Nájdite s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ korene funkcie $f\colon y = x^3 - 3x + 1$.

Riešenie.
Z priesečníkov grafov funkcií $y = x^3$, $y = 3x - 1$ (viď obrázok) odhadneme, že funkcia f má tri korene v intervaloch $\langle -2\,;\,-1\rangle$, $\langle 0\,;\,1\rangle$, $\langle 1\,;\,2\rangle$. Korene skutočne ležia v týchto intervaloch, pretože (Cauchyho veta o nulovom bode) platí:

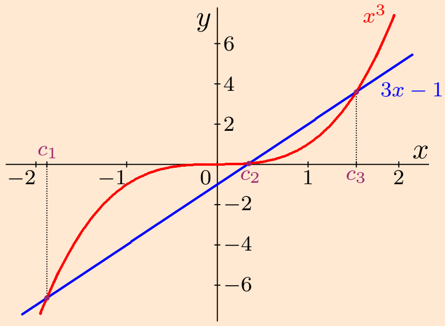
$$f(-2) = -1 < f(-1) = 3, \quad f(0) = 1 > f(1) = -1, \quad f(1) = -1 < f(2) = 3.$$

Pomocou metódy bisekcie nájdeme s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ koreň z intervalu $\langle 0\,;\,1\rangle$. Na jeho nájdenie budeme potrebovať minimálne n krokov, pričom musí platiť:

$$b_n - a_n = \tfrac{b_0 - a_0}{2^n} = \tfrac{1}{2^n} < \varepsilon = \tfrac{1}{100} \;\Rightarrow\; 10^2 = 100 < 2^n \;\Rightarrow\; n = 7, 8, \ldots \;\Rightarrow\; n = 7.$$

Postup riešenia je znázornený v tabuľke a koreňom je číslo $x_8 = 0,347\,656\,25$, ktorého odchýlka od skutočného koreňa je menšia ako $0,003\,906\,25$. Keby sme požadovali iba presnosť $|f(c)| < \varepsilon$, postačil by nám koreň $x_5 = 0,343\,75$. Na záver pre porovnanie uvádzame všetky tri korene vypočítané s presnosťou na deväť desatinných miest:

$$c_1 = -1,879\,385\,242, \qquad c_2 = 0,347\,296\,355, \qquad c_3 = 1,532\,088\,886. \blacksquare$$



k	a_k $[f(a_k) > 0]$	b_k $[f(b_k) < 0]$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$		$b_k - a_k$
0	0,0	1,0	0,5	−0,375	$\to b_1$	1,0
1	0,0	0,5	0,25	0,265 625	$\to a_2$	0,5
2	0,25	0,5	0,375	−0,072 265 625	$\to b_3$	0,25
3	0,25	0,375	0,312 5	0,093 0175 78	$\to a_4$	0,125
4	0,312 5	0,375	0,343 75	0,009 368 896	$\to a_5$	0,062 5
5	0,343 75	0,375	0,359 375	−0,031 711 578	$\to b_6$	0,031 25
6	0,343 75	0,359 375	0,351 562 5	−0,011 235 714	$\to b_7$	0,015 625
7	0,343 75	0,351 562 5	0,347 656 25	−0,000 949 323	$\to b_8$	0,007 812 5
8	0,343 75	0,347 656 25				0,003 906 25