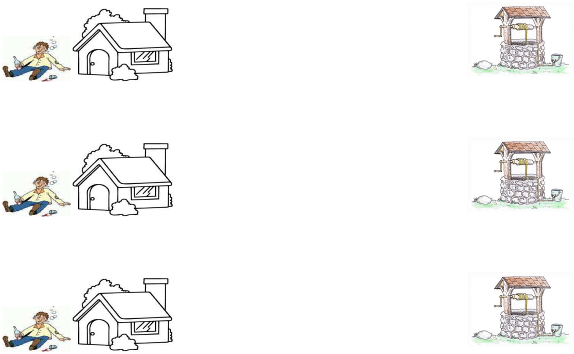
# *Rovinné grafy a farbenie grafov*

Stanislav Palúch

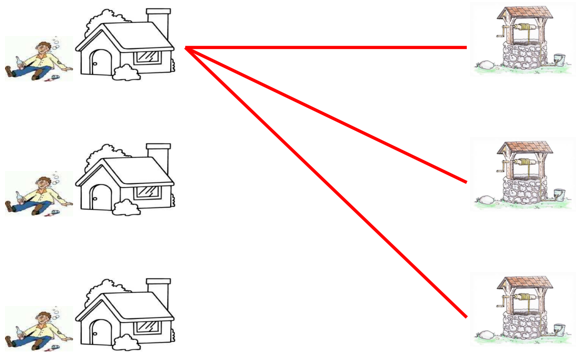
Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

27. apríla 2011

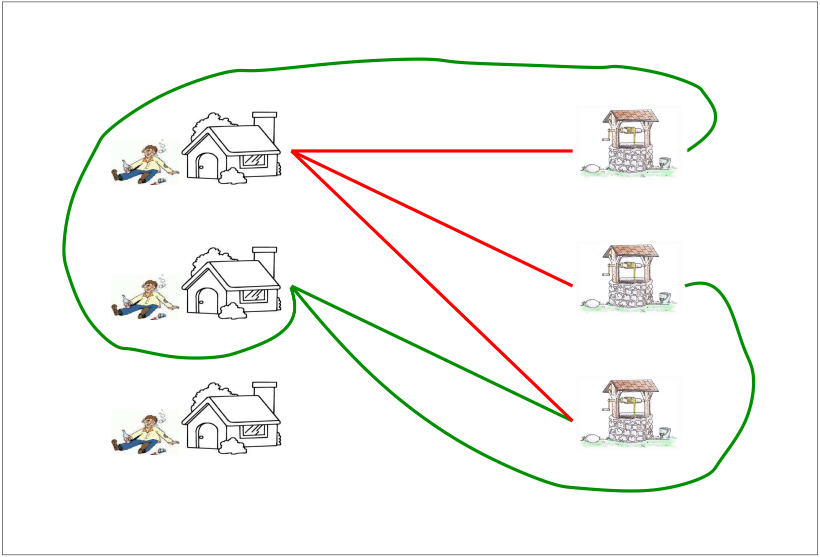
# Tri domčeky – tri studničky



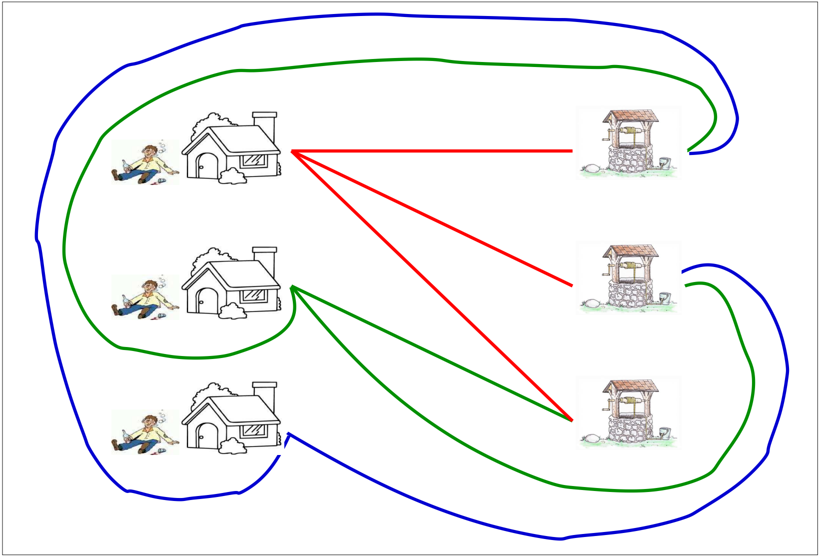
# Tri domčeky – tri studničky



# Tri domčeky – tri studničky



# Tri domčeky – tri studničky



## Rovinné grafy

### Definícia

*Diagram grafu v rovine nazveme* **rovinný**, *ak sa jeho hrany nepretínajú nikde inde okrem vrcholov.*
*Graf $G = (V, H)$ nazveme* **rovinný**, *ak k nemu existuje rovinný diagram.*

V niektorej slovenskej literatúre sa namiesto termínu rovinný graf používa termín **planárny graf**.

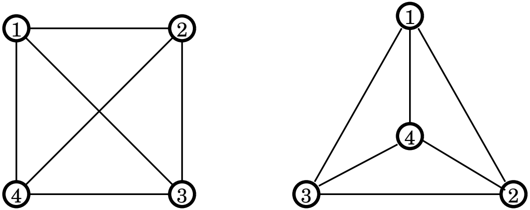
*Obr.:* Dva diagramy toho istého grafu $G = (V, H)$,

kde $V = \{1, 2, 3, 4\}$, H=$\{\{1, 2\},\{1, 3\},\{1, 4\}, \{2, 3\},\{2, 4\},\{3, 4\}\}$.

### Definícia

*Diagram grafu v rovine nazveme* **rovinný**, *ak sa jeho hrany nepretínajú nikde inde okrem vrcholov.*
*Graf $G = (V, H)$ nazveme* **rovinný**, *ak k nemu existuje rovinný diagram.*

V niektorej slovenskej literatúre sa namiesto termínu rovinný graf používa termín **planárny graf**.

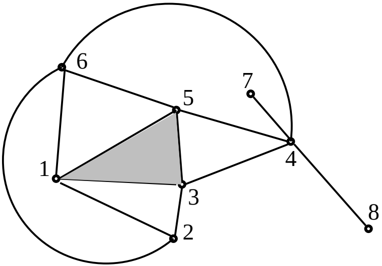



*Obr.:* Dva diagramy toho istého grafu $G = (V, H)$,

kde $V = \{1, 2, 3, 4\}$, H=$\{\{1, 2\},\{1, 3\},\{1, 4\}, \{2, 3\},\{2, 4\},\{3, 4\}\}$.

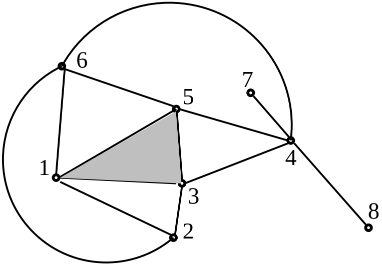
## Definícia

**Stenou** *rovinného diagramu nazveme maximálnu časť roviny, ktorej ľubovoľné dva body možno spojiť súvislou čiarou nepretínajúcou žiadnu hranu diagramu.*




Jedna stena rovinného diagramu.
Aj časť roviny ohraničená hranami $\{4,5\}$, $\{5,6\}$, $\{6,4\}$ je stena.

## Stena rovinného grafu




Máme steny dvoch druhov – práve jedna stena je neohraničená, a nazýva sa **vonkajšia stena**. Ostatné steny sa nazývajú **vnútorné**.

### Poznámka

*Všimnime si ešte, že vrcholy a hrany diagramu, ktoré vymedzujú ktorúkoľvek stenu, tvoria „cyklus“.*
*V diagrame však vidíme aj také hrany – sú to hrany* $\{4,7\}$, $\{4,8\}$ *– ktoré nevymedzujú žiadnu stenu.*
*Hrana vymedzuje niektorú stenu práve vtedy, keď leží aspoň na jednom cykle.*
*Vylúčením ktorejkoľvek hrany ležiacej na cykle klesne počet stien diagramu o 1.*

### Veta

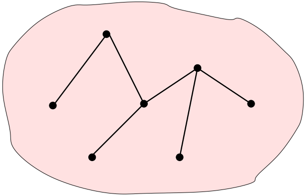
**Eulerova polyedrická formula.** *Nech $G = (V, H)$ je súvislý rovinný graf, nech $S$ je množina stien jeho rovinného diagramu. Potom platí:*

$$|S| = |H| - |V| + 2. \tag{1}$$

Dôkaz.

Matematickou indukciou podľa počtu $|S|$ stien rovinného grafu.

Pre $|S| = 1$ súvislý graf $G$ neobsahuje žiadny cyklus – $G$ je strom.



V strome je $|H| = |V| - 1$.

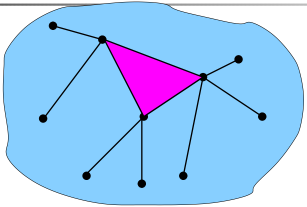
Počítajme: $|H| - |V| + 2 = (|V| - 1) - |V| + 2 = 1$.

Pre $|S| = 1$ máme

$$1 = |S| = |H| - |V| + 2.$$

# Eulerova polyedrická formula

Pre $|S| = 2$



Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

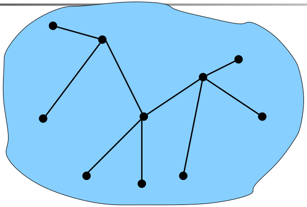
Pre prípad s jednou stenou platilo

$$1 = |S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} 1 + 1 = |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ 2 = |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

# Eulerova polyedrická formula

Pre $|S| = 2$



Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

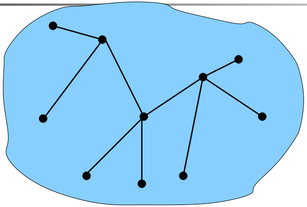
Pre prípad s jednou stenou platilo

$$1 = |S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} 1 + 1 = |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ 2 = |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

# Eulerova polyedrická formula

Pre $|S| = 2$



Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

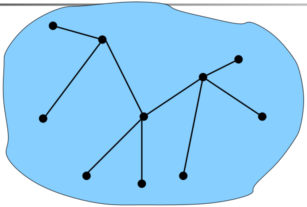
Pre prípad s jednou stenou platilo

$$1 = |S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} 1 + 1 = |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ 2 = |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

# Eulerova polyedrická formula

Pre $|S| = 2$



Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

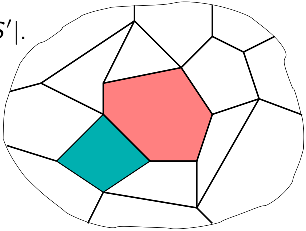
Pre prípad s jednou stenou platilo

$$1 = |S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} 1 + 1 = |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ 2 = |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

# Eulerova polyedrická formula

Nech veta platí pre všetky grafy s počtom stien $|S'|$.
Majme graf s počtom stien $|S| = |S'| + 1$



Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 \end{aligned}$$

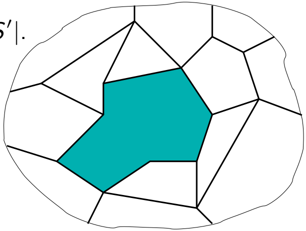
Pre prípad s $|S'|$ stenami platilo

$$|S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

# Eulerova polyedrická formula

Nech veta platí pre všetky grafy s počtom stien $|S'|$.
Majme graf s počtom stien $|S| = |S'| + 1$



Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 \end{aligned}$$

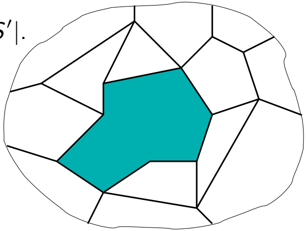
Pre prípad s $|S'|$ stenami platilo

$$|S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

# Eulerova polyedrická formula

Nech veta platí pre všetky grafy s počtom stien $|S'|$.
Majme graf s počtom stien $|S| = |S'| + 1$



Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

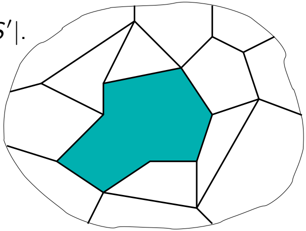
$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 \end{aligned}$$

Pre prípad s $|S'|$ stenami platilo

$$|S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

# *Eulerova polyedrická formula*



Nech veta platí pre všetky grafy s počtom stien $|S'|$.
Majme graf s počtom stien $|S| = |S'| + 1$

Odstránením jednej hrany $h$ cyklu zrušíme aj jednu stenu.
Dostaneme tak rovinný súvislý graf $G' = (V, H')$, kde

$$\begin{aligned} H' &= H - \{h\} \\ |H'| &= |H| - 1 \\ \text{s počtom stien} \quad |S'| &= |S| - 1 \end{aligned}$$

Pre prípad s $|S'|$ stenami platilo

$$|S'| = |H'| - |V| + 2.$$

$$\begin{aligned} |S'| + 1 &= |H'| + 1 - |V| + 2 \\ |S| &= |H| - |V| + 2 \end{aligned}$$

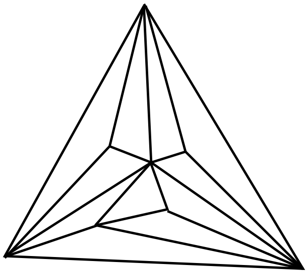
### Veta

*Nech $G = (V, H)$ je maximálny rovinný graf s množinou vrcholov $V$, kde $|V| \geq 3$. Potom*

$$|H| = 3 \cdot |V| - 6. \tag{2}$$

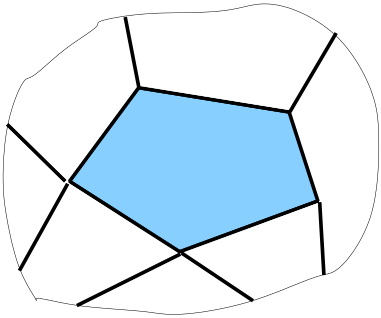
Dôkaz.

V maximálnom rovinnom grafe s množinou vrcholov $V$ musí byť každá stena trojuholníkom.



# Maximum počtu hrán rovinného grafu

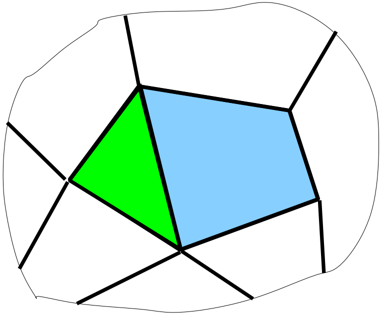
Keby niektorá vnútorná stena nebola trojuholníkom



Keby vonkajšia stena nebola trojuholníkom

# Maximum počtu hrán rovinného grafu

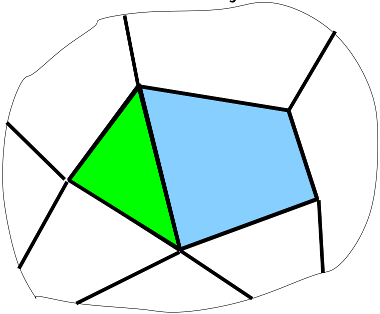
Keby niektorá vnútorná stena nebola trojuholníkom



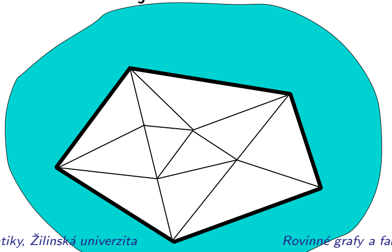
Keby vonkajšia stena nebola trojuholníkom

# Maximum počtu hrán rovinného grafu

Keby niektorá vnútorná stena nebola trojuholníkom

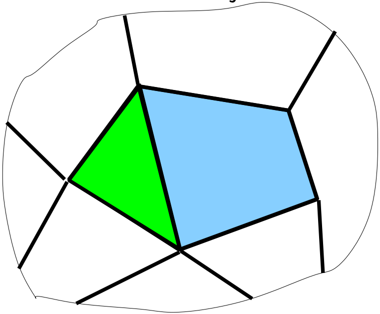


Keby vonkajšia stena nebola trojuholníkom

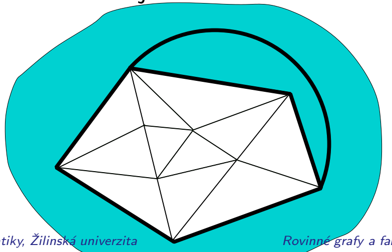


# Maximum počtu hrán rovinného grafu

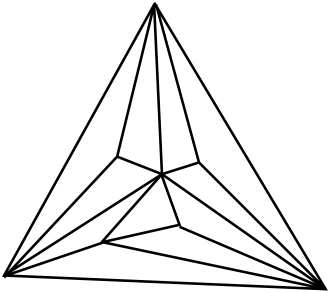
Keby niektorá vnútorná stena nebola trojuholníkom



Keby vonkajšia stena nebola trojuholníkom



# Maximum počtu hrán rovinného grafu



Každá stena určuje 3 hrany. Keby trojuholníky boli disjunktné (každá hrana len v jednom trojuholníku) potom by sme na ich vytvorenie potrebovali 3.$|S|$ hrán.

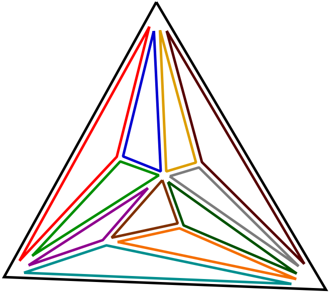
Keďže každá hrana je práve v dvoch stenách je počet hrán rovinnom grafe s max. počtom hrán

$$\begin{aligned} |H| &= \frac{3}{2} \cdot |S| \\ |S| &= \frac{2}{3} \cdot |H| \end{aligned}$$

Eulerova polyedrická formula

$$\begin{aligned} |S| &= |H| - |V| + 2 \\ \frac{2}{3} \cdot |H| &= |H| - |V| + 2 \\ |V| - 2 &= \frac{1}{3} \cdot |H| \\ |H| &= 3 \cdot |V| - 6 \end{aligned}$$

# Maximum počtu hrán rovinného grafu



Každá stena určuje 3 hrany. Keby trojuholníky boli disjunktné (každá hrana len v jednom trojuholníku) potom by sme na ich vytvorenie potrebovali $3.|S|$ hrán.

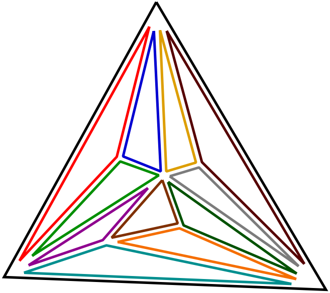
Keďže každá hrana je práve v dvoch stenách je počet hrán rovinnom grafe s max. počtom hrán

$$
\begin{aligned}
|H| &= \frac{3}{2} \cdot |S| \\
|S| &= \frac{2}{3} \cdot |H|
\end{aligned}
$$

Eulerova polyedrická formula

$$
\begin{aligned}
|S| &= |H| - |V| + 2 \\
\frac{2}{3} \cdot |H| &= |H| - |V| + 2 \\
|V| - 2 &= \frac{1}{3} \cdot |H| \\
|H| &= 3 \cdot |V| - 6
\end{aligned}
$$

# Maximum počtu hrán rovinného grafu



Každá stena určuje 3 hrany. Keby trojuholníky boli disjunktné (každá hrana len v jednom trojuholníku) potom by sme na ich vytvorenie potrebovali $3.|S|$ hrán.

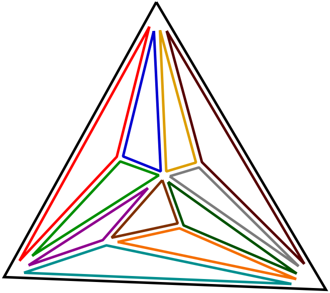
Keďže každá hrana je práve v dvoch stenách je počet hrán rovinnom grafe s max. počtom hrán

$$\begin{aligned} |H| &= \frac{3}{2} \cdot |S| \\ |S| &= \frac{2}{3} \cdot |H| \end{aligned}$$

Eulerova polyedrická formula

$$\begin{aligned} |S| &= |H| - |V| + 2 \\ \frac{2}{3} \cdot |H| &= |H| - |V| + 2 \\ |V| - 2 &= \frac{1}{3} \cdot |H| \\ |H| &= 3 \cdot |V| - 6 \end{aligned}$$

# Maximum počtu hrán rovinného grafu



Každá stena určuje 3 hrany. Keby trojuholníky boli disjunktné (každá hrana len v jednom trojuholníku) potom by sme na ich vytvorenie potrebovali $3.|S|$ hrán.

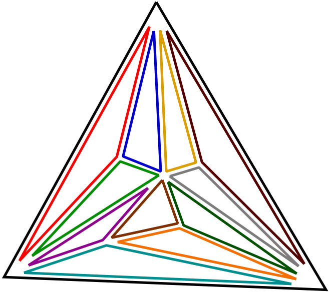
Keďže každá hrana je práve v dvoch stenách je počet hrán rovinnom grafe s max. počtom hrán

$$
\begin{aligned}
|H| &= \frac{3}{2} \cdot |S| \\
|S| &= \frac{2}{3} \cdot |H|
\end{aligned}
$$

Eulerova polyedrická formula

$$
\begin{aligned}
|S| &= |H| - |V| + 2 \\
\frac{2}{3} \cdot |H| &= |H| - |V| + 2 \\
|V| - 2 &= \frac{1}{3} \cdot |H| \\
|H| &= 3 \cdot |V| - 6
\end{aligned}
$$

# Maximum počtu hrán rovinného grafu



Každá stena určuje 3 hrany. Keby trojuholníky boli disjunktné (každá hrana len v jednom trojuholníku) potom by sme na ich vytvorenie potrebovali 3.$|S|$ hrán.

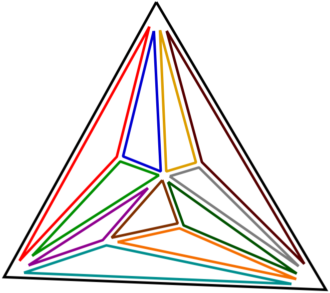
Keďže každá hrana je práve v dvoch stenách je počet hrán rovinnom grafe s max. počtom hrán

$$|H| = \frac{3}{2} \cdot |S|$$
$$|S| = \frac{2}{3} \cdot |H|$$

Eulerova polyedrická formula

$$|S| = |H| - |V| + 2$$
$$\frac{2}{3} \cdot |H| = |H| - |V| + 2$$
$$|V| - 2 = \frac{1}{3} \cdot |H|$$
$$|H| = 3 \cdot |V| - 6$$

# Maximum počtu hrán rovinného grafu



Každá stena určuje 3 hrany. Keby trojuholníky boli disjunktné (každá hrana len v jednom trojuholníku) potom by sme na ich vytvorenie potrebovali $3.|S|$ hrán.

Keďže každá hrana je práve v dvoch stenách je počet hrán rovinnom grafe s max. počtom hrán

$$\begin{aligned} |H| &= \frac{3}{2} \cdot |S| \\ |S| &= \frac{2}{3} \cdot |H| \end{aligned}$$

Eulerova polyedrická formula

$$\begin{aligned} |S| &= |H| - |V| + 2 \\ \frac{2}{3} \cdot |H| &= |H| - |V| + 2 \\ |V| - 2 &= \frac{1}{3} \cdot |H| \\ |H| &= 3 \cdot |V| - 6 \end{aligned}$$

# *Maximum počtu hrán rovinného grafu*

### *Dôsledok*

*V každom rovinnom grafe* $G = (V, H)$, *kde* $V \geq 3$, *je*

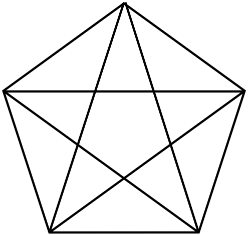
$$|H| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$

# *Úplný graf $K_5$ nie je rovinný*

## *Veta*

*Úplný graf s piatimi vrcholmi $K_5$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.



Úplný graf $K_5$ má 5 vrcholov a $(5 \cdot 4)/2 = 10$ hrán.
Keby bol rovinný mohol, by mať najviac $3 \cdot |V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$ hrán.

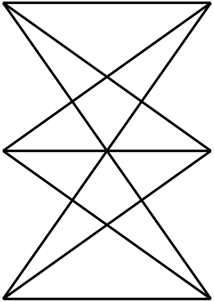
# Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný

## Veta

*Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.

Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný.
Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t. j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky.



Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má $|S|$ stien.
Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.|S|$ hrán.

Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.|S|/2 = 2.|S|$ hrán, t. j. $|H| \geq 2|S|$

$$|H| \geq \quad 2 \cdot \underbrace{|S|}_{=|H|-|V|+2} = 2 \cdot |H| - 2 \cdot |V| + 2 \cdot 2$$

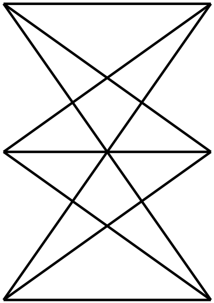
$$-|H| \geq -2 \cdot |V| + 4$$

$$|H| \leq \quad 2 \cdot |V| - 4$$

### *Veta*

*Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.



Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný.
Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t. j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky.

Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má $|S|$ stien.
Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.|S|$ hrán.

Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.|S|/2 = 2.|S|$ hrán, t. j. $|H| \geq 2|S|$

$$|H| \geq \quad 2 \cdot \underbrace{|S|}_{=|H|-|V|+2} = 2 \cdot |H| - 2 \cdot |V| + 2 \cdot 2$$

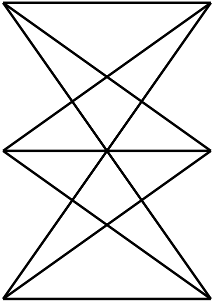
$$-|H| \geq -2 \cdot |V| + 4$$

$$|H| \leq \quad 2 \cdot |V| - 4$$

### *Veta*

*Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.



Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný.
Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t. j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky.

Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má $|S|$ stien.
Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.|S|$ hrán.

Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.|S|/2 = 2.|S|$ hrán, t. j. $|H| \geq 2|S|$

$$|H| \geq \quad 2 \cdot \underbrace{|S|}_{=|H|-|V|+2} = 2 \cdot |H| - 2 \cdot |V| + 2 \cdot 2$$

$$-|H| \geq -2 \cdot |V| + 4$$

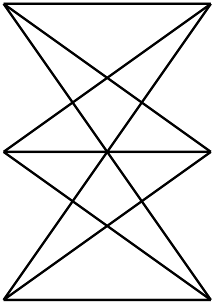
$$|H| \leq \quad 2 \cdot |V| - 4$$

# *Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný*

## *Veta*

*Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.



Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný.
Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t. j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky.

Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má $|S|$ stien.
Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.|S|$ hrán.

Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.|S|/2 = 2.|S|$ hrán, t. j. $|H| \geq 2|S|$

$$|H| \geq \quad 2 \cdot \underbrace{|S|}_{=|H|-|V|+2} = 2 \cdot |H| - 2 \cdot |V| + 2 \cdot 2$$

$$-|H| \geq -2 \cdot |V| + 4$$

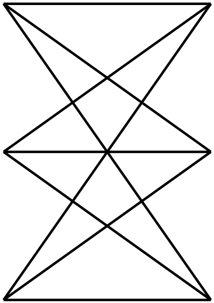
$$|H| \leq \quad 2 \cdot |V| - 4$$

# Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný

## Veta

*Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.



Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný.
Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t. j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky.

Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má $|S|$ stien.
Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.|S|$ hrán.

Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.|S|/2 = 2.|S|$ hrán, t. j. $|H| \geq 2|S|$

$$|H| \geq 2 \cdot \underbrace{|S|}_{=|H|-|V|+2} = 2 \cdot |H| - 2 \cdot |V| + 2 \cdot 2$$

$$-|H| \geq -2 \cdot |V| + 4$$

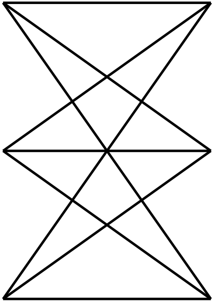
$$|H| \leq 2 \cdot |V| - 4$$

# *Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný*

### *Veta*

*Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.



Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný.
Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t. j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky.

Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má $|S|$ stien.
Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.|S|$ hrán.

Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.|S|/2 = 2.|S|$ hrán, t. j. $|H| \geq 2|S|$

$$|H| \geq \quad 2 \cdot \underbrace{|S|}_{=|H|-|V|+2} = 2 \cdot |H| - 2 \cdot |V| + 2 \cdot 2$$

$$-|H| \geq -2 \cdot |V| + 4$$

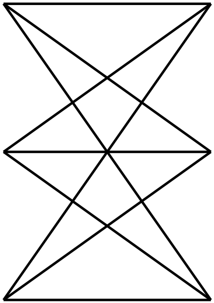
$$|H| \leq \quad 2 \cdot |V| - 4$$

# *Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný*

### *Veta*

*Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

DÔKAZ.



Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný.
Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t. j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky.

Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má $|S|$ stien.
Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.|S|$ hrán.

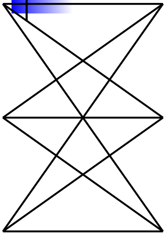
Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.|S|/2 = 2.|S|$ hrán, t. j. $|H| \geq 2|S|$

$$|H| \geq \quad 2 \cdot \underbrace{|S|}_{=|H|-|V|+2} = 2 \cdot |H| - 2 \cdot |V| + 2 \cdot 2$$

$$-|H| \geq -2 \cdot |V| + 4$$

$$|H| \leq \quad 2 \cdot |V| - 4$$

## Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný



Graf $K_{3,3}$ má 9 hrán. Keďže má 6 vrcholov a jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník.
Ak by bol rovinný, môže mať najviac $2.6 - 4 = 8$ hrán – graf $K_{3,3}$ nemôže byt rovinný.

### Definícia

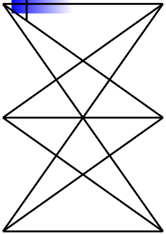
*Hovoríme, že graf $G' = (V', H')$ vznikol z grafu $G(V, H)$* **rozpolením hrany** *$h \in H$, ak*

$$V' = V \cup \{x\} \quad kde\ x \notin V,$$

$$H' = \big(H - \{\{u, v\}\}\big) \cup \{\{u, x\}, \{x, v\}\} \quad kde\ h = \{u, v\}.$$

*Hovoríme, že grafy $G(V, H)$, $G' = (V', H')$ sú* **homeomorfné***, ak sú izomorfné, alebo ak konečným počtom rozpoľovaní ich hrán môžeme z nich dostať izomorfné grafy.*

## Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný



Graf $K_{3,3}$ má 9 hrán. Keďže má 6 vrcholov a jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník.
Ak by bol rovinný, môže mať najviac $2.6 - 4 = 8$ hrán – graf $K_{3,3}$ nemôže byt rovinný.

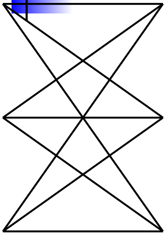
### Definícia

*Hovoríme, že graf $G' = (V', H')$ vznikol z grafu $G(V, H)$* **rozpolením hrany** *$h \in H$, ak*

$$V' = V \cup \{x\} \quad \textit{kde } x \notin V,$$
$$H' = \big(H - \{\{u, v\}\}\big) \cup \{\{u, x\}, \{x, v\}\} \quad \textit{kde } h = \{u, v\}.$$

*Hovoríme, že grafy $G(V, H)$, $G' = (V', H')$ sú* **homeomorfné**, *ak sú izomorfné, alebo ak konečným počtom rozpoľovaní ich hrán môžeme z nich dostať izomorfné grafy.*

# *Úplný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný*



Graf $K_{3,3}$ má 9 hrán. Keďže má 6 vrcholov a jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník.
Ak by bol rovinný, môže mať najviac $2.6 - 4 = 8$ hrán – graf $K_{3,3}$ nemôže byt rovinný.

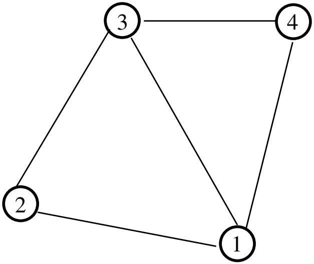
## Definícia

*Hovoríme, že graf $G' = (V', H')$ vznikol z grafu $G(V, H)$* **rozpolením hrany** *$h \in H$, ak*

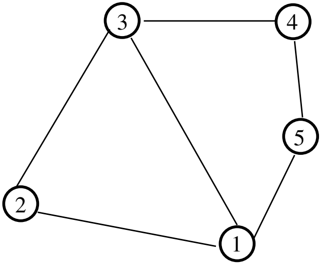
$$V' = V \cup \{x\} \quad kde\ x \notin V,$$
$$H' = \big(H - \{\{u, v\}\}\big) \cup \{\{u, x\}, \{x, v\}\} \quad kde\ h = \{u, v\}.$$

*Hovoríme, že grafy $G(V, H)$, $G' = (V', H')$ sú* **homeomorfné**, *ak sú izomorfné, alebo ak konečným počtom rozpoľovaní ich hrán môžeme z nich dostať izomorfné grafy.*

# Homeomorfné grafy




a) Graf $G$

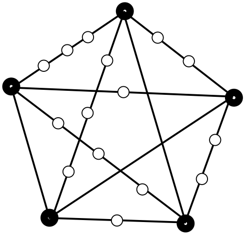



b) Graf $\overline{G}$

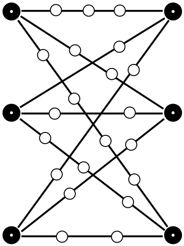
Homeomorfné grafy.
Graf $\overline{G}$ vznikol z grafu $G$ rozpolením hrany $\{1, 4\}$.

### Veta

**Kuratowski.** *Graf G je rovinný práve vtedy, keď ako podgraf neobsahuje graf homeomorfný s $K_5$ alebo $K_{3,3}$.*



a) Graf homeomorfný s $K_5$

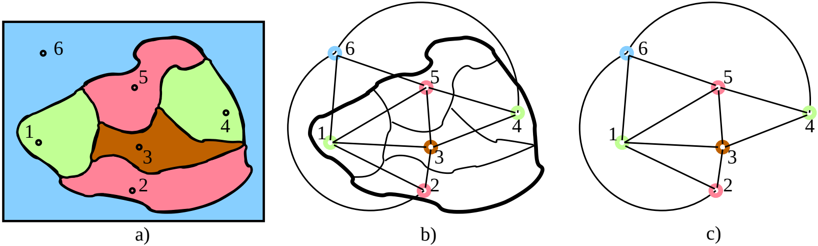


b) Graf homeomorfný s $K_{3,3}$

Dva prototypy nerovinných grafov.

# Problém farbenia máp

Problém farbenia máp:
Zafarbiť štáty politickej mapy minimálnym počtom farieb tak, aby žiadne dva štáty so spoločnou hranicou neboli tej istej farby.




Grafový model pre problém farbenia máp.

a) každému štátu i moru priradíme vrchol grafu,

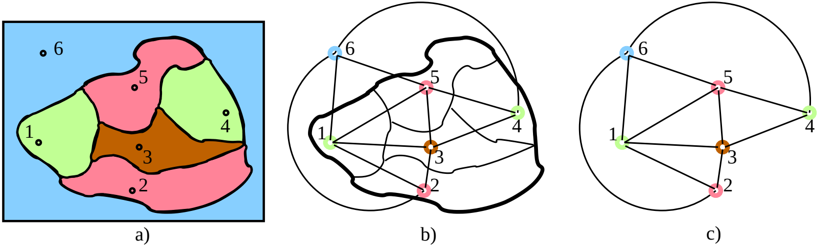
b) pospájame vrcholy susedných štátov,

c) diagram výsledného grafu.

Problém farbenia máp sme previedli na problém:
Zafarbiť vrcholy grafu minimálnym počtom farieb tak, aby yžiadne dva susedné vrcholy neboli tej istej farby.

# Problém farbenia máp

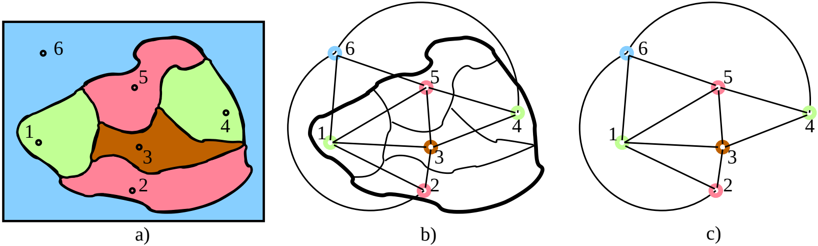
Problém farbenia máp:
Zafarbiť štáty politickej mapy minimálnym počtom farieb tak, aby žiadne dva štáty so spoločnou hranicou neboli tej istej farby.




Grafový model pre problém farbenia máp.
a) každému štátu i moru priradíme vrchol grafu,
b) pospájame vrcholy susedných štátov,
c) diagram výsledného grafu.

Problém farbenia máp sme previedli na problém:
Zafarbiť vrcholy grafu minimálnym počtom farieb tak, aby yžiadne dva susedné vrcholy neboli tej istej farby.

Problém farbenia máp:
Zafarbiť štáty politickej mapy minimálnym počtom farieb tak, aby žiadne dva štáty so spoločnou hranicou neboli tej istej farby.

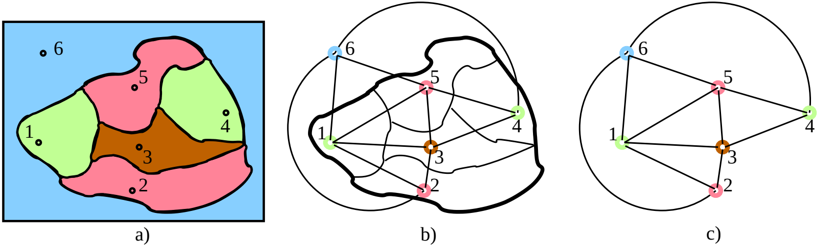



Grafový model pre problém farbenia máp.
a) každému štátu i moru priradíme vrchol grafu,
b) pospájame vrcholy susedných štátov,
c) diagram výsledného grafu.

Problém farbenia máp sme previedli na problém:
Zafarbiť vrcholy grafu minimálnym počtom farieb tak, aby yžiadne dva susedné vrcholy neboli tej istej farby.

# Problém farbenia máp

Problém farbenia máp:
Zafarbiť štáty politickej mapy minimálnym počtom farieb tak, aby žiadne dva štáty so spoločnou hranicou neboli tej istej farby.




Grafový model pre problém farbenia máp.
a) každému štátu i moru priradíme vrchol grafu,
b) pospájame vrcholy susedných štátov,
c) diagram výsledného grafu.

Problém farbenia máp sme previedli na problém:
Zafarbiť vrcholy grafu minimálnym počtom farieb tak, aby yžiadne dva susedné vrcholy neboli tej istej farby.

# Chromatické číslo a k-zafarbiteľnosť

## Definícia

**Zafarbenie grafu** *je funkcia, ktorá každému vrcholu grafu priraďuje farbu.*

*Zafarbenie, ktoré žiadnym dvom susedným vrcholom nepriraďuje tú istú farbu nazveme* **prípustným zafarbením**.

*Graf* $G = (V, H)$ *nazveme* $k$-**zafarbiteľným**, *ak jeho vrcholy možno prípustne zafarbiť* $k$ *farbami (t. j. tak, aby žiadne dva susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou.)*

**Chromatické číslo grafu** *je najmenšie prirodzené číslo* $k$ *také, že graf* $G$ *je* $k$*-zafarbiteľný.*
*Chromatické číslo grafu* $G$ *budeme značiť symbolom* $\chi(G)$.

# Chromatické číslo a k-zafarbiteľnosť

## Definícia

**Zafarbenie grafu** *je funkcia, ktorá každému vrcholu grafu priraďuje farbu.*

*Zafarbenie, ktoré žiadnym dvom susedným vrcholom nepriraďuje tú istú farbu nazveme* **prípustným zafarbením**.

*Graf $G = (V, H)$ nazveme $k$-***zafarbiteľným***, ak jeho vrcholy možno prípustne zafarbiť $k$ farbami (t. j. tak, aby žiadne dva susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou.)*

**Chromatické číslo grafu** *je najmenšie prirodzené číslo $k$ také, že graf $G$ je $k$-zafarbiteľný.*
*Chromatické číslo grafu $G$ budeme značiť symbolom $\chi(G)$.*

# Chromatické číslo a $k$-zafarbiteľnosť

## Definícia

**Zafarbenie grafu** *je funkcia, ktorá každému vrcholu grafu priraďuje farbu.*

*Zafarbenie, ktoré žiadnym dvom susedným vrcholom nepriraďuje tú istú farbu nazveme* **prípustným zafarbením***.*

*Graf* $G = (V, H)$ *nazveme* $k$-**zafarbiteľným***, ak jeho vrcholy možno prípustne zafarbiť* $k$ *farbami (t. j. tak, aby žiadne dva susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou.)*

**Chromatické číslo grafu** *je najmenšie prirodzené číslo* $k$ *také, že graf* $G$ *je* $k$*-zafarbiteľný.*
*Chromatické číslo grafu* $G$ *budeme značiť symbolom* $\chi(G)$*.*

# *Chromatické číslo a k-zafarbiteľnosť*

## *Definícia*

**Zafarbenie grafu** *je funkcia, ktorá každému vrcholu grafu priraďuje farbu.*

*Zafarbenie, ktoré žiadnym dvom susedným vrcholom nepriraďuje tú istú farbu nazveme* **prípustným zafarbením**.

*Graf* $G = (V, H)$ *nazveme* $k$-**zafarbiteľným**, *ak jeho vrcholy možno prípustne zafarbiť* $k$ *farbami (t. j. tak, aby žiadne dva susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou.)*

**Chromatické číslo grafu** *je najmenšie prirodzené číslo* $k$ *také, že graf* $G$ *je* $k$*-zafarbiteľný.*
*Chromatické číslo grafu* $G$ *budeme značiť symbolom* $\chi(G)$.

# Heuristiky pre farbenie grafu

### Veta

*Problém zafarbiť graf s minimálnym počtom farieb je NP-ťažký.*

### Algoritmus

**Sekvenčné farbenie grafu.**

- **Krok 1.** *Nech* $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ *je ľubovoľná postupnosť vrcholov grafu* $G = (V, H)$.
- **Krok 2.** *Postupne pre* $i = 1, 2, \dots, n$ *urob:*
  *Zafarbi vrchol* $v_i$ *farbou najmenšieho čísla takou, že žiaden zo zafarbených susedov vrchola* $v_i$ *nie je zafarbený touto farbou.* ♣

# Heuristiky pre farbenie grafu

## Veta

*Problém zafarbiť graf s minimálnym počtom farieb je NP-ťažký.*

## Algoritmus

**Sekvenčné farbenie grafu.**

- **Krok 1.** *Nech* $\mathcal{P} = v_1, v_2, \ldots, v_n$ *je ľubovoľná postupnosť vrcholov grafu* $G = (V, H)$.
- **Krok 2.** *Postupne pre* $i = 1, 2, \ldots, n$ *urob:*
  *Zafarbi vrchol* $v_i$ *farbou najmenšieho čísla takou, že žiaden zo zafarbených susedov vrchola* $v_i$ *nie je zafarbený touto farbou.*

♣

# Horný odhad chromatického čísla grafu

### Veta

*Algoritmus na sekvenčné farbenie grafu potrebuje na zafarbenie ľubovoľného grafu najviac*

$$\max\{\deg(v) \mid v \in V\} + 1$$

*farieb.*

### Dôsledok

*Pre chromatické číslo $\chi(G)$ ľubovoľného grafu $G$ platí:*

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$$

# Horný odhad chromatického čísla grafu

## Veta

*Algoritmus na sekvenčné farbenie grafu potrebuje na zafarbenie ľubovoľného grafu najviac*

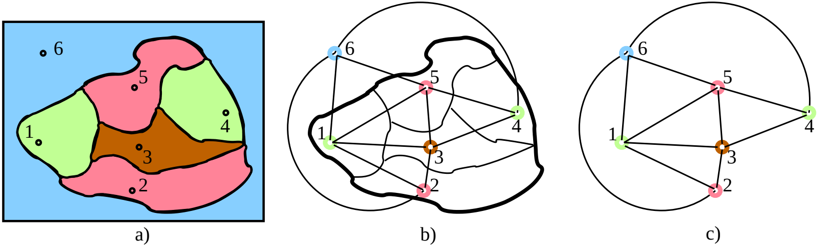
$$\max\{\deg(v) \mid v \in V\} + 1$$

*farieb.*

## Dôsledok

*Pre chromatické číslo $\chi(G)$ ľubovoľného grafu $G$ platí:*

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$$




Problém farbenia politickej mapy vedie na problém zafarbenia rovinného grafu minimálnym počtom farieb.

# Farbenie rovinných grafov a farbenie máp

## Veta

**Appel, Haken, 1976.** *Každý rovinný graf je 4-zafarbiteľný.*

## Poznámka

- *Dlho pred dokázaním tejto vety sa vedelo, že každý rovinný graf je 5-zafarbiteľný.*

  *Nenašiel sa však žiaden rovinný graf $G$ s chromatickým číslom $\chi(G) = 5$.*

- *Veta o 4-zafarbiteľnosti rovinných grafov je jedna z prvých, na dokázanie ktorej bol použitý počítač.*

  *Počítačový postup navrhol pôvodne Heesch, Appel a Haken zredukovali problém na skontrolovanie viac ako 1900 konfigurácií.*

- *Na vyriešenie problému sa spotrebovalo viac ako 1200 hodín strojového času.*

- *Dnes sú počítače takmer o tri rády rýchlejšie, ale aj tak by tento výpočet vyžadoval výpočtový čas meraný v hodinách.*

# Farbenie rovinných grafov a farbenie máp

## Veta

**Appel, Haken, 1976.** *Každý rovinný graf je 4-zafarbiteľný.*

## Poznámka

- *Dlho pred dokázaním tejto vety sa vedelo, že každý rovinný graf je 5-zafarbiteľný.*

  *Nenašiel sa však žiaden rovinný graf $G$ s chromatickým číslom $\chi(G) = 5$.*
- *Veta o 4-zafarbiteľnosti rovinných grafov je jedna z prvých, na dokázanie ktorej bol použitý počítač.*

  *Počítačový postup navrhol pôvodne Heesch, Appel a Haken zredukovali problém na skontrolovanie viac ako 1900 konfigurácií.*
- *Na vyriešenie problému sa spotrebovalo viac ako 1200 hodín strojového času.*
- *Dnes sú počítače takmer o tri rády rýchlejšie, ale aj tak by tento výpočet vyžadoval výpočtový čas meraný v hodinách.*

## Farbenie rovinných grafov a farbenie máp

### Veta

**Appel, Haken, 1976.** *Každý rovinný graf je 4-zafarbiteľný.*

### Poznámka

- *Dlho pred dokázaním tejto vety sa vedelo, že každý rovinný graf je 5-zafarbiteľný.*

  *Nenašiel sa však žiaden rovinný graf $G$ s chromatickým číslom $\chi(G) = 5$.*

- *Veta o 4-zafarbiteľnosti rovinných grafov je jedna z prvých, na dokázanie ktorej bol použitý počítač.*

  *Počítačový postup navrhol pôvodne Heesch, Appel a Haken zredukovali problém na skontrolovanie viac ako 1900 konfigurácií.*

- *Na vyriešenie problému sa spotrebovalo viac ako 1200 hodín strojového času.*

- *Dnes sú počítače takmer o tri rády rýchlejšie, ale aj tak by tento výpočet vyžadoval výpočtový čas meraný v hodinách.*

## Farbenie rovinných grafov a farbenie máp

### Veta

**Appel, Haken, 1976.** *Každý rovinný graf je 4-zafarbiteľný.*

### Poznámka

- *Dlho pred dokázaním tejto vety sa vedelo, že každý rovinný graf je 5-zafarbiteľný.*

  *Nenašiel sa však žiaden rovinný graf $G$ s chromatickým číslom $\chi(G) = 5$.*

- *Veta o 4-zafarbiteľnosti rovinných grafov je jedna z prvých, na dokázanie ktorej bol použitý počítač.*

  *Počítačový postup navrhol pôvodne Heesch, Appel a Haken zredukovali problém na skontrolovanie viac ako 1900 konfigurácií.*

- *Na vyriešenie problému sa spotrebovalo viac ako 1200 hodín strojového času.*

- *Dnes sú počítače takmer o tri rády rýchlejšie, ale aj tak by tento výpočet vyžadoval výpočtový čas meraný v hodinách.*

## Veta

**Appel, Haken, 1976.** *Každý rovinný graf je 4-zafarbiteľný.*

## Poznámka

- *Dlho pred dokázaním tejto vety sa vedelo, že každý rovinný graf je 5-zafarbiteľný.*

  *Nenašiel sa však žiaden rovinný graf $G$ s chromatickým číslom $\chi(G) = 5$.*

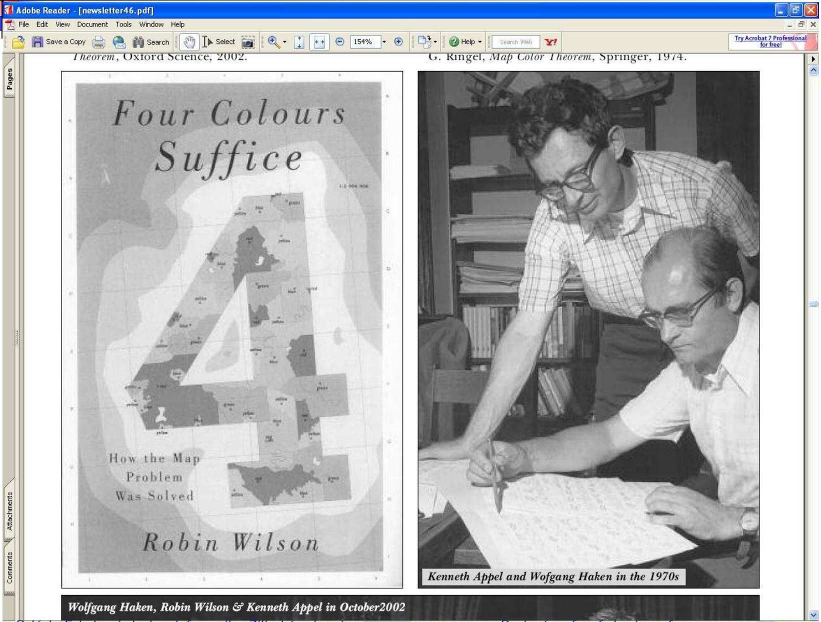
- *Veta o 4-zafarbiteľnosti rovinných grafov je jedna z prvých, na dokázanie ktorej bol použitý počítač.*

  *Počítačový postup navrhol pôvodne Heesch, Appel a Haken zredukovali problém na skontrolovanie viac ako 1900 konfigurácií.*

- *Na vyriešenie problému sa spotrebovalo viac ako 1200 hodín strojového času.*

- *Dnes sú počítače takmer o tri rády rýchlejšie, ale aj tak by tento výpočet vyžadoval výpočtový čas meraný v hodinách.*

# Appel, Haken



Adobe Reader - [newsletter46.pdf]
Theorem, Oxford Science, 2002.
G. Ringel, Map Color Theorem, Springer, 1974.
Four Colours Suffice
How the Map Problem Was Solved
Robin Wilson
Kenneth Appel and Wofgang Haken in the 1970s
Wolfgang Haken, Robin Wilson & Kenneth Appel in October2002

## *Algoritmus*

**Paralelné farbenie grafu.**

- **Krok 1.** *Zoraď vrcholy grafu $G = (V, H)$ do postupnosti $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ podľa stupňa vrchola nerastúco.*
  *Inicializuj množinu farieb $\mathcal{F} := \{1\}$, $j := 1$.*
- **Krok 2.** *Postupne s prvkami $v_1, v_2, \dots, v_n$ postupnosti $\mathcal{P}$ urob:*
  *Ak vrchol $v_i$ nie je zafarbený a nemá suseda zafarbeného farbou $j$, tak ho farbou $j$ zafarbi.*
- **Krok 3.** *Ak sú všetky vrcholy postupnosti $\mathcal{P}$ zafarbené, STOP.*
- **Krok 4.** *Ak nie sú všetky vrcholy postupnosti $\mathcal{P}$ zafarbené, zvýš počet farieb, t. j. $j := j+1$, $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{j\}$ a GOTO Krok 2.*

♣

### *Algoritmus*

**Paralelné farbenie grafu.**

- **Krok 1.** *Zoraď vrcholy grafu* $G = (V, H)$ *do postupnosti* $\mathcal{P} = v_1, v_2, \ldots, v_n$ *podľa stupňa vrchola nerastúco.*
  *Inicializuj množinu farieb* $\mathcal{F} := \{1\}$, $j := 1$.
- **Krok 2.** *Postupne s prvkami* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *postupnosti* $\mathcal{P}$ *urob:*
  *Ak vrchol* $v_i$ *nie je zafarbený a nemá suseda zafarbeného farbou* $j$*, tak ho farbou* $j$ *zafarbi.*
- **Krok 3.** *Ak sú všetky vrcholy postupnosti* $\mathcal{P}$ *zafarbené, STOP.*
- **Krok 4.** *Ak nie sú všetky vrcholy postupnosti* $\mathcal{P}$ *zafarbené, zvýš počet farieb, t. j.* $j{:=}j{+}1$, $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{j\}$ *a GOTO Krok 2.*

♣

# *Paralelné farbenie grafu*

## *Algoritmus*

**Paralelné farbenie grafu.**

- **Krok 1.** *Zoraď vrcholy grafu* $G = (V, H)$ *do postupnosti* $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ *podľa stupňa vrchola nerastúco.*
  *Inicializuj množinu farieb* $\mathcal{F} := \{1\}$, $j := 1$.
- **Krok 2.** *Postupne s prvkami* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *postupnosti* $\mathcal{P}$ *urob:*
  *Ak vrchol* $v_i$ *nie je zafarbený a nemá suseda zafarbeného farbou* $j$, *tak ho farbou* $j$ *zafarbi.*
- **Krok 3.** *Ak sú všetky vrcholy postupnosti* $\mathcal{P}$ *zafarbené, STOP.*
- **Krok 4.** *Ak nie sú všetky vrcholy postupnosti* $\mathcal{P}$ *zafarbené, zvýš počet farieb, t. j.* $j{:=}j{+}1$, $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{j\}$ *a GOTO Krok 2.*

♣

## Algoritmus

**Paralelné farbenie grafu.**

- **Krok 1.** *Zoraď vrcholy grafu* $G = (V, H)$ *do postupnosti* $\mathcal{P} = v_1, v_2, \ldots, v_n$ *podľa stupňa vrchola nerastúco.*
  *Inicializuj množinu farieb* $\mathcal{F} := \{1\}$, $j := 1$.
- **Krok 2.** *Postupne s prvkami* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *postupnosti* $\mathcal{P}$ *urob:*
  *Ak vrchol* $v_i$ *nie je zafarbený a nemá suseda zafarbeného farbou* $j$*, tak ho farbou* $j$ *zafarbi.*
- **Krok 3.** *Ak sú všetky vrcholy postupnosti* $\mathcal{P}$ *zafarbené, STOP.*
- **Krok 4.** *Ak nie sú všetky vrcholy postupnosti* $\mathcal{P}$ *zafarbené, zvýš počet farieb, t. j.* $j{:=}j{+}1$, $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{j\}$ *a GOTO Krok 2.* ♣

# *LDF (Largest Degree First) farbenie grafu*

Nasledujúci algoritmus je v podstate sekvenčný algoritmus, ktorý si však v priebehu výpočtu stanovuje, ktorému z vrcholov sa bude prideľovať najnižšia prideliteľná farba.

## *Algoritmus*

**Farbenie grafu LDF (Largest Degree First).**
*Pre účel tohto algoritmu definujeme farebný stupeň vrchola $v$ ako počet rôznych farieb, ktorými sú zafarbení susedia vrchola $v$.*

- **Krok 1.** *Zo všetkých nezafarbených vrcholov s najväčším stupňom vyber vrchol $v$ s najväčším farebným stupňom.*
- **Krok 2.** *Priraď vrcholu $v$ farbu najnižšieho možného čísla.*
- *Ak sú všetky vrcholy zafarbené, STOP. Inak GOTO* **Krok 1.**

♣

# *LDF (Largest Degree First) farbenie grafu*

Nasledujúci algoritmus je v podstate sekvenčný algoritmus, ktorý si však v priebehu výpočtu stanovuje, ktorému z vrcholov sa bude prideľovať najnižšia prideliteľná farba.

## *Algoritmus*

**Farbenie grafu LDF (Largest Degree First).**
*Pre účel tohto algoritmu definujeme farebný stupeň vrchola $v$ ako počet rôznych farieb, ktorými sú zafarbení susedia vrchola $v$.*

- **Krok 1.** *Zo všetkých nezafarbených vrcholov s najväčším stupňom vyber vrchol $v$ s najväčším farebným stupňom.*
- **Krok 2.** *Priraď vrcholu $v$ farbu najnižšieho možného čísla.*
- *Ak sú všetky vrcholy zafarbené, STOP. Inak GOTO* **Krok 1.**

♣

# *LDF (Largest Degree First) farbenie grafu*

Nasledujúci algoritmus je v podstate sekvenčný algoritmus, ktorý si však v priebehu výpočtu stanovuje, ktorému z vrcholov sa bude prideľovať najnižšia prideliteľná farba.

## *Algoritmus*

**Farbenie grafu LDF (Largest Degree First).**
*Pre účel tohto algoritmu definujeme farebný stupeň vrchola $v$ ako počet rôznych farieb, ktorými sú zafarbení susedia vrchola $v$.*

- **Krok 1.** *Zo všetkých nezafarbených vrcholov s najväčším stupňom vyber vrchol $v$ s najväčším farebným stupňom.*
- **Krok 2.** *Priraď vrcholu $v$ farbu najnižšieho možného čísla.*
- *Ak sú všetky vrcholy zafarbené, STOP. Inak GOTO* **Krok 1.**

♣

## Aplikácie

- Priraďovanie rádiových frekvencií
- Minimalizácia počtu nákupných tašiek
- Minimalizácia počtu fáz na svetelne riadenej kriyžovatke
- Rozvrhovanie školských predmetov do minimálneho počtu časových blokov
- Minimalizácia počtu autobusových stanovíšť na autobuspovej stanici
- Atď. ....

# Aplikácie

**Aplikácie**

- Priraďovanie rádiových frekvencií
- Minimalizácia počtu nákupných tašiek
- Minimalizácia počtu fáz na svetelne riadenej kriyžovatke
- Rozvrhovanie školských predmetov do minimálneho počtu časových blokov
- Minimalizácia počtu autobusových stanovíšť na autobuspovej stanici
- Atď. ....

**Aplikácie**

- Priraďovanie rádiových frekvencií
- Minimalizácia počtu nákupných tašiek
- Minimalizácia počtu fáz na svetelne riadenej kriyžovatke
- Rozvrhovanie školských predmetov do minimálneho počtu časových blokov
- Minimalizácia počtu autobusových stanovíšť na autobuspovej stanici
- Atď. ....

**Aplikácie**

- Priraďovanie rádiových frekvencií
- Minimalizácia počtu nákupných tašiek
- Minimalizácia počtu fáz na svetelne riadenej kriyžovatke
- Rozvrhovanie školských predmetov do minimálneho počtu časových blokov
- Minimalizácia počtu autobusových stanovíšť na autobuspovej stanici
- Atď. ....

**Aplikácie**

- Priraďovanie rádiových frekvencií
- Minimalizácia počtu nákupných tašiek
- Minimalizácia počtu fáz na svetelne riadenej kriyžovatke
- Rozvrhovanie školských predmetov do minimálneho počtu časových blokov
- Minimalizácia počtu autobusových stanovíšť na autobuspovej stanici
- Atď. ....

**Aplikácie**

- Priraďovanie rádiových frekvencií
- Minimalizácia počtu nákupných tašiek
- Minimalizácia počtu fáz na svetelne riadenej kriyžovatke
- Rozvrhovanie školských predmetov do minimálneho počtu časových blokov
- Minimalizácia počtu autobusových stanovíšť na autobuspovej stanici
- Atď. ....