Obsah

Kapitola 1

Funkcie n reálnych premenných

1.1 Reálne a vektorové funkcie

S pojmom vektor sme sa stretli už na základnej škole, keď sme v rovine alebo v priestore spájali dva body. Vo všeobecnosti vektormi môžu byť rôzne objekty (usporiadané n-tice, matice, funkcie alebo aj reálne čísla). Spolu so svojimi vlastnosťami tvoria vektorový priestor [11, 20, 34]. Vektory, ktorými sa budeme zaoberať v tejto časti, sú usporiadané n-tice reálnych čísel, t. j. prvky Euklidoveho priestoru R^n, kde $n \in N$.

Vektorový priestor sa tiež niekedy nazýva **lineárny priestor**, jeho prvky sa nazývajú **vektory**. Prvky poľa, t. j. komutatívneho telesa, nad ktorým je definovaný, sa nazývajú **skaláre**. Vo všeobecnosti môžeme vektorový priestor definovať nad ľubovoľným poľom. My sa obmedzíme na pole $(R, +, \cdot)$, t. j. množinu všetkých reálnych čísel R s operáciami sčítania $+$ a násobenia $\cdot$.

Uvažujme neprázdnu množinu prvkov („vektorov") V, na ktorej je definovaná binárna operácia[1] $\oplus : V \times V \to V$ tak, že $(V, \oplus)$ tvorí komutatívnu grupu. To znamená, že sú splnené nasledujúce podmienky:

- Platí asociatívny zákon, t. j. pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V$ platí $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$.
- Existuje neutrálny prvok $\mathbf{0}$, t. j. pre všetky $\alpha \in V$ platí $\alpha \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \alpha = \alpha$.
- Ku každému $\alpha \in V$ existuje jediný symetrizačný prvok β taký, že $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \mathbf{0}$.
- Platí komutatívny zákon, t. j. pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$.

Symetrizačný prvok β sa tiež nazýva inverzný, resp. opačný prvok a označuje sa $\beta = \ominus\alpha$. Nech vonkajšia operácia[2] $\odot : R \times V \to V$ je taká, že pre všetky $c, d \in R$, $\alpha, \beta \in V$ platí:

- $c \odot (d \odot \alpha) = (c \cdot d) \odot \alpha$.
- $(c + d) \odot \alpha = (c \odot \alpha) \oplus (d \odot \alpha)$.
- $c \odot (\alpha \oplus \beta) = (c \odot \alpha) \oplus (c \odot \beta)$.
- $1 \odot \alpha = \alpha$.

Potom $(V, \oplus, \odot)$, t. j. množinu V s binárnou operáciou $\oplus$ a vonkajšou operáciou $\odot$, nazývame **vektorovým priestorom** nad telesom R.

Funkcia $(\cdot, \cdot) : V \times V \to R$ sa nazýva **skalárny súčin** lineárneho priestoru V, ak:

- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$, t. j. je symetrická.
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$, $c \in R$ platí $(c \odot \alpha, \beta) = c \cdot (\alpha, \beta)$, t. j. je homogénna.

[1] To znamená, keď sčítame dva vektory $\alpha_1 \oplus \alpha_2$, dostaneme opäť vektor.
[2] To znamená, keď vynásobíme číslo (skalár) a vektor $c \odot \alpha$, dostaneme opäť vektor.

- Pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V$ platí $(\alpha \oplus \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$, t. j. je aditívna.
- Pre všetky $\alpha \neq \mathbf{0}$ platí $(\alpha, \alpha) > 0$, t. j. je kladne definitná.

Ak $(\cdot, \cdot) : V \times V \to R$ je skalárnym súčinom lineárneho priestoru V, potom funkcia $\|\cdot\| : V \to R$ definovaná vzťahom $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ je normou tohto lineárneho priestoru. Hovoríme, že **skalárny súčin indukuje normu** priestoru.

Funkcia $\|\cdot\| : V \to R$ sa nazýva **norma lineárneho priestoru V**, ak:

- Pre všetky $\alpha \in V$ platí $\|\alpha\| \geq 0$, pričom $\|\alpha\| = 0$ platí práve vtedy, ak $\alpha = \mathbf{0}$.
- Pre všetky $\alpha \in V$, $c \in R$ platí $\|c \odot \alpha\| = |c| \cdot \|\alpha\|$.
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí trojuholníkova nerovnosť $\|\alpha \oplus \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

Ak $\|\cdot\| : V \to R$ je normou lineárneho priestoru V, potom priestor V nazývame **normovaný** (s normou $\|\cdot\|$).

Funkcia $\varrho\colon V \times V \to R$ definovaná vzťahom $\varrho(\alpha, \beta) = \|\alpha \ominus \beta\|$ je metrikou tohto lineárneho priestoru. Hovoríme, že **norma indukuje metriku** priestoru.

Funkcia $\varrho\colon V \times V \to R$ sa nazýva **metrika lineárneho priestoru V**, ak:

- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $\varrho(\alpha, \beta) \geq 0$, pričom $\varrho(\alpha, \beta) = 0$ platí práve vtedy, ak $\alpha = \beta$.
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $\varrho(\alpha, \beta) = \varrho(\beta, \alpha)$, t. j. je symetrická.
- Pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V$ platí trojuholníkova nerovnosť $\varrho(\alpha, \beta) \leq \varrho(\alpha, \gamma) + \varrho(\gamma, \beta)$.

Ak $\varrho\colon V \times V \to R$ je metrikou lineárneho priestoru V, potom priestor V nazývame **metrický** (s metrikou ϱ).

V danom vektorovom priestore V môže byť definovaných viacero skalárnych súčtov, noriem, či metrík (viď poznámka 1.1.2). Ak hovoríme o metrickom priestore (normovanom priestore alebo o priestore so skalárnym súčinom), musíme uvažovať priestor V s konkrétnou metrikou ϱ (normou alebo skalárnym súčinom).

Pomocou skalárneho súčinu môžeme vybudovať v priestore R^n, $n \in N$ geometriu s použitím vzdialeností a uhlov, ako sme zvyknutí v rovine, resp. v priestore. Skalárny súčin dvoch vektorov reprezentuje uhol (jeho kosínus), t. j. odchýlku prvkov (vektorov). Metrika vyjadruje vzdialenosť prvkov a norma vyjadruje veľkosť (dĺžku) prvku.

1.1.1 Euklidov priestor R^n

Množina $R^n = R \times R \times \cdots \times R = \{\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$, $n \in N$ sa skladá z usporiadaných n-tíc reálnych čísel. Pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$, $c \in R$ sú definované (binárna) operácia súčet usporiadaných n-tíc $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ a (vonkajšia) operácia súčin reálneho čísla a usporiadanej n-tice $c \cdot \boldsymbol{x}$ po zložkách predpismi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1; x_2; \ldots; x_n) + (y_1; y_2; \ldots; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n), \\ c\boldsymbol{x} &= c \cdot \boldsymbol{x} = c \cdot (x_1; x_2; \ldots; x_n) = (cx_1; cx_2; \ldots; cx_n). \end{aligned}$$

Pre ľubovoľné $n \in N$ je priestor $(R^n, +, \cdot)$ **lineárny** s neutrálnym (nulovým) prvkom $\mathbf{0}_n = (0; 0; \ldots; 0)$. Pre svoje metrické vlastnosti sa nazýva **Euklidov**, resp. **euklidovský** (**n-rozmerný**) **priestor**.[3] Jeho **kanonickú** (**základnú, prirodzenú**) **bázu** tvoria vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, ..., $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (0; 0; \ldots; 1)$, t. j. vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (na i-tom mieste je jednotka).

[3]Namiesto $(R^n, +, \cdot)$ budeme stručne písať R^n.

Pre $n = 1$ dostaneme taktiež vektorový priestor. Je ním množina všetkých reálnych čísel R a vektory nebudeme zapisovať $\boldsymbol{x} = (x_1)$, ale stručne bez zátvoriek $\boldsymbol{x} = x_1$.

Nech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$, $n \in N$, $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$. **Skalárny súčin prvkov (vektorov) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$** definujeme vzťahom

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Veľkosť (dĺžku) prvku (vektora) $\boldsymbol{x}$ definujeme pomocou normy indukovanej týmto skalárnym súčinom vzťahom

$$\|\boldsymbol{x}\|_n = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Túto normu nazývame **euklidovská norma**. **Vzdialenosť prvkov (vektorov) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$** definujeme pomocou metriky indukovanej euklidovskou normou vzťahom

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_n = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Túto metriku nazývame **euklidovská metrika**. Keďže platí $\|\boldsymbol{x}\|_n = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}_n\|_n$, potom veľkosť (dĺžka) vektora $\boldsymbol{x}$ v priestore R^n predstavuje vzdialenosť $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{0}_n$.

Poznámka 1.1.1.
Euklidovská metrika a norma reprezentujú vzdialenosť a veľkosť, ako ju poznáme z analytickej geometrie. Pre $n = 1$, t. j. pre čísla $\boldsymbol{x} = x$, $\boldsymbol{y} = y$ na priamke R platí

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 = |x - y|.$$

Pre $n = 2$, t. j. pre vektory $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2)$ v rovine R^2 platí

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Pre $n = 3$, t. j. pre vektory $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; y_3)$ v priestore R^3 platí

$$\|\boldsymbol{x}\|_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_3 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Skalárny súčin $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|_n \cdot \|\boldsymbol{y}\|_n \cdot \cos\varphi$ vyjadruje uhol φ, ktorý zvierajú $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Špeciálne

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \text{ pre } n = 2, \quad \cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \text{ pre } n = 3.$$

Poznámka 1.1.2.
*Euklidovská norma v priestore R^n, $n \in N$ je špeciálnym prípadom p-**normy** pre $p = 2$. Uvedená p-norma, $p > 1$ je pre $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in R^n$ definovaná predpisom*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}.$$

*V priestore R^n sa ešte používajú **maximová (kubická) norma** $\|\cdot\|_m$ a **súčtová (oktaedrická) norma** $\|\cdot\|_s$ (všetky uvedené normy sú ekvivalentné)*

$$\|\boldsymbol{x}\|_m = \max\{\, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \,\}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

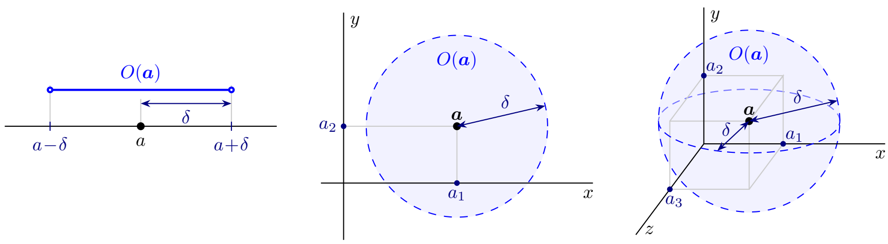
Nasledujúce definície v priestore R^n, $n \in N$ (t. j. aj pre $n = 1$) sú identické ako na množine reálnych čísel R (ma1: 2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel).

Nech $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in R^n$, $n \in N$, $\delta > 0$. **Okolím $O_\delta(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$ s polomerom δ** nazývame množinu (obr. 1.1.1)

$$O_\delta(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in R^n, \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_n < \delta\}.$$

Ak z okolia vylúčime bod $\boldsymbol{a}$, dostaneme **prstencové okolie bodu $\boldsymbol{a}$ s polomerom δ**

$$P_\delta(\boldsymbol{a}) = O_\delta(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{x} \in R^n, 0 < \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_n < \delta\}.$$



Obr. 1.1.1: Okolie $O_\delta(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a} = a$ na priamke R, bodu $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$ v rovine R^2 a bodu $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$ v priestore R^3

Bod $\boldsymbol{a} \in A$ sa nazýva **vnútorný bod množiny $A \subset R^n$**, $n \in N$, ak existuje okolie $O(\boldsymbol{a}) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny A nazývame **vnútro množiny A** a označujeme $\operatorname{int} A$.

Bod $\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **vonkajší bod množiny $A \subset R^n$**, $n \in N$, ak je vnútorným bodom jej doplnku $R^n - A$. Množinu všetkých vonkajších bodov množiny A nazývame **vonkajšok množiny A** a označujeme $\operatorname{ext} A$.

Bod $\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **hraničný bod množiny $A \subset R^n$**, $n \in N$, ak nie je ani vnútorným a ani vonkajším bodom[4] množiny A. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame **hranica množiny A** a označujeme[5] ∂A.

Bod $\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **hromadný bod množiny $A \subset R^n$**, $n \in N$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí $O(\boldsymbol{a})$ leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu $\boldsymbol{a}$, t. j. pre každé prstencové okolie $P(\boldsymbol{a})$ platí $P(\boldsymbol{a}) \cap A \neq \emptyset$. **Uzáverom množiny $A \subset R^n$**, nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých jej hromadných bodov.

Bod $\boldsymbol{a} \in A$, ktorý nie je hromadným bodom A sa nazýva **izolovaný bod množiny A**.

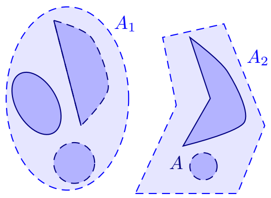
Množina $A \subset R^n$ sa nazýva **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje hromadné body. Ak každý jej bod je vnútorný, t. j. ak platí $A = \operatorname{int} A$, nazýva sa **otvorená**.

Množina $A \subset R^n$ sa nazýva **nesúvislá** (obr. 1.1.2), ak existujú otvorené množiny $A_1, A_2 \subset R^n$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ také, že $A \subset A_1 \cup A_2$, $A \cap A_1 \neq \emptyset$, $A \cap A_2 \neq \emptyset$. Ak nie je nesúvislá, nazýva sa **súvislá**. Ak je otvorená a súvislá, potom sa nazýva **oblasť**.

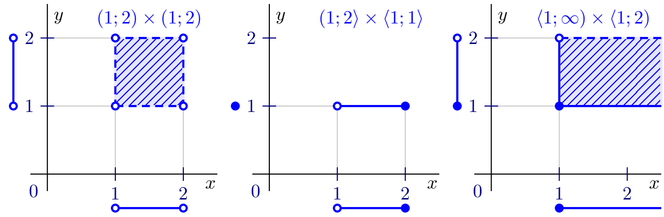
Množina $A \subset R^n$ sa nazýva **ohraničená**, ak existuje $\alpha > 0$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in A$ platí $\|\boldsymbol{x}\|_n < \alpha$.

[4] T. j. v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A a aspoň jeden bod z množiny $R^n - A$.

[5] Množiny $\operatorname{int} A$, ∂A a $\operatorname{ext} A$ sú disjunktné a platí pre ne $\operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A = R^n$, $\partial A = \partial(R^n - A)$, $\operatorname{int} A = \operatorname{ext}(R^n - A)$, $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(R^n - A)$.



Obr. 1.1.2: Nesúvislá množina v R^2



Obr. 1.1.3: Intervaly $(1;2)^2 = (1;2)\times(1;2)$, $\langle 1;2)\times\langle 1;1\rangle$, $\langle 1;\infty)\times\langle 1;2)$

Nech $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in R^*$, $n \in N$ sú také, že platí $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$, ..., $a_n \le b_n$. **Intervalom I v R^n** (**n-rozmerným intervalom**) nazývame množinu

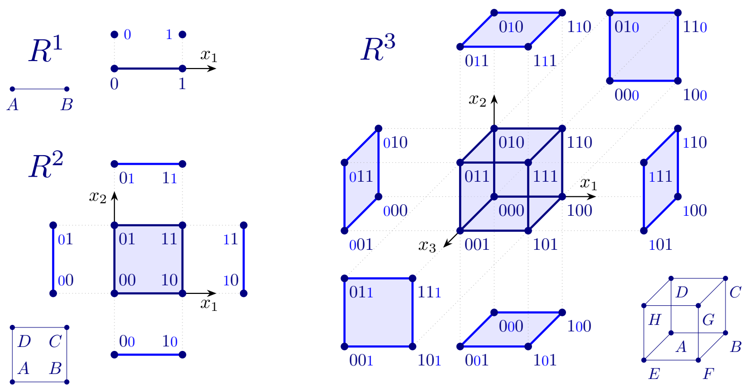
$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{\boldsymbol{x} \in R^n, x_i \in I_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\},$$

kde I_i, $i = 1, 2, \dots, n$ sú reálne (jednorozmerné) intervaly, t. j. $I_i = (a_i; b_i)$, $I_i = (a_i; b_i\rangle$, $I_i = \langle a_i; b_i)$, resp. $I_i = \langle a_i; b_i\rangle$. Príklady intervalov v R^2 sú na obr. 1.1.3.

Ak sú všetky čiastkové intervaly I_i, $i = 1, 2, \dots, n$ otvorené (resp. uzavreté), interval I sa nazýva **otvorený** (resp. **uzavretý**).

Ak pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ platí $a_i < b_i$, potom sa interval I nazýva **nedegenerovaný**. Ak pre aspoň jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $a_i = b_i$, nazýva sa **degenerovaný**.

Ak sú všetky čiastkové intervaly I_i, $i = 1, 2, \dots, n$ ohraničené, interval I sa nazýva **ohraničený**. V opačnom prípade, t. j. ak je aspoň jeden z I_i, $i = 1, 2, \dots, n$ neohraničený, nazýva sa **neohraničený**.



Obr. 1.1.4: Hyperkocky pre $n = 1, 2, 3$ a ich rozklad na jednotlivé steny (súradnice vrcholov sú písané kvôli prehľadnosti bez zátvoriek)

Príklad 1.1.1.
Z geometrického hľadiska sú zaujimavými objektami úsečka, štvorec, kocka a ich zovšeobecnenie hyperkocka (n-rozmerná kocka pre $n \in N$). V tomto ponímaní môžeme úsečku

považovať za jednorozmernú kocku a štvorec za dvojrozmernú kocku. Bod môžeme považovať za kocku s rozmerom nula. Vo všeobecnosti má n-rozmerná kocka 2^n vrcholov $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n)$, kde $u_i \in \{0, a\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a $2n$ stien, pričom každú stenu tvorí $(n-1)$-rozmerná kocka (obr. 1.1.4 pre $a = 1$). Tieto steny tvoria n protiľahlých dvojíc, ktoré sa líšia iba v jednej i-súradnici (postupne $i = 1, 2, \ldots, n$). Body jednej steny majú túto súradnicu $u_i = 0$ a body protiľahlej steny majú túto súradnicu $u_i = a$. To znamená, že tieto steny sú od seba vzdialené o hodnotu a.
Najvzdialenejšie vrcholy v n-rozmernej kocke sú protiľahlé vrcholy $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; \ldots; v_n) = (a-u_1; a-u_2; \ldots; a-u_n)$, kde $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \{0, a\}$, pričom $a > 0$ je dĺžka hrany kocky. To znamená, že pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $u_i = a$, $v_i = 0$ alebo $u_i = 0$, $v_i = a$. Potom platí $u_i + v_i = a$, $u_i - v_i = a$ alebo $u_i - v_i = -a$. Spojnice vrcholov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ tvoria najdlhšie uhlopriečky v kocke. Takýchto uhlopriečok[6] je 2^{n-1} a ich dĺžka je

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_n = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + \cdots + (u_n-v_n)^2} = \sqrt{a^2 + \cdots + a^2} = \sqrt{na^2} = \sqrt{n}a.$$

Na obr. 1.1.4 sú znázornené n-rozmerné kocky pre $n = 1, 2, 3$ a na obr. 1.1.5 pre $n = 4$ (tzv. teserakt). Kvôli názornosti položíme $a = 1$ a súradnice vrcholov budeme písať bez zátvoriek a bez oddeľovacích znakov. Symbol x postupne nahrádzame hodnotami 0 a 1.

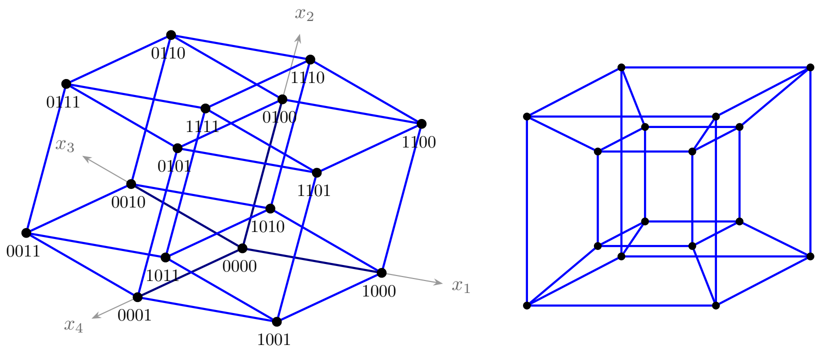
- Na priamke $R^1 = R$ je jednorozmernou kockou úsečka s vrcholmi 0 a 1, ktoré sú zároveň aj stenami. Jednorozmerná kocka nemá žiadne uhlopriečky.
- V rovine R^2 je dvojrozmernou kockou štvorec so štyrmi vrcholmi 00, 10, 11, 01. Táto kocka má štyri steny, t. j. úsečky 0x−1x, x0−x1 a dve uhlopriečky 00−11, 10−01.
- V priestore R^3 má kocka osem vrcholov 000, 100, 110, 010, 001, 101, 111, 011, šesť stien, t. j. štvorcov 00x−10x−11x−01x, 0x0−1x0−1x1−0x1, x00−x10−x11−x01 a štyri uhlopriečky 000−111, 001−110, 010−101, 100−011.
- V priestore R^4 má teserakt šestnásť vrcholov 0000, 1000, 1100, …, 0111, 1111, osem stien, t. j. trojrozmerných kociek 000x−100x−110x−010x−001x−101x−111x−011x, 00x0−10x0−⋯−01x1, 0x00−1x00−⋯−0x11, x000−x100−⋯−x011 a osem uhlopriečok 0000−1111, 1000−0111, 0100−1011, 0010−1101, 0001−1110, 1100−0011, 1010−0101, 1001−0110. ■

1.1.2 Funkcie v priestore R^n

Nech $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ sú ľubovoľné množiny. **Zobrazením (funkciou) z množiny A do množiny B** nazývame každú reláciu $f \subset A \times B$ takú, že pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$, že $[x; y] \in f$ (viď napr. [6, 49]). My sa budeme zaoberať funkciami, kde A aj B sú podmnožinami viacrozmerných Euklidovych priestorov (nie nutne rovnakorozmerných).

Nech $A \subset R^n$, $B \subset R^m$, $n, m \in N$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Zobrazenie (funkciu) $f\colon A \to B$ nazývame **n-rozmerná funkcia (funkcia n premenných)**. **Definičným $D(f)$ oborom funkcie f** nazývame množinu všetkých vzorov $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in A$, pre ktoré existuje obraz $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_m) = f(\boldsymbol{x}) \in B$. Množinu všetkých obrazov $\boldsymbol{y} \in B$, pre ktoré existuje vzor $\boldsymbol{x} \in A$ taký, že $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, nazývame **obor hodnôt $H(f)$ funkcie f**.

[6] Každá zložka u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ môže nadobúdať iba dve hodnoty 0, resp. a. Vrcholov $\boldsymbol{u}$, a teda aj dvojíc $\boldsymbol{uv}$, je potom spolu 2^n. Keďže uhlopriečky $\boldsymbol{uv}$ a $\boldsymbol{vu}$ sú identické, ich počet je polovičný, t. j. 2^{n-1}.



Obr. 1.1.5: 4-rozmerná hyperkocka (teserakt)

Bod $\boldsymbol{x} \in A \subset R^n$ predstavuje vektor $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ s n prvkami a bod $\boldsymbol{y} \in B \subset R^m$ vektor $(y_1; y_2; \dots; y_m)$ s m prvkami. Predpis $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ potom reprezentuje rovnosť dvoch m-rozmerných vektorov $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \dots; y_m)$ a $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \dots; f_m(\boldsymbol{x}))$, t. j. pre všetky $j = 1, 2, \dots, m$ musí platiť $y_j = f_j(\boldsymbol{x}) = f_j(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Funkciu f môžeme zapísať ako rovnosť stĺpcových vektorov

$$\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \dots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})^T.$$

Pre $m = 1$ sa f nazýva **reálna funkcia n premenných**. Obrazom vzoru $\boldsymbol{x} \in R^n$ je hodnota $\boldsymbol{y} = (y_1) = y \in R$ a funkciu zapisujeme $y = f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \dots; f_m(\boldsymbol{x}))$.

Pre $m > 1$ sa f nazýva (**m-zložková**) **vektorová funkcia n premenných**. Pre funkcie $f, g\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, $c \in R$ definujeme $f \pm g, cf\colon R^n \to R^m$ po zložkách

$$\begin{aligned} (f \pm g)(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}) \pm g_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}) \pm g_2(\boldsymbol{x}); \dots; f_m(\boldsymbol{x}) \pm g_m(\boldsymbol{x})), \\ (cf)(\boldsymbol{x}) &= cf(\boldsymbol{x}) = (fc_1(\boldsymbol{x}); cf_2(\boldsymbol{x}); \dots; cf_m(\boldsymbol{x})) \end{aligned}.$$

Príklad 1.1.2.
Funkcie $y = f_1(x_1; x_2) = x_1 + x_2$, $y = f_2(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2$, $y = f_3(x; y) = xy$, $y = f_4(x; y) = x$ sú reálne s dvomi premennými[7] x_1, x_2, resp. x, y, t. j. $R^2 \to R$.

Funkcia $\boldsymbol{y} = f_5(\boldsymbol{x})\colon R^2 \to R^2$ zadaná predpisom $(y_1; y_2) = f_5(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2)$ zobrazuje $(x_1; x_2) \to (x_1 + x_2; x_1 - x_2)$.

Funkcia $\boldsymbol{y} = f_6(x)\colon R \to R^3$ zadaná predpisom $(y_1; y_2; y_3) = (x; x^2; x^3)$ zobrazuje každé reálne číslo x na trojicu čísel $(x; x^2; x^3)$. ■

Príklad 1.1.3.
Body $\boldsymbol{x} = (x; y)$ Euklidovej roviny R^2 sa najčastejšie vyjadrujú v karteziánskom systéme súradníc (obr. 1.1.6 vľavo), kde sú súradnice bodu totožné s jeho zložkami, t. j. $(x; y)$.

[7] V rovine R^2 a v priestore R^3 často označujeme premenné a súradnicové osi x, y, resp. x, y, z.

V polárnom súradnicovom systéme sú súradnice $(\rho;\varphi)$ bodu $\boldsymbol{x}$ určené jeho vzdialenosťou $\rho \geq 0$ od počiatku (pólu) 0 a orientovaným uhlom $\varphi \in R$, ktorý zviera polpriamka spájajúca počiatok a bod $\boldsymbol{x}$ s polárnou osou (poloosou). Súradnice bodu v polárnych súradniciach (na rozdiel od karteziánskych súradníc) nie sú jednoznačne určené. Ak má bod $\boldsymbol{x}$ polárne súradnice $(\rho;\varphi)$, potom má tiež polárne súradnice $(\varphi + 2k\pi;\rho)$, kde $k \in Z$. Ak má bod $\boldsymbol{x} \in R^2$ poláre súradnice $(\rho;\varphi)$, potom $(x;y) = (\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)$ sú jeho karteziánske súradnice. Takže prevod súradníc z polárneho systému do karteziánskeho systému určuje vektorová funkcia

$$(x;y) = \Psi(\rho;\varphi) = (\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\colon\ \langle 0;\infty) \times R \to R^2.$$

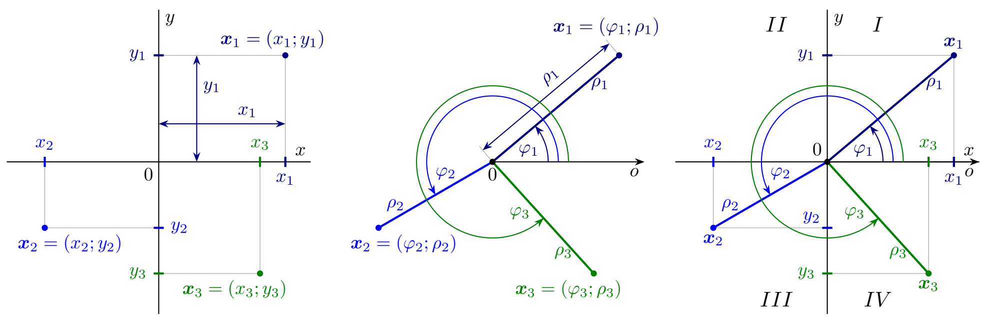
Ak sú $(x;y)$ karteziánske súradnice bodu[8] $\boldsymbol{x} \in R^2$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_2$, potom pre vektorovú funkciu $(\rho;\varphi) = \Phi(x;y)\colon R^2 - \{(0;0)\} \to (0;\infty) \times \langle 0;2\pi)$ pre prevod do polárnych súradníc platí

$$\sin\varphi = \tfrac{y}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ak označíme $\varphi_0 = \arcsin\frac{y}{\rho} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, potom $\varphi_0 \in \langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ a pre φ platí

$\varphi = \varphi_0$ pre $x \geq 0,\ y \geq 0$ (I), $\qquad \varphi = -\varphi_0 + \pi$ pre $x \leq 0,\ y \geq 0$ (II),

$\varphi = \varphi_0 + \pi$ pre $x \leq 0,\ y \leq 0$ (III), $\qquad \varphi = -\varphi_0 + 2\pi$ pre $x \geq 0,\ y \leq 0$ (IV). ■



Obr. 1.1.6: Karteziánsky a polárny súradnicový systém v Euklidovej rovine R^2

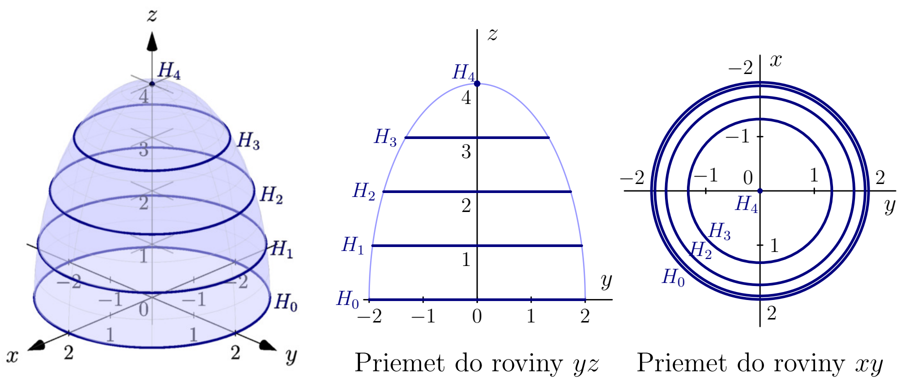
Grafom reálnej funkcie $f\colon A \to R$, kde $A \neq \emptyset$, $A \subset R^n$, $n \in N$, nazývame množinu[9]

$$\{(\boldsymbol{x};f(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} \in A\} = \{(\boldsymbol{x};y), \boldsymbol{x} = (x_1;x_2;\ldots;x_n) \in A, y = f(\boldsymbol{x})\} \subset R^{n+1}.$$

Hladinou reálnej funkcie $f\colon A \to R$ **prislúchajúcou číslu** $c \in R$ nazývame množinu $H_c = \{\boldsymbol{x} \in A, f(\boldsymbol{x}) = c\}$. Pre $n = 2$ (Euklidova rovina) sa táto množina nazýva **vrstevnica prislúchajúca číslu** $c \in R$.[10]

Príklad 1.1.4.
Uvažujme funkciu $f\colon R^2 \to R$ danú predpisom $z = 2\sqrt{4-x^2-y^2}$ (obr. 1.1.7).
Definičný obor $D(f) = \{(x;y) \in R^2, x^2+y^2 \leq 4\}$ je kruh so stredom v bode $(0;0)$ a polomerom 2. Obor hodnôt $H(f) = \langle 0;4\rangle$.

[8] Bod $\mathbf{0}_2 = (0;0)$ z našich úvah vylúčime, pretože nevieme jednoznačne určiť jeho polárne súradnice. Polárne súradnice bodu $\mathbf{0}_2$ sú rovné $(\varphi;0)$, kde $\varphi \in \langle 0;2\pi)$ je ľubovoľné.
[9] Graf funkcie f niekedy nazývame **nadplocha v** R^{n+1}.
[10] Vrstevnice na mape označujú miesta s rovnakou nadmorskou výškou.



Obr. 1.1.7: Graf a vrstevnice funkcie $z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}\colon R^2 \to R$ (príklad 1.1.4)

Grafom funkcie f je množina $\{(x;y;z),\ x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 2\sqrt{16 - x^2 - y^2}\}$, ktorá tvorí povrch polovice rotačného elipsoidu pre $z \geq 0$.
Pre $c \notin H(f)$ vrstevnice H_c neexistujú, t. j. $H_c = \emptyset$. Pre $c \in H(f) = \langle 0;4\rangle$ platí

$$c = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c \iff \tfrac{c^2}{4} = 4 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 = 4 - \tfrac{c^2}{4} = \tfrac{16-c^2}{4}.$$

To znamená, že $H_c = \{(x;y;c), x^2 + y^2 = \frac{16-c^2}{4}\}$ pre $c \in \langle 0;4\rangle$ je kružnica rovnobežná s rovinou xy so stredom $(0;0;c)$ a polomerom $\frac{\sqrt{16-c^2}}{2}$.
Špeciálne $H_4 = \{(0;0;4)\}$ je bod. ■

Nech $n, m, l \in N$. Uvažujme funkcie $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\colon R^n \to R^m$, $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})\colon R^m \to R^l$, také, že $H(f) \subset D(g)$. Potom funkcia $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})\colon R^n \to R^l$ definovaná pre všetky $\boldsymbol{x} \in D(f)$ vzťahom $F(\boldsymbol{x}) = g[f(\boldsymbol{x})]$ sa nazýva **zložená funkcia f a g**. Funkcia f sa nazýva **vnútorná zložka** (**vnútorná funkcia**) a g sa nazýva **vonkajšia zložka** (**vonkajšia funkcia**).

Príklad 1.1.5.
a) $f(x) = (x^2;x^3)\colon R \to R^2$, $g(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2\colon R^2 \to R$. Pre zložené funkcie platí

$$g(f)\colon R \to R, \quad g[f(x)] = g(x^2;x^3) = x^2 + 2x^3,\ x \in R,$$
$$f(g)\colon R^2 \to R^2,\ f[g(\boldsymbol{x})] = f(x_1+2x_2) = ((x_1+2x_2)^2;(x_1+2x_2)^3),\ \boldsymbol{x} = (x_1;x_2) \in R^2.$$

b) Prevod funkcie $f(x;y)\colon R^2 \to R^m$, $m \in N$ do polárnych súradníc (príklad 1.1.3) pomocou funkcie $(x;y) = \Psi(\rho;\varphi) = (\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\colon \langle 0;\infty) \times R \to R^2$ predstavuje zloženú funkciu $F(\rho;\varphi) = f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi) = f[\Psi(\rho;\varphi)]\colon R^2 \to R^m$. ■

Funkcia $f\colon A \to R^m$, $A \neq \emptyset$, $A \subset R^n$, $n, m \in N$, sa nazýva **lineárna funkcia**[11] (**lineárne zobrazenie**), ak pre všetky $\boldsymbol{u} = (u_1;u_2;\ldots;u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1;v_2;\ldots;v_n)$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n$, $c \in R$ platí

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}), \quad f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{v}). \tag{1.1}$$

[11] Ak $A \subset R^n$ je lineárny priestor a $f\colon A \to A$, potom sa často používa názov **lineárna transformácia**.

Poznámka 1.1.3.
Lineárna funkcia $f\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, nie je v zmysle predchádzajúcej definície pre $q \neq 0$ lineárna (aj keď sa tak nazýva). Neplatí ani jedna z podmienok (1.1). Pre $u, v \in R$, $c \in R$, $c \neq 1$ totiž platí $f(u+v) \neq f(u) + f(v)$, $f(cu) \neq cf(u)$:

$$f(u+v) = k(u+v) + q = ku + kv + q, \qquad f(cu) = k(cu) + q = cku + q,$$
$$f(u) + f(v) = ku + q + kv + q = ku + kv + 2q, \qquad cf(u) = c(ku+q) = cku + cq.$$

Lineárna je iba pre $q = 0$, t. j. v prípade $f\colon y = kx$, $k \in R$.

Príklad 1.1.6.
Funkcia $f\colon R^3 \to R^2$ daná predpisom $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2 - x_3)$ je lineárna. Pretože pre všetky $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3) \in R^3$, $c \in R$ platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= f(u_1+v_1; u_2+v_2; u_3+v_3) \\ &= ((u_1+v_1) + (u_2+v_2); (u_1+v_1) - (u_2+v_2) - (u_3+v_3)) \\ &= (u_1 + u_2; u_1 - u_2 - u_3) + (v_1 + v_2; v_1 - v_2 - v_3) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(c\boldsymbol{u}) &= f(cu_1; cu_2; cu_3) = (cu_1 + cu_2; cu_1 - cu_2 - cu_3) \\ &= (c(u_1 + u_2); c(u_1 - u_2 - u_3)) = c(u_1 + u_2; u_1 - u_2 - u_3) = cf(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Priestor R^3 je lineárny s kanonickou bázou $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0; 0; 1)$. Pre obrazy bázických vektorov $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ platí $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = (1; 1)$, $f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = (1; -1)$, $f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = (0; -1)$. Tieto obrazy vyytvoria maticu typu 2×3, ktorú označíme $\boldsymbol{F}$. Potom platí

$$\boldsymbol{xF} = (x_1; x_2; x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2; x_1 - x_2 - x_3) = f(\boldsymbol{x}).$$

Výhodnejšie je považovať $\boldsymbol{x}$, $f(\boldsymbol{x})$ za stĺpcové vektory a označiť $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}^T$. Potom platí

$$\boldsymbol{Dx}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})^T.$$

To znamená, že sme lineárnu funkciu f vyjadrili pomocou matíc $\boldsymbol{D}$ alebo $\boldsymbol{F}$. ■

Ak $m, n \in N$ a $\boldsymbol{D} = (d_{ij})_{m \times n}$ je matica reálnych čísel typu $m \times n$, potom funkcia $f\colon R^n \to R^m$ daná predpisom

$$f(\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{Dx}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n \\ \cdots \\ d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \cdots + d_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

t. j. $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{xD}^T = (d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n; \ldots; d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \cdots + d_{mn}x_n)$, je lineárna (viď napr. [11, 35]). To znamená, že každá reálna matica $\boldsymbol{D}$ typu $m \times n$ reprezentuje lineárnu funkciu $f\colon R^n \to R^m$. Tento vzťah platí aj opačne. Ku každej lineárnej funkcii $f\colon R^n \to R^m$ existuje reálna matica $\boldsymbol{D}$ typu $m \times n$ taká, že platí $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Dx}^T = \boldsymbol{xD}^T$. Maticu $\boldsymbol{D}$ nazývame **matica lineárnej funkcie f**.

Elementárnou funkciou $f\colon R \to R$ nazývame každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť pomocou sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania funkcií $y=$ konšt., $y=x$, $y=\mathrm{e}^x$, $y=\ln x$, $y=\sin x$, $y=\arcsin x$, $y=\operatorname{arctg} x$ (ma1: 3.1.2 Elementárne funkcie).

Elementárne funkcie $f\colon R^n \to R$, $n\in N$ dostaneme analogicky pomocou uvedených operácií a základných elementárnych funkcií jednotlivých premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ (viď nasledujúci príklad). Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $m\in N$ je elementárna, ak je elementárnou funkciou každá jej zložka $f_j\colon R^n \to R$, $j=1,2,\dots,m$.

Príklad 1.1.7.
Nasledujúce funkcie sú elementárne v R^n:

$f_1(x,y,z)=x+1\colon R^3\to R$, $f_2(x,y,z)=x+y-\mathrm{e}^{x-z}+1\colon R^3\to R$,
$f_3(x_1,x_2)=(\sin x_1,\sin x_2)\colon R^2\to R^2$, $f_4(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_2^4x_1-x_3\colon R^3\to R$,
$f_5(x_1,x_2)=\sin x_1\sin x_2\colon R^2\to R$, $f_6(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2x_3-2x_3^2\colon R^3\to R$,
$f_7(x)=(x,x^2,x^3)\colon R\to R^3$, $f_8(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2-2x_3^2\colon R^3\to R$. ■

Jednočlenom v R^n, $n\in N$ nazývame funkciu $f\colon R^n\to R$ definovanú vzťahom

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1;x_2;\dots;x_n)=cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},\quad \boldsymbol{x}=(x_1;x_2;\dots;x_n)\in R^n,$$

kde $c\in R$, $k_1,k_2,\dots,k_n\in N\cup\{0\}$. Číslo $k_1+k_2+\dots+k_n$ nazývame **stupeň jednočlena**.

Ak sčítame viacero jednočlenov, dostaneme **mnohočlen** (**polynóm**) **v** R^n, pričom stupeň polynómu $k\in N\cup\{0\}$ je rovný najväčšiemu zo stupňov daných jednočlenov. V príklade 1.1.7 sú polynómami f_1, f_4, f_6, f_8, pričom f_1 má stupeň 1, f_4 má stupeň 5 a f_6, f_8 majú stupeň 2. Podiel dvoch polynómov, nazývame **racionálna lomená funkcia v** R^n.

Polynóm v R^n sa nazýva **homogénny polynóm stupňa** $k\in N\cup\{0\}$, ak všetky jeho jednočleny majú stupeň k. Takýto polynóm tiež nazývame **forma stupňa** k (k**-teho stupňa**). Je zrejmé, že platí $f(\boldsymbol{0_n})=0$.

Špeciálne formu prvého stupňa

$$f(\boldsymbol{x})=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n=\sum_{i=1}^n c_ix_i=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^T,\quad \boldsymbol{x}\in R^n,$$

kde $c_1,c_2,\dots,c_n\in R$, t. j. $\boldsymbol{c}=(c_1;c_2;\dots;c_n)\in R^n$, nazývame **lineárna forma v** R^n.

Formu druhého stupňa (napr. funkcia f_6 v príklade 1.1.7)

$$f(\boldsymbol{x})=c_{11}x_1^2+c_{12}x_1x_2+\dots+c_{1n}x_1x_n+c_{21}x_2x_1+c_{22}x_2^2+\dots+c_{2n}x_2x_n$$
$$\dots+c_{n1}x_nx_1+c_{n2}x_nx_2+\dots+c_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}x_ix_j,\quad \boldsymbol{x}\in R^n,$$

kde $c_{ij}\in R$ pre $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, nazývame **kvadratická forma v** R^n. Pretože

$$c_{ij}x_ix_j+c_{ji}x_jx_i=(c_{ij}+c_{ji})x_ix_j=\tfrac{c_{ij}+c_{ji}}{2}x_ix_j+\tfrac{c_{ij}+c_{ji}}{2}x_jx_i,$$

platí pre všetky $i\neq j$, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $c_{ij}=c_{ji}$. Tieto koeficienty tvoria symetrickú maticu $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$, ktorú nazývame **matica kvadratickej formy** $f(x)$. Číslo $\det\boldsymbol{C}$ nazývame **determinat kvadratickej formy** $f(x)$. V maticovom tvare môžeme kvadratickú formu $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in R^n$ zapísať v tvare

$$f(\boldsymbol{x})=(x_1;x_2;\dots;x_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}x_ix_j. \qquad (1.2)$$

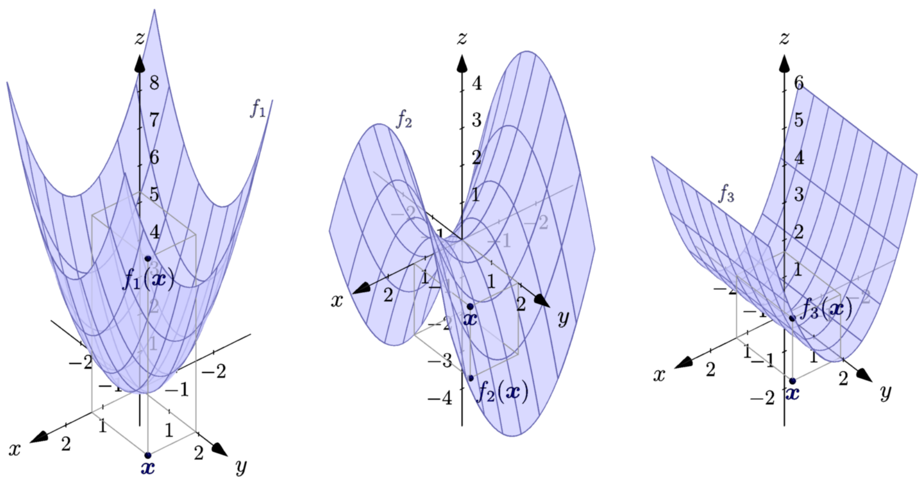
Ak je matica $\boldsymbol{C}$ diagonálna, t. j. platí $c_{ij} = c_{ji} = 0$ pre všetky $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, potom má kvadratická forma **diagonálny** (**kanonický**) **tvar**

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^T = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} x_i^2 = c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2 + \cdots + c_{nn} x_n^2.$$

Poznámka 1.1.4.
*Kvadratická forma v R^n je špeciálnym prípadom bilineárnej formy v R^n. Funkcia dvoch vektorových premenných $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\colon R^n \times R^n \to R$ sa nazýva **bilineárna forma v** R^n, ak pre pevné $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ lineárnymi formami v R^n. Bilineárnu formu môžeme reprezentovať reálnou štvorcovou maticou $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ a písať v tvare $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^T$. Ak je matica $\boldsymbol{C}$ symetrická, potom $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T$ tvorí kvadratickú formu v R^n.*

Kvadratická forma (1.2) sa nazýva:

- **kladne definitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) > 0$,
- **záporne definitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) < 0$,
- **kladne semidefinitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$,
- **záporne semidefinitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) \leq 0$,
- **indefinitná**, ak existujú $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in R^n$, také že platí $f(\boldsymbol{x}) > 0 > f(\boldsymbol{z})$.



Obr. 1.1.8: Kvadratické formy v R^2: $f_1(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (eliptická forma), $f_2(x_1; x_2) = x_1^2 - x_2^2$ (hyperbolická forma), $f_3(x_1; x_2) = x_1^2$ (parabolická forma)

Každú kvadratickú formu $f(\boldsymbol{x})\colon R^n \to R$ v tvare (1.2) môžeme vhodnou lineárnou transformáciou $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T\colon R^n \to R^n$, t. j. $\boldsymbol{x}^T = \varphi(\boldsymbol{t})^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T$ upraviť na diagonálny tvar $f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{D}\boldsymbol{t}^T = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2$, kde $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$. Matica $\boldsymbol{B}$ je regulárna, t. j. $\det \boldsymbol{B} \neq 0$ a nemusí byť jednoznačne určená. Platí $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T$, t. j.

$$f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \varphi(\boldsymbol{t})\boldsymbol{C}\varphi(\boldsymbol{t})^T = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T = \boldsymbol{t}\boldsymbol{D}\boldsymbol{t}^T = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2. \tag{1.3}$$

Ako sme už spomínali, táto transformácia nemusí byť určená jednoznačne, ale zachováva základné vlastnosti kvadratickej formy, t. j. aj definitnosť (viď vety 1.1.2 a 1.1.3). Tieto úvahy, ako aj nasledujúce, patria do sféry lineárnej algebry, preto ich nebudeme dokazovať. Čitateľ ich nájde napr. v [3, 13, 20, 35, 45].

Veta 1.1.1.
$f(\boldsymbol{t}) = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2$, $\boldsymbol{t}\in R^n$, $n\in N$, $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}\in R$. Potom platí:

a) $f(\boldsymbol{t})$ je kladne definitná $\iff$ $d_{ii}>0$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

b) $f(\boldsymbol{t})$ je záporne definitná $\iff$ $d_{ii}<0$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

c) $f(\boldsymbol{t})$ je kladne semidefinitná $\iff$ $d_{ii}\geq 0$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ a existuje $d_{ii}=0$.

d) $f(\boldsymbol{t})$ je záporne semidefinitná $\iff$ $d_{ii}\leq 0$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ a existuje $d_{ii}=0$.

e) $f(\boldsymbol{t})$ je indefinitná $\iff$ existuje $d_{ii}>0$ a existuje $d_{jj}<0$.

Príklad 1.1.8.
Kvadratická forma $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2\colon R^3 \to R$ je indefinitná, pretože $f(1;0;0) = 1 > 0$, $f(0;0;1) = -2 < 0$.
Uvedenú kvadratickú formu prevedieme na diagonálny tvar a ukážeme, že v tomto tvare je tiež indefinitná. Pre kvadratickú formu $f(\boldsymbol{x})$ platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - (2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_2x_3 - 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 - x_2^2 - 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - 3x_3^2 \\ &\qquad\qquad = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2, \end{aligned}$$

pričom $t_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $t_2 = x_2 + 2x_3$, $t_3 = x_3$, $\boldsymbol{t} = (t_1;t_2;t_3)$.
Dostali sme diagonálny tvar $f(\boldsymbol{t}) = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2$, forma je indefinitná (veta 1.1.1).
Matica $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2$ má tvar $(2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1, \ldots)$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j. } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^T. \tag{1.4}$$

Pre lineárnu transformáciu $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t})\colon R^n \to R^n$ prechodu na diagonálny tvar platí

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ t_2 &= \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 \\ t_3 &= \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x_1 &= t_1 - t_2 + t_3 \\ x_2 &= \phantom{t_1 - {}} t_2 - 2t_3 \\ x_3 &= \phantom{t_1 - t_2 + {}} t_3 \end{aligned}\right\} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{t}^T.$$

Pre kvadratickú formu na základe vzťahu (1.3) $f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T$ platí

$$f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{t}^T = \boldsymbol{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{t}^T. \ \blacksquare$$

Existuje oveľa viac spôsobov ako upraviť kvadratickú formu na diagonálny tvar (viď napr. [13, 45]). Jeden zo spôsobov využíva vlastné čísla a vlastné vektory matice kvadratickej formy. My budeme vlastnosti kvadratických foriem využívať pri určovaní extrémov funkcií viacerých premenných (**??** Extrémy funkcií) a bude nás zaujímať iba ich definitnosť. Nebudeme k tomu potrebovať maticu transformácie na diagonálny tvar. Postačia nám iba vlastné čísla vyšetrovanej kvadratickej formy, ktoré sú vždy reálne.[12] Nebudeme teda potrebovať ani vlastné vektory k nim prisluchajúce. Pre prevod kvadratickej formy na jej diagonálny tvar platia nasledujúce tvrdenia.

Veta 1.1.2.
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T : R^n \to R$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{x} \in R^n$, $n \in N$.
Hodnoty $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in R$ sú vlastné čísla matice $\boldsymbol{C}$ (vrátane násobnosti).
$\Longrightarrow$ Existuje lineárna transformácia $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T : R^n \to R^n$, pre ktorú $f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \delta_1 t_1^2 + \delta_2 t_2^2 + \cdots + \delta_n t_n^2$.

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že definitnosť kvadratickej formy vieme jednoducho určiť pomocou vlastných čísiel jej matice. Problém väčšinou nastane pri ich výpočte (sú to korene reálneho polynómu stupňa n). Matica transformácie $\boldsymbol{B}$ je vytvorená pomocou vlastných vektorov matice $\boldsymbol{C}$. Pripomeňme, že ak má niektoré vlastné číslo geometrickú násobnosť (počet lineárne nezávislých vektorov k nemu patriacich) menšiu ako algebraickú násobnosť (násobnosť ako koreňa charakteristického polynómu), musíme zostávajúce vlastné vektory konštruovať pomocou reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov.

Veta 1.1.3 (Sylvestrova veta o zotrvačnosti kvadratických foriem).
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T : R^n \to R$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{x} \in R^n$, $n \in N$.
$\Longrightarrow$ Existuje lineárna transformácia $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T : R^n \to R^n$, pre ktorú $f(\varphi(\boldsymbol{t})) = d_{11} t_1^2 + d_{22} t_2^2 + \cdots + d_{nn} t_n^2$, pričom $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn} \in \{-1, 0, 1\}$.

Diagonálny tvar kvadratickej formy vo vete 1.1.3 sa nazýva **normálový**. Lineárne transformácie v predchádzajúcich vetách nie sú určené jednoznačne, ale zachovávajú základné vlastnosti kvadratickej formy. Nasledujúce charakteristiky sú jednoznačné:

- **Hodnosť** h, t. j. hodnosť matíc $\boldsymbol{C}$, $\operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$.
- **Kladný index zotrvačnosti** k, t. j. počet kladných členov v diagonálnom tvare.
- **Záporný index zotrvačnosti** l, t. j. počet záporných členov v diagonálnom tvare.
- **Počet nulových členov** o v diagonálnom tvare, t. j. $o = n - k - l$.
- **Signatúra** σ, t. j. $(k; l)$. Platí $h = k + l$, $n = k + l + o$.

Z predchádzajúcich úvah a z vety 1.1.1 vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.1.4.
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T : R^n \to R$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{x} \in R^n$, $n \in N$. Potom platí:

a) $f(\boldsymbol{x})$ je kladne definitná $\iff$ $k = n$, $l = 0$.

b) $f(\boldsymbol{x})$ je záporne definitná $\iff$ $k = 0$, $l = n$.

c) $f(\boldsymbol{x})$ je kladne semidefinitná $\iff$ $0 < k < n$, $l = 0$.

d) $f(\boldsymbol{x})$ je záporne semidefinitná $\iff$ $k = 0$, $0 < l < n$.

e) $f(\boldsymbol{x})$ je indefinitná $\iff$ $k > 0$, $l > 0$.

[12] Reálne symetrické matice majú iba reálne vlastné čísla a reálne vlastné vektory.

Definitnosť kvadratickej formy môžeme zistiť aj bez toho, aby sme počítali vlastné čísla matice kvadratickej formy, resp. upravovali kvadratickú formu na diagonálny tvar.

Nech $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T : R^n \to R$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{x} \in R^n$, $n \in N$. Označme symbolmi Δ_k pre $k = 1, 2, \ldots, n$ subdeterminanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix}, \text{ t. j. } \Delta_1 = |c_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Veta 1.1.5 (Sylvestrovo kritérium).
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T : R^n \to R$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{x} \in R^n$, $n \in N$. Potom platí:

a) $\Delta_k > 0$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n \iff f(\boldsymbol{x})$ je kladne definitná.

b) $(-1)^k \Delta_k > 0$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n \iff f(\boldsymbol{x})$ je záporne definitná.

c) $f(\boldsymbol{x})$ nie je kladne ani záporne definitná, $\Delta_n \neq 0 \implies f(\boldsymbol{x})$ je indefinitná.

V ostatných prípadoch nemôžeme Sylvestrovo kritérium použiť, nevieme rozhodnúť, či je kvadratická forma kladne semidefinitná, záporne semidefinitná alebo indefinitná.

Poznámka 1.1.5.
Z praktických dôvodov pri zisťovaní kladnej definitnosti alebo zápornej definitnosti kvadratickej formy $f(\boldsymbol{x})$ v R^n, $n = 1, 2, \ldots, n$ je výhodné najprv zisťovať hodnoty párnych subdeterminantov Δ_k, $k = 2, 4, \ldots$, ktoré by mali byť kladné.

Poznámka 1.1.6.
Ak vo vyjadrení kvadratickej formy $f(\boldsymbol{x})$ v R^n (v ľubovoľnom tvare) existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $c_{ii} = 0$, potom $f(\boldsymbol{x})$ nemôže byť definitná (iba semidefinitná alebo indefinitná).
Je zrejmé, že v tomto prípade platí $f(\boldsymbol{x}) = 0$ pre nenulový vektor $\boldsymbol{x} = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0)$, ktorý má hodnotu 1 na i-tom mieste a všade inde nuly.
Toto tvrdenie vyplýva taktiež zo Sylvestrovho kritéria. Keďže vo forme $f(\boldsymbol{x})$ nezáleží na poradí premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, môžeme si ich usporiadať tak aby premenná x_i bola prvá, t. j. do tvaru $x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Lenže v tomto prípade bude $\Delta_1 = |c_{ii}| = 0$ a podľa Sylvestrovho kritéria (veta 1.1.5) nemôžeme dostať definitnosť ani kladnú a ani zápornú.

Príklad 1.1.9.
Kvadratická forma $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 : R^3 \to R$ je indefinitná (pr. 1.1.8). Dokážte pomocou Sylvestrovho kritéria.

Riešenie.
Matica kvadratickej formy má tvar (1.4). Forma je indefinitná, pretože platí

$$\Delta_1 = |1| = +1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \text{ (nie je kladne ani záporne definitná)},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}_{+1\times \mathrm{r}01} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 + 2) = -1 < 0. \blacksquare$$

Príklad 1.1.10.
Určte definitnosť kvadratickej formy $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 - x_3^2\colon R^3 \to R$.

Riešenie.
Sylvestrovo kritérium nemôžeme použiť, pretože platí

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} +1\times \mathrm{r02} \\ \\ +1\times \mathrm{r02} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Po úprave na diagonálny tvar, zistíme, že kvadratická forma $f(\boldsymbol{x})$ je indefinitná

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2.$$

Stačí položiť $f(1;2;1) = (1-2+1)^2 - 2\cdot 1^2 = -2 < 0$, $f(1;0;0) = (1-0+0)^2 - 2\cdot 0^2 = 1 > 0$. ■

Príklad 1.1.11.
Nech $\boldsymbol{x} = (x;y) \in R^2$, $c_{11}, c_{12}, c_{22} \in R$. Vyšetrite definitnosť formy $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}^T$, t. j. $f(\boldsymbol{x}) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2\colon R^2 \to R$.

Riešenie.
Subdeterminanty sú $\Delta_1 = |c_{11}| = c_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$.

Sú dve možnosti:
1. $\Delta_1 = 0$, $c_{11} = 0$. Potom platí $f(\boldsymbol{x}) = 2c_{12}xy + c_{22}y^2$, $\Delta_2 = -c_{12}^2 \leq 0$.
   - $\Delta_2 < 0$, $c_{12} \neq 0$. $\Longrightarrow$ $f(\boldsymbol{x})$ je **indefinitná**.
   - $\Delta_2 = 0$, $c_{12} = 0$. Potom $f(\boldsymbol{x}) = c_{22}y^2$ a sú tri možnosti:

     $c_{22} > 0$. $\Longrightarrow$ $f(\boldsymbol{x})$ je **kladne semidefinitná**.
     $c_{22} < 0$. $\Longrightarrow$ $f(\boldsymbol{x})$ je **záporne semidefinitná**.
     $c_{22} = 0$. $\Longrightarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^2$.

2. $\Delta_1 \neq 0$, $c_{11} \neq 0$. Potom platí $\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$.
   - $\Delta_2 < 0$. $\Longrightarrow$ $f(\boldsymbol{x})$ je **indefinitná**.
   - $\Delta_2 > 0$. $\Longrightarrow$ $f(\boldsymbol{x}) \begin{cases} \text{je } \textbf{kladne definitná} \text{ pre } \Delta_1 = c_{11} > 0. \\ \text{je } \textbf{záporne definitná} \text{ pre } \Delta_1 = c_{11} < 0. \end{cases}$
   - $\Delta_2 = 0$. Riadky $(c_{11}; c_{12})$, $(c_{12}; c_{22})$ matice formy $f(\boldsymbol{x})$ sú lineárne závislé.
     Potom existuje $q \in R - \{0\}$ také, že $(c_{11}; c_{12}) = q(c_{12}; c_{22})$, t. j. $c_{11} = qc_{12}$, $c_{12} = qc_{22}$.
     Potom $c_{11} = q^2c_{22}$ (c_{11}, c_{22} majú rovnaké znamienko), $c_{22} \neq 0$, $c_{12} = qc_{22} \neq 0$,

     $$f(\boldsymbol{x}) = q^2c_{22}x^2 + 2qc_{22}xy + c_{22}y^2 = c_{22}(q^2x^2 + 2qxy + y^2) = c_{22}(qx + y)^2.$$

     $$\Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) \begin{cases} \text{je } \textbf{kladne semidefinitná} \text{ pre } c_{22} > 0,\ c_{11} > 0. \\ \text{je } \textbf{záporne semidefinitná} \text{ pre } c_{22} < 0,\ c_{11} < 0. \end{cases}$$ ■

1.1.3 Limita funkcie n premenných

Limita a spojitosť funkcie v priestore R^n, $n \in N$ sa definujú analogicky ako v R a majú podobné vlastnosti. Keďže R^1 je špeciálny prípad priestoru R^n pre $n = 1$, vlastnosti platné v R^n musia platiť aj v R. Najprv si zopakujeme definíciu hromadného bodu, bez ktorého nemôžeme definovať limitu.

Nech $A \subset R^n$, $A \neq \emptyset$. Bod $\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **hromadným bodom množiny** A, ak v každom jeho okolí $O(\boldsymbol{a})$ existuje aspoň jeden bod $\boldsymbol{b}$ z množiny A, ktorý je rôzny od bodu $\boldsymbol{a}$, t. j. $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in O(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{b} \in A$. **Množina** $A \subset R^n$ sa nazýva **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje hromadné body (ma1: 2.2.2 Otvorené a uzavreté množiny).

Funkcia $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ **má v bode** $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in (R^*)^n$ **limitu rovnú** $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_m) \in (R^*)^m$ (**limita funkcie** f **v bode** $\boldsymbol{a}$ **sa rovná** $\boldsymbol{b}$) a označujeme $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, ak platí:

a) Bod $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodom množiny $D(f)$.

b) Pre všetky $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$ také, že $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \boldsymbol{a}$, platí $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \boldsymbol{b}$

(t. j. ak $\boldsymbol{x}_k \in D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$, potom platí $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$).

Poznámka 1.1.7.
Postupnosť $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$ je postupnosť vektorov $\boldsymbol{x}_k = (x_{k1}; x_{k2}; \ldots; x_{kn}) \in R^n$, $\boldsymbol{x}_k \in D(f)$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$, $k \in N$. Keďže symbol $n \in N$ reprezentuje dimenziu priestoru R^n, museli sme pre členy postupnosti zvoliť inú premennú k.
Vlastnosť b) „$\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \boldsymbol{a} \implies \{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \boldsymbol{b}$“ musí platiť pre každú postupnosť bodov $\boldsymbol{x}_k \in D(f)$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$. To znamená „pre každý možný spôsob priblíženia k bodu $\boldsymbol{a}$“. V prípade limity reálnej funkcie jednej reálnej premennej (ma1: 3.2 Limita funkcie) to boli smery zľava a sprava, prípadne ich striedanie. Pre limitu funkcie dvoch a viacerých premenných to nie je také jednoduché. Týchto spôsobov existuje nepreberné a nekonečné množstvo, môžeme sa približovať po ľubovoľnej krivke – po polpriamke (nekonečne veľa smerov), po parabole (nekonečne veľa možností), po špirále, po hyperbole atď. Toto priblíženie nemusí byť po krivke, môže to byť ľubovoľný spôsob, aký vymyslíme. Dôležité je, aby skončilo v bode $\boldsymbol{a}$.

Z definície jednoznačnosti limity postupnosti vyplýva **jednoznačnosť limity** (pokiaľ existuje) funkcie f v danom bode $\boldsymbol{a}$. Táto limita sa nazýva n**-rozmerná** (**viacrozmerná**) **limita** a predstavuje m limít jednorozmerných funkcií $f_j(\boldsymbol{x})\colon R^n \to R$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Pre limitu $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_m) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x})) \\ &= \Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_1(\boldsymbol{x}); \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_m(\boldsymbol{x})\Big),\end{aligned}$$

t. j. m limít pre jednotlivé zložky $b_1 = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_1(\boldsymbol{x})$, $b_2 = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_2(\boldsymbol{x})$, …, $b_m = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_m(\boldsymbol{x})$.

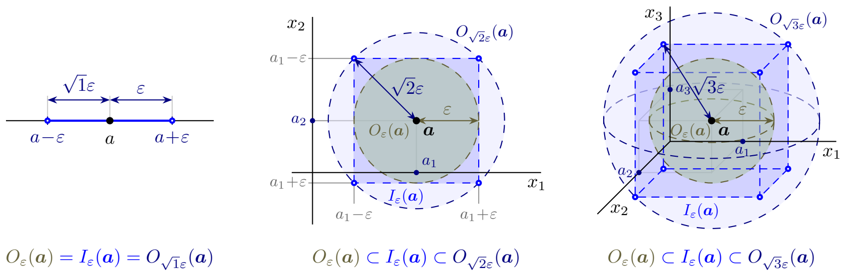
Vzťah $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ predstavuje $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \to (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, t. j. platnosť $x_1 \to a_1$, $x_2 \to a_2$, …, $x_n \to a_n$ pre každú zložku. Limitu môžeme písať vo viacerých tvaroch, napr.

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{(x_1;x_2;\ldots;x_n)\to(a_1;a_2;\ldots;a_n)} f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

$$= \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} (f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n); f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n); \ldots; f_m(x_1; x_2; \ldots; x_n))$$

$$= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x})).$$

Ak pre aspoň jedno $i = 1, 2, \dots, n$ platí $a_i = \pm\infty$, potom hovoríme **o limite v nevlastnom bode $\boldsymbol{a}$**. Inak hovoríme **o limite vo vlastnom bode $\boldsymbol{a}$**. Ak pre aspoň jedno $j = 1, 2, \dots, m$ platí $b_j = \pm\infty$, potom sa limita nazýva **nevlastná limita**. V opačnom prípade sa nazýva **vlastná limita**. To znamená, že limita $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ je vlastná, ak sú vlastné všetky jej zložky $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $j = 1, 2, \dots, m$.



Obr. 1.1.9: Intervaly $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ a okolia $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$, $O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a})$ bodov $\boldsymbol{a} \in R^n$ pre $n = 1, 2, 3$

Poznámka 1.1.8.

Nech $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in R^n$, $n \in N$ je konečný bod, $\varepsilon > 0$. Uvažujme otvorený interval

$$I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = (a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon; a_2 + \varepsilon) \times \dots \times (a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon).$$

Interval $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ geometricky predstavuje n-rozmernú kocku s hranou dĺžky 2ε (viď pr. 1.1.1) a stredom (ťažiskom, priesečníkom „telesových“ uhlopriečok) v bode $\boldsymbol{a}$. Telesové uhlopriečky majú dĺžku $\sqrt{n}2\varepsilon$, pretínajú sa v strede a spájajú dvojice najvzdialenejších bodov $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$. Vzdialenosť vrcholov n-rozmernej kocky (koncových bodov intervalu) od stredu $\boldsymbol{a}$ je $\sqrt{n}\varepsilon$. To znamená, že sa $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ zmestí do okolia $\boldsymbol{a}$ s polomerom $\sqrt{n}\varepsilon$, t. j. $I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a})$.
Ak $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$, potom pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ platia postupne nerovnosti $a_i - \varepsilon < x_i < a_i + \varepsilon$, $-\varepsilon < x_i - a_i < \varepsilon$, $(x_i - a_i)^2 < \varepsilon^2$. Potom platí

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon.$$

To znamená, že $\boldsymbol{x} \in O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a})$, t. j. platí $I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a})$.
Ako sme už spomínali, interval $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ geometricky predstavuje n-rozmernú kocku, má 2^n vrcholov a $2n$ stien, pričom každú stenu tvorí $(n-1)$-rozmerná kocka (pr. 1.1.1). Protiľahlé steny sa líšia iba v jednej súradnici (je ich n párov, jeden pre každý rozmer $i = 1, 2, \dots, n$), ktorej hodnota je $a_i - \varepsilon$ alebo $a_i + \varepsilon$. Ich vzdialenosť je 2ε a dá sa medzi ne vložiť okolie $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$. Potom platí $O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$, t. j. platí $O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a})$.
Analogicky pre $\sqrt{n}\varepsilon > 0$ platí $O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset O_{n\varepsilon}(\boldsymbol{a})$.
Ak to zhrnieme, potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí (prípady pre $n = 1, 2, 3$ sú na obr. 1.1.9)

$$O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset O_{n\varepsilon}(\boldsymbol{a}).$$

*Z uvedeného vyplýva, že vo všetkých doterajších (aj nasledujúcich) úvahach môžeme namiesto okolí $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ používať otvorené intervaly $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.[13] V zmysle poznámky pod čiarou a zjednodušenia názvoslovia môžeme $\varepsilon > 0$ považovať za **polomer intervalu** $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.*

[13] Interval $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ predstavuje okolie bodu $\boldsymbol{a}$ s polomerom ε pri použití ekvivalentnej maximovej normy.

Pre $n=1$, t. j. v priestore R sú pojmy $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ a $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ rovnaké, platí $O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.
Na záver poznamenajme, že okoliami bodov $\pm\infty$ na reálnej osi sú ľubovoľné intervaly $(-\infty; r)$ a $(r; \infty)$, kde $r \in R$. Mnohokrát je vhodné zvoliť $O_\varepsilon(-\infty) = I_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$, $O_\varepsilon(\infty) = I_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; \infty)$, kde $\varepsilon > 0$. Potom pre $\varepsilon \to 0^+$ platí $\frac{1}{\varepsilon} \to \infty$, $-\frac{1}{\varepsilon} \to -\infty$.
V tomto zmysle budeme uvažovať neohraničené intervaly $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ a rozšírime pojem okolia $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ na nevlastné body $\boldsymbol{a}$.

Z definície je zrejmé, že limita predstavuje lokálnu záležitosť v nejakom okolí bodu $\boldsymbol{a}$, pričom funkcia v tomto bode nemusí byť definovaná. Analogicky ako pri reálnych funkciách $f\colon R^1 \to R^1$, môžeme limitu charakterizovať pomocou okolí (definícia v zmysle Cauchyho). Uvedená definícia pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho. Tieto definície sú ekvivalentné a v praxi sa používajú obe. Vyplýva to z vety 1.1.6, ktorú uvádzame bez dôkazu. Dôkaz je analogický ako pre limitu reálnej funkcie jednej reálnej premennej [49].

Veta 1.1.6.
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, $\boldsymbol{a} \in R^n$, $\boldsymbol{b} \in R^m$. Potom platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \begin{array}{l} \text{a) } \boldsymbol{a} \text{ je hromadným bodom množiny } D(f). \\ \text{b) Pre každé } O(\boldsymbol{b}) \text{ existuje } O(\boldsymbol{a}) \text{ tak, že} \\ \qquad\qquad \text{pre všetky } \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f),\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a} \text{ platí } f(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{b}). \end{array}$$

Ak označíme polomery okolí ε, δ, môžeme druhé tvrdenie vety symbolicky písať:

$$\underbrace{\forall O_\varepsilon(\boldsymbol{b})}_{\forall \varepsilon > 0}\ \underbrace{\exists O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\exists \delta > 0}\ \forall \boldsymbol{x} \in D(f)\colon\ \underbrace{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}}_{0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f(\boldsymbol{x}) \in O_\varepsilon(\boldsymbol{b})}_{\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\|_m < \varepsilon}.$$

Limita vektorovej funkcie $f\colon R^n \to R^m$ má m zložiek, t. j. m limít reálnych funkcií $f_j\colon R^n \to R$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Potom môžeme vetu 1.1.6 pre tieto zložky rozšíriť o hodnoty $\pm\infty$. Ak $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in R^n$ je hromadný bod $D(f)$, $b \in R^*$, potom platí:

$$\underbrace{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b}_{\substack{b \in R \\ b = \infty \\ b = -\infty}} \iff \underbrace{\forall O_\varepsilon(b)}_{\forall \varepsilon > 0}\ \underbrace{\exists O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\exists \delta > 0}\ \forall \boldsymbol{x} \in D(f)\colon\ \underbrace{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}}_{0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f(\boldsymbol{x}) \in O_\varepsilon(b)}_{\substack{|f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon \\ f(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{\varepsilon} \\ f(\boldsymbol{x}) < -\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Ak uvážime poznámku 1.1.8, tieto tvrdenia ostanú v platnosti, ak namiesto okolí $O_\delta(\boldsymbol{a})$, $O_\varepsilon(\boldsymbol{b})$ použijeme intervaly $I_\delta(\boldsymbol{a})$, $I_\varepsilon(\boldsymbol{b})$. Tieto úvahy sa dajú rozšíriť aj pre prípad, keď je bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ nevlastný, t. j. keď je aspoň jedna z hodnôt a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nevlastná.

Viacrozmerné limity majú podobné vlastnosti[14] ako limity funkcií $R \to R$ (ma1: 3.2 Limita funkcie). Nasledujúca veta sa často používa pri výpočte limít. Zložitejšiu funkciu nahradíme jednoduchšou funkciou, ktorá je **na nejakom intervale, resp. okolí zhodná s pôvodnou funkciou**. Veta sa väčšinou pri výpočte neuvádza, predpoklady sa overujú priebežne počas výpočtu limity.

[14] Musíme si uvedomiť, že funkcia $f\colon R \to R$ je špeciálny prípad funkcie $f\colon R^n \to R^m$, takže mnoho vlastností môžeme zovšeobecniť pre vektorové funkcie a naopak.

Veta 1.1.7.
$f, g\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, $\boldsymbol{a} \in R^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g)$,
$I(\boldsymbol{a})$ je otvorený interval taký, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in I(\boldsymbol{a}) \cap M$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$.

$\Longrightarrow$ Pokiaľ $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ existujú, tieto limity sa rovnajú.

Dôkaz.
Vetu stačí dokázať jedným smerom.[15] Nech existuje $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \in (R^*)^m$.

Nech $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M - \{\boldsymbol{a}\}$ je taká, že $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$. Potom $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$.
Je zrejmé, že existuje $k_0 \in N$ také, že pre všetky $k \in N$, $k \geq k_0$ platí $\boldsymbol{x}_k \in I(\boldsymbol{a})$.
Zo znamená, že platí $\boldsymbol{x}_k \in I(\boldsymbol{a}) \cap M - \{\boldsymbol{a}\}$ a teda aj $f(\boldsymbol{x}_k) = g(\boldsymbol{x}_k)$.
Potom platí $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} g(\boldsymbol{x}_k) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ (pokiaľ limita existuje). ■

Interval $I(\boldsymbol{a})$ môžeme v predpokladoch vety nahradiť okolím $O(\boldsymbol{a})$ a tvrdenie vety sa nezmení (viď poznámka 1.1.8).

Príklad 1.1.12.
Uvažujme funkcie $f, g\colon R^2 \to R$ definované vzťahmi $f(x_1; x_2) = x_1 + x_2$, $g(x_1; x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$.
Pre definičné obory týchto funkcií platí $D(f) = R^2$, $D(g) = R^2 - \{(x; x), x \in R\}$.
Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2) \in R^2 - \{(x; x), x \in R\}$ platí

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 = f(\boldsymbol{x}).$$

Limita $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ existuje pre všetky $\boldsymbol{x} \in (R^*)^2 - \{(\pm\infty; \mp\infty)\}$.
Pre $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$ je jediný problémový smer $x_1 = x_2$, kedy nie je g definovaná.
Ale pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^2 - \{(\infty; -\infty), (-\infty; \infty)\}$ limita existuje a platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.
Potom platí, napr.

$$\lim_{(x_1; x_2)\to(1;1)} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{(x_1; x_2)\to(1;1)} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{(x_1; x_2)\to(1;1)} (x_1 + x_2) = 1 + 1 = 2.$$

$$\lim_{\substack{x_1\to\infty \\ x_2\to\infty}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to\infty \\ x_2\to\infty}} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to\infty \\ x_2\to\infty}} (x_1 + x_2) = \infty + \infty = \infty. \blacksquare$$

Veta 1.1.8.
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, $\boldsymbol{a} \in R^n$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \in R^m$ je konečná (vlastná). Potom platí:

a) Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že f je ohraničená na $O(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}$.

b) Existuje ohraničený interval $I(\boldsymbol{a})$ taký, že f je ohraničená na $I(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}$.

Dôkaz.
V zmysle poznámky 1.1.8 sú obe tvrdenia ekvivalentné a stačí dokázať jedno z nich.
Tvrdenie a) vyplýva z vety 1.1.6. Nech $O(\boldsymbol{b})$ je ľubovoľné okolie.
Potom existuje $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{b})$, t. j. existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$, v ktorom je f ohraničená. ■

[15] Opačnú implikáciu dokážeme tak, že vymeníme funkcie f a g a postup zopakujeme.

Veta 1.1.9.
$f, g\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, $c \in R$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \in (R^*)^m$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}$.

$\Longrightarrow$ Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel, limity existujú a platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \pm \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d}, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[cf(\boldsymbol{x})\big] = c \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{b}.$$

Ak navyše $m = 1$, t. j. $f, g\colon R^n \to R$, $\boldsymbol{b} = b \in R^*$, $\boldsymbol{d} = d \in R^*$, potom platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x})| = \Big|\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\Big| = |b|, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = bd.$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{d}, \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})}{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})} = \frac{b}{d}.$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre súčet. Ostatné tvrdenia sa dokážu analogicky.
Nech postupnosť $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \cap D(g) - \{\boldsymbol{a}\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$.
Potom (definícia) platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{d}$. Z toho vyplýva tvrdenie vety

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{n\to\infty} \big[f(\boldsymbol{x}_n) \pm g(\boldsymbol{x}_n)\big] = \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d}. \ \blacksquare$$

Ak niektorý z výrazov $\boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d}$, $c\boldsymbol{b}$, bd, resp. b/d v predchádzajúcej vete nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita na ľavej strane neexistuje. V tomto prípade musíme túto limitu vypočítať iným spôsobom. Najčastejšie pomôže vhodná úprava výrazu, ktorým je funkcia definovaná. Niekedy to je vhodný rozklad, inokedy pomôže pripočítanie a odpočítanie rovnakého výrazu (pripočítame nulu) alebo vynásobenie čitateľa aj menovateľa rovnakým výrazom (násobíme jednotkou).

Veta 1.1.10.
$f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g)$.
$O(\boldsymbol{a})$ je také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap M$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$.

$\Longrightarrow$ Pokiaľ existujú $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$, potom platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \leq \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.

Dôkaz.
Označme $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = d$, pričom $b, d \in R^*$.
Sporom. Nech neplatí $b \leq d$, t.j. platí $b > d$.
Potom existujú okolia $O(b)$, $O(d)$ také, že $O(b) \cap O(d) = \emptyset$.
Je zrejmé, že pre všetky $u \in O(b)$, $v \in O(d)$ platí $u > v$. Z vety 1.1.6 vyplýva:

Ku $O(b)$ existuje $O_f(\boldsymbol{a})$ tak, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O_f(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in O(b)$.

Ku $O(d)$ existuje $O_g(\boldsymbol{a})$ tak, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O_g(\boldsymbol{a}) \cap D(g)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $g(\boldsymbol{x}) \in O(d)$.

Potom existuje okolie $O^*(\boldsymbol{a}) \subset O(\boldsymbol{a}) \cap O_f(\boldsymbol{a}) \cap O_g(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O^*(\boldsymbol{a}) \cap M$ platí nerovnosť $f(\boldsymbol{x}) > g(\boldsymbol{x})$. To je spor s predpokladmi. $\blacksquare$

Ak predpoklad $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ nahradíme predpokladom $f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x})$, tvrdenie vety $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \leq \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ sa nezmení. V prípade nevlastných limít platia implikácie:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \infty \implies \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \infty, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = -\infty \implies \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = -\infty.$$

Dôsledok 1.1.10.a (Veta o zovretí).
$f, g, h\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.
$O(\boldsymbol{a})$ je také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap M$ platí $h(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$.
Existujú limity $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = b \in R^*$.

$\Longrightarrow$ Existuje $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$.

Dôsledok 1.1.10.b.
$f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f) \cap D(g)$.
f je ohraničená v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}$, existuje $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = 0$.

$\Longrightarrow$ Existuje $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})] = 0$.

Okolie $O(\boldsymbol{a})$ môžeme v predpokladoch vety 1.1.10, jej dôsledkoch a aj v nasledujúcich vetách nahradiť intervalom $I(\boldsymbol{a})$ a ich tvrdenia sa nezmenia (viď poznámka 1.1.8).

Z vety 1.1.10 vyplývajú nasledujúce vety, ktoré sú analógiou viet pre reálne funkcie jednej premennej. Aj ich dôkazy sú analogické, preto ich neuvádzame [49].

Veta 1.1.11.
$f\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x})| = 0.$$

Vetu 1.1.11 môžeme rozšíriť aj pre limitu vektorovej funkcie.

Dôsledok 1.1.11.a.
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_m \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \|f(\boldsymbol{x})\|_m = \|\boldsymbol{0}_m\|_m = 0.$$

Veta 1.1.12.
$f\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$.
Existuje aspoň jedna z limít $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \infty$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = -\infty$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x})| = \infty$.

$\Longrightarrow$ Existuje $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{f(\boldsymbol{x})} = 0$.

Veta 1.1.13.
$f\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$, existuje $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$. Potom platí:

a) $O(\boldsymbol{a})$ je také, že $f(\boldsymbol{x}) < 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$. $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{f(\boldsymbol{x})} = -\infty$.

b) $O(\boldsymbol{a})$ je také, že $f(\boldsymbol{x}) > 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$. $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{f(\boldsymbol{x})} = \infty$.

Veta 1.1.14.
$f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g)$.
Existujú limity $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) < \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ (aj nevlastné).

$\Longrightarrow$ Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap M$, $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x})$.

Dôsledok 1.1.14.a.
$f\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

a) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) < 0 \implies$ existuje $O(\boldsymbol{a})$ tak, že $f(\boldsymbol{x}) < 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$.

b) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) > 0 \implies$ existuje $O(\boldsymbol{a})$ tak, že $f(\boldsymbol{x}) > 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$.

Veta 1.1.15 (O limite zloženej funkcie).
$f\colon R^n \to R^m$, $g\colon R^m \to R^l$, $n, m, l \in N$, $H(f) \subset D(g)$, $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$, $\boldsymbol{b} \in (R^*)^m$, $\boldsymbol{c} \in (R^*)^l$.
Existujú limity $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}$, platí aspoň jeden z predpokladov a), b).

a) $g(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$.

b) Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ tak, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{b}$.

$\implies$ Pre zloženú funkciu $F = g(f)$ platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} F(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(f(\boldsymbol{x})) = \lim\limits_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}$.

Dôkaz.
Z predpokladov je zrejmé, že bod $\boldsymbol{a}$ je tiež hromadným bodom množiny $D(F) = D(g(f))$.
Z existencie limít $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}$ vyplýva:

Pre všetky $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$ také, že $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$, platí $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$.

Pre všetky $\{\boldsymbol{u}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(g) - \{\boldsymbol{b}\}$ také, že $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{b}$, platí $\lim\limits_{k\to\infty} g(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{c}$.

Ak platí a), potom pre $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} F(\boldsymbol{x}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} g(f(\boldsymbol{x}_k)) = g(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$.

Ak platí b), potom pre $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ platí $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset D(g) - \{\boldsymbol{b}\}$. Keďže $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$, potom platí $\lim\limits_{k\to\infty} g(f(\boldsymbol{x}_k)) = \boldsymbol{c}$, t. j. $\lim\limits_{k\to\infty} F(\boldsymbol{x}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} g(f(\boldsymbol{x}_k)) = \boldsymbol{c}$. ■

Predchádzajúca veta zjednodušuje v mnohých prípadoch výpočet limít. Ak pri výpočte limity zloženej funkcie $g(f)$ položíme $u = f(\boldsymbol{x})$, potom hovoríme, že **vykonávame substitúciu** $u = f(x)$. Výpočet limity pôvodnej funkcie $f(\boldsymbol{x})$ v bode $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ prevedieme na výpočet limity funkcie $g(\boldsymbol{u})$ v bode $\boldsymbol{b} \in (R^*)^m$. Predpoklad b) je splnený napríklad, ak je funkcia f je v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$ prostá a platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.

Poznámka 1.1.9.
Ak platí predpoklad a), potom platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(f(\boldsymbol{x})) = \lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c} = g(\boldsymbol{b}) = g\Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\Big).$$

Ak pri výpočte limity funkcie $f(\boldsymbol{x})$ v bode $\boldsymbol{a}$ položíme $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}\colon R^n \to R^n$, potom namiesto $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ bude platiť $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$ a pre limity dostaneme

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} f(\varphi(\boldsymbol{h})) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}).$$

Viacrozmerné limity, pokiaľ existujú, môžeme vypočítať pomocou viacnásobných limít (viď nasledujúca veta). V prípade vektorových funkcií $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x}))$ počítame limitu každej zložky $f_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$ zvlášť.

Nech $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$, $n \in N$. Postupne označme $\overline{\boldsymbol{x_1}} = (x_2; x_3; \ldots; x_n)$, $\overline{\boldsymbol{x_2}} = (x_1; x_3; \ldots; x_n)$, $\ldots$, $\overline{\boldsymbol{x_i}} = (x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{i+1}; \ldots; x_n)$, $\ldots$, $\overline{\boldsymbol{x_n}} = (x_1; x_2; \ldots; x_{n-1})$.

Každý z bodov $\overline{\boldsymbol{x_i}} = (x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{i+1}; \ldots; x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ má vynechanú i-tu súradnicu a platí $\overline{\boldsymbol{x_i}} \in R^{n-1}$. Špeciálne pre $\boldsymbol{x} \in R^2$ platí $\overline{\boldsymbol{x_1}} = x_2$, $\overline{\boldsymbol{x_2}} = x_1$ a pre $\boldsymbol{x} \in R^3$ platí $\overline{\boldsymbol{x_1}} = (x_2; x_3)$, $\overline{\boldsymbol{x_2}} = (x_1; x_3)$, $\overline{\boldsymbol{x_3}} = (x_1; x_2)$.

Veta 1.1.16.
$f\colon R^n \to R$, $n\in N$, $\boldsymbol{a}\in(R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.
$O(\overline{\boldsymbol{a_i}})$ je také, že pre všetky $\overline{\boldsymbol{x_i}}\in O(\overline{\boldsymbol{a_i}}) - \{\overline{\boldsymbol{a_i}}\}$, $\boldsymbol{x}\in D(f)$ existuje $g(\overline{\boldsymbol{x_i}}) = \lim\limits_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})$.

$$\Longrightarrow \text{ Existuje } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}} g(\overline{\boldsymbol{x_i}}) = \lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}} \Big[\lim_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})\Big] = \lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}}\ \lim_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

Dôkaz.
Prvý predpoklad je, že $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ existuje. To znamená:
Pre všetky $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$ také, že $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$, platí $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$,

$$\text{t. j. } \lim_{k\to\infty} (x_1;x_2;\ldots;x_n)_k = (a_1;a_2;\ldots;a_n) \implies \lim_{k\to\infty} f((x_1;x_2;\ldots;x_n)_k) = \boldsymbol{b}.$$

Pre všetky $\overline{\boldsymbol{x_i}} = (x_1;\ldots;x_{i-1};x_{i+1};\ldots;x_n)\in O(\overline{\boldsymbol{a_i}}) - \{\overline{\boldsymbol{a_i}}\}$ existuje $g(\overline{\boldsymbol{x_i}}) = \lim\limits_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})$,

$$\text{t. j. } \lim_{k\to\infty} (x_i)_k = a_i \implies \lim_{k\to\infty} f(x_1;\ldots;x_{i-1};(x_i)_k;x_{i+1};\ldots;x_n) = g(\overline{\boldsymbol{x_i}}).$$

Nech $\{(\overline{\boldsymbol{x_i}})_k\}_{k=1}^{\infty} \subset O(\overline{\boldsymbol{a_i}}) - \{\overline{\boldsymbol{a_i}}\}$, $\boldsymbol{x}_k\in D(f)$ je taká, že $\lim\limits_{k\to\infty} (\overline{\boldsymbol{x_i}})_k = \overline{\boldsymbol{a_i}}$.
Keďže $\lim\limits_{k\to\infty} (x_i)_k = a_i$, platí aj $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ a dostávame tvrdenie vety

$$\lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}} g(\overline{\boldsymbol{x_i}}) = \lim_{k\to\infty} g((\overline{\boldsymbol{x_i}})_k) = \lim_{k\to\infty} \Big[\lim_{k\to\infty} f((x_1;\ldots;x_{i-1};(x_i)_k;x_{i+1};\ldots;x_n)_k)\Big]$$
$$= \lim_{k\to\infty} f((x_1;x_2;\ldots;x_n)_k) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.10.
Aby sa dala n-rozmerná limita vypočítať pomocou n-násobnej limity, musí existovať.
Ak existuje n-rozmerná limita, potom existujú všetky n-násobné limity a rovnajú sa.
Ak existujú dve n-násobné limity, ktoré sa nerovnajú, potom n-rozmerná limita neexistuje.
Ako dokazuje príklad 1.1.17, viacrozmerná limita nemusí existovať, aj keď všetky viacnásobné limity existujú a rovnajú sa.

Predchádzajúca veta naznačuje postup pre výpočet n-rozmernej limity, pokiaľ existuje. Prevediemu ju na $(n-1)$-rozmernú limitu, na ktorú môžeme opäť aplikovať túto vetu a dostaneme $(n-2)$-rozmernú limitu. Takýmto postupom môžeme n-rozmernú limitu vyjadriť ako **n-násobnú** (**viacnásobnú**) **limitu**

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{x_{i_1}\to a_{i_1}} \Big[\lim_{x_{i_2}\to a_{i_2}} \cdots \Big[\lim_{x_{i_n}\to a_{i_n}} f(\boldsymbol{x})\Big]\Big] = \lim_{x_{i_1}\to a_{i_1}}\ \lim_{x_{i_2}\to a_{i_2}} \cdots \lim_{x_{i_n}\to a_{i_n}} f(\boldsymbol{x}),$$

kde indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sú nejakou permutáciou množiny $\{1,2,\ldots,n\}$. To znamená, že existuje $n!$ možností na vyjadrenie. Keďže postupne počítame jednorozmerné limity jednej premennej, niekedy sa n-násobná limita nazýva **postupná** (**opakovaná**) **limita**. Pri praktickom výpočte $\lim\limits_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})$ všetky premenné okrem x_i považujeme za konštanty.

V rovine R^2 nazývame dvojrozmernú limitu **dvojná limita** a môžeme ju vypočítať pomocou **dvojnásobných limít**. Ak $f\colon R^2 \to R$, $\boldsymbol{x} = (x_1;x_2)$, $\boldsymbol{a} = (a_1;a_2)$, potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{(x_1;x_2)\to(a_1;a_2)} f(x_1;x_2) = \lim_{x_1\to a_1}\ \lim_{x_2\to a_2} f(x_1;x_2) = \lim_{x_2\to a_2}\ \lim_{x_1\to a_1} f(x_1;x_2).$$

Ak $f\colon R^2 \to R$, $\boldsymbol{x} = (x; y)$, $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y)$, potom platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{(x;y)\to(a_x;a_y)} f(x;y) = \lim_{x\to a_x}\lim_{y\to a_y} f(x;y) = \lim_{y\to a_y}\lim_{x\to a_x} f(x;y).$$

Trojrozmernú limitu v priestore R^3 nazývame **trojná limita**. Trojnásobných limít je 6 a každú z nich môžeme použiť na výpočet trojnej limity. Napr. pre $f\colon R^3 \to R$, $\boldsymbol{x} = (x; y; z)$, $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$ platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to a_x}\lim_{y\to a_y}\lim_{y\to a_z} f(x;y;z) = \lim_{x\to a_z}\lim_{y\to a_x}\lim_{y\to a_y} f(x;y;z)$$
$$\cdots = \lim_{x\to a_x}\lim_{y\to a_y}\lim_{y\to a_z} f(x;y;z).$$

Príklad 1.1.13.
$\lim\limits_{(x_1;x_2)\to(0;0)} \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$ neexistuje, pretože pre dvojnásobné limity neplatí ich rovnosť

$$\lim_{x_1\to 0}\lim_{x_2\to 0} \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} = \lim_{x_1\to 0} \frac{x_1-0}{x_1+0} = 1, \quad \lim_{x_2\to 0}\lim_{x_1\to 0} \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} = \lim_{x_2\to 0} \frac{0-x_2}{0+x_2} = -1. \blacksquare$$

Príklad 1.1.14.
Vypočítajte $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Riešenie.
Neznáme vystupujú iba vo väzbe $x^2+y^2 \geq 0$. Ak použijeme substitúciu $t = x^2+y^2$, potom $t \to 0^+$ a dvojrozmernú limitu môžeme previesť na limitu jednej premennej (obr. 1.1.10).

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \ \ t = x^2+y^2 \geq 0 \\ x\to 0, \ \ y\to 0, \ \ t\to 0^+ \end{array}\right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}-1}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{t+1}+1}{\sqrt{t+1}+1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}(\sqrt{t+1}+1)}{t+1-1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t}}{\sqrt{t^2}}$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{t}} + \sqrt{\tfrac{1}{t}}\right) = \sqrt{1+\tfrac{1}{0^+}} + \sqrt{\tfrac{1}{0^+}} = \sqrt{1+\infty} + \sqrt{\infty} = \infty. \blacksquare$$

Príklad 1.1.15.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;1)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, b) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, c) $\lim\limits_{(x;y)\to(\infty;\infty)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Riešenie.
a) $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto (1;1)$ je ľubovoľná, potom $\left\{\frac{x_k^3+y_k^3}{x_k^2+y_k^2}\right\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \frac{1^3+1^3}{1^2+1^2} = 1$. Potom platí

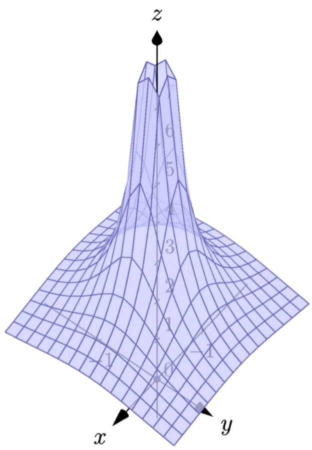
$$\lim_{(x;y)\to(1;1)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k^3+y_k^3}{x_k^2+y_k^2} = \frac{1^3+1^3}{1^2+1^2} = 1.$$

Pre dvojnásobné limity v bode $(1;1)$ platí

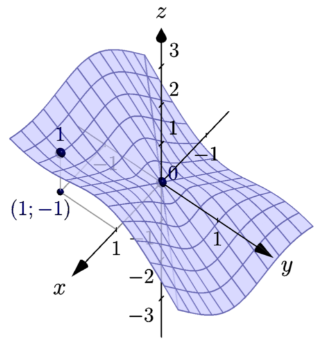
$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 1} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+1^3}{x^2+1^2} = \frac{1^3+1^3}{1^2+1^2} = 1, \quad \lim_{y\to 1}\lim_{x\to 1} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 1} \frac{1^3+y^3}{1^2+y^2} = \frac{1^3+1^3}{1^2+1^2} = 1.$$

b) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$, pretože platí $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$ (veta 1.1.11). Pre $f(x;y)$ platí

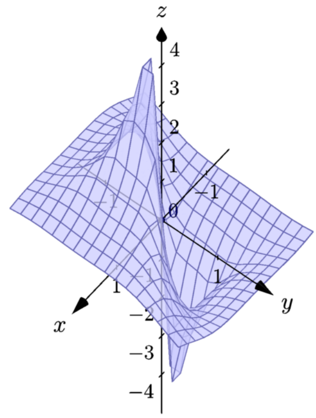
$$0 \leq |f(x;y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^3+y^3|}{|x^2+y^2|} = \left[\begin{array}{l} |x^3+y^3| \leq |x^3|+|y^3| = |x|^3+|y|^3 \\ |x^2+y^2| = x^2+y^2 = |x|^2+|y|^2 \end{array}\right] \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{|x|^2+|y|^2}$$



Obr. 1.1.10: Príklad 1.1.14



Obr. 1.1.11: Príklad 1.1.15



Obr. 1.1.12: Príklad 1.1.16

$$= \frac{|x|^3}{|x|^2+|y|^2} + \frac{|y|^3}{|x|^2+|y|^2} \le \left[\begin{array}{l} |x|^2+|y|^2 \ge |x|^2 \\ |x|^2+|y|^2 \ge |y|^2 \end{array} \right] \le \frac{|x|^3}{|x|^2} + \frac{|y|^3}{|y|^2} = |x|+|y|.$$

Pre dvojrozmernú limitu funkcie $|f(x;y)|$ v bode $(0;0)$ platí (obr. 1.1.11)

$$0 \le \lim_{(x;y)\to(0;0)} \left|\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \lim_{(x;y)\to(0;0)} \big[\,|x|+|y|\,\big] = 0+0 = 0, \text{ t. j. } \lim_{(x;y)\to(0;0)} \left|\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0.$$

c) Pre $(x;y)$ platí $x\to\infty$, $y\to\infty$. Je zrejmé, že môžeme predpokladať $x>0$, $y>0$. Ak použijeme substitúciu $u=\min\{x,y\}\to\infty$, $v=\max\{x,y\}\to\infty$, potom platí

$$0<u\le x\le v, \quad 0<u\le y\le v, \quad \tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \tfrac{u^3+v^3}{u^2+v^2} \ge \tfrac{u^3+v^3}{v^2+v^2} = \tfrac{u^3+v^3}{2v^2} \ge \tfrac{v^3}{2v^2} = \tfrac{v}{2}.$$

Potom $\lim\limits_{(x;y)\to(\infty;\infty)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \infty$, pretože platí

$$\lim_{(x;y)\to(\infty;\infty)} \tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(u;v)\to(\infty;\infty)} \tfrac{u^3+v^3}{u^2+v^2} \ge \lim_{(u;v)\to(\infty;\infty)} \tfrac{v}{2} = \lim_{v\to\infty} \tfrac{v}{2} = \infty. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.16.
Limita $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ neexistuje (obr. 1.1.12), pretože neexistujú dvojnásobné limity

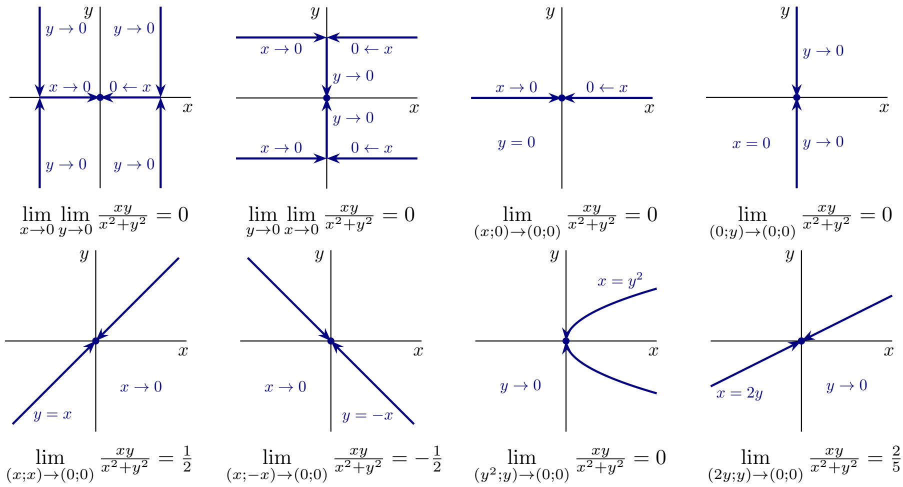
$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} \tfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = \lim_{x\to0} \tfrac{x^3+0^3}{x^4+0^2} = \lim_{x\to0} \tfrac{1}{x}, \quad \lim_{y\to0}\lim_{y\to0} \tfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = \lim_{y\to0} \tfrac{0^3+y^3}{0^4+y^2} = \lim_{y\to0} \tfrac{1}{y}.$$

Tieto limity neexistujú, pretože sa jednostranné limity

$$\lim_{x\to0^+} \tfrac{1}{x} = \lim_{y\to0^+} \tfrac{1}{y} = \tfrac{1}{0^+} = \infty, \quad \lim_{x\to0^-} \tfrac{1}{x} = \lim_{y\to0^-} \tfrac{1}{y} = \tfrac{1}{0^-} = -\infty$$

nerovnajú. To znamená, že neexistuje ani pôvodná limita $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$. $\blacksquare$

Príklad 1.1.17.
$\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje, aj keď sa dvojnásobné limity rovnajú (obr. 1.1.13).



Obr. 1.1.13: Výpočet limity $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ (pr. 1.1.17)

Pre dvojnásobné limity platí:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\left[\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\frac{0}{x^2}=0 \text{ pre všetky } x\in R\right]=\lim_{x\to 0}0=0.$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}=\left[\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}=\frac{0}{y^2}=0 \text{ pre všetky } y\in R\right]=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Pre priblíženie $x\to 0$, $y=0$, resp. $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}=\left\{\left(\frac{1}{k};0\right)\right\}_{k=1}^{\infty}\longmapsto(0;0)$ platí:

$$\lim_{(x;0)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}0=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}\cdot 0}{\frac{1}{k^2}+0^2}=\lim_{k\to\infty}0=0.$$

Pre priblíženie $x=0$, $y\to 0$, resp. $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}=\left\{\left(0;\frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}\longmapsto(0;0)$ platí:

$$\lim_{(0;y)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}=\lim_{y\to 0}0=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{0\cdot\frac{1}{k}}{0^2+\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}0=0.$$

Pre priblíženie $x=y\to 0$, resp. $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}=\left\{\left(\frac{1}{k};\frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}\longmapsto(0;0)$ platí:

$$\lim_{(x;x)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}}=\frac{1}{2}.$$

Pre priblíženie $-x=y\to 0$, resp. $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}=\left\{\left(\frac{1}{k};-\frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}\longmapsto(0;0)$ platí:

$$\lim_{(x;-x)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}\cdot(-\frac{1}{k})}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{-1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Pre priblíženie $x=y^2\to 0$, resp. $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}=\left\{\left(\frac{1}{k^2};\frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}\longmapsto(0;0)$ platí:

$$\lim_{(y^2;y)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\cdot y}{y^4+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y^2+1}=\frac{0}{0+1}=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{k}+k}=\frac{1}{0+\infty}=0.$$

Pre priblíženie $x=2y\to 0$, resp. $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}=\big\{(\frac{2}{k};\frac{1}{k})\big\}_{k=1}^{\infty}\longmapsto(0;0)$ platí:

$$\lim_{(y;2y)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2y\cdot y}{4y^2+x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{5y^2}=\frac{2}{5},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{4}{k^2}+\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{5}{k^2}}=\frac{2}{5}.\ \blacksquare$$

Poznámka 1.1.11.
Existuje nekonečne veľa možností priblíženia $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}\longmapsto(0;0)$ z definície limity (poznámka 1.1.7) a pre všetky tieto možnosti musí byť $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k;y_k)$ rovnaká.
V príklade 1.1.17 sme volili aj priblíženia vyjadrené explicitnou funkciou, napr. $x=y^2\to 0$ znamená priblíženie k bodu $(0;0)$ po parabole určenej rovnicou $x=y^2$.
Každá z dvojnásobných limít predstavuje iba jedno z priblížení (pr. 1.1.17, obr. 1.1.8):

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x_k;y_k)$ *znamená najprv priblíženie k osi x a potom po osi x k bodu $(0;0)$,*

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x_k;y_k)$ *znamená najprv priblíženie k osi y a potom po osi y k bodu $(0;0)$.*

Príklad 1.1.18.
a) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^2-y^2}{\sin(x-y)}=\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{(x-y)(x+y)}{\sin(x-y)}=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\ \ r=x-y & x\to 0 & r\to 0\\ \phantom{\text{Subst.}}\ \ s=x+y & y\to 0 & s\to 0\end{array}\right]$$
$$=\lim_{(r;s)\to(0;0)}\frac{r\cdot s}{\sin r}=\lim_{r\to 0}\frac{r}{\sin r}\cdot\lim_{s\to 0}s=1\cdot 0=0.$$

b) $$\lim_{(x;y)\to(a;a)}\frac{x^2-y^2}{\sin(x-y)}=\lim_{(x;y)\to(a;a)}\frac{(x-y)(x+y)}{\sin(x-y)}=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\ \ r=x-y & x\to a & r\to 0\\ \phantom{\text{Subst.}}\ \ s=x+y & y\to a & s\to 2a\end{array}\right]$$
$$=\lim_{(r;s)\to(0;2a)}\frac{r\cdot s}{\sin r}=\lim_{r\to 0}\frac{r}{\sin r}\cdot\lim_{s\to 2a}s=1\cdot 2a=2a\ \text{pre všetky}\ a\in R.$$

c) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)}$ neexistuje, pretože pre $y=x\to 0$ neexistuje limita

$$\lim_{(x;x)\to(0;0)}\frac{x+x}{\sin(x^2+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x^2)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x^2}{\sin(2x^2)}\cdot\frac{1}{x}\right]=\begin{cases}1\cdot\frac{1}{0^+}=+\infty & \text{pre } x\to 0^+,\\ 1\cdot\frac{1}{0^-}=-\infty & \text{pre } x\to 0^-.\end{cases}$$

d) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$ neexistuje, pretože pre $y=x\to 0$ a pre $x=0$, $y\to 0$ platí

$$\lim_{(x;x)\to(0;0)}\frac{x^2x^2}{x^2x^2+x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,\quad \lim_{(0;y)\to(0;0)}\frac{0^2y^2}{0^2y^2+0-y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{-y}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

e) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}(x+y)\sin\frac{1}{xy}=0$, pretože pre všetky $x,y\in R-\{0\}$ platí $-1\le\sin\frac{1}{xy}\le 1$,

$$-|x+y|\le-|x+y|\cdot|\sin\tfrac{1}{xy}|\le(x+y)\sin\tfrac{1}{xy}\le|x+y|\cdot|\sin\tfrac{1}{xy}|\le|x+y|.$$

Pre limity potom platí (dôsledok 1.1.10.a)

$$0=-\lim_{(x;y)\to(0;0)}|x+y|\le\lim_{(x;y)\to(0;0)}(x+y)\sin\tfrac{1}{xy}\le\lim_{(x;y)\to(0;0)}|x+y|=0.\ \blacksquare$$

1.1.4 Spojitosť funkcie n premenných

Ako sme už spomínali, limita a spojitosť funkcie v priestore R^n, $n \in N$ sa definujú analogicky ako v R a majú podobné vlastnosti. Keďže R^1 je špeciálny prípad priestoru R^n pre $n = 1$, vlastnosti platné v R^n musia platiť aj v R. **Funkcia $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$**, ak

$$\text{pre všetky } \{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) \text{ také, že } \{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \boldsymbol{a}, \text{ platí } \{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto f(\boldsymbol{a})$$
$$(\text{t. j. ak } \boldsymbol{x}_k \in D(f),\ \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}, \text{ potom platí } \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{a})).$$

Poznámka 1.1.12.
Bod $\boldsymbol{a} \in D(f)$ môže byť iba hromadný alebo izolovaný.
V prípade izolovaného bodu $\boldsymbol{a}$ existuje jediná postupnosť $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\boldsymbol{a}\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \boldsymbol{a}$.
Potom $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} = \{f(\boldsymbol{a})\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto f(\boldsymbol{a})$, t. j. f ***je vždy spojitá v izolovanom bode $\boldsymbol{a}$.***

Spojitosť funkcie $f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ znamená, že sú v bode $\boldsymbol{a}$ spojité všetky jej zložky $f_1, f_2, \ldots, f_m\colon R^n \to R$. Z definícií limity a spojitosti funkcie v bode vyplýva nasledujúca veta.

Veta 1.1.17.
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, $\boldsymbol{a} \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

$$f \text{ je spojitá v bode } \boldsymbol{a} \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).$$

Ak je f spojitá v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$, potom $\boldsymbol{a}$ nazývame **bodom spojitosti funkcie f**. Ak f nie je spojitá v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$, nazýva sa **nespojitá v bode $\boldsymbol{a}$**, pričom tento bod nazývame **bodom nespojitosti funkcie f**. To znamená, že f je nespojitá v bode $\boldsymbol{a}$, ak

$$\text{existuje } \{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f),\ \{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \boldsymbol{a} \text{ taká, že } \{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} \not\longmapsto f(\boldsymbol{a})$$
$$(\text{t. j. } \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}, \text{ ale } \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) \neq f(\boldsymbol{a}) \text{ alebo } \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) \text{ neexistuje}).$$

Z poznámky 1.1.12 vyplýva, že f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $D(f)$. Preto rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky hromadné body $D(f)$. Podobne ako pri reálnych funkciách jednej premennej, rozdeľujeme body nespojitosti na body odstrániteľnej a neodstrániteľnej nespojitosti.

Bod nespojitosti $\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **bod odstrániteľnej nespojitosti funkcie f**, ak existuje konečná $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{a})$. Inak sa nazýva **bod neodstrániteľnej nespojitosti**.

V prípade odstrániteľnej nespojitosti funkcie f, stačí položiť $f(\boldsymbol{a}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ a nespojitosť v bode $\boldsymbol{a}$ sa odstráni.

Limita a spojitosť funkcie sú lokálne záležitosti v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$. Pri spojitosti je potrebné, aby $\boldsymbol{a} \in D(f)$. Pri limite musí byť bod $\boldsymbol{a}$ hromadným bodom $D(f)$. Veta 1.1.18 charakterizuje spojitosť funkcie v danom bode pomocou okolí a je analógiou vety 1.1.6 pre limity. Spojité funkcie definované v priestore R^n, $n \in N$ majú podobné vlastnosti ako spojité funkcie $R \to R$ [6]. Vyjadrujú ich nasledujúce tvrdenia.

Ak uvážime poznámku 1.1.8, tieto tvrdenia ostanú v platnosti, ak namiesto okolí $O_\delta(\boldsymbol{a})$, $O_\varepsilon(f(\boldsymbol{a}))$ použijeme intervaly $I_\delta(\boldsymbol{a})$, $I_\varepsilon(f(\boldsymbol{a}))$.

Veta 1.1.18.
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$.
$\iff$ Pre každé $O(f(\boldsymbol{a}))$ existuje $O(\boldsymbol{a})$ tak, že
pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in O(f(\boldsymbol{a}))$.

Ak označíme polomery okolí ε, δ, môžeme tvrdenie vety symbolicky písať:

$$\underbrace{\forall O_\varepsilon(f(\boldsymbol{a}))}_{\forall \varepsilon > 0} \ \underbrace{\exists O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\exists \delta > 0} \ \forall \boldsymbol{x} \in D(f)\colon \ \underbrace{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f(\boldsymbol{x}) \in O_\varepsilon(f(\boldsymbol{a}))}_{\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\|_m < \varepsilon}.$$

Príklad 1.1.19.
Funkcia $f(x; y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\colon R^2 \to R$ je spojitá.

Jediný problematický bod je $(0; 0)$, ktorý nepatrí do $D(f) = R^2 - \{(0; 0)\}$. Bod $(0; 0)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti, pretože neexistuje $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (pr. 1.1.17). ∎

Veta 1.1.19.
a) $f, g\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$, $r \in R$.
$\implies$ $f \pm g$, rf sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$.

b) $f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$.
$\implies$ $|f|$, fg sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$, pre $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$ sú $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ spojité v bode $\boldsymbol{a}$.

Veta 1.1.20 (Spojitosť zloženej funkcie).
$f\colon R^n \to R^m$, $g\colon R^m \to R^l$, $n, m, l \in N$, $H(f) \subset D(g)$,
f je spojitá v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$, g je spojitá v bode $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) \in D(g)$.
$\implies$ $F = g(f)$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Veta 1.1.21 (O zovretí).
$f, g, h\colon R^n \to R$, $n \in N$, $\boldsymbol{a} \in M = D(f) \cap D(g) \cap D(g)$,
g, h sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a}) = h(\boldsymbol{a})$.
$O(\boldsymbol{a})$ je také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap M$ platí $h(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$.
$\implies$ f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Predpoklad $f(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a}) = h(\boldsymbol{a})$ je dôležitý. Ak nie je splnený, potom funkcia f v bode $\boldsymbol{a}$ nemusí byť spojitá.

Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ **je spojitá na množine** $A \subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode $\boldsymbol{a} \in A$. Ak je spojitá na celom svojom $D(f)$, potom ju nazývame **spojitá**. Je zrejmé, že ak je funkcia f spojitá na nejakej množine A, potom je spojitá na každej podmnožine $B \subset A$.

Veta 1.1.22 (Lokálna ohraničenosť).
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$.
$\implies$ f je lokálne ohraničená, t. j. existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$, v ktorom je f ohraničená
(existuje $O(\boldsymbol{a})$ tak, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$ platí $\|f(\boldsymbol{x})\|_m \leq \beta$, kde $\beta \geq 0$).

Zo spojitosti funkcie f na množine $A \subset D(f)$ ešte nevyplýva jej ohraničenosť na tejto množine. Napríklad $f\colon z = \frac{1}{x^2+y^2}$, $(x;y) \in R^2 - \{(0;0)\}$ je spojitá na intervale $(0;2) \times (0;2)$, ale nie je ohraničená (obr. 1.1.14).

Veta 1.1.23.
$f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$. Potom platí:

a) $f(\boldsymbol{a}) < 0 \implies$ existuje $O(\boldsymbol{a})$ tak, že $f(\boldsymbol{x}) < 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$.

b) $f(\boldsymbol{a}) > 0 \implies$ existuje $O(\boldsymbol{a})$ tak, že $f(\boldsymbol{x}) > 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$.

Veta 1.1.24.
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ je spojitá, $A \subset D(f)$ je uzavretá a ohraničená množina.

$\implies$ $f(A)$ je uzavretá a ohraničená množina.

Ak je spojitá funkcia $f\colon A \to f(A)$ prostá, potom k nej existuje inverzná funkcia $f^{-1}\colon f(A) \to A$, ktorá je tiež spojitá (viď nasledujúci príklad).

Príklad 1.1.20.
Funkcia $f(x;y) = (x+y; x-y)\colon R^2 \to R^2$ je spojitá.
$A = \langle 0;1 \rangle \times \langle 0;1 \rangle$ je uzavretá a ohraničená množina. Potom (veta 1.1.24) je množina $f(A)$ tiež uzavretá a ohraničená. Skutočne $f(A) = \langle 0;2 \rangle \times \langle -1;1 \rangle$ je uzavretá a ohraničená.

Funkcia $f(x;y) = (x+y; x-y)\colon A \to f(A)$ je spojitá, prostá a aj bijektívna. Pre jej inverznú funkciu $f^{-1}(u;v)\colon f(A) \to A$ platí

$$f(x;y) = (x+y; x-y) = (u;v) \iff f^{-1}(u;v) = (x;y).$$

To znamená, že musíme z rovníc $x+y=u$, $x-y=v$ vyjadriť neznáme x a y.

Ak ich sčítame, dostaneme $2x = (x+y)+(x-y) = u+v$, t. j. $x = \frac{u+v}{2}$.
Ak ich odčítame, dostaneme $2y = (x+y)-(x-y) = u-v$, t. j. $y = \frac{u-v}{2}$.

Inverzná funkcia má potom tvar $f^{-1}(u;v) = (\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2})\colon f(A) \to A$.

Platnosť overíme skúškou správnosti. Pre všetky $(x;y) \in A$, resp. $(u;v) \in f(A)$ platí:

$$f^{-1}(f(x;y)) = f^{-1}(x+y; x-y) = (\tfrac{x+y+x-y}{2}; \tfrac{x+y-x+y}{2}) = (x;y).$$
$$f(f^{-1}(u;v)) = f(\tfrac{u+v}{2}; \tfrac{u-v}{2}) = (\tfrac{u+v}{2} + \tfrac{u-v}{2}; \tfrac{u+v}{2} - \tfrac{u-v}{2}) = (u;v). \blacksquare$$

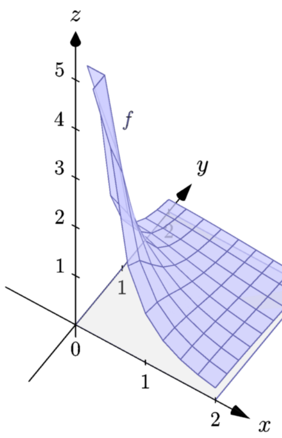
Veta 1.1.25.
$f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ je spojitá, $A \subset D(f)$ je súvislá množina.

$\implies$ $f(A)$ je súvislá množina.

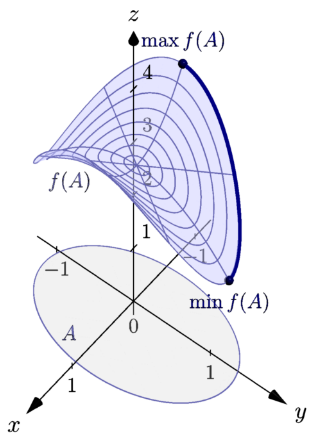
Na záver tejto časti uvedieme rozšírenie Weierstrasseho vety (ma1: veta 3.3.10) pre n-rozmerné funkcie.

Veta 1.1.26.
$f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je spojitá na oblasti $A \subset R^n$ (otvorená a súvislá množina), $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$.

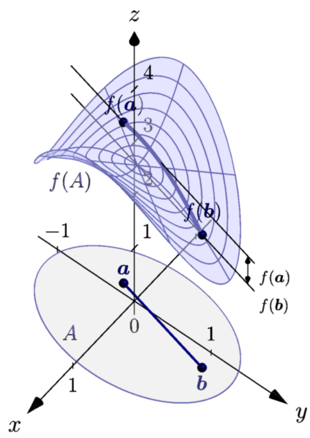
$\implies$ f nadobúda všetky hodnoty z intervalu s koncovými bodmi $f(\boldsymbol{a})$ a $f(\boldsymbol{b})$.



Obr. 1.1.14: Veta 1.1.22



Obr. 1.1.15: Veta 1.1.25



Obr. 1.1.16: Veta 1.1.26

1.2 Derivácia a diferenciál funkcie n premenných

1.2.1 Diferencovateľnosť funkcie viacerých premenných

Pojem derivácie funkcie dvoch a viacerých premenných je trochu zložitejší ako pojem derivácie funkcie jednej premennej. Derivácia funkcie $f\colon R \to R$ v bode $a \in D(f)$ geometricky predstavuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie f v tomto bode a. Pri derivácii funkcie $f\colon R^2 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2) \in D(f)$ hovoríme o dotykovej rovine ku grafu funkcie f v bode $(a_1; a_2)$ a potrebujeme dve dotykové priamky a ich smernice. Pri derivácii funkcie $f\colon R^3 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3) \in D(f)$ už potrebujeme tri dotykové priamky a ich smernice atď. Tieto funkcie môžeme derivovať v danom bode v smere ľubovoľného vektora patriaceho do $D(f)$. Špeciálne, derivácie v smere súradnicových osí, nazývame parciálne derivácie. Treba si však uvedomiť, že existencia všetkých parciálnych derivácií v danom bode ešte nezaručuje derivácie v ostatných smeroch. To znamená, že funkcia nemusí mať v tomto bode deriváciu, dokonca ani nemusí byť spojitá v tomto bode.

Nech $f\colon A \to R^m$, pričom $A \subset R^n$ je oblasť, $n, m \in N$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$. Nech $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n) \in R^n$ je ľubovoľný vektor taký, že platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in A$. Hovoríme, že **funkcia f** je **diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$**, ak existuje lineárne zobrazenie $\lambda\colon R^m \to R^n$ (nezávislé od $\boldsymbol{h}$) reprezentované reálnou maticou $\boldsymbol{D}$ typu $m \times n$ také, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\lambda(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \boldsymbol{0}_m. \tag{1.5}$$

Matica $\boldsymbol{D}$ sa nazýva **derivácia funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** a označuje sa $f'(\boldsymbol{a})$, t. j. $\boldsymbol{D} = f'(\boldsymbol{a})$. Lineárna funkcia $\lambda(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{D}\boldsymbol{h}^T$ reprezentovaná maticou $\boldsymbol{D} = f'(\boldsymbol{a})$ sa nazýva **diferenciál[16] funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** a označuje sa $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$, t. j. $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T$.

Ak použijeme substitúciu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in A$, potom $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T$

[16] Takto definovaný diferenciál sa zvykne nazývať **totálny**, **silný**, resp. **Fréchetov diferenciál**.

a pre $\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}_n$ platí $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$. Limitu (1.5) môžeme písať v tvare

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \mathbf{0}_m. \tag{1.6}$$

Ak je funkcia f diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{a}\in B$, kde $B \subset A$, potom sa nazýva **diferencovateľná na množine** B.

Poznámka 1.2.1.
Funkcia f môže mať v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$ najviac jednu deriváciu $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{D}$.
Dokážeme sporom. Nech existujú dve matice $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ typu $m\times n$ také, že $\boldsymbol{D}_1 \neq \boldsymbol{D}_2$ a platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \mathbf{0}_m, \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \mathbf{0}_m.$$

Funkcie $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$, $\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T$, $\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T$ sú ohraničené, hodnota $f(\boldsymbol{a})$ je konečná. Z vety 1.1.8 vyplýva, že v nejakom okolí $O(\mathbf{0}_n)$ sú ohraničené aj argumenty predchádzajúcich limít. Potom majú zmysel nasledujúce limity a platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}, \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}.$$

Ak odčítame uvedené rovnosti, dostaneme

$$\mathbf{0}_m = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} - \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}.$$

Rozdiel $\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$ je nenulová matica typu $m\times n$. Pre súčin $\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T$ platí

$$\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T = (h_1; h_2; \ldots; h_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}^T = (h_1; h_2; \ldots; h_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= (c_{11}h_1 + c_{12}h_2 + \cdots + c_{1n}h_n; c_{21}h_1 + c_{22}h_2 + \cdots + c_{2n}h_n; \ldots;$$
$$c_{m1}h_1 + c_{m2}h_2 + \cdots + c_{mn}h_n).$$

Označme j-ty riadok matice $\boldsymbol{C}$ symbolom $\boldsymbol{c}_j = (c_{j1}; c_{j2}; \ldots; c_{jn})$, $j=1,2,\ldots,m$. Pre j-ty člen vektora $\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T$ platí $c_{j1}h_1+c_{j2}h_2+\cdots+c_{jn}h_n = \boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_j^T$, t. j. $\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T = (\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_1^T; \boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_2^T; \ldots; \boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_m^T)$. Potom

$$\mathbf{0}_m = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{(\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_1^T; \boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_2^T; \ldots; \boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_m^T)}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \left(\frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}; \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}; \ldots; \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_m^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \right),$$

t. j. pre všetky $j=1,2,\ldots,m$ existuje limita $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0$.
Pre $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}_n$ zvoľme priblíženie $\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}_n$ v tvare $t\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}_n$, kde[17] *$t\in(0;1)$. Potom platí*

$$0 = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_j^T}{\|t\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_j^T}{t\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n} = \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}, \ j=1,2,\ldots,m.$$

Posledné rovnosti sú možné iba v prípade, že $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2 = \cdots = \boldsymbol{c}_m = \mathbf{0}_n$. To znamená, že matica $\boldsymbol{C}$ je nulová (spor) a platí $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$.

[17] To znamená, že sa k bodu $\mathbf{0}_n$ približujeme po úsečke s koncovými bodmi $\boldsymbol{h}$ a $\mathbf{0}_n$.

Veta 1.2.1.
$f\colon A\to R^m$, $A\subset R^n$ je oblasť, $n,m\in N$, $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in A$. Potom platí:

f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$ $\implies$ f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Dôkaz.
Funkcia f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}=\boldsymbol{0}_m$.
To znamená, že musí platiť $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\left[f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T\right]=\boldsymbol{0}_m$. Potom platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\left[f(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T\right]=f(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{0}_m=f(\boldsymbol{a}).$$

Tým je podľa vety 1.1.17 tvrdenie dokázané. ■

Príklad 1.2.1.
Funkcia $f(x_1;x_2)=x_1^2+x_2^2\colon R^2\to R$ je diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2)\in R^2$.

Riešenie.
Nech $\boldsymbol{h}=(h_1;h_2)\in R^2$ je ľubovoľné. Pre $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})$ platí

$$f(a_1+h_1;a_2+h_2)-f(a_1;a_2)=(a_1+h_1)^2+(a_1+h_2)^2-(a_1^2+a_2^2)$$
$$=a_1^2+2a_1h_1+h_1^2+a_2^2+2a_2h_2+h_2^2-a_1^2-a_2^2=h_1^2+h_2^2+2a_1h_1+2a_2h_2.$$

Označme $\boldsymbol{D}=(d_1;d_2)$. Potom

$$\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T=(h_1;h_2)\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}=d_1h_1+d_2h_2 \text{ a platí}$$

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}=\frac{h_1^2+h_2^2+2a_1h_1+2a_2h_2-d_1h_1-d_2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\sqrt{h_1^2+h_2^2}+\frac{(2a_1-d_1)h_1+(2a_2-d_2)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

To znamená, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}=\boldsymbol{0}_m \iff (2a_1-d_1)h_1+(2a_2-d_2)h_2,\text{ t. j. } d_1=2a_1,\ d_2=2a_2.$$

Potom $\boldsymbol{D}=(2a_1;2a_2)$ je derivácia funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T=2a_1h_1+2a_2h_2$ je diferenciál funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$. ■

1.2.2 Parciálne derivácie funkcie n premenných

Derivácia funkcie $f\colon A\to R^m$, pričom $A\subset R^n$ je oblasť, $n,m\in N$, v bode $\boldsymbol{a}\in A$ je konštantná matica typu $m\times n$. Jej výpočet na základe definície (príklad 1.2.1) nie je vhodná voľba a v absolútnej väčšine prípadov je takýto výpočet prakticky nemožný. Deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}\in A$ môžeme jednoducho vypočítať pomocou tzv. parciálnych derivácií funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$.

Nech $f\colon A\to R^m$, pričom $A\subset R^n$ je oblasť, $n,m\in N$, $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in A$. **Funkcia f má v bode a parciálnu deriváciu j-tej zložky podľa i-tej premennej (podľa x_i)**, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$, ak existuje konečná (vlastná)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i+t;a_{i+1};\ldots;a_n)-f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i;a_{i+1};\ldots;a_n)}{t}=\begin{bmatrix}\text{Subst. } x_i=a_i+t\\ t\to 0,\ x_i\to a_i\end{bmatrix}$$
$$=\lim_{x_i\to a_i}\frac{f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};x_i;a_{i+1};\ldots;a_n)-f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i;a_{i+1};\ldots;a_n)}{x_i-a_i}=\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}.$$

Hodnota funkcie f_j sa mení iba v závislosti od i-tej zložky, od ostatných zložiek nie je závislá. Pre $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ môžeme definovať jednorozmerné funkcie $g_{ij}(x_i) = f(a_1; \ldots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \ldots; a_n): R \to R$. Potom platí

$$\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d} g_j(a_i)}{\mathrm{d} x_i} = g'_{ij}(a_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Funkcia f má parciálnu deriváciu j-tej zložky podľa i-tej premennej na množine $B \subset A$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ak pre každé $\boldsymbol{a} \in B$ existuje $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$.

Veta 1.2.2.
$f: A \to R^m$, $A \subset R^n$ je oblasť, $n, m \in N$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in A$, $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{D}$.

$\Longrightarrow$ Existujú všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = d_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Dôkaz.
f je diferencovateľná, t. j. platí (1.5). Ak označíme $\boldsymbol{d}_j = (d_{j1}; d_{j2}; \ldots; d_{jn})$ j-ty riadok matice $\boldsymbol{D}$ (poznámka 1.2.1), potom pre $j = 1, 2, \ldots, m$ platí $\lim\limits_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n} \frac{f_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f_j(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0$.
Ak označíme[18] $\boldsymbol{t}_i = (0; \ldots; 0; t; 0; \ldots; 0) \to \boldsymbol{0}_n$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom $\|\boldsymbol{t}_i\|_n = \sqrt{t^2} = |t|$.
Pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\boldsymbol{t}_i \boldsymbol{d}_j^T = (0; \ldots; 0; t; 0; \ldots; 0) \cdot (d_{j1}; \ldots; d_{j,i-1}; d_{ji}; d_{j,i+1}; \ldots; d_{jn})^T = t d_{ji},$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\boldsymbol{t}_i \to \boldsymbol{0}_n} \frac{f_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{t}_i) - f_j(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{t}_i \boldsymbol{d}_j^T}{\|\boldsymbol{t}_i\|_n} = \lim_{\boldsymbol{t}_i \to \boldsymbol{0}_n} \left| \frac{f_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{t}_i) - f_j(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{t}_i \boldsymbol{d}_j^T}{\|\boldsymbol{t}_i\|_n} \right| \\ &= \lim_{t \to 0} \left| \frac{f_j(a_1; \ldots; a_{i-1}; a_i + t; a_{i+1}; \ldots; a_n) - f_j(a_1; \ldots; a_{i-1}; a_i; a_{i+1}; \ldots; a_n) - t d_{ji}}{t} \right| \\ &= \lim_{t \to 0} \left| \frac{f_j(a_1; \ldots; a_i + t; \ldots; a_n) - f_j(a_1; \ldots; a_i; \ldots; a_n)}{t} - d_{ji} \right| = \left| \frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} - d_{ji} \right|. \end{aligned}$$

Potom $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} - d_{ji} = 0$, t. j. $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = d_{ji}$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že **ak je funkcia** $f: A \to R^m$ ($n, m \in N$, $A \subset R^n$ je oblasť) **diferencovateľná** v bode $\boldsymbol{a} \in A$, **potom** v bode $\boldsymbol{a}$ **existujú všetky parciálne derivácie** každej zložky podľa každej premennej a tvoria maticu derivácií $f'(\boldsymbol{a})$, ktorú nazývame **Jacobiho matica**:

$$f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{D} = \left(\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} \right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.2.2.
Opačné tvrdenie vety 1.2.2 pre $n \geq 2$ neplatí. ***Existencia všetkých parciálnych derivácii funkcie $f: R^n \to R$, $n \in N$, $n \geq 2$ v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ nezaručuje existenciu derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ a nezaručuje ani spojitosť f v tomto bode*** *(príklad 1.2.4).*
Platí to iba pre funkcie $f: R \to R$, kde existuje iba jedna parciálna derivácia identická s deriváciou $f'(a)$: „Ak v bode $a \in D(f)$ existuje konečná derivácia $f'(a)$, potom je f v bode a spojitá.“ (ma1: veta 4.1.1). Spojitosť funkcie f v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ zaručuje existencia derivácie $f'(\boldsymbol{a})$, t. j. diferencovateľnosť funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ (veta 1.2.1).

[18]Všade su nuly a na i-tom mieste je $t \in R$, $t \to 0$.

Uvedieme niektoré špeciálne prípady pre $n, m \in N$. Ak $n = 1$, $m = 1$, resp. $n = m$, potom sa Jacobiho matica môže zjednodušiť.

- $n = 1,\ m = 1,\ f\colon R \to R$

  $\boldsymbol{x} = (x) = x$, $\boldsymbol{a} = (a) = a$, $\boldsymbol{h} = (h) = h$.

  Dostávame deriváciu funkcie jednej premennej, ako ju poznáme doposiaľ (ma1: 4.1 Derivácia reálnej funkcie). Platí

$$f'(\boldsymbol{a}) = \Big(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x}\Big) = \tfrac{\partial f(a)}{\partial x} = f'(a), \qquad \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\Big(\tfrac{\partial f(a)}{\partial x}\Big) = f'(a)h = \mathrm{d}f(a, h).$$

- $n \in N,\ m = 1,\ f\colon R^n \to R$

  $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n)$.

  Matica derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ sa redukuje na riadkový vektor s n zložkami, ktorý sa nazýva **gradient funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** a označuje $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$. Platí

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) = \Big(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\Big),$$

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})^T = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{h}^T = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} h_1 + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} h_n.$$

  Na obr. 1.2.17 vpravo sú znázornené parciálne derivácie funkcie $f\colon R^2 \to R$. Geometricky vyjadrujú smernice, t. j. tangensy uhlov α_1 a α_2 dotykových priamok t_1 a t_2 ku grafu funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$ so svojimi kolmými priemetmi p_1 a p_2 do súradnicovej roviny x_1x_2. Priamky t_1 a t_2 jednoznačne určujú dotykovú rovinu ku grafu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ (viď poznámka 1.2.3 a riešený príklad v poznámke 1.2.4).

  Keď zafixujeme premennú x_2 na hodnotu a_2 dostaneme reálnu funkciu $f(x_1)\colon R \to R$ jednej reálnej premennej. Jej grafom je (rovinná) krivka, ktorá vznikne prierezom pôvodného grafu rovinou určenou priamkami d_1 a p_1 (rovinou rovnobežnou so súradnicovou rovinou x_1y obsahujúcou dotyčnicu d_1). Analogicky môžeme fixovať premennú x_1 na hodnotu a_1. Potom dostaneme reálnu funkciu $f(x_2)\colon R \to R$, ktorej graf vznikne prierezom pôvodného grafu rovinou určenou priamkami d_2 a p_2 (rovinou rovnobežnou s rovinou x_2y obsahujúcou dotyčnicu d_2).

- $n = 1,\ m \in N,\ f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)\colon R \to R^m$

  $\boldsymbol{x} = (x) = x$, $\boldsymbol{a} = (a) = a$, $\boldsymbol{h} = (h) = h$.

  Matica derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ sa redukuje na stĺpcový vektor s m zložkami, ktorý sa nazýva **dotykový vektor funkcie f v bode a**. Funkcia f geometricky predstavuje krivku parametrizovanú rovnicami $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $\ldots$, $y_m = f_m(x)$, $x \in A$. Platí

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \\ \cdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}f(a, h) &= h f'(a)^T \\ &= \Big(\tfrac{\partial f_1(a)}{\partial x} h; \tfrac{\partial f_2(a)}{\partial x} h; \ldots; \tfrac{\partial f_m(a)}{\partial x} h\Big) \\ &= \Big(f_1'(a)h; f_2'(a)h; \ldots; f_m'(a)h\Big). \end{aligned}$$

- $n = m \in N,\ f = (f_1; f_2; \ldots; f_n)\colon R^n \to R^n$

  $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n)$.

Derivácia $f'(\boldsymbol{a})$ je štvorcová matica typu $n\times n$, jej determinant[19] $\det f'(\boldsymbol{a})$ sa nazýva **Jakobián**. Platí

$$f'(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\end{pmatrix},\quad \begin{aligned}&\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\\ &\quad=\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T=\end{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}h_2+\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}h_n\\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}h_2+\frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}h_n\\ \dots\\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}h_2+\frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}h_n\end{pmatrix}.$$

Príklad 1.2.2.
a) $f(x;y)=x^y\colon (0;\infty)\times R\to R$.

$$\operatorname{grad} f(x;y)=f'(x;y)=\left(\tfrac{\partial f(x;y)}{\partial x};\tfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right)=(yx^{y-1};x^y\ln x),$$
$$f'(1;1)=(1\cdot 1^{1-1};1^1\cdot\ln 1)=(1;0),\ f'(1;0)=(0\cdot 1^{0-1};1^0\cdot\ln 1)=(0;0).$$

b) $f(x;y)=(f_1(x;y);f_2(x;y))=(x^y;y^x)\colon (0;\infty)^2\to R^2$.

$$f'(x;y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x;y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x;y)}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2(x;y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x;y)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}yx^{y-1} & x^y\ln x\\ xy^{x-1} & y^x\ln y\end{pmatrix},\quad f'(1;1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

Poznámka 1.2.3.
a) $y=f(x_1)\colon R\to R$, $a_1\in D(f)$.
Dotyčnica t_1 ku grafu funkcie f v bode a_1 má rovnicu (obr. 1.2.17 vľavo)

$$t_1\colon y-f(a_1)=\mathrm{d}f(a_1,x_1-a_1)=f'(a_1)\cdot(x_1-a_1)=\operatorname{tg}\alpha_1\cdot(x_1-a_1).$$

Normálový vektor k dotyčnici t_1 má tvar $(f'(a_1);-1)=(\operatorname{tg}\alpha_1;-1)$.
Normála n, t. j. kolmica ku dotyčnici t_1 v bode dotyku $(a_1;f(a_1))$ má parametrické vyjadrenie $n\colon x_1=a_1+f'(a_1)t$, $y=f(a_1)-t$, $t\in R$.
Ak $f'(a_1)\neq 0$, potom môžeme normálu vyjadriť rovnicou $n\colon y-f(a_1)=-\frac{1}{f'(a_1)}\cdot(x_1-a_1)$.

b) $y=f(x_1;x_2)\colon R^2\to R$, $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2)\in D(f)$.
Dotyková rovina τ ku grafu f v bode $\boldsymbol{a}$ má rovnicu (obr. 1.2.17 vpravo)

$$\tau\colon y-f(\boldsymbol{a})=\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=f'(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T=\left(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1};\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1-a_1\\x_2-a_2\end{pmatrix}$$
$$=\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}\cdot(x_1-a_1)+\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\cdot(x_2-a_2)=\operatorname{tg}\alpha_1\cdot(x_1-a_1)+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot(x_2-a_2).$$

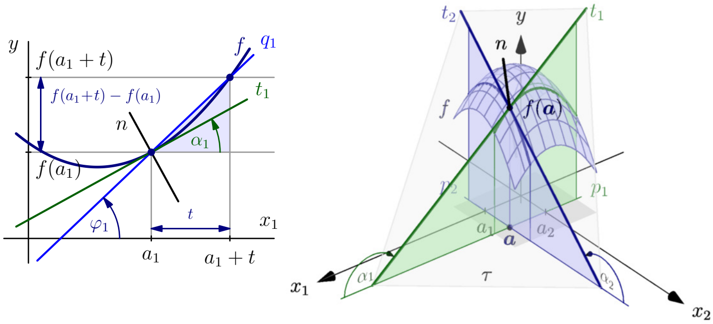
Normálový vektor dotykovej roviny τ má tvar $\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1};\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2};-1\right)=(\operatorname{tg}\alpha_1;\operatorname{tg}\alpha_2;-1)$.
*Priamka n prechádzajúca dotykovým bodom $(\boldsymbol{a};f(\boldsymbol{a}))=(a_1;a_2;f(a_1;a_2))$ kolmá na τ sa nazýva **normála ku grafu funkcie f v bode** $(\boldsymbol{a};f(\boldsymbol{a}))$ a má parametrický tvar*

$$n\colon\ x_1=a_1+\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}t,\quad x_2=a_2+\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}t,\quad y=f(a_1;a_2)-t,\quad t\in R.$$

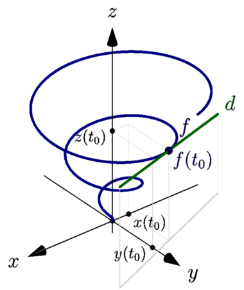
c) $y=f(x_1;x_2;\dots;x_n)\colon R^n\to R$, $n\in N$, $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\dots;a_n)\in D(f)$.
*Dotykovú množinu nazývame **dotyková nadrovina ku grafu f v bode $\boldsymbol{a}$** a má tvar*

$$\tau\colon y-f(\boldsymbol{a})=\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=f'(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T=\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\dots+\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}(x_n-a_n).$$

[19] Niekedy sa v literatúre ako Jacobiho matica nazýva $f'(\boldsymbol{a})$ iba v tomto prípade $n\times n$.



Obr. 1.2.17: Geometrická interpretácia derivácie funkcie $f\colon R \to R$ (vľavo) a funkcie $f\colon R^2 \to R$ (vpravo)



Obr. 1.2.18: Špirála z príkladu 1.2.3

Príklad 1.2.3.
Uvažujme funkciu $f(t) = (x;y;z) = \left(\frac{2t\sin(2\pi t)}{\pi}; \frac{2t\cos(2\pi t)}{\pi}; t\right) \colon \langle 0;\infty) \to R^3$.
Funkcia f predstavuje priestorovú krivku v R^3, jej grafom je špirála (obr. 1.2.18) začínajúca v bode $(0;0;0)$, je definovaná parametricky rovnicami

$$f\colon\ x(t) = \frac{2t\sin(2\pi t)}{\pi}, \quad y(t) = \frac{2t\cos(2\pi t)}{\pi}, \quad z(t) = t, \quad t \geq 0.$$

Pre deriváciu funkcie f, t. j. dotykový vektor v bode $t \in \langle 0;\infty)$ platí

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sin(2\pi t)}{\pi} + \frac{4\pi t\cos(2\pi t)}{\pi} \\ \frac{2\cos(2\pi t)}{\pi} - \frac{4\pi t\sin(2\pi t)}{\pi} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sin(2\pi t)}{\pi} + 4t\cos(2\pi t) \\ \frac{2\cos(2\pi t)}{\pi} - 4t\sin(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pre každé $t_0 \in \langle 0;\infty)$ dostaneme priestorový bod $f(t_0) = (x(t_0); y(t_0); z(t_0)) \in R^3$.
Derivácia $f'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)) = (x'(t_0); y'(t_0); 1)$ predstavuje smerový vektor dotykovej priamky d ku grafu funkcie f v bode $f(t_0)$.
Parametrický tvar dotyčnice d (obr. 1.2.18) ku grafu funkcie f v bode $f(t_0)$ je

$$d\colon\ d_x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\cdot t, \quad d_y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot t, \quad d_z(t) = z(t_0) + t, \quad t \in R.$$

Napríklad pre $t_0 = 2$ dostaneme bod $f(2) = (x;y;z) = (0; \frac{4}{\pi}; 2)$ a $f'(2) = (8; \frac{2}{\pi}; 1)$.
Dotyčnica d v bode $(0; \frac{4}{\pi}; 2)$ ku špirále f má parametrické vyjadrenie

$$d\colon\ d_x(t) = 0 + 8t = 8t, \quad d_y(t) = \frac{4}{\pi} + \frac{2t}{\pi} = \frac{4+2t}{\pi}, \quad d_z(t) = 2 + t, \quad t \in R. \ \blacksquare$$

Poznámka 1.2.4.
Pre funkciu $y = f(x_1;x_2) = x_1^2 + x_2^2\colon R^2 \to R$ (pr. 1.2.1) v bode $\boldsymbol{a} = (a_1;a_2) \in R^2$ platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 2x_1, \ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = 2x_2 \implies \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\right) = (2a_1; 2a_2),$$

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} f'(\boldsymbol{a})^T = (h_1;h_2)(2a_1;2a_2)^T = 2a_1h_1 + 2a_2h_2.$$

Dotykovú rovinu τ (obr. 1.2.19) ku grafu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ tvoria dotyčnice t_1 a t_2. Kolmý priemet p_1 dotyčnice t_1 do súradnicovej roviny x_1x_2 je rovnobežný s osou x_1. Analogicky kolmý priemet p_2 dotyčnice t_2 do tejto roviny je rovnobežný s osou x_2. Priamky t_1 a p_1 zvierajú uhol α_1, pričom $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2a_1$. Priamky t_2 a p_2 zvierajú uhol α_2, pričom $\operatorname{tg}\alpha_2 = 2a_2$.

Príklad 1.2.4.
$f\colon R^2 \to R$ je definovaná vzťahom $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \begin{cases} 1 \text{ pre } xy = 0, \\ 2 \text{ pre } xy \neq 0. \end{cases}$

Obidve parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$ existujú a platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x} = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$
$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y} = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0;y)-f(0;0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{1-1}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Derivácia $f'(\boldsymbol{a}) = f'(0;0)$ neexistuje!

Riešenie.
Funkcia f nie je spojitá v bodoch $(t;0)$, $(0;t)$, $t\in R$ a teda ani v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$. Neexistuje limita funkcie f v týchto bodoch (obr. 1.2.20).
Predpokladajme, že existuje[20] $f'(\boldsymbol{a}) = f'(0;0) = \boldsymbol{D} = (0;0)$. Potom musí platiť (1.6)

$$0 = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot D^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{f(x;y)-f(0;0)-((x;y)-(0;0))\cdot(0;0)^T}{\|(x;y)-(0;0)\|_2}$$
$$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{f(x;y)-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{f(x;y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{bmatrix} \text{Priblíženie } x=y\to 0 \\ xy\neq 0,\ f(x;y)=2 \end{bmatrix}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{2}\cdot|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}}{|x|} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = \infty.$$

Dostali sme spor. To znamená, že derivácia $f'(0;0)$ neexistuje. ∎

Príklad 1.2.5.
Funkcia $f(x;y) = 2y^3\colon R^2 \to R$ je spojitá na celom svojom definičnom obore $D(f) = R^2$. Pre deriváciu (gradient) funkcie f v bode $\boldsymbol{x} = (x;y)\in D(f)$ platí

$$f'(\boldsymbol{x}) = f'(x;y) = \left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\, 2y^3}{\partial x}; \frac{\partial\, 2y^3}{\partial y}\right) = (0; 3y^2).$$

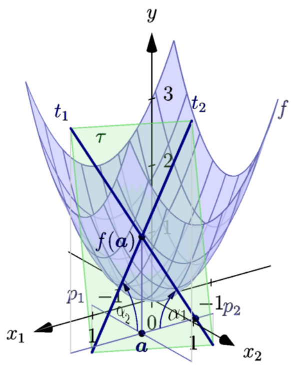
Parciálna derivácia $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0$ je pre všetky body $\boldsymbol{x}\in D(f)$ rovnaká.
Pre všetky body $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{a} \in D(f)$, ktoré majú rovnakú y-ovú súradnicu (obr. 1.2.21), platí $f(\boldsymbol{a}^*) = f(\boldsymbol{a})$, $f'(\boldsymbol{a}^*) = f'(\boldsymbol{a})$. V týchto bodoch sú dotyčnice $t_x^* = t_x$ identické a dotyčnice t_y^*, t_y sú rovnobežné. To znamená, že dotyková rovina τ v bodoch $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{a}$ je rovnaká. ∎

Príklad 1.2.6.
Funkcia $(x;y) = \Psi(\rho;\varphi) = (\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\colon\ \langle 0;\infty)\times R \to R^2$ z príkladu 1.1.3 určuje prevod súradníc bodov euklidovskej roviny z polárneho systému do karteziánskeho systému. Funkcia Ψ je spojitá a diferencovateľná v každom bode $(\rho;\varphi)\in D(\Psi) = \langle 0;\infty)\times R$. Platí

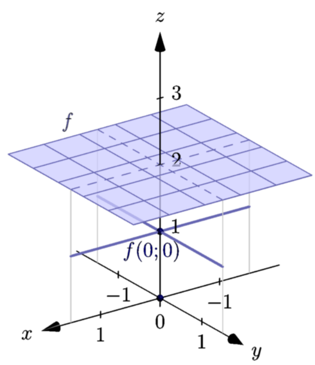
$$\Psi'(\rho;\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho;\varphi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial x(\rho;\varphi)}{\partial\rho} \\ \frac{\partial y(\rho;\varphi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial y(\rho;\varphi)}{\partial\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Pre Jakobián platí $\det\Psi'(\rho;\varphi) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$. To znamená, že pre $\rho > 0$, t. j. pre všetky body $(\rho;\varphi)\in(0;\infty)\times R$ je matica $\Psi'(\rho;\varphi)$ reguárna.[21] ∎

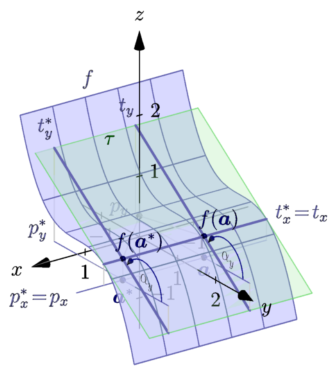
[20] Na základe vety 1.2.2 musí platiť $f'(\boldsymbol{a}) = f'(0;0) = (0;0)$.
[21] V karteziánskych súradniciach to je jediný bod $(x;y) \neq (0;0) = \mathbf{0}_2$.



Obr. 1.2.19: Poznámka 1.2.4



Obr. 1.2.20: Príklad 1.2.4



Obr. 1.2.21: Príklad 1.2.5

Príklad 1.2.7.
$f\colon z=f(x;y)=1.5x^2-y^2$, $(x;y)\in R^2$. Určte dotykovú rovinu τ ku grafu f s dotykovým bodom $\boldsymbol{a}\in D(f)$ tak, aby bola rovnobežná s rovinou $\rho\colon 6x+4y+2z-12=0$.

Riešenie.
Pre všetky $(x;y)\in R^2$ platí $z=f(x;y)=\frac{3x^2}{2}-y^2$, $z'=f'(x;y)=(3x;-2y)$.
Dotyková rovina τ ku grafu f v bode $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y)$ má rovnicu (poznámka 1.2.3)

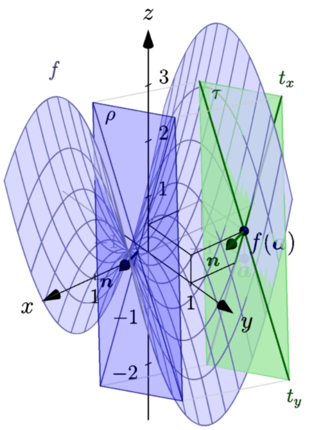
$$\tau\colon z=f(\boldsymbol{a})+\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x};\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y}\right)\cdot\begin{pmatrix}x-a_x\\y-a_y\end{pmatrix}=\frac{3a_x^2}{2}-a_y^2+(3a_x;-2a_y)\cdot\begin{pmatrix}x-a_x\\y-a_y\end{pmatrix}$$
$$=\frac{3a_x^2}{2}-a_y^2+3a_x(x-a_x)-2a_y(y-a_y)=3a_xx-2a_yy-\frac{3a_x^2}{2}+a_y^2.$$

Z toho vyplýva $\tau\colon\ -6a_xx+4a_yy+2z+3a_x^2-2a_y^2=0$.
Roviny τ a ρ sú rovnobežné, ak sa ich rovnice líšia iba v absolútnom člene[22] a majú rovnaké koeficienty pri premenných x, y, z, t. j. platia rovnosti $-6a_xx=6x$, $4a_yy=4y$.
Potom $a_x=-1$, $a_y=1$ (obr. 1.2.22), t. j. $\boldsymbol{a}=(-1;1)$, $\tau\colon 6x+4y+2z+1=0$.

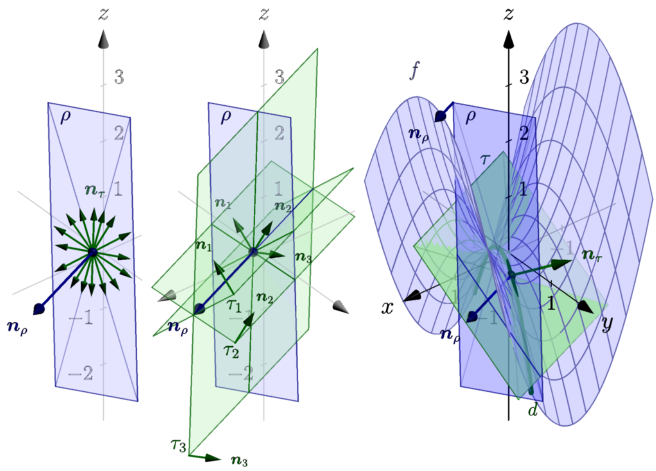
Iné riešenie.
Pre všetky $(x;y)\in R^2$ platí $z=f(x;y)=\frac{3x^2}{2}-y^2$, $z'=f'(x;y)=(3x;-2y)$,
Normálový vektor[23] dotykovej roviny τ je $\boldsymbol{n}_\tau=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x};\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y};-1\right)=(3a_x;-2a_y;-1)$.
Normálový vektor[24] roviny ρ má tvar $\boldsymbol{n}_\rho=(6;4;2)$.
Roviny τ a ρ sú rovnobežné, ak sú ich normálové vektory lineárne závislé, t. j. ak existuje $s\in R$, $s\neq 0$ také, že $\boldsymbol{n}_\tau=s\boldsymbol{n}_\rho$. Takže musí platiť $s=\frac{3a_x}{6}=\frac{-2a_y}{4}=\frac{-1}{2}$. Potom $a_x=-1$, $a_y=1$, t. j. $\boldsymbol{a}=(-1;1)$, $\tau\colon 6x+4y+2z+1=0$. ■

Príklad 1.2.8.
$f\colon z=f(x;y)=1.5x^2-y^2$, $(x;y)\in R^2$. Určte dotykovú rovinu τ ku grafu f s dotykovým bodom $\boldsymbol{a}\in D(f)$ tak, aby bola kolmá na rovinu $\rho\colon 6x+4y+2z-12=0$.

[22] My sme upravili rovnice rovín τ a ρ tak, aby mali pri premennej z rovnaký koeficient 2.
V praxi musia byť podiely príslušných koeficientov rovín τ a ρ pri všetkých premenných x, y, z rovnaké.
[23] Normálovým vektorom τ je každý vektor $s\boldsymbol{n}_\tau=s(3a_x;-2a_y;-1)=(3a_xs;-2a_ys;-s)$, $s\in R$, $s\neq 0$.
[24] Normálovým vektorom ρ je každý vektor $s\boldsymbol{n}_\rho=s(6;4;2)=(6s;4s;2s)$, $s\in R$, $s\neq 0$.



Obr. 1.2.22: Dotyková rovina τ z pr. 1.2.7



Obr. 1.2.23: Dotyková rovina τ kolmá na danú rovinu ρ (príklad 1.2.8)

Riešenie.

Pre rovinu ρ a jej normálový vektor $\boldsymbol{n}_\rho$ platí

$$\rho\colon 3x + 2y + z - 6 = 0, \quad \boldsymbol{n}_\rho = (3; 2; 1).$$

Pre dotykovú rovinu τ a jej normálový vektor $\boldsymbol{n}_\tau$ (viď príklad 1.2.7) platí

$$\tau\colon -6a_x x + 4a_y y + 2z + 3a_x^2 - 2a_y^2 = 0, \quad \boldsymbol{n}_\tau = (3a_x; -2a_y; -1).$$

Roviny ρ a τ a teda aj ich normálové vektory $\boldsymbol{n}_\rho$ a $\boldsymbol{n}_\tau$ majú byť na seba kolmé. Takých možností je nekonečne veľa (obr. 1.2.23 vľavo). Všetky $\boldsymbol{n}_\tau$, ktoré ležia v rovine ρ sú kolmé na $\boldsymbol{n}_\rho$ a môžu byť normálovým vektorom dotykovej roviny τ (obr. 1.2.23 v strede).
Vektory $\boldsymbol{n}_\rho$, $\boldsymbol{n}_\tau$ sú na seba kolmé, ak ich skalárny súčin je nulový[25]

$$(\boldsymbol{n}_\rho, \boldsymbol{n}_\tau) = ((3; 2; 1), (3a_x; -2a_y; -1)) = 9a_x - 4a_y - 1 = 0, \quad \text{t. j. } a_y = \tfrac{9a_x - 1}{4}.$$

Označme $a_x = t$, potom $a_y = \frac{9t-1}{4}$, $f(\boldsymbol{a}) = f\left(t; \frac{9t-1}{4}\right) = \frac{3t^2}{2} - \frac{(9t-1)^2}{16} = \frac{-57t^2+18t-1}{16}$.
Dotykových rovín τ je nekonečne veľa a ich body dotyku $(a_x; a_y; f(\boldsymbol{a}))$ s grafom f tvoria priestorovú krivku d (obr. 1.2.23 vpravo) parametricky definovanú vzťahmi

$$d\colon x(t) = t, \quad y(t) = \tfrac{9t-1}{4}, \quad z(t) = \tfrac{18t-57t^2-1}{16}, \quad t \in R.$$

K danému $t \in R$ patrí dotyková rovina $\tau\colon -6a_x x + 4a_y y + 2z + 3a_x^2 - 2a_y^2 = 0$, t. j.

$$\tau\colon 0 = -6tx + 4\tfrac{9t-1}{4}y + 2z + 3t^2 - 2(\tfrac{9t-1}{4})^2 = -6tx + (9t-1)y + 2z - \tfrac{57t^2-18t+1}{8}$$

s normálovým vektorom $\boldsymbol{n}_\tau = (-6t; 9t-1; 2)$. ■

[25] $\boldsymbol{n}_\rho$ a $\boldsymbol{n}_\tau$ sú na seba kolmé, t. j. ich uhol $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ a platí $(\boldsymbol{n}_\rho, \boldsymbol{n}_\tau) = \|\boldsymbol{x}\|_3 \cdot \|\boldsymbol{y}\|_3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Veta 1.2.3 (Lagrangeova).
$f\colon R^n \to R$, $n\in N$ je diferencovateľná na oblasti $A\subset D(f)$,
$\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n), \boldsymbol{b}=(b_1;b_2;\ldots;b_n)\in A$.

$\Longrightarrow$ Existujú $\boldsymbol{c}_i=(a_1;\ldots;a_{i-1};c_i;b_{i+1};\ldots;b_n)\in A$, $i=1,2,\ldots,n$ také, že $\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{a}\|_n<\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|_n$, $\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{b}\|_n<\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|_n$ pre $i=1,2,\ldots,n$ a platí

$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}(b_i-a_i)=\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}(b_1-a_1)+\cdots+\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}(b_n-a_n). \tag{1.7}$$

Dôkaz.
Na základe vety 1.2.1 je funkcia f spojitá na množine A.
Pre $i=1,2,\ldots,n$ označme $m_i=\min\{a_i,b_i\}$, $M_i=\max\{a_i,b_i\}$ a uvažujme jednorozmerné funkcie[26] $g_i(x)=f(a_1;\ldots;a_{i-1};x;b_{i+1};\ldots;b_n)\colon \langle m_i;M_i\rangle\to R$.
Platí $f(\boldsymbol{b})=g_1(b_1)$, $f(\boldsymbol{a})=g_n(a_n)$ a navyše[27] $g_i(a_i)=g_{i+1}(b_{i+1})$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

1. Ak $a_i=b_i$ pre nejaké $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, potom $\langle m_i;M_i\rangle=\{a_i\}$ je jednoprvková množina. Ak položíme $c_i=a_i=b_i$, potom $g_i(b_i)=g_i(a_i)=f(a_1;\ldots;a_{i-1};c_i;b_{i+1};\ldots;b_n)=f(\boldsymbol{c}_i)$. Derivácia $\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}$ existuje podľa predpokladov vety, takže platí

$$0=g_i(b_i)-g_i(a_i)=\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}\cdot(b_i-a_i)=\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}\cdot 0=0.$$

2. Ak $a_i\neq b_i$ pre $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, potom je funkcie g_i spojitá a pre všetky $x\in(m_i;M_i)$ existuje derivácia $g_i'(x)$, t. j. platia predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3). Potom existuje $c_i\in(m_i;M_i)$ také, že platí

$$g_i'(c_i)=\tfrac{g_i(b_i)-g_i(a_i)}{b_i-a_i},\ \text{t. j. } g_i(b_i)-g_i(a_i)=g_i'(c_i)(b_i-a_i).$$

Pre c_i platí $|c_i-a_i|<|b_i-a_i|$, $|b_i-c_i|<|b_i-a_i|$ a pretože bod $\boldsymbol{c}_i$ má zostávajúce súradnice totožné s $\boldsymbol{a}$ alebo $\boldsymbol{b}$, platí aj $\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{a}\|_n<\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|_n$, $\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}_i\|_n<\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|_n$.
Keďže $g_i(c_i)=f(a_1;\ldots;a_{i-1};c_i;b_{i+1};\ldots;b_n)=f(\boldsymbol{c}_i)$, $g_i'(c_i)=\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}$, potom platí

$$g_i(b_i)-g_i(a_i)=g_i'(c_i)\cdot(b_i-a_i)=\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}\cdot(b_i-a_i).$$

Ak to zhrnieme, potom platí

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})&=g_1(b_1)-g_n(a_n)=\left[\,g_i(a_i)=g_{i+1}(b_{i+1}),\ i=1,2,\ldots,n-1\,\right]\\&=\big[g_1(b_1)-g_1(a_1)\big]+\big[g_2(b_2)-g_2(a_2)\big]+\cdots+\big[g_n(b_n)-g_n(a_n)\big]\\&=\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}(b_1-a_1)+\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2}(b_2-a_2)+\cdots+\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}(b_n-a_n).\ \blacksquare\end{aligned}$$

Poznámka 1.2.5.
Veta je zovšeobecnením známej a často v praxi používanej Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3, resp. dôsledok 1.2.3.a) pre reálne funkcie reálnej premennej. Známe sú ešte Rolleho a Cauchyho vety o strednej hodnote (ma1: vety 4.3.2, 4.3.4).

Vzťah $c_i\in(m_i;M_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ v dôkaze vety znamená, že bod c_i leží vo vnútri intervalu s koncovými bodmi a_i, b_i, t. j. platí $c_i\in(a_i;b_i)$ pre $a_i<b_i$ alebo $c_i\in(b_i;a_i)$ pre $a_i>b_i$.

[26] $g_1(x)=f(x;b_2;b_3;\ldots;b_{n-2};b_{n-1};b_n)$, $g_2(x)=f(a_1;x;b_3;\ldots;b_{n-2};b_{n-1};b_n)$, …, $g_{n-1}(x)=f(a_1;a_2;a_3;\ldots;a_{n-2};x;b_n)$, $g_n(x)=f(a_1;a_2;a_3;\ldots;a_{n-2};a_{n-1};x)$.

[27] $g_1(a_1)=g_2(b_2)$, $g_2(a_2)=g_3(b_3)$, …, $g_{n-2}(a_{n-2})=g_{n-1}(b_{n-1})$, $g_{n-1}(a_{n-1})=g_n(b_n)$.

Z dôkazu vety je zrejmé, že predpoklady vety môžeme zjednodušiť:

$f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je spojitá a má parciálne derivácie podľa všetkých premenných v každom bode oblasti $A \subset D(f)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in A$.

Závery vety (aj pri zjednodušených predpokladoch) môžeme formulovať analogicky ako v jednorozmernom prípade:

$\Longrightarrow$ *Existujú $c_i \in (m_i; M_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ také, že platí vzťah (1.7), t. j.*

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}(b_i - a_i) = \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n)$$
$$= (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \cdot \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n} \right)^T.$$

Dôsledok 1.2.3.a (Lagrangeova veta o strednej hodnote).
$f\colon R \to R$ je spojitá na $\langle a; b\rangle$, pre všetky $x \in (a; b)$ existuje (aj nevlastná) $f'(x)$.

$\Longrightarrow$ Existuje $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, t. j. $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Dôsledok 1.2.3.b (Lagrangeova veta v R^2).
$f\colon R^2 \to R$ je diferencovateľná na oblasti $A \subset D(f)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2) \in A$.

$\Longrightarrow$ Existujú[28] $c_1 \in (m_1; M_1)$, $c_2 \in (m_2; M_2)$ také, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f(c_1; b_2)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f(a_1; c_2)}{\partial x_2}(b_2 - a_2).$$

Dôsledok 1.2.3.c (Lagrangeova veta v R^3).
$f\colon R^3 \to R$ je diferencovateľná na oblasti $A \subset D(f)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3) \in A$.

$\Longrightarrow$ Existujú[28] $c_1 \in (m_1; M_1)$, $c_2 \in (m_2; M_2)$, $c_3 \in (m_3; M_3)$ také, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f(c_1; b_2; b_3)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f(a_1; c_2; b_3)}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \frac{\partial f(a_1; a_2; c_3)}{\partial x_3}(b_3 - a_3).$$

Ak vo vzťahu (1.7) nahradíme body $\boldsymbol{c}_i$, $i=1,2,\ldots,n$ bodom $\boldsymbol{a}$, potom môžeme diferencovateľnú funkciu f v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$ aproximovať nasledovne

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i) = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n).$$

To znamená, že pre $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ platí

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

Ak označíme $\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) f'(\boldsymbol{a})^T$, potom zo vzťahu (1.6) pre funkciu $\omega(\boldsymbol{x})$ vyplýva

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\omega(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) f'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n} = 0.$$

Pre (**absolútnu**) **zmenu funkcie f od bodu $\boldsymbol{a}$ po bod $\boldsymbol{x}$** platí

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) f'(\boldsymbol{a})^T + \omega(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \omega(\boldsymbol{x}), \qquad (1.8)$$

[28] $m_i = \min\{a_i, b_i\}$, $M_i = \max\{a_i, b_i\}$, $i=1,2$ (viď dôkaz vety 1.2.3).

pričom $\omega(\boldsymbol{x})$ nazývame[29] **zvyšok zmeny funkcie f od bodu $\boldsymbol{a}$ po bod $\boldsymbol{x}$**. Pomer $\delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})/f(\boldsymbol{a})$ nazývame **relatívna zmena funkcie f** a platí

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \approx \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})f'(\boldsymbol{a})^T, \quad \delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \approx \frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{f(\boldsymbol{a})}.$$

Ak použijeme substitúciu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in O(\boldsymbol{a})$, potom $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T$ a pre $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ platí $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$. Pre zmenu funkcie f od bodu $\boldsymbol{a}$ po bod $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ platí

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + \omega(\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) + \omega(\boldsymbol{h}) \tag{1.9}$$

a funkciu f aproximujeme v bode $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ v tvare

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T, \quad \text{kde } \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0.$$

Absolútnu a relatívnu zmenu funkcie f aproximujeme vzťahmi

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) \approx \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T, \quad \delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \frac{\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})}{f(\boldsymbol{a})} \approx \frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})}{f(\boldsymbol{a})} = \frac{\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T}{f(\boldsymbol{a})}.$$

Predchádzajúce vzťahy zodpovedajú prípadu funkcie jednej premennej (ma1: Veta 4.2.2 o najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii pomocou diferenciálu) a majú lokálny charakter. t. j. zmysel iba v blízkom okolí $O(\boldsymbol{a})$. V súčasnej dobe ľahko dostupnej výpočtovej techniky už nemajú taký význam pri aproximovaní číselných výrazov. Ale stále majú veľký význam pri zjednodušovaní mnohých vzťahov v technických, ekonomických, fyzikálnych a iných odvetviach. Zložitejšie nelineárne úlohy sa nahradia jednoduchšími lineárnymi, ktoré sú samozrejme menej presné, ale dajú sa vypočítať a chyba výpočtu je prípustná.

Príklad 1.2.9.
Približne vypočítajte: a) $0,97^{2,02}$, b) $\sqrt{1,98^3 + 4,05^2 + 4,92^2}$.

Riešenie.
a) Zvoľme $f(x;y) = x^y$, $D(f) = (0;\infty) \times R$ (viď pr. 1.2.2).
Pre deriváciu platí $f'(x;y) = (yx^{y-1}; x^y \ln x)$.
Označme $\boldsymbol{a} = (a_x; a_z) = (1;2)$, $\boldsymbol{x} = (x;y) = (0,97; 2,02)$, potom $f(\boldsymbol{a}) = f(1;2) = 1^2 = 1$, $f'(\boldsymbol{a}) = (2 \cdot 1^{2-1}; 1^2 \ln 1) = (2;0)$, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = (0,97-1; 2,02-2) = (-0,03; 0,02)$.
Pre odhad hodnoty $0,97^{2,02}$ potom platí

$$\begin{aligned} 0,97^{2,02} &= f(0,97;2,02) = f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\ &= f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T = 1 + (2;0) \cdot (-0,03;0,02)^T = 1 - 0,06 + 0 = 0,94. \end{aligned}$$

Aby sme mohli použiť vzťah (1.2.2), nám postačí aby bola f definovaná v okolí $O(\boldsymbol{a})$, ktoré obsahuje bod $\boldsymbol{x}$. Presná hodnota na šesť desatinných miest $0,97^{2,02} = 0,940\,327$.

b) Označme $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1;x_2;x_3) = \sqrt{x_1^3 + x_2^2 + x_3^2} = \left(x_1^3 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} : R^3 \to R$.
Zvoľme $\boldsymbol{a} = (2;4;5)$, $\boldsymbol{h} = (-0,02; 0,05; -0,08)$, pre deriváciu v bode $\boldsymbol{x} \in R^3$ platí

$$\begin{aligned} f'(\boldsymbol{x}) &= \left(\tfrac{3}{2}x_1^2\left(x_1^3+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{1}{2}}; \tfrac{2}{2}x_2\left(x_1^3+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{1}{2}}; \tfrac{2}{2}x_3\left(x_1^3+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{3x_1^2}{2\sqrt{x_1^3+x_2^2+x_3^2}}; \frac{x_2}{\sqrt{x_1^3+x_2^2+x_3^2}}; \frac{x_3}{\sqrt{x_1^3+x_2^2+x_3^2}}\right). \end{aligned}$$

[29] Zvyšok $\omega(\boldsymbol{x})$ má význam chyby pri nahradení zmeny $\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ diferenciálom $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$.

Ďalej platí $f(\boldsymbol{a}) = \sqrt{2^3+4^2+5^2} = 7$, $f'(\boldsymbol{a}) = (\frac{12}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7})$ a pre odhad odmocniny platí

$$\sqrt{1,98^3+4,05^2+4,92^2} = f(1,98; 4,05; 4,92) = f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$$
$$\approx f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T = 7 + (-0,02; 0,05; -0,08)\cdot\left(\tfrac{12}{7}; \tfrac{4}{7}; \tfrac{5}{7}\right)^T$$
$$= 7 - \tfrac{0,02\cdot 12}{7} + \tfrac{0,05\cdot 4}{7} - \tfrac{0,08\cdot 5}{7} = 7 - \tfrac{0,44}{7} = \tfrac{48,56}{7} = 6,937\,142\,8\ldots.$$

Presná hodnota na šesť desatinných miest $\sqrt{1,98^3+4,05^2+4,92^2} = 6,954\,947$. ∎

Nech y je veličina závislá od veličín $x_1, x_2, \ldots, x_n$ podľa vzorca $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Predpokladajme, že sme každú z veličín x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ namerali s absolútnou chybou Δx_i, ktorá je v porovnaní s x_i malá.

Označme $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\Delta\boldsymbol{x} = (\Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n)$. **Absolútnu chybu Δy** môžeme vyjadriť ako diferenciál $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x})$. **Relatívna chyba $\delta y = \Delta y/y$**. Ak okolie $O(\boldsymbol{x})$ je také, že $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x})$, t. j. $\Delta\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{0}_n)$. Potom pre $\Delta\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{0}_n)$ platí

$$\Delta y = \Delta f(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) \approx \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}) = \Delta\boldsymbol{x} f'(\boldsymbol{x})^T, \quad \delta y \approx \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta\boldsymbol{x} f'(\boldsymbol{x})^T}{f(\boldsymbol{x})}.$$

Relatívna chyba δy sa často vyjadrujú v percentách v tvare $\delta y \cdot 100\,\%$.

Príklad 1.2.10.
Aká je chyba pre objem gule, ak sme jej polomer r namerali s absolútnou chybou Δr?

Riešenie.
Objem gule $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$, $V'(r) = \frac{4\pi}{3} 3r^2 = 4\pi r^2$, relatívna chyba merania $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.
Pre absolútnu chybu ΔV a relatívnu chybu $\delta_V = \frac{\Delta V}{V}$ platí

$$\Delta V \approx \Delta r \cdot V'(r) = \Delta r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 \Delta r, \quad \delta_V \approx \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r. \ ∎$$

Príklad 1.2.11.
V sklárskom podniku Drevoplech vyrábajú poháre v tvare valca s vnútorným polomerom podstavy 3 cm a výškou 10 cm. Kontrolnými meraniami sa zistilo, že pri výrobe dosahuje relatívna chyba výšky pohárov 1.1 % a relatívna chyba polomeru podstáv vyrobených pohárov je 1.5 %. Aká je absolútna a relatvna chyba objemu pohárov?

Riešenie.
Objem valca $V(r; v) = \pi r^2 v$, kde $r > 0$ je polomer podstavy a $v > 0$ je výška valca.
Pre deriváciu objemu platí $V'(r; v) = (2\pi r v; \pi r^2)$, $r > 0$, $v > 0$.
V našom prípade polomer pohára $r = 3$ [cm], výška pohára $v = 10$ [cm], vnútorný objem pohára $V(3; 10) = 90\pi$ [cm^3], derivácia $V'(3; 10) = (60\pi; 9\pi)$ [cm^2,cm^2].
Pre relatívne chyby polomeru r a výšky v platí

$$1,5 = 100\delta_r = \frac{100\Delta r}{r} = \frac{100\Delta r}{3}\ [\%], \quad 1,1 = 100\delta_v = \frac{100\Delta v}{v} = \frac{100\Delta r}{10}\ [\%].$$

Pre absolútne chyby r a v platí $\Delta r = \frac{4,5}{100} = 0,045$ [cm], $\Delta v = \frac{11}{100} = 0,11$ [cm], potom

$$\Delta V = (\Delta r; \Delta v)\cdot V'(r; v)^T = (0,045; 0,11)\cdot\begin{pmatrix} 60\pi \\ 9\pi \end{pmatrix} = 2,7\pi + 0,99\pi = 3,69\pi\ [\mathrm{cm}^3],$$

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3,69\pi}{90\pi} = 0,041, \quad \text{t. j. } \delta V = 4,1\ \%. \ ∎$$

Poznámka 1.2.6.
Objem vyrábaného pohára by mal byť $V = V(3;10) = 90\pi$ [cm^3].
Ak uvážime chyby výroby, polomer pohárov $r \approx 3 \pm 0,015 \cdot 3 = 3 \pm 0,045$ [cm] a ich výška $v \approx 10 \pm 0,011 \cdot 10 = 10 \pm 0,11$ [cm]. To znamená, že najmenší objem $V_{\min}$ dostaneme pre $r_{\min} = 3 - 0,045 = 2,955$ [cm], $v_{\min} = 10 - 0,11 = 9,89$ [cm] a najväčší objem $V_{\max}$ pre $r_{\max} = 3 + 0,045 = 3,045$ [cm], $v_{\max} = 10 + 0,11 = 10,11$ [cm]. Potom platí

$$V_{\min} = 2,955^2 \cdot 9,89\pi \approx 86,359\,727\pi, \quad V_{\max} = 3,045^2 \cdot 10,11\pi \approx 93,740\,173\pi.$$

Pre relatívne chyby objemov $V_{\min}$ a $V_{\max}$ potom platí

$$\delta_{V_{\min}} = \tfrac{V - V_{\min}}{V} = \tfrac{3,640\,273}{90} \approx 0,040\,447, \quad \delta_{V_{\max}} = \tfrac{V_{\max} - V}{V} = \tfrac{3,740\,173}{90} \approx 0,041\,557,$$

čo zodpovedá výsledkom predchádzajúceho príkladu.

Spojitosť funkcie $f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ v danom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ ešte nezaručuje jej diferencovateľnosť v tomto bode[30] (viď veta 1.2.1). Diferencovateľnosť zaručuje napríklad spojitosť parciálnych derivácií podľa všetkých premenných. Kvôli jednoduchosti nasledujúce tvrdenia formulujeme pre reálne funkcie n-premenných $f\colon R^n \to R$, $n \in N$. V prípade vektorových funkcií $f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ aplikujeme dané tvrdenia samostatne na každú zložku $f_j\colon R^n \to R$.

Veta 1.2.4.
$f\colon A \to R$, $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$,
všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a} \in A$.
$\Longrightarrow$ f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$.

Dôkaz.
Ukážeme, že existuje $L = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = 0$, kde $\boldsymbol{D} = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)$.
Parciálne derivácie sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. existujú v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a}) \subset A$. Pre každé $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ platí Lagrangeova veta 1.2.3 (poznámka 1.2.5). Potom existujú $\boldsymbol{c}_i \in O(\boldsymbol{a})$, $\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{a}\|_n < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ také, že platí

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{C}^T, \text{ pričom } \boldsymbol{C} = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}\right).$$

Potom $\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{C}^T - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{D}^T)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D})^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n}$ a platí

$$|L| = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left| \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} \right| = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{\left| \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}\right)\cdot(x_1 - a_1) + \cdots + \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)\cdot(x_n - a_n) \right|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n}$$

$$\leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}\right| \cdot |x_1 - a_1| + \cdots + \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right| \cdot |x_n - a_n|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \left[\begin{array}{c} |x_i - a_i| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n \\ \text{pre } i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right]$$

$$\leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left[\left| \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \right| \right] = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Posledná rovnosť vyplýva zo spojitosti parciálnych derivácií a z konštrukcie bodov $\boldsymbol{c}_i$.
To znamená, že $0 = |L| = L$ (veta 1.1.11) a tvrdenie vety je dokázané. ■

[30] Neplatí to ani pre reálne funkcie. Funkcia $y = |x|\colon R \to R$ je spojitá, ale nemá deriváciu v bode 0.

Ak má funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a} \in D(f)$ spojité všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$, nazýva sa **hladká v bode $\boldsymbol{a}$**. Funkcia f sa nazýva **hladká**, ak je hladká v každom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$.

Z definície vyplýva, že definičným oborom hladkej funkcie musí byť otvorená množina. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že ak je funkcia hladká v nejakom bode svojho definičného oboru, je v tomto bode aj diferencovateľná. Spojitosť parciálnych derivácií v danom bode znamená, že v nejakom okolí toho bodu sa dotykové priamky v smere súradnicových osí, a teda aj dotyková rovina, menia spojite.

Veta 1.2.5.
$f\colon A \to R$, $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$,
všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$ sú ohraničené na $A \subset D(f)$.
$\Longrightarrow$ f je spojitá na množine A.

Dôkaz.
Nech $\boldsymbol{a} \in A$ je ľubovoľné, okolie $O(\boldsymbol{a})$ je také, že $O(\boldsymbol{a}) \subset A$. Z predpokladov vyplýva, že existuje $\beta > 0$ tak, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$, $i=1,2,\ldots,n$ platí $\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right| \leq \beta$.
Potom (Lagrangeova veta 1.2.3) existujú $\boldsymbol{c}_i \in O(\boldsymbol{a})$, $i=1,2,\ldots,n$ také, že platí

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}(x_i - a_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}\right| \cdot |x_i - a_i|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \beta \cdot |x_i - a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right\|_n = n\beta \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right\|_n.$$

Z toho vyplýva $0 \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} n\beta \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right\|_n = n\beta \cdot 0 = 0$. Potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})] = 0, \text{ t. j. } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).$$

To znamená, že f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$ a aj na množine A. ■

Poznámka 1.2.7.
Z vety 1.2.4 a následne z vety 1.2.1 vyplýva, že ak má funkcia f v danom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ spojité všetky parciálne derivácie, potom je funkcia f spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.
Toto tvrdenie je taktiež dôsledkom predchádzajúcej vety 1.2.5. Ak má funkcia f v danom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ spojité všetky parciálne derivácie, potom musia byť v nejakom okolí ohraničené (veta 1.1.22) a funkcia f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Poznámka 1.2.8.
Funkcia f z príkladu 1.2.4 (obr. 1.2.20) nie je v rozpore s tvrdeniami viet 1.2.4 a 1.2.5. Funkcia f je spojitá v každom bode roviny R^2 okrem bodov $(t;0)$, $(0;t)$, $t \in R$.
V bodoch $(t;0)$, $t \neq 0$ (x-ová os okrem počiatku) existuje $\frac{\partial f(t;0)}{\partial x} = 0$, ale neexistuje $\frac{\partial f(t;0)}{\partial y}$.
V bodoch $(0;t)$, $t \neq 0$ (y-ová os okrem počiatku) existuje $\frac{\partial f(0;t)}{\partial y} = 0$, ale neexistuje $\frac{\partial f(0;t)}{\partial x}$.
V bode $(0;0)$ existujú obe $\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = 0$, ktoré sú samozrejme ohraničené. Ale neexistuje žiadne okolie $O(0;0)$, v ktorom by v každom bode existovali obe parciálne derivácie naraz (problémom sú osi x, y).

Príklad 1.2.12.
$f\colon R^2 \to R$ je definovaná vzťahom $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre } (x;y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{pre } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

Ukážeme, že f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$.

Riešenie.
Je zrejmé, že funkcia f je spojitá a diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ (obr. 1.2.24). Pre všetky $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $-1 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, $-1 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$. Z toho vyplýva

$$-1 \leq \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \leq 1, \text{ t. j. } -|xy| \leq \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \leq |xy| \text{ pre všetky } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}.$$

Funkcia f je spojitá v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$, pretože platí

$$0 = -\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |xy| \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |xy| = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0 = f(\boldsymbol{a}).$$

Pre parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$ platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0, \qquad \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0;y)-f(0;0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Pre parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{x} \neq (0;0)$, t. j. funkcie $f(\boldsymbol{x}) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$ platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} &= \frac{(3x^2y-y^3)\cdot(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y(x^4+2x^2y^2+y^4+2x^2y^2-2y^4)}{x^4+2x^2y^2+y^4} = y\left(1+\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right), \\
\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} &= \frac{(x^3-3xy^2)\cdot(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}. \\
&= \frac{x(x^4+2x^2y^2+y^4-6x^2y^2-2y^4)}{x^4+2x^2y^2+y^4} = x\left(1-\frac{3\cdot 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right),
\end{aligned}$$

pričom pre výrazy v zátvorkách platí

$$0 \leq \frac{2x^2y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} \leq \frac{2x^2y^2}{0+2x^2y^2+0} = 1, \quad 0 \leq \frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2y^4}{(0+y^2)^2} = \frac{2y^4}{y^4} = 2.$$

Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x;y) \neq (0;0)$ potom platí

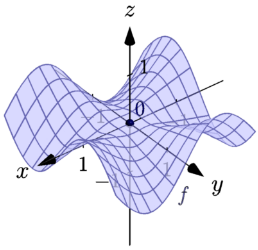
$$\begin{aligned}
-1 = 1+0-2 \leq 1+\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 1+1-0 = 2, &\quad \text{t. j. } -|y| \leq \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} \leq 2\,|y|, \\
-4 = 1-3-2 \leq 1-\frac{3\cdot 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 1-0-0 = 1, &\quad \text{t. j. } -4\,|x| \leq \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} \leq |x|.
\end{aligned}$$

Pre limity parciálnych derivácií v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$ potom platí

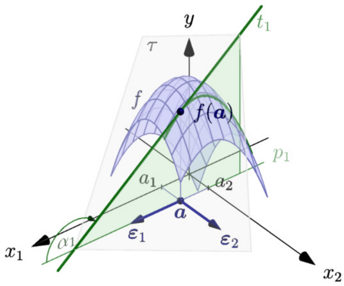
$$0 = -\lim_{y\to 0} |y| \leq \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \leq \lim_{y\to 0} 2\,|y| = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x},$$

$$0 = -\lim_{x\to 0} 4\,|x| \leq \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \leq \lim_{x\to 0} |x| = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.$$

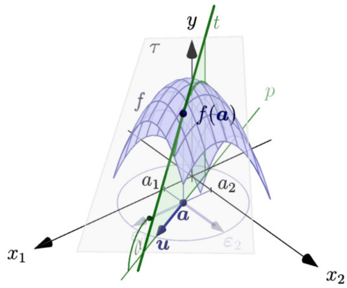
To znamená (veta 1.1.17), že sú parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x}$, $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y}$ spojité v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$ a na základe vety 1.2.4 je funkcia f diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$. ∎



Obr. 1.2.24: Funkcia z príkladu 1.2.12



Obr. 1.2.25: Derivácia v smere $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1;0)$



Obr. 1.2.26: Derivácia v smere $\boldsymbol{u} = (u_1;u_2)$

1.2.3 Derivácia v smere vektora

Zovšeobecníme úvahy, ktoré nás viedli k parciálnym deriváciam. Pri konštrukcii parciálnej derivácie funkcie v danom bode podľa i-tej zložky sme fixovali všetky premenné okrem i-tej. Prakticky sme sa pohybovali iba v smere súradnicovej osi x_i.

Nech $f\colon A \to R$, pričom $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$, $\boldsymbol{a} = (a_1;a_2;\ldots;a_n) \in A$. Pre bázické vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0;\ldots;0;1;0;\ldots;0)$ pre $i = 1,2,\ldots,n$ (na i-tom mieste je jednotka) pre $t \in R$ platí $(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i{+}t;a_{i+1};\ldots;a_n) = \boldsymbol{a}+(0;\ldots;0;t;0;\ldots;0) = \boldsymbol{a}+t\boldsymbol{\varepsilon}_i$ a pre **parciálne derivácie** $\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$ na základe definície platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i+t;a_{i+1};\ldots;a_n)-f(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i;a_{i+1};\ldots;a_n)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{\varepsilon}_i)-f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Nech $\boldsymbol{u} = (u_1;u_2;\ldots;u_n) \in R^n$, **(smerovou) deriváciou funkcie f v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ podľa vektora $\boldsymbol{u}$** nazývame (pokiaľ existuje) limitu

$$f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Derivácia $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$ je závislá aj od veľkosti vektora $\boldsymbol{u}$. Ak $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n$ sú dva lineárne závislé vektory, t. j. $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$, kde $c \in R$, $c \neq 0$, potom

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+tc\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{c[f(\boldsymbol{a}+ct\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})]}{ct}$$
$$= \begin{bmatrix} \text{Subst.} & q = ct \\ t\to 0, & q\to 0 \end{bmatrix} = c \lim_{q\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{q} = c \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = cf'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}). \quad (1.10)$$

Ak $\boldsymbol{u} \in R^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$, potom smerovú deriváciu funkcie f podľa jednotkového vektora $\boldsymbol{u}$ nazývame **deriváciou funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere vektora $\boldsymbol{u}$** a označujeme

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Poznámka 1.2.9.
Pre funkcie $f\colon R \to R$ derivácia v smere vektora praktický význam nemá, iba formálny. Existujú iba dva smery $u = +1$, $v = -u = -1$. Potom na základe vzťahu (1.10) platí

$$f'_u(a) = f'_{+1}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} = f'(a), \quad f'_v(a) = f'_{-1}(a) = -f'_u(a) = -f'(a).$$

Geometrický význam smerovej derivácie podľa vektora (v smere vektora) je podobný ako pri parciálnych deriváciách. Ilustrujeme ho na funkcii $f\colon R^2 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$.

Na obr. 1.2.25 je znázornená derivácia f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere vektora $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0)$, t. j. parciálna derivácia podľa x_1. Jej hodnota zodpovedá smernici dotyčnice t_1, t. j. hodnote $\operatorname{tg} \alpha_1$ (viď poznámka 1.2.3).

Na obr. 1.2.26 je derivácia f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere jednotkového vektora $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. Jej hodnota je $\operatorname{tg} \alpha$ a predstavuje smernicu dotykovej priamky t, ktorej kolmý priemet na rovinu x_1x_2 prechádza bodom $\boldsymbol{a}$ a je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{u}$ (α je uhol, ktorý zviera dotyčnica t so svojím kolmým priemetom p do roviny x_1x_2).

Poznámka 1.2.10.
Podmienka, že $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$ má jednotkovú (normovanú) veľkosť je dôležitá pri ďalšom použití derivácie v smere (vrátane určovania dotykovej roviny). Potom môžeme hodnoty derivácií v danom bode v rôznych smeroch porovnávať. Ak vektor $\boldsymbol{u} \in R^n$ nemá jednotkovú veľkosť, môžeme ho jednoducho normovať tak, že vektor $\boldsymbol{u}$ podelíme jeho veľkosťou $\|\boldsymbol{u}\|_n$ a dostaneme jednotkový vektor $\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|_n$.

Príklad 1.2.13.
$f(x; y; z) = x + y^2 + z^3 \colon R^3 \to R$ je diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z) \in R^3$. Nech $\boldsymbol{u} = (u_x; u_y; u_z) \in R^3$, potom $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u} = (a_x + tu_x; a_y + tu_y; a_z + tu_z)$ a platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(a_x+tu_x)+(a_y+tu_y)^2+(a_z+tu_z)^3-(a_x+a_y^2+a_z^3)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tu_x+(2a_ytu_y+t^2u_y^2)+(3a_z^2tu_z+3a_zt^2u_z^2+t^3u_z^3)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left[u_x + (2a_yu_y + tu_y^2) + (3a_z^2u_z + 3a_ztu_z^2 + t^2u_z^3)\right] = u_x + 2a_yu_y + 3a_z^2u_z.\end{aligned}$$

Takýto výpočet je nepraktický, výhodnejší je výpočet podľa vzorca (1.11) odvodeného v nasledujúcom texte. Keďže $f'(x; y; z) = (1; 2y; 3z^2)$ pre $(x; y; z) \in R^3$, potom platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} f'(\boldsymbol{a})^T = (u_x; u_y; u_z) \cdot (1; 2a_y; 3a_z^2)^T = u_x + 2a_yu_y + 3a_z^2u_z. \ \blacksquare$$

Výpočet smerovej derivácie podľa vektora $\boldsymbol{u} \in R^n$ môžeme previesť na deriváciu reálnej funkcie jednej reálnej premennej. Nech $f\colon A \to R$, pričom $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$. Pre $\boldsymbol{u} \in R^n$ označme funkciu

$$\Phi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) \colon R \to R.$$

Funkcia Φ je definovaná na množine $A_f = \{t, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u} \in A\} \subset R$, pričom $0 \in A_f$ je vnútorný bod množiny A_f a platí $\Phi(0) = f(\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{a})$. Navyše pre všetky $t \in A_f$ platí

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t} = \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t}, \quad \text{t. j.} \quad \Phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t-0} = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}).$$

Ak je funkcia f diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. existuje

$$f'(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right),$$

potom pre zmenu funkcie f od bodu $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}$ po bod $\boldsymbol{a}$ platí vzťah (1.9)

$$f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a}) = t\boldsymbol{u} f'(\boldsymbol{a})^T + \omega(t\boldsymbol{u}) = t\boldsymbol{u} \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})^T + \omega(t\boldsymbol{u}),$$

kde $0 = \lim\limits_{t\boldsymbol{u}\to \boldsymbol{0}_n} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{\|t\boldsymbol{u}\|_n} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{|t| \cdot \|\boldsymbol{u}\|_n} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|_n} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{|t|}$, t. j. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{|t|} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{t} = 0$.

Pre smerovú deriváciu $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$ potom platí

$$f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \tfrac{t\boldsymbol{u}f'(\boldsymbol{a})^T+\omega(t\boldsymbol{u})}{t} = \lim_{t\to 0} \left[\boldsymbol{u}f'(\boldsymbol{a})^T + \tfrac{\omega(t\boldsymbol{u})}{t}\right] = \boldsymbol{u}f'(\boldsymbol{a})^T.$$

To znamená, že smerovú deriváciu (deriváciu v smere) môžeme vypočítať nasledovne

$$f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u}f'(\boldsymbol{a})^T = \boldsymbol{u}\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})^T = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}u_1 + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}u_n = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T. \tag{1.11}$$

Poznámka 1.2.11.
Funkcia $\Phi(t) = f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) = f(g(t))\colon A_f \to R$, $A_f \subset R$ je zložená funkcia viacerých premenných, pričom $\boldsymbol{x} = g(t) = \boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}\colon R \to R^n$ je vnútorná zložka, $f(\boldsymbol{x})\colon A \to R$, $A \subset R^n$ je vonkajšia zložka. Funkciu Φ môžeme derivovať ako zloženú funkciu (veta 1.2.8 v nasledujúcej časti) a platí

$$\Phi'(t) = \big[f(g(t))\big]' = f'(\boldsymbol{x})g'(t) = f'(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})' = f'(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}^T,$$
$$\text{t. j. } f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \Phi'(0) = f'(\boldsymbol{a}+0\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^T = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{u}f'(\boldsymbol{a})^T.$$

Poznámka 1.2.12.
Keďže $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \Phi'(0)$ a $\Phi'(0)$ je obyčajnou deriváciou reálnej funkcie reálnej premennej v bode 0, platia pre smerovú deriváciu rovnaké pravidlá ako pre obyčajnú deriváciu.
Ak $f, g\colon A\to R$, $A\subset R^n$ je oblasť, $n\in N$, $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in A$, $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2;\ldots;u_n)\in R^n$, $\Phi(t)=f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})\colon R\to R$, $\Psi(t)=g(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})\colon R\to R$, potom platí:

$$(f\pm g)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = (\Phi\pm\Psi)'(0) = \Phi'(0)\pm\Psi'(0) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})\pm g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}),$$
$$(fg)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = (\Phi\Psi)'(0) = \Phi'(0)\Psi(0)+\Phi(0)\Psi'(0) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}),$$
$$\left(\tfrac{f}{g}\right)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \left(\tfrac{\Phi}{\Psi}\right)'(0) = \tfrac{\Phi'(0)\Psi(0)-\Phi(0)\Psi'(0)}{\Psi^2(0)} = \tfrac{f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})} \text{ pre } g(\boldsymbol{a})\neq 0.$$

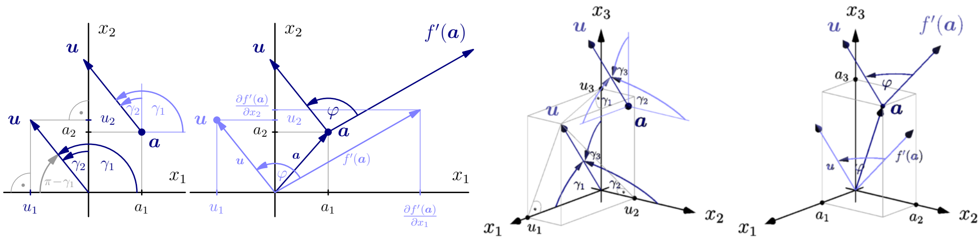
Ak $f\colon A\to R$, $A\subset R^n$ je oblasť, $n\in N$, $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2;\ldots;u_n)$, $\boldsymbol{v}=(v_1;v_2;\ldots;v_n)\in R^n$, f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in A$, $c\in R$, potom platí:

$$f'_{\boldsymbol{0}_n}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}_n\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = (0;0;\ldots;0)\cdot\left(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1};\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2};\ldots;\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)^T = 0,$$
$$f'_{c\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = (c\boldsymbol{u})\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = c\cdot\boldsymbol{u}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = c\cdot\big[\boldsymbol{u}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T\big] = c\cdot f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}),\text{[31]}$$
$$f'_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = \boldsymbol{u}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T+\boldsymbol{v}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})+f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}),$$

Vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1;0;\ldots;0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0;1;\ldots;0)$, ..., $\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0;0;\ldots;1)$ tvoria bázu lineárneho priestoru R^n a každý vektor $\boldsymbol{u}\in R^n$ sa dá zapísať ako ich lineárna kombinácia, platí $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2;\ldots;u_n)=u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$. Potom[32] pre $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$f'_{\boldsymbol{\varepsilon}_i}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\varepsilon}_i\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = (0;\ldots;0;1;0;\ldots;0)\cdot\left(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1};\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2};\ldots;\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)^T = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i},$$
$$f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = f'_{u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n}(\boldsymbol{a}) = (u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n)\cdot f'(\boldsymbol{a})^T$$
$$= u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot f'(\boldsymbol{a})^T+\cdots+u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = u_1\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}+\cdots+u_n\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}.$$

[31] Dôkaz tohto tvrdenia je vykonaný aj vo vzťahu (1.10).
[32] Druhé tvrdenie samozrejme vyplýva aj priamo zo vzťahu $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u}f'(\boldsymbol{a})^T$.



$\boldsymbol{u} = (\cos\gamma_1; \cos\gamma_2)$ $\quad \|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$ $\qquad$ $\boldsymbol{u} = (\cos\gamma_1; \cos\gamma_2; \cos\gamma_3)$ $\quad \|\boldsymbol{u}\|_3 = 1$

Obr. 1.2.27: Skalárny súčin $(f'(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{u}) = \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \cdot \|\boldsymbol{u}\|_n \cdot \cos\varphi$
vektorov $f'(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{u}$ v priestore R^2 (vľavo) a v priestore R^3 (vpravo)

Nech $f\colon A \to R$, pričom $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$. Nech $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) \in R^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$ je jednotkový vektor a γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú uhly, ktoré zviera vektor $\boldsymbol{u}$ so súradnicovými osami x_i (obr. 1.2.27). Pre súradnice vektora $\boldsymbol{u}$ platí $u_i = \cos\gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pre deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere vektora $\boldsymbol{u}$ potom platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = u_1 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} \cos\gamma_1 + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \cos\gamma_n.$$

Pre deriváciu $\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}}$ v smere vektora $\boldsymbol{u}$ platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = f'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}^T = (f'(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{u}) = \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \cdot \|\boldsymbol{u}\|_n \cdot \cos\varphi,$$

pričom posledný vzťah predstavuje skalárny súčin vektorov $f'(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{u}$ známy z analytickej geometrie a φ je uhol (obr. 1.2.27), ktorý zvierajú vektory $f'(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{u}$. Keďže $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$ ($\boldsymbol{u}$ je jednotkový vektor), pre deriváciu v smere dostávame

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \cdot \|\boldsymbol{u}\|_n \cdot \cos\varphi = \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \cdot \cos\varphi.$$

Keďže $f'(\boldsymbol{a})$ je konštanta, posledný výraz je maximálny pre $\cos\varphi = 1$, t. j. pre $\varphi = 0$ a minimálny pre $\cos\varphi = -1$, t. j. pre $\varphi = \pi$. To znamená, ak sú vektory $f'(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{u}$ kolineárne (rovnobežné). Derivácia funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ je najväčšia v smere derivácie $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})$ funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ a najmenšia v opačnom smere. Takže **gradient $f'(\boldsymbol{a})$ je vektor, ktorý udáva smer najväčšieho rastu** (**najväčšej kladnej zmeny**) **funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** a naopak $-f'(\boldsymbol{a})$ je vektor, ktorý udáva smer najväčšieho poklesu.

1.2.4 Výpočet derivácií

Pri reálnych funkciách jednej premennej sme dokázali derivovať súčet, súčin a podiel niekoľkých funkcií. Analogické pravidlá existujú aj pre reálne funkcie s viacerými premennými, t. j. funkcie definované $R^n \to R$, $n \in N$. Keďže existencia aj všetkých parciálnych derivácií nezaručuje diferencovateľnosť uvedených funkcií (poznámka 1.2.2), budeme predpokladať diferencovateľnosť zúčastnených funkcií.

Pri operáciách s deriváciami a diferenciálmi reálnych funkcií s viacerými premennými je potrebné si uvedomiť, že $f(\boldsymbol{a})$, $g(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$, $\mathrm{d}g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$ sú reálne čísla a $f'(\boldsymbol{a})$, $g'(\boldsymbol{a})$ predstavujú n-rozmerné vektory.

Najprv uvedieme jednu z najdôležitejších nerovností v matematike, ktorú budeme potrebovať. Je známa ako **Cauchy-Schwarzova**, niekedy sa tiež nazýva **Buňakovského** a často sa používa v rôznych oblastiach matematiky, fyziky i technickej praxe.

Veta 1.2.6 (Cauchy-Schwarzova nerovnosť).
V je lineárny priestor so skalárnym súčinom $(\cdot,\cdot)$, normou $\|\cdot\|$, $\alpha,\beta\in V$.

$$\Longrightarrow\ (\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta),\quad \text{t. j. } |(\alpha,\beta)|\leq\sqrt{(\alpha,\alpha)}\cdot\sqrt{(\beta,\beta)}=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|.$$

Dôkaz.
Pre $\beta=\mathbf{0}$ platí nerovnosť triviálne, pretože $(\alpha,\mathbf{0})^2=0$, $\quad(\alpha,\alpha)\cdot(\mathbf{0},\mathbf{0})=(\alpha,\alpha)\cdot 0=0$.
Pre $\beta\neq\mathbf{0}$ označme $k=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\beta\|^2}=\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$. Potom platí

$$\begin{aligned}0\leq\|\alpha-k\beta\|^2&=(\alpha-k\beta,\alpha-k\beta)\\&=(\alpha,\alpha-k\beta)-(k\beta,\alpha-k\beta)=(\alpha,\alpha)-(\alpha,k\beta)-(k\beta,\alpha)+(k\beta,k\beta)\\&=(\alpha,\alpha)-k\,(\alpha,\beta)-k\,(\beta,\alpha)+k^2\,(\beta,\beta)=(\alpha,\alpha)-2k\,(\alpha,\beta)+k^2\,(\beta,\beta)\\&=(\alpha,\alpha)-\tfrac{2(\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}+\tfrac{(\alpha,\beta)^2\cdot(\beta,\beta)}{(\beta,\beta)^2}=(\alpha,\alpha)-\tfrac{(\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva $0\leq(\alpha,\alpha)\cdot(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)$, t. j. $(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)$. ■

Dôsledok 1.2.6.a (Cauchy-Schwarzova nerovnosť v R^n).
$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$, $n\in N$, pričom φ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$.

$$\Longrightarrow\ \left|\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right|=|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|_n\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n\cdot|\cos\varphi|\leq\|\boldsymbol{x}\|_n\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n,\quad \text{t. j. } (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\leq\|\boldsymbol{x}\|_n^2\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n^2.$$

Ak $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1;y_2;\ldots;y_n)$, potom nerovnosť môžeme písať v tvare

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},\quad\text{resp.}\quad\left[\sum_{i=1}^n x_iy_i\right]^2\leq\sum_{i=1}^n x_i^2\cdot\sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Veta 1.2.7.
$c\in R$, $A\subset R^n$ je oblasť, $n\in N$, $f,g\colon A\to R$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}\in A$.

$\Longrightarrow$ cf, $f\pm g$, fg, f/g (pre $g(\boldsymbol{a})\neq 0$) sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}\in A$ a platí:

$$\begin{aligned}&(cf)'(\boldsymbol{a})=cf'(\boldsymbol{a}), && \mathrm{d}(cf)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=c\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}),\\&(f\pm g)'(\boldsymbol{a})=f'(\boldsymbol{a})\pm g'(\boldsymbol{a}), && \mathrm{d}(f\pm g)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\pm\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}),\\&(fg)'(\boldsymbol{a})=f'(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})g'(\boldsymbol{a}), && \mathrm{d}(fg)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}),\\&\left(\tfrac{f}{g}\right)'(\boldsymbol{a})=\tfrac{f'(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})}, && \mathrm{d}\left(\tfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=\tfrac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})}{g^2(\boldsymbol{a})}.\end{aligned}$$

Dôkaz.
Funkcie f,g sú podľa predpokladov diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. existujú $f'(\boldsymbol{a})$, $g'(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T$, $\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T$. Pre funkcie $\omega_f(\boldsymbol{h})\colon R^n\to R$, $\omega_g(\boldsymbol{h})\colon R^n\to R$ definované $\omega_f(\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T$, $\omega_g(\boldsymbol{h})=g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T$ platí[33]

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T+\omega_f(\boldsymbol{h}),\quad\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n}\frac{\omega_f(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n}=\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n}\frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}=0,$$

$$g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T+\omega_g(\boldsymbol{h}),\quad\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n}\frac{\omega_g(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n}=\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}_n}\frac{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}=0.$$

[33] Viď vzťah (1.9) pre zvyšok pri absolútnej zmene funkcie.

Prvé dva páry tvrdení platia triviálne. Pre cf platí

$$c\,\omega_f(\boldsymbol{h}) = c\big[f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T\big] = (cf)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (cf)(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}(cf')(\boldsymbol{a})^T,$$

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{(cf)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-(cf)(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}(cf')(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{c\,\omega_f(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = c \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega_f(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = c\cdot 0 = 0.$$

Pre $f\pm g$ platí analogicky

$$\omega_f(\boldsymbol{h}) \pm \omega_g(\boldsymbol{h}) = (f\pm g)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (f\pm g)(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}(f\pm g)'(\boldsymbol{a})^T, \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega_f(\boldsymbol{h})\pm\omega_g(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0.$$

Pre súčin fg platí

$$\begin{aligned}(fg)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (fg)(\boldsymbol{a}) &= f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) \\ &= \big[f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + \omega_f(\boldsymbol{h})\big]\cdot\big[g(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_g(\boldsymbol{h})\big] - f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) \\ &= f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^Tg(\boldsymbol{a}) + \omega_f(\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T \\ &\qquad + \omega_f(\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_g(\boldsymbol{h})f(\boldsymbol{a}) + \omega_g(\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + \omega_f(\boldsymbol{h})\omega_g(\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) \\ &= \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^Tg(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega(\boldsymbol{h}),\end{aligned}$$

pričom pre zvyškovú funkciu $\omega(\boldsymbol{h})\colon R^n \to R$ platí

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{h}) &= (fg)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (fg)(\boldsymbol{a}) - \big[\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^Tg(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T\big] \\ &= f(\boldsymbol{a})\omega_g(\boldsymbol{h}) + g(\boldsymbol{a})\omega_f(\boldsymbol{h}) + \big[\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + \omega_f(\boldsymbol{h})\big]\cdot\big[\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_g(\boldsymbol{h})\big].\end{aligned}$$

Na základe Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (dôsledok 1.2.6.a) platí

$$\big|\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T\big| \le \|\boldsymbol{h}\|_n \cdot \|f'(\boldsymbol{a})\|_n, \quad \big|\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T\big| \le \|\boldsymbol{h}\|_n \cdot \|g'(\boldsymbol{a})\|_n.$$

Funkcie f, g, f', g' sú ohraničené v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. existuje $\beta > 0$ tak, že $|f(\boldsymbol{a})| \le \beta$, $|g(\boldsymbol{a})| \le \beta$, $\|f'(\boldsymbol{a})\|_n \le \beta$, $\|g'(\boldsymbol{a})\|_n \le \beta$. Je zrejmé, že $\omega_f(\boldsymbol{0}_n) = \omega_g(\boldsymbol{0}_n) = 0$. Potom platí

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \left|\tfrac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right| = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{|\omega(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \\ &\le \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{|f(\boldsymbol{a})\omega_g(\boldsymbol{h})| + |g(\boldsymbol{a})\omega_f(\boldsymbol{h})| + \big[|\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T| + |\omega_f(\boldsymbol{h})|\big]\cdot\big[|\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T| + |\omega_g(\boldsymbol{h})|\big]}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \\ &\le \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{|f(\boldsymbol{a})|\cdot|\omega_g(\boldsymbol{h})| + |g(\boldsymbol{a})|\cdot|\omega_f(\boldsymbol{h})| + \big[\|\boldsymbol{h}\|_n\cdot\|f'(\boldsymbol{a})\|_n + |\omega_f(\boldsymbol{h})|\big]\cdot\big[\|\boldsymbol{h}\|_n\cdot\|g'(\boldsymbol{a})\|_n + |\omega_g(\boldsymbol{h})|\big]}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \\ &\le \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\beta\,|\omega_g(\boldsymbol{h})| + \beta\,|\omega_f(\boldsymbol{h})| + \big[\beta\|\boldsymbol{h}\|_n + |\omega_f(\boldsymbol{h})|\big]\cdot\big[\beta\|\boldsymbol{h}\|_n + |\omega_g(\boldsymbol{h})|\big]}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \\ &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\beta\,|\omega_g(\boldsymbol{h})| + \beta\,|\omega_f(\boldsymbol{h})| + \beta^2\|\boldsymbol{h}\|_n^2 + \beta\,|\omega_f(\boldsymbol{h})|\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n + \beta\,|\omega_g(\boldsymbol{h})|\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n + |\omega_f(\boldsymbol{h})|\cdot|\omega_g(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \\ &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \Big[\beta\tfrac{|\omega_g(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \beta\tfrac{|\omega_f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \beta^2\,\|\boldsymbol{h}\|_n + \beta\,|\omega_g(\boldsymbol{h})| + \beta\,|\omega_f(\boldsymbol{h})| + |\omega_f(\boldsymbol{h})|\,\tfrac{|\omega_g(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\Big] \\ &= \beta\cdot 0 + \beta\cdot 0 + \beta^2\cdot 0 + \beta\cdot 0 + \beta\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

To znamená $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{|\omega(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0$ a na základe vety 1.1.11 aj tvrdenie

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{(fg)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-(fg)(\boldsymbol{a})-\big[\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^Tg(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T\big]}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0.$$

Posledná dvojica tvrdení sa dokáže analogicky. Pre funkciu $\frac{1}{g}$ platí

$$\left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a}) = \tfrac{1}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})} - \tfrac{1}{g(\boldsymbol{a})} = \tfrac{g(\boldsymbol{a})-g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})} = \tfrac{g(\boldsymbol{a})-\left[g(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T+\omega_g(\boldsymbol{h})\right]}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})}$$
$$= \tfrac{-\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T-\omega_g(\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})} = -\tfrac{\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})} - \tfrac{\omega_g(\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})} = -\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T \tfrac{1}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})} + \omega(\boldsymbol{h}),$$

pričom $\omega(\boldsymbol{h}) = \frac{-\omega_g(\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})}$, $\quad \lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{-\omega_g(\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0.$

Keďže $\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T$, $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{1}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})} = \frac{1}{g(\boldsymbol{a})^2}$, potom platí

$$\left(\tfrac{1}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = -\tfrac{g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})}, \quad \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = -\tfrac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})}{g^2(\boldsymbol{a})}.$$

Pre podiel $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$, t. j. súčin $f\cdot\frac{1}{g}$ platí

$$\left(f\cdot\tfrac{1}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\tfrac{1}{g(\boldsymbol{a})} + f(\boldsymbol{a})\left(\tfrac{1}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\tfrac{1}{g(\boldsymbol{a})} - f(\boldsymbol{a})\tfrac{g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})} = \tfrac{f'(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})},$$
$$\mathrm{d}\left(f\cdot\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\tfrac{1}{g(\boldsymbol{a})} + f(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \tfrac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})}{g^2(\boldsymbol{a})}. \blacksquare$$

Príklad 1.2.14.
Uvažujme funkcie $f, g\colon R^2 \to R$ definované vzťahmi $f(x;y) = x^2+y^2$, $g(x;y) = x^2-y^2$.
Funkcie f, g sú diferencovateľné v každom bode $\boldsymbol{x} = (x;y)\in R^2$ a platí:

$$f'(\boldsymbol{x}) = (x^2+y^2)' = (2x;2y), \quad g'(\boldsymbol{x}) = (x^2-y^2)' = (2x;-2y),$$
$$(f+g)'(\boldsymbol{x}) = \left[(x^2+y^2)+(x^2-y^2)\right]' = (2x^2)' = (4x;0),$$
$$(fg)'(\boldsymbol{x}) = \left[(x^2+y^2)(x^2-y^2)\right]' = (x^4-y^4)' = (4x^3;-4y^3),$$
$$\left(\tfrac{f}{g}\right)'(\boldsymbol{x}) = \left(\tfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)' = \left(\tfrac{2x(x^2-y^2)-(x^2+y^2)2x}{(x^2-y^2)^2}; \tfrac{2y(x^2-y^2)-(x^2+y^2)(-2y)}{(x^2-y^2)^2}\right)$$
$$= \left(\tfrac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}; \tfrac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}\right) \text{ pre } x \neq y.$$

Ak použijeme predchádzajúcu vetu, potom platí:

$$(f+g)'(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x}) + g'(\boldsymbol{x}) = (2x;2y) + (2x;-2y) = (4x;0),$$
$$(fg)'(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})g'(\boldsymbol{x}) = (2x;2y)\cdot(x^2-y^2) + (x^2+y^2)\cdot(2x;-2y)$$
$$= (2x^3-2xy^2; 2x^2y-2y^3) + (2x^3+2xy^2; -2x^2y-2y^3) = (4x^3;-4y^3),$$
$$\left(\tfrac{f}{g}\right)'(\boldsymbol{x}) = \tfrac{f'(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})g'(\boldsymbol{x})}{g^2(\boldsymbol{x})} = \tfrac{(2x;2y)\cdot(x^2-y^2)-(x^2+y^2)\cdot(2x;-2y)}{(x^2-y^2)^2}$$
$$= \tfrac{(2x^3-2xy^2;2x^2y-2y^3)-(2x^3+2xy^2;-2x^2y-2y^3)}{(x^2-y^2)^2} = \tfrac{(-4xy^2;4x^2y)}{(x^2-y^2)^2} \text{ pre } x \neq y. \blacksquare$$

Z pohľadu výpočtu parciálnych derivácií zloženej funkcie viacerých premenných, prakticky derivujeme zloženú reálnu funkciu jednej premennej. Jednotlivé zložky derivujeme samostatne a ostatné premenné považujeme za konštantné. Pri riešení reálnych problémov sa často vyskytujú implicitné rovnice, v ktorých vystupujú vektorové funkcie a mnohokrát v derivovanom tvare. Vzťahy, ktoré vyplývajú z nasledujúcej vety, majú veľký význam pri riešené takýchto rovníc, pri ich transformáciách na jednoduchšie a ľahšie riešiteľné tvary. Vetu uvádzame bez dôkazu, myšlienka dôkazu je podobná ako pri vete 1.2.7 (viď napr. [8]).

Veta 1.2.8 (O derivovaní zloženej funkcie).
$A\subset R^n$ je oblasť, $B\subset R^m$ je otvorená, $n,m,l\in N$, $f(A)\subset B$,
$\boldsymbol{u}=f(\boldsymbol{x})\colon A\to R^m$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\dots;a_n)\in A$,
$\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{u})\colon B\to R^l$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{b}=(b_1;b_2;\dots;b_m)=f(\boldsymbol{a})$.
$\Longrightarrow$ Zložená funkcia $F=g(f)\colon A\to R^l$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$ a platí

$$F'(\boldsymbol{a})=\big[g(f)\big]'(\boldsymbol{a})=g'(f(\boldsymbol{a}))\cdot f'(\boldsymbol{a})=g'(\boldsymbol{b})\cdot f'(\boldsymbol{a}).$$

Pre parciálne derivácie $\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,l$ platí

$$\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}=\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_1}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_m}\frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_k}\frac{\partial f_k(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}.$$

Derivácie $F'(\boldsymbol{a})$, $g'(\boldsymbol{b})$, $f'(\boldsymbol{a})$ sú matice a derivovanie zloženej funkcie F formálne predstavuje násobenie matíc. Keďže $f\colon R^n\to R^m$, $g\colon R^m\to R^l$, $F=g(f)\colon R^n\to R^l$, potom $f'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{m\times n}$, $g'(\boldsymbol{b})=\left(\frac{\partial g_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times m}$, $F'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}$, t. j.

Deriváciu $F'(\boldsymbol{a})=g'(\boldsymbol{b})\cdot f'(\boldsymbol{a})$ môžeme pomocou matíc prepísať

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\\ \frac{\partial F_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F_l(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_l(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_l(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\end{pmatrix}}_{F'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1(\boldsymbol{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{b})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{b})}{\partial u_m}\\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{b})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{b})}{\partial u_m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial g_l(\boldsymbol{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_l(\boldsymbol{b})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_l(\boldsymbol{b})}{\partial u_m}\end{pmatrix}}_{g'(\boldsymbol{b})=\left(\frac{\partial g_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times m}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\end{pmatrix}}_{f'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{m\times n}}$$

t. j. $\left(\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}=\left(\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_1}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_m}\frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}=\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_k}\frac{\partial f_k(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}.$

Poznámka 1.2.13.
Predpoklady o diferencovateľnosti f v bode $\boldsymbol{a}$ a diferencovateľnosti g v bode $\boldsymbol{b}$ môžeme nahradiť silnejšími predpokladmi o spojitosti všetkých parciálnych derivácií uvedených funkcií v príslušných bodoch. Potom na základe vety 1.2.4 je f diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$, g je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{b}$ a môžeme použiť vetu 1.2.8.
Zo spojitosti parciálnych derivácií funkcií f a g v bodoch $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ vyplýva ich ohraničenosť v nejakých okoliach týchto bodov (veta 1.1.22), tiež spojitosť funkcií f a g v týchto okoliach (veta 1.2.5) a potom aj spojitosť zloženej funkcie F (veta 1.1.20).

Poznámka 1.2.14.
V priestoroch R^2 a R^3 sa nezávislé premenné funkcií (súradnicové osi) zvyknú označovať symbolmi x,y, resp. x,y,z. Ak máme funkcie $f(x;y)\colon R^2\to R$, resp. $f(x;y;z)\colon R^3\to R$, potom sa parciálne derivácie týchto funkcií v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$ podľa jednotlivých premenných často (hlavne vo fyzike a praxi) označujú nasledovne[34]

$$f_x(\boldsymbol{a})=\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x},\ f_y(\boldsymbol{a})=\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y},\quad \text{resp. } f_x(\boldsymbol{a})=\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x},\ f_y(\boldsymbol{a})=\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y},\ f_z(\boldsymbol{a})=\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial z}.$$

Tieto označenia sú prehľadnejšie, preto ich v nasledujúcom texte budeme preferovať.

[34]Niekedy sa označujú aj $f'_x(\boldsymbol{a})$, $f'_y(\boldsymbol{a})$, resp. $f'_x(\boldsymbol{a})$, $f'_y(\boldsymbol{a})$, $f'_z(\boldsymbol{a})$.

Príklad 1.2.15.
$f(x;y)=(f_1(x;y);f_2(x;y))=(\ln(x^2+y^2);\operatorname{arctg}(x^2+1))\colon R^2\to R^2$.
Funkcie $f_1(x;y)=\ln(x^2+y^2)\colon R^2\to R$, $f_2(x;y)=\operatorname{arctg}(x^2+1)\colon R^2\to R$ sú zložené

$$f_1(x;y)=\psi_1(\varphi_1(x;y)),\ \text{kde}\ \psi_1(t)=\ln(t)\colon R\to R,\ \varphi_1(x;y)=x^2+y^2\colon R^2\to R,$$
$$f_2(x;y)=\psi_2(\varphi_2(x;y)),\ \text{kde}\ \psi_2(t)=\operatorname{arctg}(t)\colon R\to R,\ \varphi_2(x;y)=x^2+1\colon R^2\to R$$

a môžeme ich derivovať podľa predchádzajúcej vety

$$\begin{aligned}f_1'(x;y)&=\psi_1'(\varphi_1(x;y))\cdot\varphi_1'(x;y)=\psi_1'(\varphi_1(x;y))\cdot\left(\tfrac{\partial\varphi_1(x;y)}{\partial x};\tfrac{\partial\varphi_1(x;y)}{\partial y}\right)\\&=\tfrac{1}{\varphi_1(x;y)}\left(\tfrac{\partial\varphi_1(x;y)}{\partial x};\tfrac{\partial\varphi_1(x;y)}{\partial y}\right)=\tfrac{1}{x^2+y^2}(2x;2y)=\left(\tfrac{2x}{x^2+y^2};\tfrac{2y}{x^2+y^2}\right),\\f_2'(x;y)&=\psi_2'(\varphi_2(x;y))\cdot\varphi_2'(x;y)=\psi_2'(\varphi_2(x;y))\cdot\left(\tfrac{\partial\varphi_2(x;y)}{\partial x};\tfrac{\partial\varphi_2(x;y)}{\partial y}\right)\\&=\tfrac{1}{1+\varphi_2^2(x;y)}\left(\tfrac{\partial\varphi_2(x;y)}{\partial x};\tfrac{\partial\varphi_2(x;y)}{\partial y}\right)=\tfrac{1}{1+(x^2+1)^2}(2x;0)=\left(\tfrac{2x}{x^4+2x^2+2};0\right).\end{aligned}$$

Je to nepraktické, preto funkciu f derivujeme priamo

$$f'(x;y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x;y)}{\partial x}&\frac{\partial f_1(x;y)}{\partial y}\\\frac{\partial f_2(x;y)}{\partial x}&\frac{\partial f_2(x;y)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial x}&\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial y}\\\frac{\partial\operatorname{arctg}(x^2+1)}{\partial x}&\frac{\partial\operatorname{arctg}(x^2+1)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2x}{x^2+y^2}&\frac{2y}{x^2+y^2}\\\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}&0\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

Príklad 1.2.16.
$F(x;y)=g(x^2+y^2)\colon R^2\to R$, kde $g(t)\colon R\to R$ je diferencovateľná v R.
Funkcia $f(x;y)=x^2+y^2\colon R^2\to R$ je diferencovateľná v R^2.
Potom je aj zložená funkcia $F=g(f)$ diferencovateľná v R^2 a pre všetky $(x;y)\in R^2$ platí

$$\begin{aligned}&f'(x;y)=(f_x(x;y);f_y(x;y))=(2x;2y).\\&F'(x;y)=(F_x(x;y);F_y(x;y))=\big[g(f(x;y))\big]'=g'(x^2+y^2)\cdot f'(x;y)\\&\qquad=g'(x^2+y^2)\cdot(2x;2y)=(2xg'(x^2+y^2);2yg'(x^2+y^2)).\end{aligned}$$

Špeciálne pre $g(t)=\ln t\colon (0;\infty)\to R$, t. j. $F(x;y)=\ln(x^2+y^2)\colon R^2-\{(0;0)\}\to R$ platí

$$g'(t)=\big[\ln t\big]'=\tfrac{1}{t},\quad g'(x^2+y^2)=\tfrac{1}{x^2+y^2},\quad F'(x;y)=\tfrac{1}{x^2+y^2}(2x;2y)=\left(\tfrac{2x}{x^2+y^2};\tfrac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

Pri priamom derivovaní dostaneme výsledok ihneď $\big[\ln(x^2+y^2)\big]'=\left(\frac{2x}{x^2+y^2};\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$. $\blacksquare$

Príklad 1.2.17.
$f(x;y)\colon R^2\to R$ je diferencovateľná funkcia v R^2,
$(u;v)\mapsto(x;y)$ je transformácia premenných z karteziánskych súradníc definovaná funkciami $x=\alpha(u;v)\colon R^2\to R$, $y=\beta(u;v)\colon R^2\to R$, ktoré sú diferencovateľné v R^2.
Funkcia f má v nových súradniciach vyjadrenie

$$F(u;v)=f(x;y)=f(\alpha(u;v);\beta(u;v))=f(g(u;v))\colon R^2\to R.$$

$F=f(g)$ je zložená funkcia, kde $(x;y)=g(u;v)=(\alpha(u;v);\beta(u;v))\colon R^2\to R^2$.
Pre deriváciu funkcie F platí

$$F'(u;v)=\big(F_u(u;v);F_v(u;v)\big)=\big[f(g(u;v))\big]'=f'\big(\alpha(u;v);\beta(u;v)\big)\cdot g'(u;v)$$

$$= \Big(f_x\big(\alpha(u;v);\beta(u;v)\big)\,;\, f_y\big(\alpha(u;v);\beta(u;v)\big)\Big)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_u(u;v) & \alpha_v(u;v)\\ \beta_u(u;v) & \beta_v(u;v)\end{pmatrix}$$
$$= \Big(f_x\big(\alpha(u;v);\beta(u;v)\big)\cdot\alpha_u(u;v) + f_y\big(\alpha(u;v);\beta(u;v)\big)\cdot\beta_u(u;v);$$
$$f_x\big(\alpha(u;v);\beta(u;v)\big)\cdot\alpha_v(u;v) + f_y\big(\alpha(u;v);\beta(u;v)\big)\cdot\beta_v(u;v)\Big).$$

Kvôli prehľadnosti prepíšeme uvedené vzťahy bez premenných

$$F' = (F_u;F_v) = \big[f(g)\big]' = f'g' = (f_x;f_y)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix} = \big(f_x\alpha_u + f_y\beta_u; f_x\alpha_v + f_y\beta_v\big).$$

a) Špeciálne uvažujme $F(u;v) = f(x;y) = f(u^2+v^2;u^2-v^2)\colon R^2 \to R$.
Funkcie $x = \alpha(u;v) = u^2+v^2$, $y = \beta(u;v) = u^2-v^2$ sú diferencovateľné v R^2 a platí

$$F' = (F_u;F_v) = (f_x;f_y)\cdot\begin{pmatrix}2u & 2v\\ 2u & -2v\end{pmatrix} = \big(2uf_x + 2uf_y; 2vf_x - 2vf_y\big).$$

t. j. $F_u(u;v) = 2u\big[f_x(u;v) + f_y(u;v)\big]$, $F_v(u;v) = 2v\big[f_x(u;v) - f_y(u;v)\big]$.

b) Špeciálne pri prevode do polárnych súradníc (pr. 1.1.3, 1.2.6)

$$(x;y) = \Psi(\rho;\varphi) = (\alpha(\rho;\varphi);\beta(\rho;\varphi)) = (\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\colon\ \langle 0;\infty)\times R \to R^2$$

pre deriváciu funkcie $F(\rho;\varphi) = f(\Psi(\rho;\varphi)) = f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\colon\ \langle 0;\infty)\times R \to R$ platí

$$F'(\rho;\varphi) = (F_\rho;F_\varphi) = (f_x;f_y)\cdot\Psi' = (f_x;f_y)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_\rho & \alpha_\varphi\\ \beta_\rho & \beta_\varphi\end{pmatrix}$$
$$= (f_x;f_y)\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix} = \big(f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi; -\rho f_x\sin\varphi + \rho f_y\cos\varphi\big).$$

c) Špeciálne pre $f(x;y) = \frac{x+y}{x-y}$, $(x;y)\in R^2$, $x\neq y$ platí $\rho\cos\varphi\neq\rho\sin\varphi$, t. j. $\cos\varphi\neq\sin\varphi$.
Potom $(\rho;\varphi)\in\langle 0;\infty)\times R$, $\varphi\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$,

$$F(\rho;\varphi) = f(\Psi(\rho;\varphi)) = f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi) = \frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi},$$
$$f'(x;y) = \Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)' = \big(f_x(x;y); f_y(x;y)\big) = \Big(\frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}; \frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2}\Big) = \Big(\frac{-2y}{(x-y)^2}; \frac{2x}{(x-y)^2}\Big),$$
$$f'(\Psi(\rho;\varphi)) = \Big(\frac{-2\rho\sin\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}; \frac{2\rho\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\Big) = \frac{2}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}(-\sin\varphi;\cos\varphi).$$

Pre deriváciu F potom platí $F' = (F_\rho;F_\varphi) = (f_x;f_y)\Psi'$, t. j.

$$F'(\rho;\varphi) = (f_x;f_y)\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix} = \frac{2(-\sin\varphi;\cos\varphi)}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}$$
$$= \frac{2}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\cdot\big(0;\rho\sin^2\varphi + \rho\cos^2\varphi\big) = \frac{2}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\cdot(0;\rho) = \Big(0; \frac{2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\Big).$$

Priamy výpočet je najjednoduchší

$$F'(\rho;\varphi) = \Big(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\Big)' = \Big(0; \frac{(-\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot(\cos\varphi-\sin\varphi)-(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot(-\sin\varphi-\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\Big)$$
$$= \Big(0; \frac{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\Big) = \Big(0; \frac{1-2\cos\varphi\sin\varphi+1+2\cos\varphi\sin\varphi}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\Big) = \Big(0; \frac{2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\Big). \ \blacksquare$$

1.2.5 Diferencovateľnosť a parciálne derivácie vyšších rádov

Deriváciu, diferenciál i parciálne derivácie, ktoré sme zaviedli v predchádzajúcich častiach, tiež nazývame prvého rádu. Ak funkcie derivujeme ďalej, nazývame ich derivácia, diferenciál, parciálne derivácie druhého, tretieho atď., resp. vyšších rádov.[35]

Kvôli prehľadnosti budeme uvažovať reálne funkcie $f\colon R^n \to R$, $n \in N$. V prípade vektorových funkcií $f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ aplikujeme nasledujúce definície a tvrdenia na každú zložku $f_1, \ldots, f_m$ samostatne.

Nech $f\colon A \to R$, $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$. Predpokladajme, že $A_1 \subset A$ je oblasť a pre všetky $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A_1$ existuje parciálna derivácia $\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon A_1 \to R$ je funkcia, takže (pokiaľ existujú) môžeme vypočítať jej parciálne derivácie podľa j-tej premennej, $j = 1, 2, \ldots, n$ v bode $\boldsymbol{a} \in A_1$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{špeciálne } \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i^2} \text{ pre } i = j,$$

ktoré nazývame **druhé parciálne derivácie** (**parciálne derivácie druhého rádu**) **funkcie f podľa i-tej a j-tej premennej** (**podľa x_i a x_j**).

Ak $i \neq j$, potom $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}$ nazývame **zmiešané parciálne derivácie**. Ak platí rovnosť

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i},$$

potom hovoríme, že zmiešané parciálne derivácie podľa x_i a x_j **sú zameniteľné**.

Takýmto spôsobom môžeme pokračovať a definovať parciálne derivácie ostatných (vyšších) rádov. Nech $k \in N$, $k \neq 1$ a nech existujú parciálne derivácie rádu $k-1$ podľa premenných $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}$, $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, potom (pokiaľ existuje)

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^{k-1} f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}}}\right) = \frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_k} \text{ pre } x_{i_k},\ i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

sa nazýva **k-ta parciálna derivácia** (**rádu k**) **funkcie f podľa $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}$**.

Ak sú aspoň dve z premenných $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}$ rôzne, parciálna derivácia sa nazýva **zmiešaná**. Ak pri ľubovoľnom poradí premenných $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}$ dostaneme rovnakú hodnotu k-tej parciálnej derivácie podľa týchto premenných, tieto (zmiešané) parciálne derivácie nazývame **zameniteľné**.

Musíme si uvedomiť, že maximálny počet parciálnych derivácií funkcie f rastie geometricky s rádom derivácie. Prvých parciálnych derivácií môže existovať n, počet druhých môže byť až n^2 a parciálnych derivácií rádu $k \in N$ môže existovať n^k (ak existujú všetky).

Poznámka 1.2.15.
Parciálne derivácie vyšších rádov funkcií $f(x; y)\colon R^2 \to R$, resp. $f(x; y; z)\colon R^3 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ označujeme v zmysle poznámky 1.2.14[36]

$$f_{xx}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2},\ f_{xy}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x \partial y},\ f_{yx}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x},\ \ldots,\ f_{yxyz}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^4 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x \partial y \partial z},\ \ldots.$$

[35] Analogicky ako pri reálnej funkcii jednej premennej – ma1: 4.2.3 Derivácia a diferenciál vyšších rádov.

[36] Analogicky tiež označenia $f''_{xx}(\boldsymbol{a})$, $f''_{xy}(\boldsymbol{a})$, $f''_{yx}(\boldsymbol{a})$, $\ldots$, $f''''_{yxyz}(\boldsymbol{a}) = f^{(4)}_{yxyz}(\boldsymbol{a})$, $\ldots$.

Príklad 1.2.18.
a) $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2) = (f_1(x_1; x_2); f_2(x_1; x_2)) = (x_1^2 + x_2^2; x_1^2 - x_2^2)\colon R^2 \to R^2$.
Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2) \in R^2$ existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádov a platí

$$\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = 2x_2, \quad \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} = 2,$$

$$\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = -2x_2, \quad \frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} = -2.$$

Všetky ostatné parciálne derivácie rádu tretieho a vyššieho sú nulové. Platí

$$\frac{\partial^3 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^3 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \cdots = \frac{\partial^4 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^4} = \frac{\partial^4 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2} = \cdots = \frac{\partial^5 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^5} = \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^3 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \cdots = \frac{\partial^4 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^4} = \frac{\partial^4 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2} = \cdots = \frac{\partial^5 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^5} = \cdots = 0.$$

b) $f(\boldsymbol{x}) = f(x; y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\colon R^2 - \{(x; 0), x \in R\} \to R$.
Pre každé $\boldsymbol{x} = (x; y) \in R^2$, $y \neq 0$ existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádov a platí

$$f_x(\boldsymbol{x}) = \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{\frac{y}{y^2}}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad f_y(\boldsymbol{x}) = \frac{x \cdot \frac{-1}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2},$$

$$f_{xx}(\boldsymbol{x}) = \frac{0 - y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_{xy}(\boldsymbol{x}) = \frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{yx}(\boldsymbol{x}) = \frac{-(x^2+y^2) - (-x) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_{yy}(\boldsymbol{x}) = \frac{0 - (-x) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) $f(\boldsymbol{x}) = f(x; y) = x^3 + x^2y^2 + y\colon R^2 \to R$.
Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x; y) \in R^2$ existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádov a platí

$$\begin{aligned}
&f' \ (2 \text{ ks}): && f_x(\boldsymbol{x}) = 3x^2 + 2xy^2, && f_y(\boldsymbol{x}) = 2x^2y + 1, \\
&f'' \ (4 \text{ ks}): && f_{xx}(\boldsymbol{x}) = 6x + 2y^2, && f_{xy}(\boldsymbol{x}) = f_{yx}(\boldsymbol{x}) = 4xy, \quad f_{yy}(\boldsymbol{x}) = 2x^2, \\
&f''' \ (8 \text{ ks}): && f_{xxx}(\boldsymbol{x}) = 6x, && f_{xxy}(\boldsymbol{x}) = f_{xyx}(\boldsymbol{x}) = f_{yxx}(\boldsymbol{x}) = 4y, \\
& && f_{yyy}(\boldsymbol{x}) = 0, && f_{yyx}(\boldsymbol{x}) = f_{yxy}(\boldsymbol{x}) = f_{xyy}(\boldsymbol{x}) = 4x. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

V predchádzajúcom príklade sa zmiešané parciálne derivácie podľa rovnakých premenných rovnali, ale ako ukazujú nasledujúce príklady, nemusí to byť vždy pravda.

Príklad 1.2.19.
$f\colon R^2 \to R$ je definovaná vzťahom $f(x; y) = \begin{cases} xy & \text{pre } |x| \geq |y|, \\ 0 & \text{pre } |x| < |y|. \end{cases}$
Graf funkcie f je znázornený na obrázku 1.2.28 vľavo.
Pre parciálne derivácie prvého rádu funkcie f v bode $(0; 0)$ platí

$$f_x(0; 0) = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t;0) - f(0;0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot 0 - 0 \cdot 0}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

$$f_y(0; 0) = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0;t) - f(0;0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{0 \cdot t - 0 \cdot 0}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

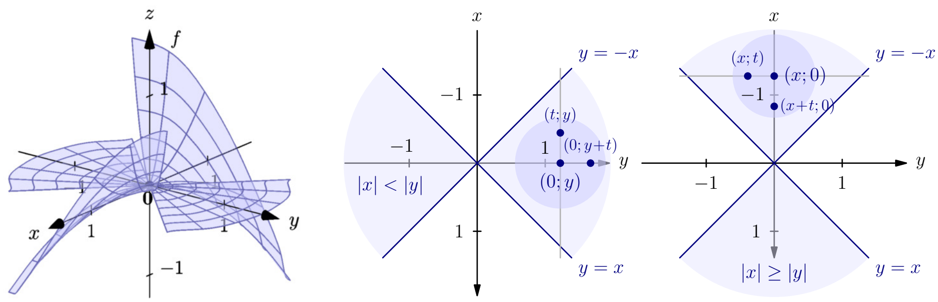
Aby sme mohli vypočítať parciálne derivácie druhého rádu f v bode $(0; 0)$ potrebujeme určiť $f_x(x; 0)$, $f_y(x; 0)$ pre $x \neq 0$ a $f_x(0; y)$, $f_y(0; y)$ pre $y \neq 0$. Je zrejmé, že pri ich výpočtoch môžeme voliť body $(t; y)$ tak, aby platilo $|t| < |y|$ (obr. 1.2.28 v strede) a body $(x; t)$ tak, aby platilo $|t| \geq |y|$ (obr. 1.2.28 vpravo). Pre $x \neq 0$, resp. $y \neq 0$ platí

$$f_x(x; 0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t;0) - f(x;0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{(x+t) \cdot 0 - x \cdot 0}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

$$f_x(0;y) = \frac{\partial f(0;y)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t;y)-f(0;y)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$f_y(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x;t)-f(x;0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{x\cdot t-x\cdot 0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{xt}{t} = x,$$
$$f_y(0;y) = \frac{\partial f(0;y)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0;y+t)-f(0;y)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu funkcie f v bode $(0;0)$ platí

$$f_{xx}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(t;0)}{\partial x} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$f_{xy}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(0;t)}{\partial x} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$f_{yx}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(t;0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t-0} = 1,$$
$$f_{yy}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(0;t)}{\partial y} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0. \blacksquare$$



Obr. 1.2.28: Funkcia z príkladu 1.2.19

Príklad 1.2.20.
$f\colon R^2 \to R$ je definovaná vzťahom $f(x;y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre } (x;y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{pre } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

Prvé parciálne derivácie funkcie f sme vypočítali v príklade 1.2.12. Pre tieto derivácie v bodoch $\mathbf{0} = (0;0)$ a $\boldsymbol{x} = (x;y) \neq (0;0)$ platí

$$f_x(\mathbf{0}) = 0, \quad f_y(\mathbf{0}) = 0, \qquad f_x(\boldsymbol{x}) = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(\boldsymbol{x}) = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

pričom $f_x(x;0) = \frac{0}{x^4} = 0$, $f_y(x;0) = \frac{x^5}{x^4} = x$, $f_x(0;y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y$, $f_y(0;y) = \frac{0}{y^4} = 0$.
Pre parciálne derivácie druhého rádu v bode $\mathbf{0} = (0;0)$ platí

$$f_{xx}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(t;0)-f_x(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = 0, \quad f_{xy}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(0;t)-f_x(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t-0} = -1,$$
$$f_{yy}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_y(0;t)-f_y(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = 0, \quad f_{yx}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_y(t;0)-f_y(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t-0} = 1.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu v bode $\boldsymbol{x}=(x;y)\neq(0;0)$ platí

$$f_{xx}(\boldsymbol{x})=(f_x)_x(\boldsymbol{x})=\frac{(4x^3y+8xy^3)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^4y+4x^2y^3-y^5)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$
$$=\frac{(4x^3y+8xy^3)\cdot(x^2+y^2)-4x(x^4y+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{12xy^5-4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}=\frac{4xy^3(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(\boldsymbol{x})&=(f_x)_y(\boldsymbol{x})=\frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^4y+4x^2y^3-y^5)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}\\ f_{yx}(\boldsymbol{x})&=(f_y)_x(\boldsymbol{x})=\frac{(5x^4-12x^2y^2-y^4)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^5-4x^3y^2-xy^4)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}\end{aligned}\right\}$$
$$=\left[\text{Pre } \boldsymbol{x}\neq(0;0) \text{ sú zameniteľné}\right]=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f_{yy}(\boldsymbol{x})=(f_y)_y(\boldsymbol{x})=\frac{(-8x^3y-4xy^3)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^5-4x^3y^2-xy^4)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$
$$=\frac{(-8x^3y-4xy^3)\cdot(x^2+y^2)-4y(x^5-4x^3y^2-xy^4)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{4x^3y^3-12x^5y}{(x^2+y^2)^3}=\frac{4x^3y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}\ \blacksquare$$

Veta 1.2.9.
$f\colon A\to R$, $A\subset R^n$ je oblasť, $n\in N$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $i\neq j$.
Parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in A$.

$$\Longrightarrow\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}\ \text{(sú zameniteľné).}$$

Dôkaz.
V nasledujúcich úvahách sa budú vo funkcii f a ďalších uvažovaných funkciách meniť iba hodnoty i-tych a j-tych zložiek, pričom hodnoty ostatných zložiek sa nemenia a zodpovedajú bodu $\boldsymbol{a}\in A$. Kvôli prehľadnosti označme

$$g(x_i;x_j)=f(a_1;\ldots;x_i;\ldots;x_j;\ldots;a_n)$$
$$=f(a_1;\ldots;a_{i-1};x_i;a_{i+1};\ldots;a_{j-1};x_j;a_{j+1};\ldots;a_n)\colon O(a_i;a_j)\to R.$$

Funkcie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. sú definované v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})\subset A$ a existujú (veta 1.2.2) druhé parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}$.
Z definície funkcie g je zrejmé, že existujú aj parciálne derivácie $\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j\partial x_i}$ a platí

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f(a_1;\ldots;a_{j-1};a_j+t;a_{j+1};\ldots;a_n)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i;a_j+t)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t}=\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i\partial x_j},$$
$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i+t;a_{i+1};\ldots;a_n)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i+t;a_j)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t}=\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j\partial x_i}.$$

Pre $t\in R$, $t\neq 0$ také, aby $(a_i+t;a_j+t)\in O(a_i;a_j)$, uvažujme funkciu

$$G(t)=g(a_i+t;a_j+t)-g(a_i+t;a_j)-g(a_i;a_j+t)+g(a_i;a_j).$$

Ak označíme $\varphi_i(x)=g(x;a_j+t)-g(x;a_j)$ pre $x\in O(a_i)$, $\varphi_j(x)=g(a_i+t;x)-g(a_i;x)$ pre $x\in O(a_j)$, potom platí $G(t)=\varphi_i(a_i+t)-\varphi_i(a_i)=\varphi_j(a_j+t)-\varphi_j(a_j)$.
Je zrejmé, že pre derivácie funkcií φ_i, φ_j platí

$$\varphi_i'(x)=\frac{\partial g(x;a_j+t)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(x;a_j)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(a_1;\ldots;x;\ldots;a_j+t;\ldots;a_n)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(a_1;\ldots;x;\ldots;a_j;\ldots;a_n)}{\partial x_i},\ x\in O(a_i),$$
$$\varphi_j'(x)=\frac{\partial g(a_i+t;x)}{\partial x_j}-\frac{\partial g(a_i;x)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(a_1;\ldots;a_i+t;\ldots;x;\ldots;a_n)}{\partial x_j}-\frac{\partial f(a_1;\ldots;a_i;\ldots;x;\ldots;a_n)}{\partial x_j},\ x\in O(a_j).$$

Funkcia φ_i spĺňa na intervale I_i s hranicami a_i, a_i+t predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (dôsledok 1.2.3.a). Potom existuje[37] $a_i+\theta_i t \in I_i$, $\theta_i \in (0;1)$ tak, že

$$\varphi_i(a_i+t)-\varphi_i(a_i)=\varphi_i'(a_i+\theta_i t)\cdot(a_i+t-a_i)=t\cdot\varphi_i'(a_i+\theta_i t).$$

Keďže $G(t)=\varphi_i(a_i+t)-\varphi_i(a_i)$ a existuje $\varphi_i'(a_i)=\frac{\partial g(a_i;a_j+t)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}$, platí

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_i'(a_i+\theta_i t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_i'(a_i)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i;a_j+t)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t}=\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Analogicky aplikujeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote na funkciu φ_j. Potom existuje $\theta_j\in(0;1)$ tak, že platí $\varphi_j(a_j+t)-\varphi_j(a_j)=t\cdot\varphi_j'(a_j+\theta_j t)$.
Keďže $G(t)=\varphi_j(a_j+t)-\varphi_j(a_j)$ a existuje $\varphi_j'(a_j)=\frac{\partial g(a_i+t;a_j)}{\partial x_j}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_j}$, potom

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_j'(a_j+\theta_j t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_j'(a_j)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i+t;a_j)}{\partial x_j}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_j}}{t}=\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}.$$

To znamená, že $\lim\limits_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2}=\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}$ a veta je dokázaná. ■

K tomu, aby boli druhé parciálne derivácie zameniteľné, nemusia byť diferencovateľné, ale stačí ich spojitosť v danom bode. Spojitosť funkcie v danom bode sa niekedy overuje jednoduchšie, ako diferencovateľnosť. Lenže pri praktických problémoch nás zaujímajú hlavne problematické body a body nespojitosti indikujú problémy.

Veta 1.2.10 (Schwarz).
$f\colon A\to R$, $A\subset R^n$ je oblasť,[38] $n\in N$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, $i\neq j$.
Parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a}\in A$.

$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}\ \text{(sú zameniteľné).}$$

Dôkaz.
Dôkaz tejto vety je podobný dôkazu predchádzajúcej vety 1.2.9 (začiatok dôkazu je identický). Použijeme rovnaké pomocné funkcie g, G, φ_i, φ_j ako pri uvedenom dôkaze

$$g(x_i;x_j)=f(a_1;\dots;x_i;\dots;x_j;\dots;a_n)\colon O(a_i;a_j)\to R.$$

Z definície funkcie g vyplýva, že $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j\partial x_i}$ existujú, sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$ a platí

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i\partial x_j}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i;a_j+t)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t},\qquad \lim_{\substack{u_i\to 0\\ u_j\to 0}}\frac{\partial^2 g(a_i+u_i;a_j+u_j)}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i\partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i+t;a_j)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t},\qquad \lim_{\substack{u_i\to 0\\ u_j\to 0}}\frac{\partial^2 g(a_i+u_i;a_j+u_j)}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j\partial x_i}.$$

[37] Pre každé $\theta_i\in(0;1)$ leží bod $\theta_i t$ medzi bodmi 0 a t. Pre $t>0$ platí $\theta_i t\in(0;t)$, pre $t<0$ platí $\theta_i t\in(t;0)$. To znamená, že aj bod $a_i+\theta_i t$ leží medzi bodmi a_i a a_i+t.

[38] *Karl Hermann Amandus Schwarz* [1843–1921] — nemecký matematik, známy predovšetkým vďaka svojim prácam z oblasti komplexnej analýzy.

Pre $t \in R$, $t \neq 0$ také, aby $(a_i + t; a_j + t) \in O(a_i; a_j)$, uvažujme funkciu

$$G(t) = g(a_i + t; a_j + t) - g(a_i + t; a_j) - g(a_i; a_j + t) + g(a_i; a_j)$$
$$= \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j),$$

kde

$$\varphi_i(x) = g(x; a_j + t) - g(x; a_j),\ \varphi_i'(x) = \tfrac{\partial g(x;a_j+t)}{\partial x_i} - \tfrac{\partial g(x;a_j)}{\partial x_i},\ x \in O(a_i),$$
$$\varphi_j(x) = g(a_i + t; x) - g(a_i; x),\ \varphi_j'(x) = \tfrac{\partial g(a_i+t;x)}{\partial x_j} - \tfrac{\partial g(a_i;x)}{\partial x_j},\ x \in O(a_j).$$

Na intervale I_i s hranicami a_i, $a_i + t$ spĺňa φ_i predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (dôsledok 1.2.3.a). Existuje[39] $a_i + \theta_i t \in I_i$, $\theta_i \in (0; 1)$ tak, že

$$G(t) = \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = t \cdot \varphi_i'(a_i + \theta_i t) = t \cdot \Big[\tfrac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j+t)}{\partial x_i} - \tfrac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j)}{\partial x_i}\Big].$$

Označme $\psi_j(x) = \frac{\partial g(a_i+\theta_i t;x)}{\partial x_i}$ pre $x \in O(a_j)$, potom $\psi_j'(x) = \frac{\partial^2 g(a_i+\theta_i t;x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $x \in O(a_j)$.
Na intervale s hranicami a_j, $a_j + t$ spĺňa ψ_j predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote a existuje $\vartheta_j \in (0; 1)$ tak, že platí

$$\psi_j(a_j + t) - \psi_j(a_j) = t \cdot \psi_j'(a_j + \vartheta_j t),$$
$$\text{t. j. } \tfrac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j+t)}{\partial x_i} - \tfrac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j)}{\partial x_i} = t \cdot \tfrac{\partial^2 g(a_i+\theta_i t;a_j+\vartheta_j t)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ak to zhrnieme, dostaneme $G(t) = t^2 \cdot \frac{\partial^2 g(a_i+\theta_i t;a_j+\vartheta_j t)}{\partial x_i \partial x_j}$. Z toho vyplýva

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{G(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \tfrac{\partial^2 g(a_i+\theta_i t;a_j+\vartheta_j t)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } u_1 = \theta_i t \to 0 \\ u_2 = \vartheta_j t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{\substack{u_i \to 0 \\ u_j \to 0}} \tfrac{\partial^2 g(a_i+u_i;a_j+u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Predchádzajúce úvahy aplikujeme na funkciu φ_j. Potom existuje $\theta_j \in (0; 1)$ tak, že

$$G(t) = \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j) = t \cdot \varphi_j'(a_j + \theta_j t) = t \cdot \Big[\tfrac{\partial g(a_i+t;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j} - \tfrac{\partial g(a_i;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j}\Big].$$

Ak označíme $\psi_i(x) = \frac{\partial g(x;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j}$ pre $x \in O(a_i)$, potom $\psi_i'(x) = \frac{\partial^2 g(x;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j \partial x_i}$, $x \in O(a_i)$.
Potom existuje $\vartheta_i \in (0; 1)$ tak, že platí

$$\psi_i(a_i + t) - \psi_i(a_i) = t \cdot \psi_i'(a_i + \vartheta_i t), \quad \text{t. j. } G(t) = t^2 \cdot \tfrac{\partial^2 g(a_i+\vartheta_i t;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Z toho vyplýva tvrdenie vety, pretože

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{G(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \tfrac{\partial^2 g(a_i+\vartheta_i t;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j \partial x_i} = \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \text{t. j. } \lim_{t\to 0} \tfrac{G(t)}{t^2} = \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}. \blacksquare$$

Poznámka 1.2.16.
Podmienka $i \neq j$ v predchádzajúcich vetách je prakticky zbytočná.
Pre $i = j$ platia tvrdenia oboch viet triviálne, pretože platí $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i^2}$.

Obe tieto vety môžeme pomocou matematickej indukcie rozšíriť na zmiešané parciálne derivácie ľubovoľného rádu $k \in N$, $k > 2$. Nasledujúci dôsledok je rozšírením vety 1.2.10.

[39] Pre každé $\theta_i \in (0; 1)$ leží bod $\theta_i t$ medzi bodmi 0 a t. Pre $t > 0$ platí $\theta_i t \in (0; t)$, pre $t < 0$ platí $\theta_i t \in (t; 0)$.

Dôsledok 1.2.10.a.
$f\colon A \to R$, $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$, $k \in N$, $k > 2$, indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j_1, j_2, \ldots, j_k$ je ľubovoľná permutácia[40] (preusporiadanie) indexov $i_1, i_2, \ldots, i_k$.
Parciálne derivácie $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}}$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a} \in A$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \ \text{(sú zameniteľné).}$$

Nech $f\colon A \to R$, $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$, $k \in N$. Hovoríme, že **funkcia f je k-krát diferencovateľná (diferencovateľná k-teho rádu) v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$**, ak sú všetky jej parciálne derivácie rádu $k-1$ diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}$.

Ak je funkcia f diferencovateľná k-teho rádu v každom bode $\boldsymbol{a} \in B$, kde $B \subset A$, potom sa nazýva **diferencovateľná k-teho rádu na množine B**.

Poznámka 1.2.17.
Ak je $f\colon A \to R$ diferencovateľná k-teho rádu v bode $\boldsymbol{a} \in A$, potom všetky parciálne derivácie nižších rádov sú diferencovateľné v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a}) \subset A$ a podľa vety 1.2.9 sú všetky zmiešané parciálne derivácie do rádu k, ktoré sa líšia iba poradím derivovania, zameniteľné.

Poznámka 1.2.18.
S pojmom diferencovateľnosť (prvého rádu) sme definovali aj diferenciál a deriváciu funkcie. Derivácia (prvá) funkcie $f\colon R^n \to R^m$ je matica typu $m \times n$ zložená z jej parciálnych derivácií (prvého rádu).
Logickým rozšírením je vyjadrenie jej druhej derivácie (pokiaľ existuje) pomocou parciálnych derivácií druhého rádu. Druhých[41] parciálnych derivácií je mn^2. Takto by sme mohli pokračovať po ľubovoľnú deriváciu rádu $k \in N$, pričom počet parciálnych derivácií rádu k je mn^k, preto sa obmedzíme (ako sme deklarovali v úvode tejto časti) na funkcie $f\colon R^n \to R$ a úvahy a tvrdenia, v prípade vektorovej funkcie, aplikujeme na každú zložku samostatne.

Nech $f\colon A \to R$, $A \subset R^n$ je oblasť, $n \in N$. Ak je f v bode $\boldsymbol{a} \in A$ diferencovateľná, potom jej (prvá) derivácia (gradient) v bode $\boldsymbol{a}$ má tvar n-rozmerného vektora

$$f'(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \right).$$

Ak je f v bode $\boldsymbol{a} \in A$ diferencovateľná druhého rádu, potom **druhú deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** definujeme ako štvorcovú maticu typu $n \times n$

$$f''(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Matica $f''(\boldsymbol{a})$ je symetrická podľa hlavnej diagonály, pretože zmiešané parciálne derivácie sú zameniteľné (poznámka 1.2.17), t. j. $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}$ pre $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$,

[40] Skupiny indexov $i_1, i_2, \ldots, i_k$ a $j_1, j_2, \ldots, j_k$ obsahujú rovnaké čísla, ktoré sa môžu opakovať, ale môžu byť zoradené v inom poradí.
[41] Funkcia má m zložiek $f_1, f_2, \ldots, f_m$ a každá zo zložiek má n^2 druhých parciálnych derivácií.

Poznámka 1.2.19.
Ak existujú všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie f v bode $\boldsymbol{a} \in A$, ale niektoré z prislúchajúcich dvojíc nie sú zameniteľné, potom ich tiež môžeme zapísať v tvare matice. Táto matica nebude symetrická podľa hlavnej diagonály a nebude reprezentovať deriváciu $f''(\boldsymbol{a})$, pretože funkcia f nebude diferencovateľná druhého rádu. Keby bola, potom by mala zameniteľné všetky príslušné parciálne derivácie druhého rádu.

Príklad 1.2.21.
Uvažujme zloženú funkciu $F(u;v) = f(\alpha(u;v);\beta(u;v))\colon R^2 \to R$ z príkladu 1.2.17.
Nech $f(x;y)\colon R^2 \to R$ je diferencovateľná druhého rádu v R^2 a nech sú vnútorné zložky $x = \alpha(u;v)\colon R^2 \to R$, $y = \beta(u;v)\colon R^2 \to R$ tiež diferencovateľné druhého rádu v R^2.

Ak označíme $(x;y) = g(u;v) = (\alpha(u;v);\beta(u;v))\colon R^2 \to R^2$, potom $F(u;v) = f(g(u;v))$ a pre prvú deriváciu F' platí[42] (viď príklad 1.2.17)

$$F' = (F_u;F_v) = \big[f(g)\big]' = f'g' = (f_x;f_y)\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix} = \big(f_x\alpha_u + f_y\beta_u; f_x\alpha_v + f_y\beta_v\big).$$

Druhá derivácia F'' obsahuje derivácie funkcií F_u, F_v, ktoré sú opäť zložené funkcie, pričom $f_x(x;y)\colon R^2 \to R$, $f_y(x;y)\colon R^2 \to R$ majú vnútorné zložky $x = \alpha(u;v)$, $y = \beta(u;v)$.
Funkcie $\alpha_u, \alpha_v, \beta_u, \beta_v$ sú funkcie dvoch premenných $(u;v) \in R^2$, preto pre ich derivácie platí $(\alpha_u)' = (\alpha_{uu};\alpha_{uv})$, $(\alpha_v)' = (\alpha_{vu};\alpha_{vv})$, $(\beta_u)' = (\beta_{uu};\beta_{uv})$, $(\beta_v)' = (\beta_{vu};\beta_{vv})$.
Funkcie $F_u = f_x\alpha_u + f_y\beta_u$, $F_v = f_x\alpha_v + f_y\beta_v$ derivujeme ako súčet a súčin funkcií. Platí

$$\begin{aligned}(F_u)' &= (F_{uu};F_{uv}) = (f_x\alpha_u + f_y\beta_u)' = (f_x)'\alpha_u + f_x(\alpha_u)' + (f_y)'\beta_u + f_y(\beta_u)'\\ &= (f_{xx};f_{xy})\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\alpha_u + f_x(\alpha_{uu};\alpha_{uv}) + (f_{yx};f_{yy})\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\beta_u + f_y(\beta_{uu};\beta_{uv}),\\ (F_v)' &= (F_{vu};F_{vv}) = (f_x\alpha_v + f_y\beta_v)' = (f_x)'\alpha_v + f_x(\alpha_v)' + (f_y)'\beta_v + f_y(\beta_v)'\\ &= (f_{xx};f_{xy})\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\alpha_v + f_x(\alpha_{vu};\alpha_{vv}) + (f_{yx};f_{yy})\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\beta_v + f_y(\beta_{vu};\beta_{vv}).\end{aligned}$$

Po jednoduchých úpravách predchádzajúcich výrazov dostaneme

$$F'' = \begin{pmatrix}(F_u)'\\ (F_v)'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{uu} & F_{uv}\\ F_{vu} & F_{vv}\end{pmatrix},$$

pričom ($f_{xy} = f_{yx}$, $\alpha_{uv} = \alpha_{vu}$, $\beta_{uv} = \beta_{vu}$ sú zameniteľné)[43]

$$\begin{aligned}F_{uu} &= f_{xx}(\alpha_u)^2 + 2f_{xy}\alpha_u\beta_u + f_{yy}(\beta_u)^2 + f_x\alpha_{uu} + f_y\beta_{uu},\\ F_{uv} = F_{vu} &= f_{xx}\alpha_u\alpha_v + f_{xy}(\alpha_u\beta_v + \alpha_v\beta_u) + f_{yy}\beta_u\beta_v + f_x\alpha_{uv} + f_y\beta_{uv},\\ F_{vv} &= f_{xx}(\alpha_v)^2 + 2f_{xy}\alpha_v\beta_v + f_{yy}(\beta_v)^2 + f_x\alpha_{vv} + f_y\beta_{vv}.\end{aligned}$$

a) Špeciálne pre $F(u;v) = f(x;y) = f(u^2+v^2;u^2-v^2)\colon R^2 \to R$ platí

$$F' = (F_u;F_v) = (f_x;f_y)\begin{pmatrix}2u & 2v\\ 2u & -2v\end{pmatrix} = \big(2uf_x + 2uf_y; 2vf_x - 2vf_y\big).$$

[42] Kvôli prehľadnosti uvádzame nasledujúce vzťahy bez premenných u, v.
[43] Zameniteľnosť vyplýva z diferencovateľnosti druhého rádu (veta 1.2.9).

Pre derivácie vnútorných zložiek platí $x' = (2u; 2v)$, $y' = (2u; -2v)$. Funkcie $2u$, $2v$ sú opäť funkcie premenných $(u; v)$ a platí[44] $u' = (2; 0)$, $v' = (0; 2)$. Potom

$$(F_u)' = (F_{uu}; F_{uv}) = \big[2u(f_x + f_y)\big]' = (2u)'(f_x + f_y) + 2u(f_x)' + 2u(f_y)'$$
$$= (2; 0)(f_x + f_y) + 2u(f_{xx}; f_{xy}) \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} + 2u(f_{yx}; f_{yy}) \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix},$$

$$(F_v)' = (F_{vu}; F_{vv}) = \big[2v(f_x - f_y)\big]' = (2v)'(f_x - f_y) + 2v(f_x)' - 2v(f_y)'$$
$$= (0; 2)(f_x - f_y) + 2v(f_{xx}; f_{xy}) \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} - 2v(f_{yx}; f_{yy}) \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Po jednoduchých úpravách ($f_{xy} = f_{yx}$ sú zameniteľné) dostaneme

$$F_{uu} = 4u^2(f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) + 2(f_x + f_y), \quad F_{uv} = F_{vu} = 4uv(f_{xx} - f_{yy}),$$
$$F_{vv} = 4v^2(f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) + 2(f_x + f_y).$$

b) Špeciálne pre $(x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = (\alpha(\rho; \varphi); \beta(\rho; \varphi)) = (\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\colon \langle 0; \infty) \times R \to R^2$, t. j. pre prevod do polárnych súradníc platí

$$F'(\rho; \varphi) = (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi' = \big(f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi; -f_x\rho\sin\varphi + f_y\rho\cos\varphi\big).$$

pričom derivácia vnútornej zložky (viď pr. 1.2.6) $\Psi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$.

$$(F_\rho)' = (F_{\rho\rho}; F_{\rho\varphi}) = \big[f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi\big]'$$
$$= (f_{xx}; f_{xy})\Psi'\cos\varphi + f_x(0; -\sin\varphi) + (f_{yx}; f_{yy})\Psi'\sin\varphi + f_y(0; \cos\varphi),$$

$$(F_\varphi)' = (F_{\varphi\rho}; F_{\varphi\varphi}) = \big[-f_x\rho\sin\varphi + f_y\rho\cos\varphi\big]'$$
$$= -(f_{xx}; f_{xy})\Psi'\rho\sin\varphi - f_x(\sin\varphi; \rho\cos\varphi) + (f_{yx}; f_{yy})\Psi'\rho\cos\varphi + f_y(\cos\varphi; -\rho\sin\varphi).$$

Po jednoduchých úpravách ($f_{xy} = f_{yx}$ sú zameniteľné) dostaneme

$$F_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\varphi + f_{xy}\sin 2\varphi + f_{yy}\sin^2\varphi,$$
$$F_{\rho\varphi} = F_{\varphi\rho} = \tfrac{1}{2}(f_{yy} - f_{xx})\rho\sin 2\varphi + f_{xy}\rho\cos 2\varphi - f_x\sin\varphi + f_y\cos\varphi,$$
$$F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi$$

c) Špeciálne pre $f(x; y) = \frac{x+y}{x-y}$, t. j. $F(\rho; \varphi) = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$, platí (viď pr. 1.2.17)

$$f_x = \frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}, \quad f_{xx} = \frac{0 - (-2y)2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{4y}{(x-y)^3} = \frac{4\sin\varphi}{\rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^3},$$
$$f_{xy} = \frac{-2(x-y)^2 - (-2y)2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2(x-y) - 4y}{(x-y)^3} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3} = \frac{-2(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^3},$$
$$f_y = \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}, \quad f_{yy} = \frac{0 - 2x2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \frac{4x}{(x-y)^3} = \frac{4\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^3},$$
$$f_{yx} = \frac{2(x-y)^2 - 2x2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2(x-y) - 4x}{(x-y)^3} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3} = \frac{-2(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^3}.$$

Po dosadení do vzťahov z časti b), dostaneme

$$F_\rho = f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi = \frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} = 0,$$

[44] Pre derivácie platí $x\colon \alpha' = (\alpha_u; \alpha_v) = (u^2 + v^2)' = (2u; 2v)$, $y\colon \beta' = (\beta_u; \beta_v) = (u^2 - v^2)' = (2u; -2v)$, $(\alpha_u)' = (\beta_u)' = (2u)' = \left(\frac{\partial(2u)}{\partial u}; \frac{\partial(2u)}{\partial v}\right) = (2; 0)$, $(\alpha_v)' = -(\beta_v)' = (2v)' = \left(\frac{\partial(2v)}{\partial u}; \frac{\partial(2v)}{\partial v}\right) = (0; 2)$.

$$F_\varphi = -f_x\rho\sin\varphi + f_y\rho\cos\varphi = \tfrac{2\rho\sin^2\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} + \tfrac{2\rho\cos^2\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} = \tfrac{2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2},$$
$$F_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\varphi + f_{xy}\sin 2\varphi + f_{yy}\sin^2\varphi$$
$$= \tfrac{4\sin\varphi\cos^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} + \tfrac{-2(\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} + \tfrac{4\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} = 0,$$
$$F_{\rho\varphi} = F_{\varphi\rho} = \tfrac{1}{2}(f_{yy}-f_{xx})\rho\sin 2\varphi + f_{xy}\rho\cos 2\varphi - f_x\sin\varphi + f_y\cos\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{4\cos\varphi\cdot 2\rho\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} - \tfrac{4\sin\varphi\cdot 2\rho\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}\Big) + \tfrac{-2(\sin\varphi+\cos\varphi)\rho(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}$$
$$-\tfrac{-2\sin\varphi\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} + \tfrac{2\cos\varphi\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} = 0,$$
$$F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi$$
$$= \tfrac{4\sin\varphi\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} - \tfrac{-2(\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} + \tfrac{4\cos\varphi\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}$$
$$-\tfrac{-2\sin\varphi\rho\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} - \tfrac{2\cos\varphi\rho\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} = \tfrac{4(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}.$$

Ak použijeme priamy výpočet (viď pr. 1.2.17), platí

$$F' = (F_\rho; F_\varphi) = \big(\tfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\big)' = \Big(0; \tfrac{2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\Big) = \big(0; 2(\cos\varphi-\sin\varphi)^{-2}\big),$$

Keďže $F_{\varphi\varphi} = \frac{\partial\, 2(\cos\varphi-\sin\varphi)^{-2}}{\partial\varphi} = \frac{-2\cdot 2(-\sin\varphi-\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} = \frac{4(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}$, potom

$$F'' = \begin{pmatrix} (F_\rho)' \\ (F_\varphi)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\rho\rho} & F_{\rho\varphi} \\ F_{\varphi\rho} & F_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Príklad 1.2.22.
$A \subset R^2$ je oblasť, $z = f(x;y)\colon A \to R$ je dvakrát diferencovateľná na množine A taká, že pre nejaké $(x;y)\in A$ spĺňa Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$f_{xx}(x;y) + f_{yy}(x;y) = 0, \quad \text{t. j. } \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = 0.$$

Pre prevod z karteziánskych do polárnych súradníc platí $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Funkcia f má v polárnych súradniciach tvar $F(\rho;\varphi) = f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)$. Z pr. 1.2.21 vyplýva

$$F_\rho = f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi, \quad F_\varphi = -f_x\rho\sin\varphi + f_y\rho\cos\varphi,$$
$$F_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\varphi + f_{xy}\sin 2\varphi + f_{yy}\sin^2\varphi,$$
$$F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi.$$

Keď predposlednú rovnosť vynásobíme ρ^2 a pripočítame k poslednej rovnosti, dostaneme

$$\rho^2 F_{\rho\rho} + F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2\cos^2\varphi + f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\sin^2\varphi$$
$$+ f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi$$
$$= f_{xx}\rho^2 + f_{yy}\rho^2 - \rho(f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi) = (f_{xx}+f_{yy})\rho^2 - \rho F_\rho.$$

Z toho vyplýva vyjadrenie Laplaceovej rovnice v polárnych súradniciach.

$$\rho^2 F_{\rho\rho} + F_{\varphi\varphi} + \rho F_\rho = (f_{xx}+f_{yy})\rho^2 = 0\cdot\rho^2, \quad \text{t. j. } \rho^2 F_{\rho\rho} + F_{\varphi\varphi} + \rho F_\rho = 0. \blacksquare$$

Nech $A \subset R^n$ je oblasť, $n\in N$, $k\in N$, funkcia $f\colon A \to R$ je k-krát diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)\in A$. To znamená, že všetky prislúchajúce zmiešané parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ až do rádu k sú zameniteľné. Nech $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n)\in R^n$

je ľubovoľný vektor taký, že platí $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\in A$. Potom formu k-teho stupňa (homogénny polynóm k-teho stupňa)

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right]^k f(\boldsymbol{a}),$$

$$\text{resp. } \mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1-a_1) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_n-a_n)\right]^k f(\boldsymbol{a})$$

po substitúcii $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$, nazývame **diferenciál k-teho rádu** (k**-ty diferenciál**) **funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$**.

Uvedený zápis je formálny[45] a naznačuje použitie polynomickej vety pre mocninu k. Diferenciál $\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ môžeme pre $\boldsymbol{h}=(h_1;h_2;\ldots;h_n)\in R^n$ písať v tvare[46]

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=k \\ 0\le i_1,\ldots,i_n\le k}} \tfrac{k!}{i_1!\cdots i_n!}\,\tfrac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n}.$$

Špeciálne pre $k=0$ definujeme **diferenciál 0-teho rádu** (**0-ty diferenciál**) **funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** vzťahom $\mathrm{d}^0 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})$.

Diferenciál (prvého rádu) $\mathrm{d}^1 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ predstavuje lineárnu formu a na základe definície diferencovateľnosti a definície parciálnych derivácií prvého rádu funkcie f platí

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) &= f'(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{h}^T = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{h}^T \\ &= \left(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1};\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2};\ldots;\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)\boldsymbol{h}^T = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}h_1 + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}h_2 + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}h_n.\end{aligned}$$

Diferenciál druhého rádu $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ predstavuje kvadratickú formu s maticou $f''(\boldsymbol{a})$ a má veľký význam hlavne pri hľadaní extrémov funkcie f. Môžeme ho vyjadriť v tvare

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^T = \boldsymbol{h}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}\boldsymbol{h}^T$$

$$= \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2}h_1^2 + 2\tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1\partial x_2}h_1h_2 + 2\tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1\partial x_3}h_1h_3 + \cdots + 2\tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{n-1}\partial x_n}h_{n-1}h_n + \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^2}h_n^2.$$

Diferenciál tretieho rádu $\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ predstavuje formu tretieho stupňa a po použití polynomickej vety ho môžeme písať v tvare

$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^3}h_1^3 + 3\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2\partial x_2}h_1^2h_2 + 3\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1\partial x_2^2}h_1h_2^2 + 3\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2\partial x_3}h_1^2h_3 + \cdots + \tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^3}h_n^3.$$

Poznámka 1.2.20.
Polynomická (multinomická) veta *je rozšírením známej binomickej vety*

$$(x_1+x_2)^k = \sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}x_1^{k-i}x_2^i = \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ 0\le i_1,i_2\le k}} \tfrac{k!}{i_1!i_2!}\,x_1^{i_1}x_2^{i_2},$$

[45] Formálne výraz umocníme, ale namiesto súčinov $\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_j}$ vytvoríme parciálne derivácie $\frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\cdots\partial x_j}$.

[46] Tvar $\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ dostaneme nahradením $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$, t. j. $h_i=x_i-a_i$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

pomocou ktorej môžeme k-tu mocninu dvoch sčítancov vyjadriť ako súčet $k+1$ sčítancov. Pomocou polynomickej vety môžeme zjednodušiť k-tu mocninu $n\in N$ sčítancov. Platí

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=k\\ 0\le i_1,\ldots,i_n\le k}} \tfrac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\, x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}.$$

Príklad 1.2.23.
$\boldsymbol{x}=(x;y)$, $f\colon R^2\to R$ je trikrát diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y)$. Platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T = (f_x(\boldsymbol{a});f_y(\boldsymbol{a}))\begin{pmatrix}x-a_x\\ y-a_y\end{pmatrix} = f_x(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)+f_y(\boldsymbol{a})\cdot(y-a_y).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T = (x-a_x;y-a_y)\begin{pmatrix}f_{xx}(\boldsymbol{a}) & f_{xy}(\boldsymbol{a})\\ f_{yx}(\boldsymbol{a}) & f_{yy}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a_x\\ y-a_y\end{pmatrix}\\ &= f_{xx}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)^2+2f_{xy}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)\cdot(y-a_y)+f_{yy}(\boldsymbol{a})\cdot(y-a_y)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= \sum_{i=0}^{3}\tbinom{3}{i}\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^{3-i}\partial y^i}(x-a_x)^{3-i}(y-a_y)^i\\ &= f_{xxx}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)^3+3f_{xxy}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)^2\cdot(y-a_y)\\ &\qquad +3f_{xyy}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)\cdot(y-a_y)^2+f_{yyy}(\boldsymbol{a})\cdot(y-a_y)^3.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Príklad 1.2.24.
a) $f(\boldsymbol{x})=f(x;y)=x^3+xy^2\colon R^2\to R$ je trikrát diferencovateľná v R^2.
Pre všetky $\boldsymbol{x}=(x;y)\in R^2$, $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y)\in R^2$ a pre $\boldsymbol{0}=(0;0)$, $\boldsymbol{b}=(1;2)$ platí:

$$f'(\boldsymbol{x})=(3x^2+y^2;2xy),\ f'(\boldsymbol{a})=(3a_x^2+a_y^2;2a_xa_y),\ f'(\boldsymbol{0})=(0;0),\ f'(\boldsymbol{b})=(7;4),$$
$$f''(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}6x & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix},\ f''(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}6a_x & 2a_y\\ 2a_y & 2a_x\end{pmatrix},\ f''(\boldsymbol{0})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ f''(\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}6&4\\4&2\end{pmatrix},$$
$$f_{xxx}(\boldsymbol{x})=6,\ f_{xxy}(\boldsymbol{x})=0,\ f_{xyy}(\boldsymbol{x})=2,\ f_{yyy}(\boldsymbol{x})=0,\quad \text{t. j. aj pre } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}.$$

Pre prvý, druhý a tretí diferenciál funkcie f v bodoch $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}$ platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=(3a_x^2+a_y^2)(x-a_x)+2a_xa_y(y-a_y),$$
$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})=0,\quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=7(x-1)+4(y-2)=7x+4y-9,$$
$$\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=6a_x(x-a_x)^2+2\cdot 2a_y(x-a_x)(y-a_y)+2a_x(y-a_y)^2,$$
$$\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})=0,\quad \mathrm{d}^2f(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=6(x-1)^2+8(x-1)(y-2)+2(y-2)^2,$$
$$\mathrm{d}^3f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=6(x-a_x)^3+3\cdot 2(x-a_x)(y-a_y)^2,$$
$$\mathrm{d}^3f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})=6x^3+6xy^2,\quad \mathrm{d}^3f(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=6(x-1)^3+6(x-1)(y-2)^2.$$

b) $f(\boldsymbol{x})=f(x;y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\colon R^2-\{(x;0),x\in R\}\to R$.
Z príkladu 1.2.18 b) vyplýva, že pre všetky $\boldsymbol{x}=(x;y)\in R^2$, $y\neq 0$ existujú

$$f'(\boldsymbol{x})=\left(\tfrac{y}{x^2+y^2};\tfrac{-x}{x^2+y^2}\right)=\tfrac{1}{x^2+y^2}(y;-x),$$
$$f''(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}=\tfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}-2xy & x^2-y^2\\ x^2-y^2 & 2xy\end{pmatrix}.$$

Pre prvý a druhý diferenciál f v bode $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y) \in R^2$, $a_y \neq 0$ platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \frac{1}{a_x^2 + a_y^2}\left[a_y(x - a_x) - a_x(y - a_y)\right] = \frac{a_y x - a_x y}{a_x^2 + a_y^2},$$

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \frac{-2a_x a_y (x - a_x)^2 + 2(a_x^2 - a_y^2)(x - a_x)(y - a_y) + 2a_x a_y (y - a_y)^2}{(a_x^2 + a_y^2)^2}.$$

Napríklad pre $\boldsymbol{a} = (1; 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1)$ platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \frac{x - y}{2}, \quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_2) = x,$$

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \frac{-2(x-1)^2 + 2(y-1)^2}{2^2} = \frac{(y-1)^2 - (x-1)^2}{2}, \quad \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_2) = -2x(y-1). \blacksquare$$

Príklad 1.2.25.
a) $f\colon R^3 \to R$ je trikrát diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$,
$\boldsymbol{x} = (x; y; z)$, $\boldsymbol{h} = (h_x; h_y; h_z)$, $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in O(\boldsymbol{a}) \subset D(f)$. Potom platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^T = f_x(\boldsymbol{a})h_x + f_y(\boldsymbol{a})h_y + f_y(\boldsymbol{a})h_z,$$

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^T =^{47}$$
$$= f_{xx}(\boldsymbol{a})h_x^2 + 2f_{xy}(\boldsymbol{a})h_x h_y + 2f_{xz}(\boldsymbol{a})h_x h_z + f_{yy}(\boldsymbol{a})h_y^2 + 2f_{yz}(\boldsymbol{a})h_y h_z + f_{zz}(\boldsymbol{a})h_z^2,$$

$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) =^{48}$$
$$= f_{xxx}(\boldsymbol{a})h_x^3 + 3f_{xxy}(\boldsymbol{a})h_x^2 h_y + 3f_{xxz}(\boldsymbol{a})h_x^2 h_z + 3f_{xyy}(\boldsymbol{a})h_x h_y^2 + 3f_{xzz}(\boldsymbol{a})h_x h_z^2$$
$$+ 6f_{xyz}(\boldsymbol{a})h_x h_y h_z + f_{yyy}(\boldsymbol{a})h_y^3 + 3f_{yyz}(\boldsymbol{a})h_y^2 h_z + 3f_{yzz}(\boldsymbol{a})h_y h_z^2 + f_{zzz}(\boldsymbol{a})h_z^3.$$

b) $f(\boldsymbol{x}) = f(x; y; z) = x^3 + xy^2 z\colon R^3 \to R$ je trikrát diferencovateľná v R^3.
Pre jej parciálne derivácie do tretieho rádu platí

$$f_x = 3x^2 + y^2 z,\ f_y = 2xyz,\ f_z = xy^2,$$
$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = 2yz,\ f_{xz} = y^2,\ f_{yy} = 2xz,\ f_{yz} = 2xy,\ f_{zz} = 0,$$
$$f_{xxx} = 6,\ f_{xxy} = 0,\ f_{xxz} = 0,\ f_{xyy} = 2z,\ f_{xzz} = 0,\ f_{xyz} = 2y,$$
$$f_{yyy} = 0,\ f_{yyz} = 2x,\ f_{yzz} = 0,\ f_{zzz} = 0.$$

Pre diferenciály f do tretieho rádu v bode $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\boldsymbol{h} = (h_x; h_y; h_z)$ platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = (3a_x^2 + a_y^2 a_z)h_x + 2a_x a_y a_z h_y + a_x a_y^2 h_z,$$
$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = 6a_x h_x^2 + 4a_y a_z h_x h_y + 2a_y^2 h_x h_z + 2a_x a_z h_y^2 + 4a_x a_y h_y h_z,$$
$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6a_z h_x h_y^2 + 12a_y h_x h_y h_z + 6a_x h_y^2 h_z$$

Napríklad pre $\boldsymbol{\varepsilon_1} = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon_2} = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon_3} = (0; 0; 1)$, $\boldsymbol{0} = (0; 0; 0)$, $\boldsymbol{a} = (1; 1; 1)$ platí

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{h}) = 3h_x, \quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{\varepsilon_2}, \boldsymbol{h}) = 0, \quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{\varepsilon_3}, \boldsymbol{h}) = 0,$$
$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{h}) = 0, \quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = 4h_x + 2h_y + h_z,$$
$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{h}) = 6h_x^2, \quad \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{\varepsilon_2}, \boldsymbol{h}) = 2h_x h_z, \quad \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{\varepsilon_3}, \boldsymbol{h}) = 0,$$
$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{h}) = 0, \quad \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = 6h_x^2 + 4h_x h_y + 2h_x h_z + 2h_y^2 + 4h_y h_z,$$
$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6h_y^2 h_z, \quad \mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{\varepsilon_2}, \boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 12h_x h_y h_z, \quad \mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{\varepsilon_3}, \boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6h_x h_y^2,$$
$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{h}) = 0, \quad \mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6h_x h_y^2 + 12h_x h_y h_z + 6h_y^2 h_z. \blacksquare$$

[47] Binomická veta: $(x + y + z)^2 = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$.
[48] Polynomická veta: $(x + y + z)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3x^2 z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2 z + 3yz^2 + z^3$.

Príklad 1.2.26.
$f(\boldsymbol{x}) = f(x;y;z) = \mathrm{e}^{x+y+z} \colon R^3 \to R$ je k-krát diferencovateľná v R^3 pre každé $k \in N$.
Pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^3$ platí

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{x+y+z} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{e}^z, \quad \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial z} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{e}^z = f(\boldsymbol{x}).$$

To znamená, že sú všetky parciálne derivácie každého rádu podľa premenných v ľubovoľnom poradí v bode $\boldsymbol{x} \in R^3$ rovnaké a rovné $f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{x+y+z} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{e}^z$, t. j.

$$\frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l} = f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^{a_x+a_y+a_z} \quad \text{pre všetky } i,j,l \in N,\ i+j+l=k.$$

Pre k-ty diferenciál funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (a_x;a_y;a_z)$, $\boldsymbol{h} = (h_x;h_y;h_z)$ platí

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) &= \sum_{\substack{i+j+l=k\\ 0\le i,j,l\le k}} \frac{3!}{i!j!l!} \frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l} h_x^i h_y^j h_z^l = \sum_{\substack{i+j+l=k\\ 0\le i,j,l\le k}} \frac{3!}{i!j!l!} f(\boldsymbol{a}) h_x^i h_y^j h_z^l \\ &= f(\boldsymbol{a})\big(h_x+h_y+h_z\big)^k = \mathrm{e}^{a_x+a_y+a_z}\,\big(h_x+h_y+h_z\big)^k.\end{aligned}$$

Špeciálne pre $\mathbf{0} = (0;0;0)$ platí $f(\mathbf{0}) = \mathrm{e}^{0+0+0} = 1$, $\mathrm{d}^k f(\mathbf{0},\boldsymbol{h}) = \big(h_x+h_y+h_z\big)^k$. ■

Literatúra

[1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2002, ISBN 80-204-0607-7.

[2] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej analýzy,* Bratislava, ŠNTL 1955.

[3] Bican, L., *Lineární algebra,* Praha, SNTL 1979.

[4] Birkhoff, G., Bartee, T., *Modern applied algebra,* New York, Mc Graw – Hill Book Company 1970, (Slov. preklad: *Aplikovaná algebra*, Bratislava, ALFA 1981).

[5] Birkhoff, G., Mac Lane, S., *A Survey of Modern Algebra,* New York, The Macmillan Company 1965, (Slov. preklad: *Prehľad modernej Algebry*, Bratislava, SNTL a ALFA 1979).

[6] Blaško R., *Matematická analýza 1,* Žilina, EDIS 2009, ISBN 978-80-554-0119-5.

[7] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I,* Praha, SNTL ALFA 1985.

[8] Brabec J., Hrůza B., *Matematická analýza II,* Praha, SNTL ALFA 1986.

[9] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов,* издание пятое, Москва, НАУКА 1966.

[10] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* издание девятое, Москва, Издательство НАУКА 1977.

[11] Demlová M., Nagy J., *Algebra,* Matematika pro VŠT, sešit III, Praha, SNTL 1985.

[12] Drábek, J., Križalkovič, K., Liška, J., Viktora, V., *Základy elementárni aritmetiky,* Praha, SPN 1984.

[13] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť,* Bratislava, ALFA 1985.

[14] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť,* Bratislava, ALFA 1972.

[15] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť,* Bratislava, ALFA 1971.

[16] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R,, *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť,* Bratislava, ALFA 1970.

[17] Frank L. a kolektiv autorů, *Matematika,* Praha, SNTL 1973.

[18] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky,* Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.

[19] Goult, R. J., *Applied Linear Algebra,* New York, E. Horwood 1978.

[20] Havel, V., Holenda, J., *Lineární algebra,* Praha, SNTL a ALFA 1984.

[21] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. a II. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[22] Holenda J., *Řady,* Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.

[23] Horský Z., *Diferenciální počet,* Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.

[24] Horský, Z., *Vektorové prostory,* Praha, SNTL 1980.

[25] Hruša K., Kraemer E., Sedláček J., Vyšín J., Zelinka R., *Přehled elementární matematiky,* Praha, SNTL 1957.

[26] Jarník V., *Integrální počet I, II,* Praha, Nakladatelství ČSAV 1956.

[27] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1982.

[28] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel,* Bratislava, SVTL 1965.

[29] Knichal V., Bašta A., Pišl M., Rektorys K., *Matematika II,* Praha, SNTL SVTL 1966.

[30] Kolář J., Štěpánková O., Chytil M., *Logika, algebry a grafy,* Praha, SNTL 1989.

[31] Kučera, L., Nešetřil, J., *Algebraické metody diskrétní matematiky,* Praha, SNTL 1989.

[32] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I (A—L) a II (M—Ž),* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.

[33] Míka S., *Numerické metody algebry,* Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.

[34] Mikola M., *Algebra,* 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina 1998.

[35] Mikola M., Chvál V., *Lineárna algebra,* Ružomberok, Žilina 2000, ISBN 80-89039-00-6.

[36] Nagy J., Nováková E., Vacek M., *Integrální počet,* Matematika pro VŠT, sešit VI, Praha, SNTL 1984.

[37] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky,* Praha, SNTL 1976.

[38] Neubrunn T., Vencko J., *Úvod do matematickej analýzy,* skriptá MFF UK, Bratislava 1981.

[39] Neubrunn T., Vencko J., *Matematická analýza II,* skriptá MFF UK, Bratislava 1984.

[40] Pondělíček, B., *Algebraické struktury s binárními operacemi,* Praha, SNTL 1977.

[41] Prágerová A., *Cvičení z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1987.

[42] Přikryl P., *Numerické metody matematické analýzy,* Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.

[43] Šilov G. J., *Matematická analýza,* Bratislava, ALFA 1974.

[44] Smoljanskij M. L., *Tabuľky neurčitých integrálov,* Bratislava, ALFA 1963.

[45] Svätokrížny P., *Lineárna algebra v úlohách,* Bratislava, ALFA 1986.

[46] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej,* Bratislava, ALFA SNTL 1987.

[47] Vitásek E, *Numerické metódy,* Praha, SNTL 1987.

[48] Blaško, R., *Matematická analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/sa-1.pdf`, (skriptum MA1) 2007.

[49] Blaško, R., *Matematická analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/ma-1.pdf`, (učebnica MA1) 2016.

[50] Blaško, R., *Neurčitý a určitý integrál reálnej funkcie,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/sa-2.pdf`, (učebnica MA2) 2016.

[51] Blaško, R., *Zbierka úloh z matematickej analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/cv1.pdf`, 2009.

[52] Blaško, R., *Základy lineárnej algebry a základy matematickej analýzy pre manažérov,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/zla-zma.pdf`, 2015.

[53] Drexel University, The Math Forum, `http://mathforum.org/`, Internet Mathematics Library, `http://mathforum.org/library/`.

[54] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, `http://members.aol.com/jeff570/mathword.html`.

[55] Elsevier Mathematics, `http://www.elseviermathematics.com/mathematicsweb/show/Index.htt`.

[56] EMIS, The European Mathematical Information Service, `http://www.emis.de/`.

[57] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, `http://www.mathcurve.com/`.

[58] Excellent Matematika, http://matematika.host.sk/index2.htm.

[59] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/.

[60] Geometry the online learning center, http://www.geometry.net/.

[61] The Math Forum, Internet Mathematics Library, http://mathforum.org/library/.

[62] On-line Mathematics Dictionary, http://pax.st.usm.edu/cmi/inform_html/glossary.html.

[63] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/.

[64] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/, WolframAlpha – computational knowledge engine, http://www.wolframalpha.com/.