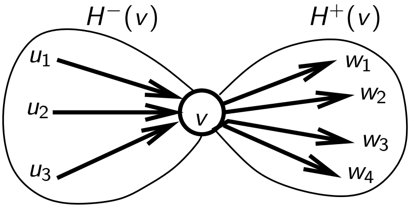
Značenie: Pre každý vrchol $v \in V$ digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je

- $H^+(v)$ množina všetkých hrán z vrchola v vychádzajúcich a
- $H^-(v)$ množina všetkých hrán do vrchola v vchádzajúcich.

Množiny $H^+(v)$ a $H^-(v)$

Pre množiny $H^+(v)$, $H^-(v)$ platí:

$$
\begin{aligned}
H^-(v) &= \{(u,j) \mid j = v,\ (u,j) \in H\}, \\
H^+(v) &= \{(i,w) \mid i = v,\ (i,w) \in H\}.
\end{aligned}
$$



Množina $H^-(v) = \{(u_1, v), (u_2, v), (u_3, v)\}$
a množina $H^+(v) = \{(v, w_1), (v, w_2), (v, w_3), (v, w_4)\}$

Čo znamená symbol $\sum$.

$$s = \sum_{i=1}^{n} i$$

```
s = 0;
for(i = 1; i <= n ;i++){
   s = s + i;
}
return s;
```

$$s = \sum_{i=1}^{n} \log(i)$$

```
s = 0;
for(i = 1; i <= n ;i++){
   s = s + log(i);
}
return s;
```

$$s = \sum_{i \in H} \log(i)$$

```
s = 0;
for(i : H){
   s = s + log(i);
}
return s;
```

Tok v sieti

Definícia

Tokom v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *nazveme celočíselnú funkciu* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovanú na množine orientovaných hrán* H, *pre ktorú platí:*

1. $\mathbf{y}(h) \geq 0$ *pre všetky* $h \in H$ (1)
2. $\mathbf{y}(h) \leq c(h)$ *pre všetky* $h \in H$ (2)
3. $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ *pre všetky také* $v \in V$, *že* $v \neq u$, $v \neq z$ (3)
4. $\sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$ (4)

Veľkosťou *toku* $\mathbf{y}$ *nazveme číslo* $F(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h)$
(ktoré sa rovná $\sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$*).*

Definícia

Tokom v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *nazveme celočíselnú funkciu* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovanú na množine orientovaných hrán* H*, pre ktorú platí:*

1. $\mathbf{y}(h) \geq 0$ *pre všetky* $h \in H$ (1)
2. $\mathbf{y}(h) \leq c(h)$ *pre všetky* $h \in H$ (2)
3. $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ *pre všetky také* $v \in V$, *že* $v \neq u$, $v \neq z$ (3)
4. $\sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$ (4)

Veľkosťou *toku* $\mathbf{y}$ *nazveme číslo* $F(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h)$ *(ktoré sa rovná* $\sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$*).*

Definícia

Tokom v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *nazveme celočíselnú funkciu* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovanú na množine orientovaných hrán* H*, pre ktorú platí:*

1. $\mathbf{y}(h) \geq 0 \quad$ *pre všetky* $h \in H$ (1)
2. $\mathbf{y}(h) \leq c(h) \quad$ *pre všetky* $h \in H$ (2)
3. $$\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h) \quad \text{pre všetky také } v \in V, \quad \text{že } v \neq u, \quad v \neq z \tag{3}$$
4. $$\sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h) \tag{4}$$

Veľkosťou *toku* $\mathbf{y}$ *nazveme číslo* $F(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h)$ *(ktoré sa rovná* $\sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$*).*

Tok v sieti

Definícia

Tokom v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *nazveme celočíselnú funkciu* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovanú na množine orientovaných hrán H, pre ktorú platí:*

$$1.\quad \mathbf{y}(h) \geq 0 \quad \textit{pre všetky } h \in H \tag{1}$$

$$2.\quad \mathbf{y}(h) \leq c(h) \quad \textit{pre všetky } h \in H \tag{2}$$

$$3.\ \sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h) \quad \textit{pre všetky také } v \in V, \quad \textit{že } v \neq u, \ \ v \neq z \tag{3}$$

$$4.\ \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h) \tag{4}$$

Veľkosťou *toku* $\mathbf{y}$ *nazveme číslo* $F(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h)$ *(ktoré sa rovná* $\sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$*).*

Tok v sieti

Definícia

Tokom v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *nazveme celočíselnú funkciu* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovanú na množine orientovaných hrán* H*, pre ktorú platí:*

$$1. \quad \mathbf{y}(h) \geq 0 \quad \text{pre všetky } h \in H \tag{1}$$

$$2. \quad \mathbf{y}(h) \leq c(h) \quad \text{pre všetky } h \in H \tag{2}$$

$$3. \sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h) \quad \text{pre všetky také } v \in V, \quad \text{že } v \neq u, \quad v \neq z \tag{3}$$

$$4. \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h) \tag{4}$$

Veľkosťou *toku* $\mathbf{y}$ *nazveme číslo* $F(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h)$
(ktoré sa rovná $\sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$*).*

Maximálny tok v sieti

Definícia

Hovoríme, že tok $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je* **maximálny**, *ak má najväčšiu veľkosť zo všetkých možných tokov v sieti* $\overrightarrow{G}$.
Orientovanú hranu $h \in H$ *nazveme* **nasýtenou**, *ak* $\mathbf{y}(h) = c(h)$.

Poznámka

- *Tok v sieti je teda reálna funkcia* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovaná na množine všetkých hrán. Číslo* $\mathbf{y}(h)$ *je funkčná hodnota funkcie* $\mathbf{y}$ *v jednom prvku* h *svojho definičného oboru (porovnaj* $\mathbf{y}$ *a* $\mathbf{y}(h)$ *s dvojicou pojmov funkcia* $\log$ *a* $\log(2)$*) a budeme ho volať* **tok hranou** h.
- *Tok* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je vlastne ďalšie hranové ohodnotenie, takže sieť* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *môžeme považovať za digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *s dvomi ohodnoteniami hrán.*

Maximálny tok v sieti

Definícia

Hovoríme, že tok $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je* **maximálny**, *ak má najväčšiu veľkosť zo všetkých možných tokov v sieti* $\overrightarrow{G}$.
Orientovanú hranu $h \in H$ *nazveme* **nasýtenou**, *ak* $\mathbf{y}(h) = c(h)$.

Poznámka

- *Tok v sieti je teda reálna funkcia* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovaná na množine všetkých hrán. Číslo* $\mathbf{y}(h)$ *je funkčná hodnota funkcie* $\mathbf{y}$ *v jednom prvku* h *svojho definičného oboru (porovnaj* $\mathbf{y}$ *a* $\mathbf{y}(h)$ *s dvojicou pojmov funkcia* $\log$ *a* $\log(2)$*) a budeme ho volať* **tok hranou** h.
- *Tok* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je vlastne ďalšie hranové ohodnotenie, takže sieť* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *môžeme považovať za digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *s dvomi ohodnoteniami hrán.*

Maximálny tok v sieti

Definícia

Hovoríme, že tok $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je* **maximálny**, *ak má najväčšiu veľkosť zo všetkých možných tokov v sieti* $\overrightarrow{G}$.
Orientovanú hranu $h \in H$ *nazveme* **nasýtenou**, *ak* $\mathbf{y}(h) = c(h)$.

Poznámka

- *Tok v sieti je teda reálna funkcia* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovaná na množine všetkých hrán. Číslo* $\mathbf{y}(h)$ *je funkčná hodnota funkcie* $\mathbf{y}$ *v jednom prvku* h *svojho definičného oboru (porovnaj* $\mathbf{y}$ *a* $\mathbf{y}(h)$ *s dvojicou pojmov funkcia* $\log$ *a* $\log(2)$*) a budeme ho volať* **tok hranou** h.
- *Tok* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je vlastne ďalšie hranové ohodnotenie, takže sieť* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *môžeme považovať za digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *s dvomi ohodnoteniami hrán.*

Rezervná a zväčšujúca polocesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, *nech* v, $w \in V$.
Nech $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* v–w *polocesta, nech* h *je orientovaná hrana tejto polocesty.*
Definujeme $r(h)$ **rezervu hrany** *v poloceste* $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *nasledovne:*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ proti smeru orientácie} \end{cases} \tag{5}$$

Rezerva polocesty $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je minimum rezerv hrán tejto polocesty.*

Hovoríme, že polocesta $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* **rezervná polocesta** *ak má kladnú rezervu.*
Rezervná polocesta $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *zo zdroja do ústia sa nazýva* **zväčšujúca polocesta**.

Rezervná a zväčšujúca polocesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, *nech* v, $w \in V$.
Nech $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* v–w *polocesta, nech* h *je orientovaná hrana tejto polocesty.*
Definujeme $r(h)$ **rezervu hrany** *v poloceste* $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *nasledovne:*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ proti smeru orientácie} \end{cases} \tag{5}$$

Rezerva polocesty $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je minimum rezerv hrán tejto polocesty.*

Hovoríme, že polocesta $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* **rezervná polocesta** *ak má kladnú rezervu.*
Rezervná polocesta $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *zo zdroja do ústia sa nazýva* **zväčšujúca polocesta**.

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, *nech* v, $w \in V$.
Nech $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* v–w *polocesta, nech* h *je orientovaná hrana tejto polocesty.*
Definujeme $r(h)$ **rezervu hrany** *v poloceste* $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *nasledovne:*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ proti smeru orientácie} \end{cases} \tag{5}$$

Rezerva polocesty $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je minimum rezerv hrán tejto polocesty.*

Hovoríme, že polocesta $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* **rezervná polocesta** *ak má kladnú rezervu.*
Rezervná polocesta $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *zo zdroja do ústia sa nazýva* **zväčšujúca polocesta**.

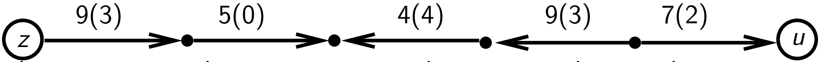
Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, *nech* v, $w \in V$.
Nech $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* v–w *polocesta, nech* h *je orientovaná hrana tejto polocesty.*
Definujeme $r(h)$ **rezervu hrany** *v poloceste* $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *nasledovne:*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ proti smeru orientácie} \end{cases} \tag{5}$$

Rezerva polocesty $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je minimum rezerv hrán tejto polocesty.*

Hovoríme, že polocesta $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* **rezervná polocesta** *ak má kladnú rezervu.*
Rezervná polocesta $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *zo zdroja do ústia sa nazýva* **zväčšujúca polocesta**.



h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
$r(h_1) = 9 - 3$	$r(h_2) = 5 - 0$			$r(h_5) = 7 - 2$
$r(h_1) = 6$	$r(h_2) = 5$	$r(h_3) = 4$	$r(h_4) = 3$	$r(h_5) = 5$

Zväčšujúca polocesta.

Ohodnotenie 9(3) hrany h_1 znamená, že $c(h_1) = 9$, $\mathbf{y}(h_1) = 3$.

Rezerva polocesty je $\min\{6, 5, 4, 3, 5\} = 3$.

Zväčšujúca cesta umožňuje zväčšiť tok

Veta

Nech v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s tokom $\mathbf{y}$ existuje zväčšujúca polocesta. Potom tok $\mathbf{y}$ nie je maximálny.

Dôkaz.

Nech $\mu(z, u)$ je rezervná z–u polocesta zo zdroja do ústia s rezervou r. Definujme tok $\mathbf{y}'$

$$\mathbf{y}'(h) = \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na ceste } \mu(z,u) \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \mu(z,u) \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \mu(z,u) \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

Pretože rezerva zväčšujúcej polocesty bola počítaná ako minimum z rezerv hrán definovaných vzťahmi (7), musia aj hodnoty $\mathbf{y}'(h)$ toku $\mathbf{y}'$ splňovať (1) (t.j $\mathbf{y}'(h) \geq 0$), (2) (t.j. $\mathbf{y}'(h) \leq c(h)$).

Zväčšujúca cesta umožňuje zväčšiť tok

Veta

Nech v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s tokom $\mathbf{y}$ *existuje zväčšujúca polocesta. Potom tok* $\mathbf{y}$ *nie je maximálny.*

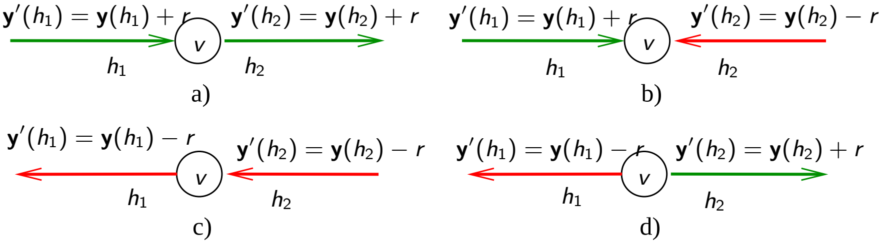
DÔKAZ.
Nech $\boldsymbol{\mu}(z,u)$ je rezervná z–u polocesta zo zdroja do ústia s rezervou r.
Definujme tok $\mathbf{y}'$

$$\mathbf{y}'(h) = \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

Pretože rezerva zväčšujúcej polocesty bola počítaná ako minimum z rezerv hrán definovaných vzťahmi (7), musia aj hodnoty $\mathbf{y}'(h)$ toku $\mathbf{y}'$ splňovať (1) (t.j $\mathbf{y}'(h) \geq 0$), (2) (t.j. $\mathbf{y}'(h) \leq c(h)$).

Platnosť Kirchhoffovho zákona (4) z definície toku

$$\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h) \quad \text{pre všetky také } v \in V, \quad \text{že } v \neq u, \; v \neq z$$



Štyri možnosti orientácie hrán incidentných
s vrcholom v na rezervnej poloceste.

a) $\mathbf{y}'(h_1)$ zväčší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zväčší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

b) $\mathbf{y}'(h_1)$ zväčší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zmenší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

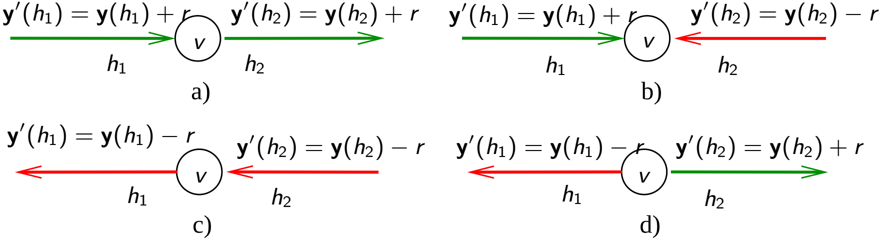
c) $\mathbf{y}'(h_1)$ zmenší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zmenší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

d) $\mathbf{y}'(h_1)$ zmenší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zväčší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

Zväčšujúca cesta umožňuje zväčšiť tok

Platnosť Kirchhoffovho zákona (4) z definície toku

$$\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h) \quad \text{pre všetky také } v \in V, \quad \text{že } v \neq u, \ \ v \neq z$$



Štyri možnosti orientácie hrán incidentných
s vrcholom v na rezervnej poloceste.

a) $\mathbf{y}'(h_1)$ zväčší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zväčší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

b) $\mathbf{y}'(h_1)$ zväčší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zmenší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

c) $\mathbf{y}'(h_1)$ zmenší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zmenší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

d) $\mathbf{y}'(h_1)$ zmenší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\quad \mathbf{y}'(h_2)$ zväčší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

Zväčšujúca cesta umožňuje zväčšiť tok

Prvá hrana zväčšujúcej polocesty patrí do $H^+(z)$, jej posledná hrana patrí do $H^-(u)$. Preto

$$F(\mathbf{y}') = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}'(h) = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h) + r = F(\mathbf{y}) + r \qquad (6)$$

$$\sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}'(h) = \sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h) + r = F(\mathbf{y}) + r \qquad (7)$$

Z (6) vidíme, že aj vzťah (4) ostal v platnosti, pričom sa však veľkosť toku zväčšila o hodnotu r. □

Fordova – Fulkersonova veta o maximálnom toku

Veta (Ford – Fulkerson)

Tok $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *so zdrojom* z *a ústím* u *je maximálny práve vtedy, keď neexistuje* z–u *zväčšujúca polocesta.*

Algoritmus

Fordov – Fulkersonov algoritmus na hľadanie maximálneho toku v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** *Zvoľ v sieti začiatočný tok* $\mathbf{y}$, *napríklad nulový tok.*
- **Krok 2.** *Nájdi v sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *zväčšujúcu polocestu* $\mu(z,u)$.
- **Krok 3.** *Ak zväčšujúca polocesta neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je maximálny. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak zväčšujúca polocesta* $\mu(z,u)$ *existuje a má rezervu* r, *zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na ceste } \mu(z,u) \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \mu(z,u) \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \mu(z,u) \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus

Fordov – Fulkersonov algoritmus na hľadanie maximálneho toku v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** *Zvoľ v sieti začiatočný tok* $\mathbf{y}$*, napríklad nulový tok.*
- **Krok 2.** *Nájdi v sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *zväčšujúcu polocestu* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$*.*
- **Krok 3.** *Ak zväčšujúca polocesta neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je maximálny. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak zväčšujúca polocesta* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *existuje a má rezervu* r*, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus

Fordov – Fulkersonov algoritmus na hľadanie maximálneho toku v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** *Zvoľ v sieti začiatočný tok* $\mathbf{y}$*, napríklad nulový tok.*
- **Krok 2.** *Nájdi v sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *zväčšujúcu polocestu* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$*.*
- **Krok 3.** *Ak zväčšujúca polocesta neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je maximálny. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak zväčšujúca polocesta* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *existuje a má rezervu* r*, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus

Fordov – Fulkersonov algoritmus na hľadanie maximálneho toku v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** *Zvoľ v sieti začiatočný tok* $\mathbf{y}$*, napríklad nulový tok.*
- **Krok 2.** *Nájdi v sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *zväčšujúcu polocestu* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$*.*
- **Krok 3.** *Ak zväčšujúca polocesta neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je maximálny. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak zväčšujúca polocesta* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *existuje a má rezervu* r*, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z, u) \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z, u) \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z, u) \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie zväčšujúcej polocesty $\mu(z, u)$ v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s tokom y.

Vrcholom siete okrem zdroja priradíme značku $x(i)$ s nasledujúcim významom:

- *Ak $x(i) = \infty$, potom do vrchola i doteraz nebola nájdená rezervná u–i cesta.*
- *Ak $x(i) < \infty$, potom bola nájdená rezervná u–i cesta, pričom jej predposledný vrchol je $|x(i)|$ (absolútna hodnota $x(i)$).*
- *Ak naviac $x(i) > 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(x(i), i)$ v smere orientácie, ak $x(i) < 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(i, x(i))$ proti smeru orientácie.*
- *Pre zdroj z položíme $x(z) := 0$.*

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie zväčšujúcej polocesty $\mu(z, u)$ v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s tokom y.

Vrcholom siete okrem zdroja priradíme značku $x(i)$ s nasledujúcim významom:

- *Ak $x(i) = \infty$, potom do vrchola i doteraz nebola nájdená rezervná u–i cesta.*
- *Ak $x(i) < \infty$, potom bola nájdená rezervná u–i cesta, pričom jej predposledný vrchol je $|x(i)|$ (absolútna hodnota $x(i)$).*
- *Ak naviac $x(i) > 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(x(i), i)$ v smere orientácie, ak $x(i) < 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(i, x(i))$ proti smeru orientácie.*
- *Pre zdroj z položíme $x(z) := 0$.*

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie zväčšujúcej polocesty $\mu(z, u)$ v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s tokom y.

Vrcholom siete okrem zdroja priradíme značku $x(i)$ s nasledujúcim významom:

- *Ak $x(i) = \infty$, potom do vrchola i doteraz nebola nájdená rezervná u–i cesta.*
- *Ak $x(i) < \infty$, potom bola nájdená rezervná u–i cesta, pričom jej predposledný vrchol je $|x(i)|$ (absolútna hodnota $x(i)$).*
- *Ak naviac $x(i) > 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(x(i), i)$ v smere orientácie, ak $x(i) < 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(i, x(i))$ proti smeru orientácie.*
- *Pre zdroj z položíme $x(z) := 0$.*

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie zväčšujúcej polocesty $\mu(z, u)$ v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s tokom y.

Vrcholom siete okrem zdroja priradíme značku $x(i)$ s nasledujúcim významom:

- *Ak $x(i) = \infty$, potom do vrchola i doteraz nebola nájdená rezervná u–i cesta.*
- *Ak $x(i) < \infty$, potom bola nájdená rezervná u–i cesta, pričom jej predposledný vrchol je $|x(i)|$ (absolútna hodnota $x(i)$).*
- *Ak naviac $x(i) > 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(x(i), i)$ v smere orientácie, ak $x(i) < 0$, potom v tejto rezervnej poloceste bola použitá hrana $(i, x(i))$ proti smeru orientácie.*
- *Pre zdroj z položíme $x(z) := 0$.*

Algoritmus (– pokračovanie)

Ďalej zavedieme tieto označenia:

- $\mathcal{E}$ – *množina vrcholov označených konečnou značkou, ktorých okolie sme ešte nepreskúmali. Sú to vrcholy, do ktorých vedie rezervná polocesta zo zdroja a je ešte šanca, že táto polocesta sa bude dať ešte predĺžiť.*
- $\mathcal{N}$ – *množina vrcholov s nekonečnou značkou. Sú to vrcholy, do ktorých ešte nebola objavená rezervná polocesta zo zdroja.*

Poznámka

Množina $\mathcal{E}$ má veľmi podobnú funkciu ako množina $\mathcal{E}$ v label set a label correct algoritmoch.

Algoritmus (– pokračovanie)

Ďalej zavedieme tieto označenia:

- *$\mathcal{E}$ – množina vrcholov označených konečnou značkou, ktorých okolie sme ešte nepreskúmali. Sú to vrcholy, do ktorých vedie rezervná polocesta zo zdroja a je ešte šanca, že táto polocesta sa bude dať ešte predĺžiť.*
- *$\mathcal{N}$ – množina vrcholov s nekonečnou značkou. Sú to vrcholy, do ktorých ešte nebola objavená rezervná polocesta zo zdroja.*

Poznámka

Množina $\mathcal{E}$ má veľmi podobnú funkciu ako množina $\mathcal{E}$ v label set a label correct algoritmoch.

Algoritmus (– pokračovanie)

Ďalej zavedieme tieto označenia:

- $\mathcal{E}$ – množina vrcholov označených konečnou značkou, ktorých okolie sme ešte nepreskúmali. Sú to vrcholy, do ktorých vedie rezervná polocesta zo zdroja a je ešte šanca, že táto polocesta sa bude dať ešte predĺžiť.
- $\mathcal{N}$ – množina vrcholov s nekonečnou značkou. Sú to vrcholy, do ktorých ešte nebola objavená rezervná polocesta zo zdroja.

Poznámka

Množina $\mathcal{E}$ má veľmi podobnú funkciu ako množina $\mathcal{E}$ v label set a label correct algoritmoch.

Algoritmus (– pokračovanie)

- **Krok 1.** *Inicializácia.*
  $\mathcal{N} := V - \{z\}$, $\mathcal{E} := \{z\}$.
  Polož $x(z) := 0$ *a pre všetky* $i \in \mathcal{N}$ *polož* $x(i) := \infty$.
- **Krok 2.** *Ak* $x(u) < \infty$, *zostroj zlepšujúcu z–u polocestu pomocou značiek* $|x(\ )|$:
  $$(z = |x^{(k)}(u)|,\ |x^{(k-1)}(u)|,\ \dots,\ |x^{(2)}(u)|,\ |x(u)|,\ u,)$$
  a STOP.
- **Krok 3.** *Ak* $\mathcal{E} = \emptyset$, *neexistuje zlepšujúca* $\mu(z,u)$ *polocesta. STOP.*
- **Krok 4.** *Vyber vrchol* $i \in \mathcal{E}$. *Polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{i\}$.
  Pre každý vrchol $j \in V^+(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*
  Ak $\mathbf{y}(i,j) < c(i,j)$, *potom polož* $x(j) := i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.
  Pre každý vrchol $j \in V^-(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*
  Ak $\mathbf{y}(j,i) > 0$, *potom polož* $x(j) := -i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.

  GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus (– pokračovanie)

- **Krok 1.** *Inicializácia.*
  $\mathcal{N} := V - \{z\}$, $\mathcal{E} := \{z\}$.
  Polož $x(z) := 0$ *a pre všetky* $i \in \mathcal{N}$ *polož* $x(i) := \infty$.
- **Krok 2.** *Ak* $x(u) < \infty$, *zostroj zlepšujúcu z–u polocestu pomocou značiek* $|x(\ )|$:

$$(z = |x^{(k)}(u)|,\ |x^{(k-1)}(u)|,\ \dots,\ |x^{(2)}(u)|,\ |x(u)|,\ u,)$$

  a STOP.
- **Krok 3.** *Ak* $\mathcal{E} = \emptyset$, *neexistuje zlepšujúca* $\mu(z, u)$ *polocesta. STOP.*
- **Krok 4.** *Vyber vrchol* $i \in \mathcal{E}$. *Polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{i\}$.

  Pre každý vrchol $j \in V^+(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*

  Ak $\mathbf{y}(i, j) < c(i, j)$, *potom polož* $x(j) := i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.

  Pre každý vrchol $j \in V^-(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*

  Ak $\mathbf{y}(j, i) > 0$, *potom polož* $x(j) := -i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.

  GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus (– pokračovanie)

- **Krok 1.** *Inicializácia.*
  $\mathcal{N} := V - \{z\}$, $\mathcal{E} := \{z\}$.
  Polož $x(z) := 0$ *a pre všetky* $i \in \mathcal{N}$ *polož* $x(i) := \infty$.

- **Krok 2.** *Ak* $x(u) < \infty$*, zostroj zlepšujúcu z–u polocestu pomocou značiek* $|x(\ )|$*:*

$$(z = |x^{(k)}(u)|,\ |x^{(k-1)}(u)|,\ \dots,\ |x^{(2)}(u)|,\ |x(u)|,\ u,)$$

  a STOP.

- **Krok 3.** *Ak* $\mathcal{E} = \emptyset$*, neexistuje zlepšujúca* $\boldsymbol{\mu}(z,u)$ *polocesta. STOP.*

- **Krok 4.** *Vyber vrchol* $i \in \mathcal{E}$*. Polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{i\}$.

  Pre každý vrchol $j \in V^{+}(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*

  Ak $\mathbf{y}(i,j) < c(i,j)$*, potom polož* $x(j) := i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.

  Pre každý vrchol $j \in V^{-}(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*

  Ak $\mathbf{y}(j,i) > 0$*, potom polož* $x(j) := -i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.

  GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus (– pokračovanie)

- **Krok 1.** *Inicializácia.*
  $\mathcal{N} := V - \{z\}$, $\mathcal{E} := \{z\}$.
  Polož $x(z) := 0$ *a pre všetky* $i \in \mathcal{N}$ *polož* $x(i) := \infty$.
- **Krok 2.** *Ak* $x(u) < \infty$, *zostroj zlepšujúcu z–u polocestu pomocou značiek* $|x(\ )|$:

$$(z = |x^{(k)}(u)|,\ |x^{(k-1)}(u)|,\ \dots,\ |x^{(2)}(u)|,\ |x(u)|,\ u,)$$

  a STOP.
- **Krok 3.** *Ak* $\mathcal{E} = \emptyset$, *neexistuje zlepšujúca* $\boldsymbol{\mu}(z,u)$ *polocesta. STOP.*
- **Krok 4.** *Vyber vrchol* $i \in \mathcal{E}$. *Polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{i\}$.

  Pre každý vrchol $j \in V^+(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*

  Ak $\mathbf{y}(i,j) < c(i,j)$, *potom polož* $x(j) := i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.

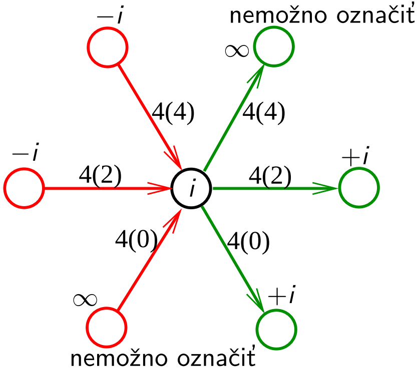
  Pre každý vrchol $j \in V^-(i) \cap \mathcal{N}$ *urob:*

  Ak $\mathbf{y}(j,i) > 0$, *potom polož* $x(j) := -i$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a* $\mathcal{N} := \mathcal{N} - \{j\}$.

  GOTO Krok 2.

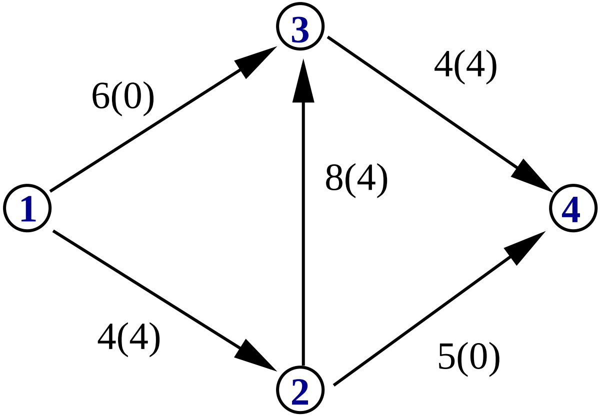
♣

Spôsob označovania z vrchola i



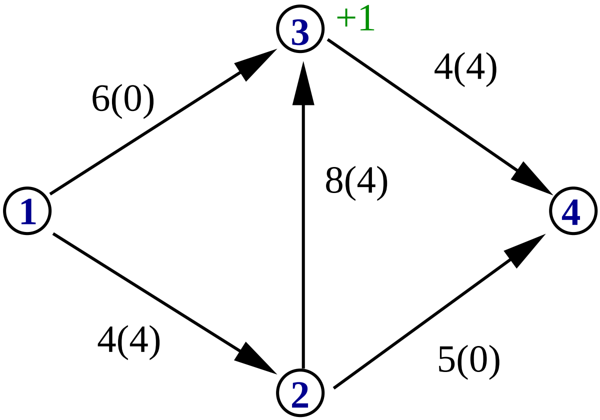
Spôsob označovania z vrchola i.
Označenie hrany 4(2) znamená, že hranou kapacity 4 tečie tok 2.
Zelené krúžky predstavujú vrcholy množiny $V^+(i)$,
červené krúžky predstavujú vrcholy množiny $V^-(i)$.

Príklad – hľadanie zväčšujúcej polocesty



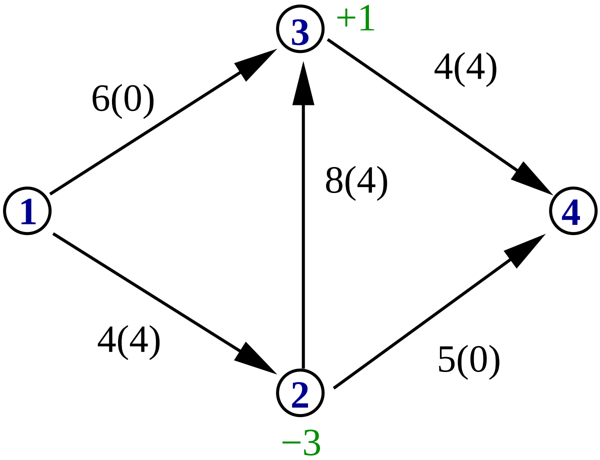
$\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$
$\mathcal{E} = \{1\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E} - \{1\}, \quad i = 1 \quad V^{+}(1) \cap \mathcal{N} = \{2, 3\},\ V^{-}(1) \cap \mathcal{N} = \{\ \}$

Príklad – hľadanie zväčšujúcej polocesty



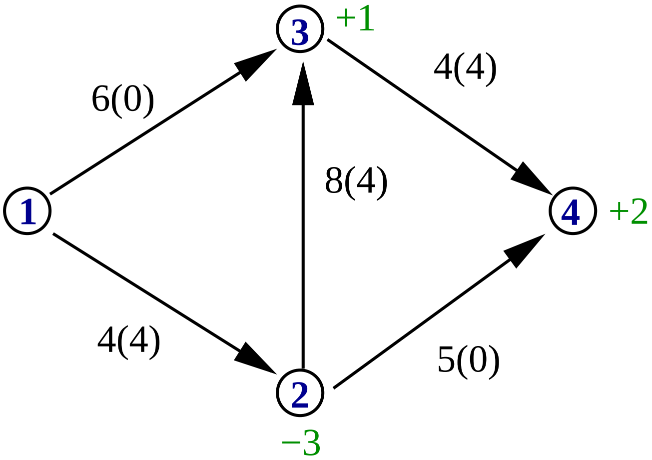
$\mathcal{N} = \mathcal{N} - \{3\} = \{2, 4\}$
$\mathcal{E} = \{3\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E} - \{3\}, \quad i = 3 \quad V^{+}(3) \cap \mathcal{N} = \{4\},\ V^{-}(3) \cap \mathcal{N} = \{2\}$

Príklad – hľadanie zväčšujúcej polocesty

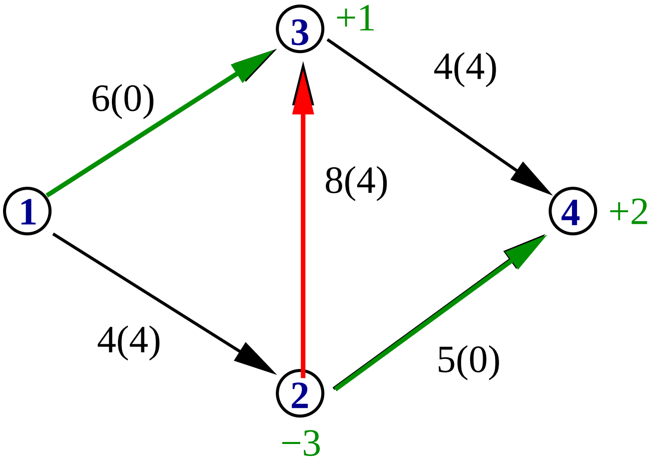


$\mathcal{N} = \mathcal{N} - \{2\} = \{4\}$
$\mathcal{E} = \{2\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E} - \{2\}, \quad i = 2 \quad V^+(2) \cap \mathcal{N} = \{4\},\ V^-(2) \cap \mathcal{N} = \{\ \}$

Príklad – hľadanie zväčšujúcej polocesty



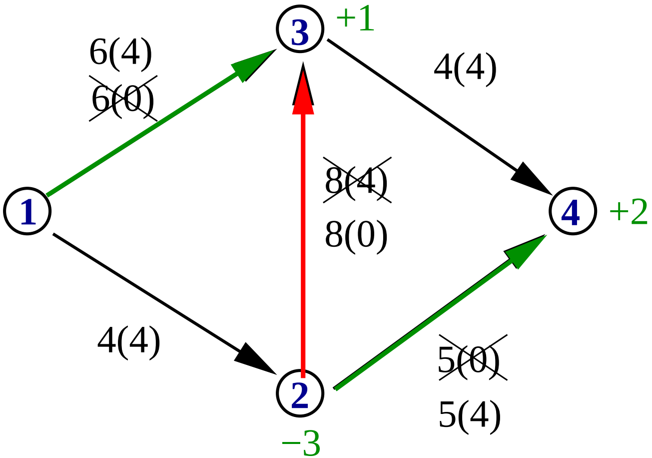
Príklad – hľadanie zväčšujúcej polocesty



Zlepšujúca polocesta je $(1, (1,3), (2,3), 2, (2,4), 4)$.
Rezerva hrany $(1,3)$ je 6, rezerva hrany $(2,3)$ je 4, rezerva hrany $(2,4)$ je 5.

Rezerva zlepšujúcej polocesty je $\min\{6,4,5\} = 4$.

Príklad – hľadanie zväčšujúcej polocesty



Zlepšujúca polocesta je $(1, (1, 3), (2, 3), 2, (2, 4), 4)$.
Rezerva hrany $(1, 3)$ je 6, rezerva hrany $(2, 3)$ je 4, rezerva hrany $(2, 4)$ je 5.

Rezerva zlepšujúcej polocesty je $\min\{6, 4, 5\} = 4$.

Najlacnejší tok danej veľkosti

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ je sieť, kde $d(h)$ je ďalšie ocenenie hrany h predstavujúce cenu za jednotku toku na hrane h. Nech $\mathbf{y}$ je tok v sieti $\overrightarrow{G}$. **Cena toku y** *je definovaná*

$$D(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H} d(h).\mathbf{y}(h)$$

Definícia

Najlacnejší tok *danej veľkosti F je ten tok veľkosti F, ktorý má zo všetkých tokov veľkosti F najmenšiu cenu.*

Poznámka

Analogicky možno definovať najdrahší tok danej veľkosti.

Poznámka

Veľmi častou praktickou úlohou je hľadanie najlacnejšieho maximálneho toku.

Najlacnejší tok danej veľkosti

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť, kde* $d(h)$ *je ďalšie ocenenie hrany* h *predstavujúce cenu za jednotku toku na hrane* h*. Nech* $\mathbf{y}$ *je tok v sieti* $\overrightarrow{G}$*.* **Cena toku y** *je definovaná*

$$D(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H} d(h).\mathbf{y}(h)$$

Definícia

Najlacnejší tok *danej veľkosti* F *je ten tok veľkosti* F*, ktorý má zo všetkých tokov veľkosti* F *najmenšiu cenu.*

Poznámka

Analogicky možno definovať najdrahší tok danej veľkosti.

Poznámka

Veľmi častou praktickou úlohou je hľadanie najlacnejšieho maximálneho toku.

Najlacnejší tok danej veľkosti

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť, kde* $d(h)$ *je ďalšie ocenenie hrany* h *predstavujúce cenu za jednotku toku na hrane* h*. Nech* $\mathbf{y}$ *je tok v sieti* $\overrightarrow{G}$*.* **Cena toku y** *je definovaná*

$$D(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H} d(h).\mathbf{y}(h)$$

Definícia

Najlacnejší tok *danej veľkosti* F *je ten tok veľkosti* F*, ktorý má zo všetkých tokov veľkosti* F *najmenšiu cenu.*

Poznámka

Analogicky možno definovať najdrahší tok danej veľkosti.

Poznámka

Veľmi častou praktickou úlohou je hľadanie najlacnejšieho maximálneho toku.

Rezerva hrany v polocykle, rezervný polocyklus

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, C *polocyklus v sieti* $\overrightarrow{G}$.

Rezerva $r(h)$ **orientovanej hrany** h **v polocykle** C *je*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v polocykle } C \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v v polocykle } C \text{ proti smeru orientácie} \end{cases}$$

Rezerva polocyklu C *je minimum rezerv jeho hrán.*

Polocyklus C *nazveme* **rezervný polocyklus**, *ak jeho rezerva je kladná.*

Cena $d(C)$ **polocyklu** C *je definovaná ako súčet cien hrán súhlasne orientovaných s polocyklom mínus súčet cien hrán s ním opačne orientovaných.*

Rezerva hrany v polocykle, rezervný polocyklus

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, C *polocyklus v sieti* $\overrightarrow{G}$.

Rezerva $r(h)$ **orientovanej hrany** h **v polocykle** C *je*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v polocykle } C \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v v polocykle } C \text{ proti smeru orientácie} \end{cases}$$

Rezerva polocyklu C *je minimum rezerv jeho hrán.*

Polocyklus C *nazveme* **rezervný polocyklus**, *ak jeho rezerva je kladná.*

Cena $d(C)$ **polocyklu** C *je definovaná ako súčet cien hrán súhlasne orientovaných s polocyklom mínus súčet cien hrán s ním opačne orientovaných.*

Rezerva hrany v polocykle, rezervný polocyklus

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, C *polocyklus v sieti* $\overrightarrow{G}$.

Rezerva $r(h)$ **orientovanej hrany** h **v polocykle** C *je*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v polocykle } C \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v v polocykle } C \text{ proti smeru orientácie} \end{cases}$$

Rezerva polocyklu C *je minimum rezerv jeho hrán.*

Polocyklus C *nazveme* **rezervný polocyklus**, *ak jeho rezerva je kladná.*

Cena $d(C)$ **polocyklu** C *je definovaná ako súčet cien hrán súhlasne orientovaných s polocyklom mínus súčet cien hrán s ním opačne orientovaných.*

Rezerva hrany v polocykle, rezervný polocyklus

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, C *polocyklus v sieti* $\overrightarrow{G}$.

Rezerva $r(h)$ **orientovanej hrany** h **v polocykle** C *je*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v polocykle } C \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v v polocykle } C \text{ proti smeru orientácie} \end{cases}$$

Rezerva polocyklu C *je minimum rezerv jeho hrán.*

Polocyklus C *nazveme* **rezervný polocyklus**, *ak jeho rezerva je kladná.*

Cena $d(C)$ **polocyklu** C *je definovaná ako súčet cien hrán súhlasne orientovaných s polocyklom mínus súčet cien hrán s ním opačne orientovaných.*

Rezerva hrany v polocykle, rezervný polocyklus

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, C *polocyklus v sieti* $\overrightarrow{G}$.

Rezerva $r(h)$ **orientovanej hrany** h **v polocykle** C *je*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v polocykle } C \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v v polocykle } C \text{ proti smeru orientácie} \end{cases}$$

Rezerva polocyklu C *je minimum rezerv jeho hrán.*

Polocyklus C *nazveme* **rezervný polocyklus**, *ak jeho rezerva je kladná.*

Cena $d(C)$ **polocyklu** C *je definovaná ako súčet cien hrán súhlasne orientovaných s polocyklom mínus súčet cien hrán s ním opačne orientovaných.*

Kritérium optimality toku

Veta

Tok $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je najlacnejším tokom svojej veľkosti práve vtedy, ak v sieti* $\overrightarrow{G}$ *neexistuje rezervný polocyklus zápornej ceny.*

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najlacnejšieho toku danej veľkosti v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$.

- **Krok 1.** *Začni tokom* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *danej veľkosti.*
- **Krok 2.** *V sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *nájdi rezervný polocyklus* C *so zápornou cenou a rezervou* r*, alebo zisti, že taký polocyklus neexistuje.*
- **Krok 3.** *Ak rezervný polocyklus zápornej ceny neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je najlacnejší zo všetkých tokov svojej veľkosti. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak taký polocyklus* C *existuje, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na polocykle } C \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najlacnejšieho toku danej veľkosti v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$.

- **Krok 1.** *Začni tokom* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *danej veľkosti.*
- **Krok 2.** *V sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *nájdi rezervný polocyklus* C *so zápornou cenou a rezervou* r*, alebo zisti, že taký polocyklus neexistuje.*
- **Krok 3.** *Ak rezervný polocyklus zápornej ceny neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je najlacnejší zo všetkých tokov svojej veľkosti. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak taký polocyklus* C *existuje, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na polocykle } C \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najlacnejšieho toku danej veľkosti v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$.

- **Krok 1.** *Začni tokom* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *danej veľkosti.*
- **Krok 2.** *V sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *nájdi rezervný polocyklus* C *so zápornou cenou a rezervou* r*, alebo zisti, že taký polocyklus neexistuje.*
- **Krok 3.** *Ak rezervný polocyklus zápornej ceny neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je najlacnejší zo všetkých tokov svojej veľkosti. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak taký polocyklus* C *existuje, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na polocykle } C \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najlacnejšieho toku danej veľkosti v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$.

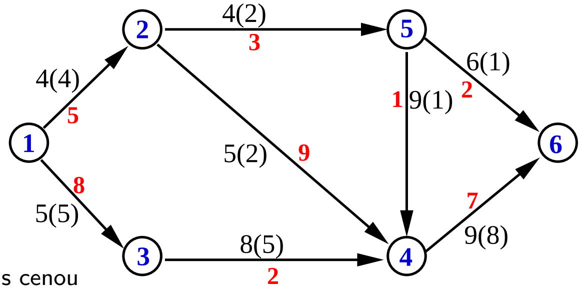
- **Krok 1.** *Začni tokom* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *danej veľkosti.*
- **Krok 2.** *V sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *nájdi rezervný polocyklus* C *so zápornou cenou a rezervou* r*, alebo zisti, že taký polocyklus neexistuje.*
- **Krok 3.** *Ak rezervný polocyklus zápornej ceny neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je najlacnejší zo všetkých tokov svojej veľkosti. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak taký polocyklus* C *existuje, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na polocykle } C \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Hľadanie najlacnejšieho toku – príklad



Tok v sieti s cenou

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.1 + 2.1 + 7.8 = 153$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6, (4, 6), 4, (5, 4), 5, (5, 6), 6)$ s rezervou 1 a zápornou cenou $-7 - 1 + 2 = -6$.

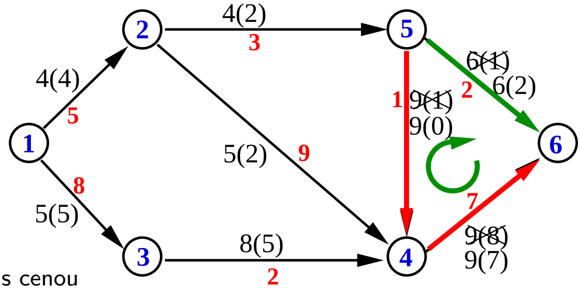
Nový tok v sieti má cenu

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.0 + 2.2 + 7.7 = 147$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6, (4, 6), 4, (2, 4), 2, (2, 5), 5, (5, 6), 6)$ s rezervou 2 a zápornou cenou $-7 - 9 + 3 + 2 = -11$.

Nový tok v sieti má cenu

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.4 + 9.0 + 2.5 + 1.0 + 2.4 + 7.5 = 125$$



Tok v sieti s cenou

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.1 + 2.1 + 7.8 = 153$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6, (4, 6), 4, (5, 4), 5, (5, 6), 6)$ s rezervou 1 a zápornou cenou $-7 - 1 + 2 = -6$.

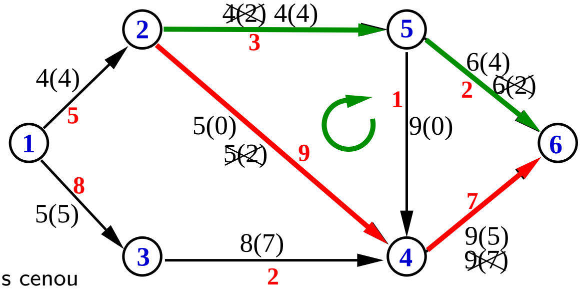
Nový tok v sieti má cenu

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.0 + 2.2 + 7.7 = 147$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6, (4, 6), 4, (2, 4), 2, (2, 5), 5, (5, 6), 6)$ s rezervou 2 a zápornou cenou $-7 - 9 + 3 + 2 = -11$.

Nový tok v sieti má cenu

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.4 + 9.0 + 2.5 + 1.0 + 2.4 + 7.5 = 125$$



Tok v sieti s cenou

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.1 + 2.1 + 7.8 = 153$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6,(4,6),4,(5,4),5,(5,6),6)$ s rezervou 1 a zápornou cenou $-7-1+2=-6$.

Nový tok v sieti má cenu

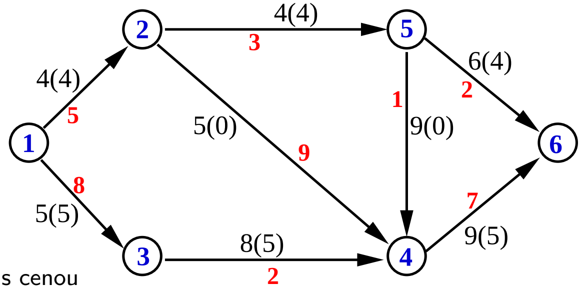
$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.0 + 2.2 + 7.7 = 147$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6,(4,6),4,(2,4),2,(2,5),5,(5,6),6)$ s rezervou 2 a zápornou cenou $-7-9+3+2=-11$.

Nový tok v sieti má cenu

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.4 + 9.0 + 2.5 + 1.0 + 2.4 + 7.5 = 125$$

Hľadanie najlacnejšieho toku – príklad



Tok v sieti s cenou

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.1 + 2.1 + 7.8 = 153$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6, (4, 6), 4, (5, 4), 5, (5, 6), 6)$ s rezervou 1 a zápornou cenou $-7 - 1 + 2 = -6$.
Nový tok v sieti má cenu

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.2 + 9.2 + 2.5 + 1.0 + 2.2 + 7.7 = 147$$

Nájdený rezervný polocyklus $(6, (4, 6), 4, (2, 4), 2, (2, 5), 5, (5, 6), 6)$ s rezervou 2 a zápornou cenou $-7 - 9 + 3 + 2 = -11$.
Nový tok v sieti má cenu

$$D(\mathbf{y}) = 5.4 + 8.5 + 3.4 + 9.0 + 2.5 + 1.0 + 2.4 + 7.5 = 125$$