Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

2009

Vedecký redaktor prof. RNDr. Josef Diblík, DrSc.

Recenzenti doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,
prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.

Žilinská univerzita v Žiline/EDIS–vydavateľstvo ŽU

---

beerb@frcatel.fri.uniza.sk, http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb

ISBN 978-80-554-0119-5

Obsah

Predhovor . . . 3

1 Základné pojmy **5**
- 1.1 Logika . . . 5
  - 1.1.1 Výrazy a výroky . . . 5
  - 1.1.2 Logické operácie . . . 6
  - 1.1.3 Výrokové formy . . . 7
  - 1.1.4 Kvantifikátory . . . 8
  - Cvičenia . . . 9
- 1.2 Základné prvky matematickej teórie . . . 10
  - 1.2.1 Dôkazy . . . 10
  - 1.2.2 Sumačná a súčinová symbolika . . . 12
  - Cvičenia . . . 13
- 1.3 Množiny . . . 14
  - 1.3.1 Operácie s množinami . . . 15
  - 1.3.2 Zobrazenie množín . . . 16
  - 1.3.3 Mohutnosť množín . . . 20
  - Cvičenia . . . 21

2 Reálne čísla **23**
- 2.1 Algebraické vlastnosti reálnych čísel . . . 23
  - 2.1.1 Číselné množiny . . . 25
  - Cvičenia . . . 31
- 2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel . . . 32
  - 2.2.1 Okolie bodu . . . 32
  - 2.2.2 Otvorené a uzavreté množiny . . . 34
  - 2.2.3 Metrické vlastnosti čísel . . . 36
  - Cvičenia . . . 38
- 2.3 Postupnosti reálnych čísel . . . 39
  - 2.3.1 Limita postupnosti . . . 40
  - 2.3.2 Prehľad základných tvrdení . . . 43
  - Cvičenia . . . 49

2.4 Číselné rady 51
2.4.1 Vlastnosti konvergentných radov 55
2.4.2 Číselné rady s nezápornými členmi 57
2.4.3 Absolútna, relatívna konvergencia a alternujúce rady 61
2.4.4 Prerovnanie radov a rady s predpísaným súčtom 64
Cvičenia 68

3 Reálne funkcie **71**
3.1 Funkcie 71
3.1.1 Základné vlastnosti funkcií 75
3.1.2 Elementárne funkcie 83
Cvičenia 91
3.2 Limita funkcie 93
3.2.1 Limita vzhľadom na množinu a jednostranné limity 99
3.2.2 Asymptotické vlastnosti 100
3.2.3 Riešené príklady 103
Cvičenia 106
3.3 Spojitosť funkcie 108
3.3.1 Vlastnosti spojitých funkcií na intervale 111
Cvičenia 117

4 Diferenciálny počet reálnej funkcie **119**
4.1 Derivácia reálnej funkcie 119
4.1.1 Jednostranné derivácie a derivácia na množine 121
4.1.2 Základné pravidlá pre výpočet derivácií 123
Cvičenia 128
4.2 Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov 130
4.2.1 Diferenciál funkcie 130
4.2.2 Využitie diferenciálu na približné výpočty 132
4.2.3 Derivácia a diferenciál vyšších rádov 134
Cvičenia 136
4.3 Aplikácie diferenciálneho počtu 137
4.3.1 Vety o strednej hodnote funkcie 137
4.3.2 L'Hospitalovo pravidlo, neurčité výrazy 140
4.3.3 Taylorov polynóm 144
4.3.4 Monotónnosť funkcie, lokálne a globálne extrémy funkcie 148
4.3.5 Konvexnosť a konkávnosť funkcie 154
4.3.6 Vyšetrenie priebehu funkcie 161
4.3.7 Derivácia funkcie zadanej parametricky a implicitne 165
Cvičenia 170
Výsledky cvičení 175
Register 181
Literatúra 191

Predhovor

Učebnica Matematická analýza 1 sa snaží zaplniť dieru nielen medzi doteraz vydanými učebnicami na Fakulte riadenia a informatiky Žilinskej univerzity, ale vo všeobecnosti medzi učebnicami určenými pre študentov, ktorí študujú na našich vysokých školách a univerzitách. Učebníc matematickej analýzy bolo do dnešnej doby napísaných dosť, ale vo väčšine prípadov je problém ich získať. Preto sa táto publikácia snaží zjednodušiť život všetkým študentom a ich učiteľom pri štúdiu predmetu matematická analýza I. Na túto učebnicu by malo nadviazať jej pokračovanie Matematická analýza II.

V knihe sa čitateľ, dúfam, že prístupným spôsobom, zoznámi s látkou predpísanou osnovami daného predmetu. Autor predpokladá základné vedomosti čitateľa zo strednej školy. Lenže vedomostná úroveň z matematiky študentov, ktorí nastupujú do prvého ročníka je rôzna. Preto sú v prvej kapitole vysvetlené základné pojmy, ktoré sú nevyhnutné pre ďalšie štúdium a vzdelanejší čitateľ ich môže preskočiť.

Látka je členená do štyroch kapitol a jednotlivých podkapitol. Na konci každej podkapitoly sú cvičenia, na ktorých si má študujúci overiť či porozumel vysvetľovanej látke. Výsledky cvičení sú uvedené v závere knihy. Pre spoľahlivé a trvalé zvládnutie látky je nutné ich prepočítanie. Veľa študentov túto skutočnosť podceňuje a zistí až pred skúškou, že nie je čas na dobehnutie zameškaného. Ale, keďže počet príkladov uvedených v publikácii je z pochopiteľných dôvodov obmedzený, sú uvedené v prehľade literatúry ďalšie zbierky úloh a príkladov, z ktorých môže hĺbavý čitateľ čerpať. Učebnica končí registrom pojmov s odkazmi na strany, na ktorých ich čitateľ nájde.

Definované pojmy sú kvôli prehľadnosti zobrazené tučným písmom. Vo formuláciách matematických viet sú niekedy použité symboly $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, prípadne $\Leftarrow$ (viď str. 6). Vzťah $A \Rightarrow B$ čítame „*Ak platia predpoklady (tvrdenia) A, potom platia závery (tvrdenia) B.*“ a vzťah $A \Leftrightarrow B$ čítame „*Tvrdenia A platia práve vtedy, ak platia tvrdenia B.*“.

Keďže nikto nie je dokonalý, prípadné zistené chyby a nedostatky, ako aj návrhy na ďalšie zlepšenie učebnice, môžete adresovať na adresu Katedry matematických metód, ktorej je autor členom, prípadne na e-mail adrese `beerb@frcatel.fri.uniza.sk`.

Žilina júl 2009 Autor

Žiaľ, motto mnohých študentov:

Od učenia ešte nikto nezomrel, ale načo riskovať.
GTUBB

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Logika

Predmetom skúmania logiky sú myšlienky. Logika sa zaoberá štúdiom formálnych vlastností myšlienky a stanovuje pravidlá správneho, t. j. logického usudzovania.

1.1.1 Výrazy a výroky

Na vyjadrenie myšlienok používame jazyk, ktorý sa skladá z **výrazov**. Výrazy môžu byť jednoduché alebo zložené, ktoré sa tvoria z jednoduchých pomocou syntaktických pravidiel jazyka. V živom jazyku sú výrazmi slová a vety. Na ich označenie sa okrem latinskej (slovenskej) abecedy používa tiež **abeceda grécka** (tab. 1.1.1). Výrazy sa rozdeľujú na konštanty a premenné. **Konštanty** sú výrazy, ktoré majú nemenný (t. j. konštantný) význam. **Premenné** sú výrazy, ktorých význam sa môže meniť a v prípade potreby ich môžeme nahradiť konštantami.

α	A	alfa	a	η	H	éta	é	ν	N	ný	n	τ	T	tau	t
β	B	beta	b	ϑ	Θ	théta	th	ξ	Ξ	ksí (xí)	x	υ	Υ	ypsilon	y
γ	Γ	gama	g	ι	I	ióta	i	o	O	omikron	o	φ	Φ	fí	f
δ	Δ	delta	d	κ	K	kappa	k	π	Π	pí	p	χ	X	chí	ch
ε	E	epsilon	e	λ	Λ	lambda	l	ρ	P	ró	r	ψ	Ψ	psí	ps
ζ	Z	dzéta	dz	μ	M	mí	m	σ	Σ	sigma	s	ω	Ω	omega	ó

Tabuľka 1.1.1: Grécka abeceda

Výrok je výraz, ktorý vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku, preto ich delíme na **pravdivé** a **nepravdivé**. Kritériom pravdivosti je zhoda so skutočnosťou a nemôže byť zároveň pravdivý a nepravdivý. Gramaticky je výrok obyčajne oznamovacia veta.[1]

[1] Od gramatickej vety je nutné odlišovať **matematickú vetu**. Je to pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný (napr. binomická veta, Pytagorova veta, ...)

Výrazy, ktoré obsahujú premenné, nazývame **nesamostatné výrazy** alebo **formy**. Ak nahradíme všetky premenné konštantami z oboru úvahy a dostaneme výrok, potom hovoríme o **výrokovej forme**. **Výroková forma nie je výrok!** Z výrokovej formy vznikne výrok dosadením prípustných konštánt za všetky premenné.

Výrokové formy sú napríklad: „$2 + 3 = x$“, „*Ak platí tvrdenie 1, potom platí tvrdenie 2.*“. Výrokmi sú napríklad výrazy: „*Pes je domáce zviera.*“, „$2 + 3 = 4$“, „*Pre každé reálne číslo x platí $x \geq 0$.*“, „*Trabant je auto.*“.

1.1.2 Logické operácie

Ako sme už spomenuli, výrok vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku. Preto je vhodné zaviesť pojem **pravdivostná**, resp. **logická hodnota výroku**. Pre pravdivý výrok definujeme pravdivostnú hodnotu **pravda** a označujeme symbolom P. Pre nepravdivý výrok definujeme pravdivostnú hodnotu **nepravda** a označujeme symbolom N.[2]

Pravdivostnú hodnotu výroku p budeme označovať $|p|$.

Výrokový počet sa zaoberá pravdivostnou hodnotou **zložených výrokov**, ktoré sú vytvorené z iných výrokov pomocou **logických operácií**. Základné logické operácie sú negácia výroku, konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia výrokov.

Negácia výroku p sa tvorí výrazmi „*nie je pravda, že p*“, „*nie je pravda, že platí p*“, „*nie p*“, „*non p*“ a podobne. Negáciu výroku p označujeme $\overline{p}$, prípadne p'.

Výrok a jeho negácia majú opačné pravdivostné hodnoty. Ďalej je zrejmé, že **negáciou negácie výroku p** je pôvodný výrok p, t. j. $\overline{(\overline{p})} = \overline{\overline{p}}$.

Konjunkcia výrokov p a q sa tvorí pomocou spojky „a“, označujeme ju $p \wedge q$, resp. $p\&q$ a čítame „*p a q*“, „*p a súčasne q*“, „*p konjunkcia q*“, „*konjunkcia výrokov p a q*“ a podobne. Konjunkcia je pravdivá iba v prípade, že sú pravdivé oba výroky. Takže na dokázanie nepravdivosti konjunkcie postačí nepravdivosť jedného z nich (tab. 1.1.2).

Ak použijeme na označenie pravdivostnej hodnoty symboly 0 a 1, potom pravdivostná hodnota konjunkcie dvoch výrokov sa rovná násobku pravdivostných hodnôt jednotlivých výrokov, t. j. $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$.

Disjunkcia výrokov p a q sa tvorí pomocou spojky „alebo“, označujeme ju $p \vee q$ (skratka z latinského *vel* — alebo) a čítame „*p alebo q*“, „*p vel q*“, „*disjunkcia výrokov p, q*“ a podobne. Disjunkcia je pravdivá, ak je pravdivý aspoň jeden z výrokov (tab. 1.1.2).

Implikácia výrokov p a q sa tvorí pomocou slov: „Ak (platí) ..., potom (platí) ...“. Označujeme ju $p \Rightarrow q$ a čítame „*Z p vyplýva q*“, „*p potom q*“, „*Ak platí p, potom platí q*“, „*p je nutná podmienka pre q*“, „*q je postačujúca podmienka pre p*“.

Výrok p sa nazýva podmieňujúci (predpoklad) a výrok q sa nazýva podmienený výrok (záver). Implikácia je nepravdivá iba v prípade $|p| = P$ a $|q| = N$ (tab. 1.1.2).

Ekvivalencia výrokov p a q sa tvorí pomocou konštrukcie: „... (platí) práve vtedy, ak (platí) ...“. Označujeme ju $p \Leftrightarrow q$, prípadne $p \sim q$ alebo $p \equiv q$ a čítame „*p (platí) práve vtedy, ak (platí) q*“, „*p platí vtedy a len vtedy, ak platí q*“, „*Z p vyplýva q a naopak z q vyplýva p*“, „*p je nutná podmienka a súčasne postačujúca podmienka pre q*“ a podobne.

Ekvivalencia $p \Leftrightarrow q$ je pravdivá v prípade, že $|p| = |q|$ (tab. 1.1.2) a môžeme ju nahradiť zloženým výrokom $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

[2] Tiež sa používa 1, A (áno), T (true), Y (yes), resp. 0, N (nie), F (false), N (no).

p	q	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
P	P	N	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	N			N	N	P	P	N	P	N	N
N	P	P	N	N	N	P	P	P	N	N	N
N	N			N	N	N	N	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.2: Pravdivostné hodnoty zložených výrokov

1.1.3 Výrokové formy

Nemá zmysel hovoriť o pravdivosti výrokovej formy, pretože obsahuje premenné. Ale má zmysel uvažovať, pre aké premenné vznikne pravdivý alebo nepravdivý výrok. **Tautológia** je výroková forma, ktorá po nahradení všetkých premenných konštantami dáva **vždy pravdivý výrok**. Naopak z **kontraindikácie** vznikne vždy nepravdivý výrok.

Pravdivostné hodnoty výrokov najčastejšie zisťujeme pomocou tabuľkovej alebo deduktívnej metódy, prípadne tieto metódy kombinujeme.

V prvom prípade zapíšeme danú výrokovú formu a jej jednotlivé premenné do **tabuľky pravdivostných hodnôt**. Najprv ohodnotíme pravdivostnými hodnotami jednotlivé premenné a potom určíme príslušné pravdivostné hodnoty výrokovej formy (tab. 1.1.3).

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
P	P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	N	P
N	P	P	N	N	N	P
N	N	P	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.3: Tautológia $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

V prípade deduktívnej metódy vychádzame z axióm (str. 10) a tautológií, ktorých pravdivosť máme dokázanú a pomocou pravidiel odvodzovania z nich dedukujeme nové vzťahy. Najčastejšie pri tom používame **pravidlo substitúcie** (t. j. nahradenie jedného výrazu druhým[3]) a **pravidlá odlúčenia modus ponens a tollens**.

Nech $p \Rightarrow q$ je pravdivá implikácia. Ak je p pravdivé, potom musí byť pravdivé tiež q (**modus ponens**, t. j. kladný úsudok). V opačnom prípade, t. j. $|q| = N$, by sme dostali nepravdivú implikáciu. Na druhej strane, ak je nepravdivé q, potom musí byť nepravdivé aj p (**modus tollens**, t. j. záporný úsudok). Pretože v prípade $|p| = P$ by sme taktiež dostali nepravdivú implikáciu (viď. tab. 1.1.2).

Teraz uvedieme niektoré dôležité tautológie.

- **Zákon dvojitej negácie:** $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$, t. j. p a $\overline{\overline{p}}$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.
- **Zákon vylúčenia tretieho:** $p \vee \overline{p}$, t. j. buď platí výrok p alebo jeho negácia $\overline{p}$.
- **Zákon sporu:** $\overline{p \wedge \overline{p}}$, t. j. nemôže byť výrok p pravdivý a zároveň nepravdivý.

[3] Ak v skúmanom výraze T dosadíme za nejakú premenú (na každom mieste, kde sa vyskytuje) ľubovoľnú výrokovú formu, potom sa pravdivostná hodnota výrazu T nezmení.

- **de Morganove zákony:** $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$, **resp.** $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$.
- **Zákon hypotetického sylogizmu:** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
- **Zákon transpozície:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$, t. j. obrátená implikácia.
- **Komutatívne zákony:** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.
- **Asociatívne zákony:**[4] $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$, $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.
- **Distributívne zákony:** $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

.

- **Vzťah ekvivalencie a implikácie:** $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.
- **Negácia implikácie:** $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$, t. j. princíp dôkazu sporom.

1.1.4 Kvantifikátory

V matematike často skúmame, či je nejaký výrok pravdivý všeobecne, t. j. platný pre všetky prvky z oboru úvahy, alebo iba pre niektoré prvky, prípadne iba pre práve jeden prvok. Na druhej strane nás niekedy zaujíma, či existuje aspoň jeden prvok, pre ktorý je tento výrok pravdivý. Hovoríme, že **výrok kvantifikujeme**.

Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňajú **všetky prvky** z oboru úvahy, kvantifikujeme daný výrok **všeobecným kvantifikátorom**. Označujeme ho symbolom $\forall$ a vyjadrujeme ho slovami „každý“, „všetky“, „žiadny“ a podobne.

Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **aspoň jeden prvok** z oboru úvahy, kvantifikujeme výrok **existenčným kvantifikátorom**. Označujeme ho symbolom $\exists$ a vyjadrujeme ho slovami „existuje“, „jestvuje“, „niektoré“, „aspoň jeden“ a podobne.

Symbolom $\exists!$ vyjadrujeme, že danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **práve jeden prvok** (aspoň jeden a najviac jeden). Namiesto označenia $\overline{\exists x}$ sa používa $\nexists x$.

Označme symbolom $F(x)$ skutočnosť, že prvok x má vlastnosť F (napr. že prvok x patrí do nejakej množiny F). Kvantifikácia sa vždy vzťahuje k **oboru kvantifikácie**, t. j. k množine premenných prvkov x. Ak použijeme kvantifikátor, potom viažeme premennú na túto množinu a z výrokovej formy $F(x)$ sa stáva výrok.

V nasledujúcej časti uvádzame príklady výrokov s kvantifikátormi.

$\forall x\colon F(x)$ „*Pre všetky x, pre ktoré platí $F(x)$.*“, t. j. „*Každé x má vlastnosť F.*“

$\overline{\forall x\colon F(x)}$ „*Nie je pravda, že každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.

$\overline{\forall x}\colon F(x)$ „*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Existuje x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.

$\forall x\colon \overline{F(x)}$ „*Pre každé x platí, že nemá vlastnosť F.*“, t. j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“. V hovorovej reči použijeme dvojitú negáciu: „*Žiadne x nemá vlastnosť F.*“.

$\overline{\forall x}\colon \overline{F(x)}$ „*Nie každé x nemá vlastnosť F.*“, t. j. „*Neplatí, že každé x nemá vlastnosť F.*“.

$\exists x\colon F(x)$ „*Existuje aspoň jedno x, ktoré má vlastnosť F.*“

$\overline{\exists x\colon F(x)}$ „*Nie je pravda, že existuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t. j. „*Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t. j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“.

$\overline{\exists x}\colon F(x)$ „*Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t. j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“.

[4] Pre jednoduchosť zátvorky vynechávame a píšeme $p \wedge q \wedge r$, resp $p \vee q \vee r$.

$\exists x\colon \overline{F(x)}$ „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“

$\overline{\exists x}\colon \overline{F(x)}$ „*Neexistuje x, ktoré nemá vlastnosť F.*“

Z predchádzajúceho vyplýva, že $\overline{\forall x\, F(x)}$, $\overline{\forall x}\, F(x)$ a $\exists x\, \overline{F(x)}$, resp. $\overline{\exists x\, F(x)}$, $\overline{\exists x}\, F(x)$ a $\forall x\, \overline{F(x)}$ vyjadrujú tie isté výroky. To znamená, že negácia kvantifikátora je ekvivalentná negácii kvantifikovaného výroku a že pri negácii výroku sa menia kvantifikátory navzájom a výroková forma sa mení na svoju negáciu, t. j.

$$\overline{\forall x\colon F(x)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\forall x}\colon F(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x\colon \overline{F(x)}, \qquad \overline{\exists x\colon F(x)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\exists x}\colon F(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x\colon \overline{F(x)}.$$

Cvičenia

1.1.1. Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov: ♣

a) $\forall x \in R\colon\ \sin x < 1$, b) $\exists x \in R\colon\ \sin x < 1$, c) $\exists! x \in R\colon\ \sin x < 1$,
d) $\nexists x \in R\colon\ \sin x < 1$, e) $\forall x \in R\colon\ \sin x > 1$, f) $\exists x \in R\colon\ \sin x > 1$,
g) $\exists! x \in R\colon\ \sin x > 1$, h) $\nexists x \in R\colon\ \sin x > 1$, i) $\forall x \in R\colon\ \sin x = 1$,
j) $\exists x \in R\colon\ \sin x = 1$, k) $\exists! x \in R\colon\ \sin x = 1$, l) $\nexists x \in R\colon\ \sin x = 1$.

1.1.2. Napíšte tabuľky pravdivostných hodnôt pre nasledujúce výroky: ♣

a) $\overline{p \vee \overline{q}}$, b) $\overline{p \wedge \overline{q}}$, c) $\overline{p \vee (q \wedge \overline{p})}$, d) $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$,
e) $\overline{p} \Rightarrow q$, f) $\overline{\overline{p} \Leftrightarrow q}$, g) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{q}$, h) $(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge \overline{q \Rightarrow p}$,
i) $\overline{p \wedge \overline{q}} \vee p$, j) $\overline{p \wedge \overline{q}} \vee q$, k) $(p \vee q) \Rightarrow \overline{p}$, l) $(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$.

1.1.3. Utvorte výroky $p \wedge q$, $p \vee q$ a určte, v ktorých prípadoch sú pravdivé: ♣

a) p: „*Daný trojuholník je pravouhlý.*“, q: „*Daný trojuholník je rovnoramenný.*“,
b) p: „*Celé číslo k je párne.*“, q: „*Celé číslo k je deliteľné tromi.*“,
c) p: „*Daná nerovnica platí pre $x \leq 4$.*“, q: „*Daná nerovnica neplatí pre $x \leq 1$.*“,
d) p: „*Daná kvadratická rovnica nemá reálne riešenie.*“, q: „*Daná kvadratická rovnica má absolútny člen s opačným znamienkom ako znamienko kvadratického člena.*“.

1.1.4. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie: ♣

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$, b) $[(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p)] \Rightarrow [(q \vee r) \Rightarrow p]$,
c) $[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \wedge p]$, d) $[(q \vee r) \Rightarrow p] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$,
e) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \vee \overline{p})]$, f) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p})]$
g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$, h) $[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$.

1.1.5. Ku $p \Rightarrow q$ a $p \Leftrightarrow q$ nájdite ekvivalentné formy, ktoré obsahujú iba negáciu a:

a) konjunkciu, disjunkciu, b) konjunkciu, c) disjunkciu.

1.1.6. Z výrokových foriem p: „*x je deliteľné dvomi.*“, q: „*x je deliteľné tromi.*“, r: „*x je deliteľné šiestimi.*“ vytvorte v slovnom znení zložené formy $F(x)$, $\overline{F(x)}$: ♣

a) $F(x)\colon\ (p \wedge q) \Leftrightarrow r$, b) $F(x)\colon\ (p \vee q) \Rightarrow r$, c) $F(x)\colon\ \overline{p \vee q} \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$,
d) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \vee \overline{p \wedge r}$, e) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \overline{q})$, f) $F(x)\colon\ (p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$.

1.1.7. Zistite, ktoré z výrokových foriem $F(x)$ z príkladu 1.1.6 sú tautológie. ♣

1.1.8. Zameňme v príklade 1.1.6 výrokovú formu r na tvar „*x je deliteľné piatimi.*“. Ktoré z výrokových foriem $F(x)$ sú tautológie v tomto prípade? ♣

1.1.9. Nech výroková forma t je tautológia a výroková forma k je kontraindikácia. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie a ktoré kontraindikácie: ♣

a) $\overline{t}$, b) $\overline{k}$, c) $t \Rightarrow k$, d) $k \Rightarrow t$, e) $(t \Rightarrow k) \vee \overline{t \wedge k}$,
f) $t \vee k$, g) $t \wedge k$, h) $\overline{t} \vee \overline{k}$, i) $\overline{t} \wedge \overline{k}$, j) $(t \vee k) \Rightarrow \overline{k \Rightarrow t}$.

1.1.10. K výrokovej forme $\overline{p \Rightarrow q} \vee (r \Leftrightarrow s)$ nájdite ekvivalent bez symbolov $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$. ♣

1.1.11. Dokážte, že výroková forma $\overline{\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow r} \;\Leftrightarrow\; \overline{p \Leftrightarrow \overline{q \Leftrightarrow r}}$ je tautológia.

1.1.12. Vytvorte negáciu a rozhodnite, ktorý z výrokov je pravdivý: ♣

a) $\exists x \in R\colon \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, b) $\forall x \in R\colon \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$,
c) $\forall x \in R\colon \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, d) $\forall x \in R\colon \sin^2 x - \cos^2 x = 1$,
e) $\exists x \in R\colon x^4 < x^3$, f) $\forall x \in R\, \forall y \in R\colon x^2 + y^2 > 0$,
g) $\exists x \in R\, \forall n \in N\colon n + 3 < nx$, h) $\forall n \in N\, \exists x \in R\colon n + 3 < nx$.

1.2 Základné prvky matematickej teórie

Hlavným znakom súčasnej matematiky je, že svoje jednotlivé disciplíny buduje axiomaticky. Na začiatku sú najjednoduchšie pojmy (tzv. **primitívne**) a súbory viet (**axiómy**), o ktorých predpokladáme, že platia a nedokazujeme ich.

Výber primitívnych pojmov a axióm je ovplyvnený rôznymi podmienkami a hlavne účelom, pre ktorý sa disciplína buduje. Najdôležitejšia je **podmienka bezspornosti systému**. To znamená, že v sytéme nemôžeme odvodiť výrok a zároveň jeho negáciu. Taktiež nemôže nastať situácia bežná pri právnych normách a zákonoch platných v SR, keď dvaja rovnako odborne fundovaní právnici si vykladajú jeden a ten istý zákon protikladne. Na tomto základe definujeme pomocou definícií nové pojmy a pomocou už dokázaných (t. j. platných) viet formulujeme a dokazujeme vety nové. Štruktúru matematiky môžeme charakterizovať trojicou základných kameňov, ktoré nazývame **definícia**, **veta** a **dôkaz**.

Definícia určuje význam zavádzaného pojmu pomocou už známych pojmov.

Veta (**poučka**, **tvrdenie**, **lema**, **pravidlo**) je pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný, resp. nie sú o ňom pochybnosti. **Pravidlom** nazývame obyčajne vetu, ktorá obsahuje návod na ďalší postup (napr. konštrukciu daných objektov). **Lemy** (t. j. **pomocné vety**) majú pomocný význam pri dokazovaní iných viet.

1.2.1 Dôkazy

Dôkaz vety, resp. daného tvrdenia je logický proces, ktorého cieľom je ukázať pravdivosť tvrdenia pomocou axióm, definícií a už predtým dokázaných viet. Dôkazy môžu mať rôzne formy, najznámejšie sú **priamy**, **nepriamy** a **dôkaz matematickou indukciou**.

Priamy dôkaz sa používa pri dokazovaní platnosti viet, ktoré majú vo všeobecnosti tvar $p \Rightarrow q$ (ak platí výrok p, potom platí výrok q). Predpokladáme, že výrok p je pravdivý a pomocou definícií, axióm a už dokázaných viet postupne ukážeme (s použitím modus ponens), že platí výrok q. Prakticky zostrojíme konečnú postupnosť pravdivých výrokov $p_1, p_2, \dots p_k$, ktorú môžeme symbolicky zapísať $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_k \Rightarrow q$.

Nepriamy dôkaz sa tiež používa pri dokazovaní platnosti viet tvaru $p \Rightarrow q$. Nedokazujeme však výrok $p \Rightarrow q$, ale nejaký ekvivalentný výrok (napr. obrátenú implikáciu) alebo dokazujeme platnosť, resp. neplatnosť negácie pôvodného výroku (dôkaz sporom).

Pri dôkaze pomocou **obrátenej implikácie** nahradíme pôvodnú implikáciu $p \Rightarrow q$ obrátenou implikáciou $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ (zákon transpozície, str. 8) a túto potom dokážeme.

Pri **dôkaze sporom** predpokladáme platnosť negácie výroku $p \Rightarrow q$, t. j. výroku $p \wedge \overline{q}$ a ukážeme jeho nepravdivosť. Prakticky to znamená, že dospejeme k sporu.

Matematická indukcia je dôležitý prostriedok na dokazovanie tvrdenia, že prvky danej množiny (najčastejšie prirodzené čísla) spĺňajú nejakú vlastnosť F. Pomocou matematickej indukcie dokazujeme pravdivosť výrokov tvaru $\forall n \in N, n \geq n_0\colon F(n)$, kde $n_0 \in N$ je vopred dané číslo.[5] Samotný dôkaz pozostáva z krokov 1, 2 a záveru:

Krok 1: Ukážeme, že tvrdenie F je splnené pre prvý prvok $n = n_0$, t. j. že platí $F(n_0)$.

Krok 2: Predpokladáme, že tvrdenie F platí pre nejaké prirodzené číslo $n = k \geq n_0$ a (za tohto predpokladu) dokážeme, že tvrdenie F platí aj pre nasledujúce prirodzené číslo $n = k+1$. Takže dokážeme implikáciu $F(k) \Rightarrow F(k+1)$.

Záver: V kroku 1 sme ukázali, že platí $F(n_0)$. Z kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+1)$. Z tohto opäť na základe kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+2)$, $F(n_0+3)$ atď. Potom je tvrdenie F splnené pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$.

Príklad 1.2.1.

Dokážte: „*Ak je $n \in N$ deliteľné číslom 4, potom je tiež deliteľné číslom 2.*“

Priamy dôkaz $[\forall n \in N\colon 4|n \Rightarrow 2|n]$: $\forall n \in N\colon 4|n \Rightarrow \exists k \in N\colon n = 4k = 2(2k) \Rightarrow 2|n$.

Obrátená implikácia $[\forall n \in N\colon 2\nmid n \Rightarrow 4\nmid n]$: $\forall n \in N\colon 2\nmid n \;\Rightarrow\; (2\cdot 2)\nmid n$, t.j $4\nmid n$.

Dôkaz sporom $[\forall n \in N\colon 4|n \wedge 2\nmid n \Rightarrow \text{spor}]$:

$$\forall n \in N\colon 4|n \wedge 2\nmid n \;\Rightarrow\; [\exists k \in N\colon n = 4k = 2(2k)] \wedge 2\nmid n \;\Rightarrow\; 2|n \wedge 2\nmid n, \text{ t. j. spor.} \;\blacksquare$$

Príklad 1.2.2.

Dokážte matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

Riešenie.

Označme $F(n) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$. Takže máme ukázať rovnosť $F(n) = n^2$.

Krok 1 $[F(1) = 1^2]$: Platí triviálne, pretože $F(1) = 1 = 1^2$.

Krok 2 $[F(k) = k^2 \Rightarrow F(k+1) = (k+1)^2]$: $F(k) = k^2 \;\Rightarrow$

$$F(k+1) = 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = F(k) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \;\blacksquare$$

Príklad 1.2.3.

Dokážte matematickou indukciou, že pre $\forall n \in N$, $n \geq 5$ platí nerovnosť $2^n > n^2$.

Riešenie.

Krok 1 $[n = 5]$: $32 = 2^5 > 5^2 = 25$.

Krok 2 $[2^k > k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2]$: $k \geq 5 \Rightarrow (k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 \geq (5-1)^2 = 16 \Rightarrow$

$$k^2 \geq 2k+15 > 2k+1 \Rightarrow 2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \;\blacksquare$$

[5] To znamená, že sú splnené tvrdenia $F(n_0)$, $F(n_0+1)$, $F(n_0+2)$, $\dots$.

Nie všetky tvrdenia sa dajú dokázať predchádzajúcimi spôsobmi. Niekedy potrebujeme overiť existenciu nejakého objektu, t. j. dokázať pravdivosť výroku $\exists x\, F(x)$. Tu nám stačí nájsť jeden prvok, pre ktoré F platí. Preto sa tieto dôkazy nazývajú **existenčné**.

Na dokázanie pravdivosti výroku $\forall x\, F(x)$, je nutné ukázať, že vlastnosť F je splnená pre všetky prvky x. Z ekvivalencie $\overline{\forall x\, F(x)} \Leftrightarrow \overline{\forall} x\, F(x) \Leftrightarrow \exists x\, \overline{F(x)}$ vyplýva, že na dokázanie nepravdivosti výroku $\forall x\, F(x)$ postačí nájsť jeden prvok, pre ktorý vlastnosť F splnená nie je. Takýto prvok nazývame **kontrapríklad**.

Často v matematike potrebujeme zostrojiť (skonštruovať) nejaký objekt s danými, konkrétnymi vlastnosťami, preto takýto postup niekedy nazývame **konštruktívny dôkaz**.

Príklad 1.2.4.
Dokážte, že pre všetky $n\in N$ platí $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Riešenie.
$\{a_k\}_{k=1}^{n}=\{1,2,3,\ldots,n\}$ je konečná n-členná aritmetická postupnosť s diferenciou $d{=}1$. Pre súčet jej členov platí $1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{(1+n)n}{2}$.

Iné riešenie.
Ak označíme $1+2+3+\cdots+n=s$, potom platí:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n & = & s\\
n & + & n{-}1 & + & n{-}2 & + & \cdots & + & 1 & = & s\\
\hline
(n{+}1) & + & (n{+}1) & + & (n{+}1) & + & \cdots & + & (n{+}1) & = & n(n{+}1).
\end{array}$$

$$\Rightarrow\ 2s=n(n{+}1)\ \Rightarrow\ s=1{+}2{+}3{+}\cdots{+}n=\frac{(n{+}1)n}{2}.$$

Iné riešenie.
Dokážeme matematickou indukciou, že pre všetky $n\in N$ platí $F(n)=G(n)$, pričom:

$$F(n)=1+2+\cdots+n,\quad G(n)=\frac{n(n{+}1)}{2}.$$

Krok 1 $[F(1)=G(1)]$: $F(1)=1,\ G(1)=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1\ \Rightarrow\ F(1)=G(1).$

Krok 2 $[F(k){=}G(k)\Rightarrow F(k{+}1){=}G(k{+}1)]$: $F(k)=G(k)\ \Rightarrow$

$$F(k{+}1)=1+2+\cdots+k+(k{+}1)=[1+2+\cdots+k]+(k{+}1)=F(k)+(k{+}1)=$$
$$=\frac{k(k{+}1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]=(k+1)\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=G(k+1).\ \blacksquare$$

1.2.2 Sumačná a súčinová symbolika

Znak $\sum$ (veľké grécke sigma) sa používa na zjednodušenie zápisu súčtu s mnohými sčítancami. Ich počet môže byť konečný ale aj nekonečný. Tento súčet zapisujeme v tvare

$$\sum_{j=s}^{n} a_j=a_s+a_{s+1}+\cdots+a_{n-1}+a_n,\quad \text{resp.}\ \sum_{j=s}^{\infty} a_j=a_s+a_{s+1}+a_{s+2}+a_{s+3}+\cdots$$

a čítame **suma (súčet)** a_j **pre** $j{=}s$ **až** n, resp. **až do nekonečna**. Písmeno j nazývame **sčítací index**, $s\in Z$ nazývame **dolná hranica pre sčítanie** a $n\in Z$, resp. ∞ nazývame **horná hranica pre sčítanie**. Za j dosadzujeme postupne celočíselné hodnoty od dolnej hranice po hornú hranicu (vrátane hraníc). Nekonečné sumy sa nazývajú **číselné rady** a budeme sa nimi podrobne zaoberať neskoršie.

Na zjednodušenie súčinu používame analogicky znak $\prod$ (veľké grécke pí). Píšeme

$$\prod_{j=s}^{n} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n, \quad \text{resp.} \quad \prod_{j=s}^{\infty} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdot a_{s+2} \cdot a_{s+3} \cdots$$

a čítame **súčin (produkt)** a_j **pre** $j=s$ **až** n, resp. **až do nekonečna**. Písmeno j nazývame **násobiaci index**, s **dolná hranica** a n, resp. ∞ **horná hranica pre násobenie**.

Nech $n \in N$, potom súčin $n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ nazývame **faktoriál čísla** n a čítame n **faktoriál**. Špeciálne pre $n=0$ definujeme $0!=1$.

Cvičenia

1.2.1. Dokážte rôznymi spôsobmi nasledujúce tvrdenia:

a) Pre všetky reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
b) Súčin dvoch nepárnych čísel je číslo nepárne.
c) Súčin dvoch párnych čísel je číslo párne.
d) Súčin dvoch čísel, z ktorých je aspoň jedno párne, je párny.

1.2.2. Dokážte, že $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$ sú iracionálne čísla.

1.2.3. Dokážte: $\forall a, b \in R\colon\ a \neq b \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$.

1.2.4. Dokážte rôznymi spôsobmi, že pre všetky $n \in N$ platí: $3 \nmid n \Rightarrow 3 \mid (n^2 - 1)$.

1.2.5. Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $2 \mid (n^2 - n)$, b) $3 \mid (2n^3 + n)$, c) $5 \mid (n^5 - n)$, d) $6 \mid (n^3 - n)$,
e) $6 \mid (n^3 + 3n^2 + 2n)$, f) $6 \mid (n^7 - n)$, g) $7 \mid (n^7 - n)$, h) $7 \mid (6^{2n} - 8)$.

1.2.6. Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$, b) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$,
c) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$, d) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(4j-3)(4j+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

1.2.7. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $\sum_{j=1}^{n} 2j = n(n+1)$, b) $\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$, c) $\sum_{j=0}^{n} 2^{-j} = 2 - 2^{-n}$,
d) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, e) $\sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 1$, f) $\sum_{j=0}^{n} 3^j = \frac{3^{n+1}-1}{2}$,

1.2.8. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j (2j-1) = (-1)^n n$, b) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$,
c) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$,
e) $\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n^3+3n^2+2n}{3}$, f) $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

1.2.9. Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 9$ platí $2^n > (n-1)^2(n-2)$.

1.2.10. Dokážte: a) $\forall n \in N\colon 4 \mid [n^2 + (n+1)^2 - 1]$, b) $\forall n \in N\colon 9 \mid [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3]$.

1.2.11. Predpokladajme, že existujú trojhalierové a päťhalierové mince. Dokážte, že každý nákup s cenou viac ako 7 halierov môžeme zaplatiť iba týmito mincami.

1.2.12. Dokážte pomocou matematickej indukcie:

a) Vypuklý n-uholník má $(n-3)n/2$ uhlopriečok.
b) Súčet vnútorných uhlov vypuklého n-uholníka je $(n-2)\pi$.
c) Súčet vnútorných uhlov ľubovoľného n-uholníka je $(n-2)\pi$.
d) n priamok prechádzajúcich jedným bodom delí rovinu na $2n$ častí.

1.3 Množiny

Pod pojmom **množina** rozumieme neusporiadaný súbor (skupinu, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...), ktoré nazývame **prvky množiny**. Množiny sa obvykle označujú veľkými písmenami a ich prvky sa ohraničujú zloženými zátvorkami $\{\ \}$. Symbolmi $\in$ a $\notin$ vyjadrujeme, že prvok patrí alebo nepatrí do danej množiny.

Množinu považujeme za danú, ak o každom predmete je určené, či do nej patrí alebo nepatrí. Množinu definujeme vyjadrením všetkých jej prvkov, napríklad zápismi

$$A = \{\text{zoznam prvkov}\} = \{x;\ \text{podmienky pre } x\}\,.$$

Ak má množina konečný počet prvkov, nazýva sa **konečná množina**. Ak nie je konečná, nazýva sa **nekonečná množina**. Príkladom konečnej a nekonečnej množiny sú napríklad $A = \{n \in N;\ n < 10\} = \{1, 2, \ldots, 9\}$ a $B = \{n \in N;\ n > 10\} = \{11, 12, 13, \ldots\}$.

Hovoríme, že **množina A je podmnožinou**[6] **množiny B** ak, každý prvok množiny A patrí aj do množiny B a zapisujeme $A \subset B$. V opačnom prípade zapisujeme $A \not\subset B$.

Hovoríme, že **množiny A a B sa rovnajú** (**sú totožné**), ozn. $A = B$, ak majú rovnaké prvky, t. j. ak každý prvok z A patrí do B a zároveň každý prvok z B patrí do A. Takže $A = B$ práve vtedy, ak $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.

Ak neplatí $A = B$, potom hovoríme, že **množiny A a B sú rôzne** (**nerovnajú sa**) a zapisujeme $A \neq B$. Je zrejmé, že množiny A a B sú rôzne, ak existuje aspoň jeden prvok, ktorý patrí do jednej z nich a nepatrí do druhej.

Niekedy sa používajú označenia $A \subseteq B$ alebo $A \subseteqq B$, aby sme zdôraznili, že môže platiť $A = B$ a naopak označenia $A \subsetneq B$, resp. $A \subsetneqq B$, aby sme vylúčili možnosť $A = B$.

Množinu, ktorá neobsahuje žiadne prvky, nazývame **prázdna množina** a označujeme ju $\emptyset$, prípadne $\{\}$. Musíme si ale uvedomiť, že symbol $\{\emptyset\}$ vyjadruje jednoprvkovú množinu, ktorá ako prvok obsahuje prázdnu množinu. Ďalej si treba uvedomiť, že **prázdna množina je podmnožinou každej množiny** a že je **konečnou množinou**.

Môže sa stať, že prvkami množiny sú opäť množiny, sú to tzv. **systémy množín**. Špeciálny význam má množina všetkých podmnožín danej množiny A, ktorú nazývame (**potenčná množina množiny A**) a označujeme 2^A, t. j. $2^A = \{B;\ B \subset A\}$.

Príklad 1.3.1.
Potenčnou množinou množiny $X = \{0, 1, 2\}$ je množina

$$2^X = \{A;\ A \subset X\} = \{\emptyset,\ \{0\}\,,\ \{1\}\,,\ \{2\}\,,\ \{0,1\}\,,\ \{0,2\}\,,\ \{1,2\}\,,\ X\}\,. \ \blacksquare$$

[6] Niekedy tiež hovoríme, že B **je nadmnožinou** A a označujeme $B \supset A$.

1.3.1 Operácie s množinami

Prienikom množín A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň do množiny B, t. j. $A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$. Ak pre množiny A, B platí $A \cap B = \emptyset$, potom ich nazývame **disjunktné**.

Zjednotením (súčtom) množín A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A alebo do množiny B, t. j. $A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$.

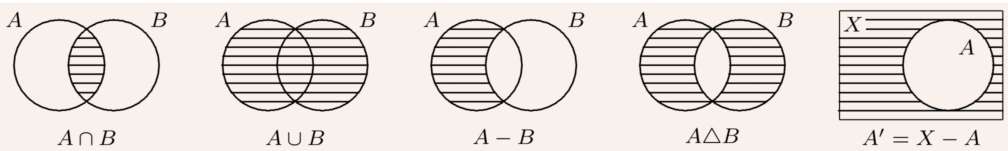
Rozdielom množín A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň nepatriace do množiny B, t. j. $A - B = \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$.

Symetrickým rozdielom množín A a B nazývame $(A - B) \cup (B - A)$, t. j.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{x;\ x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}\,.$$

Nech $A \subset X$. **Doplnkom** (**komplementom**, **doplnkovou**, resp. **komplementárnou množinou**) **množiny A do množiny X** nazývame množinu $A' = X - A$. Niekedy sa zvykne doplnok tiež označovať A^c, $\overline{A}$, resp. A'_X (aby sa zdôraznilo do množiny X). Množiny A a A' sa nazývajú **doplnkové** (**komplementárne**) **vzhľadom na množinu X**.

Z definície vyplýva, že každý prvok $x \in X$ patrí do práve jednej z množín A, A'.



Obr. 1.3.1: Prienik, zjednotenie, rozdiel, symetrický rozdiel a doplnok množín

Karteziánskym súčinom množín A a B nazývame $A \times B = \{[x;y]\,;\ x \in A,\ y \in B\}$. Výraz $[x;y]$ sa nazýva **usporiadaná dvojica prvkov x a y**, pretože záleží na poradí prvkov x a y. Usporiadané dvojice $[x_1;y_1]$ a $[x_2;y_2]$ sa **rovnajú**, ak platí $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Podobne pre $n \in N$ nazývame výraz $[x_1;\ x_2;\dots;x_n]$ **usporiadaná n-tica** a množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[x_1;\dots;x_n]\,;\ x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$$

karteziánskym súčinom množín A_1, A_2, … A_n. Pre $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ zjednodušene píšeme $A \times A \times \cdots \times A = A^n$, t. j. $A = A^1$, $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$.

Množinové operácie (prienik, zjednotenie, …) majú podobné vlastnosti ako logické operácie (konjunkcia, disjunkcia, …).

Veta 1.3.1.
A je ľubovoľná množina $\Longrightarrow$ $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $\emptyset - A = \emptyset$.

Dôkaz.
Tvrdenia vyplývajú priamo z definície: $A \cup \emptyset = \{x;\ x \in A \vee x \in \emptyset\} = \{x;\ x \in A\} = A$,
$A \cap \emptyset = \{x;\ x \in A \wedge x \in \emptyset\} = \{x;\ x \in \emptyset\} = \emptyset$, $\emptyset - A = \{x;\ x \in \emptyset \wedge x \notin A\} = \{x;\ x \in \emptyset\} = \emptyset$. ■

Veta 1.3.2.
A, B, C sú ľubovoľné množiny $\Longrightarrow$
 a) $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$, $A\triangle B=B\triangle A$,
 b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
 c) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Dôkaz.
a) Vyplýva z definície.
b) Z asociatívnych zákonov pre $\wedge$ a $\vee$ vyplýva:
$x\in[A\cap(B\cap C)]\Leftrightarrow[x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)]\Leftrightarrow[(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C]\Leftrightarrow x\in[(A\cap B)\cap C]$,
$x\in[A\cup(B\cup C)]\Leftrightarrow[x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)]\Leftrightarrow[(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C]\Leftrightarrow x\in[(A\cup B)\cup C]$.
c) Z distributívnych zákonov pre $\wedge$ a $\vee$ vyplýva:
$x\in[A\cap(B\cup C)] \Leftrightarrow [x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)] \Leftrightarrow x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$,
$x\in[A\cup(B\cap C)] \Leftrightarrow [x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)] \Leftrightarrow x\in[(A\cup B)\cap(A\cup C)]$. ■

Veta 1.3.3.
$X\neq\emptyset$, $A,B\subset X \Longrightarrow$
 a) $(A\cap B)'=A'\cup B'$, $(A\cup B)'=A'\cap B'$, b) $X'=\emptyset$, $\emptyset'=X$, c) $(A')'=A$.

Dôkaz.
a) Tieto rovnosti nazývame **de Morganove zákony** a vyplývajú zo vzťahov:
$x\in(A\cap B)'\Leftrightarrow \text{non } (x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B\Leftrightarrow x\in A'\vee x\in B'\Leftrightarrow x\in(A'\cup B')$.
$x\in(A\cup B)'\Leftrightarrow \text{non } (x\in A\vee x\in B)\Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B\Leftrightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Leftrightarrow x\in(A'\cap B')$.
b) Vyplýva zo vzťahov: $x\in X'\Leftrightarrow x\notin X\Leftrightarrow x\in\emptyset$ a $x\in\emptyset'\Leftrightarrow x\notin\emptyset\Leftrightarrow x\in X$.
c) Vyplýva zo vzťahov: $x\in(A')'\Leftrightarrow x\notin A'\Leftrightarrow x\in A$. ■

Pre konečný systém množín A_1, A_2, ..., A_n, $n\in N$ a pre nekonečný systém množín A_1, A_2, A_3, ... majú de Morganove zákony tvar:

$$\Big[\bigcap_{k=1}^{n}A_k\Big]'=\bigcup_{k=1}^{n}A_k',\quad \Big[\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big]'=\bigcap_{k=1}^{n}A_k',\quad \Big[\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\Big]'=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k',\quad \Big[\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big]'=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k'.$$

1.3.2 Zobrazenie množín

Nech $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$. **Binárnou reláciou medzi množinami A a B** nazývame každú podmnožinu karteziánskeho súčinu $A\times B$. Slovo binárna často vynechávame. Ak $T\subset A\times B$, potom skutočnosť, že prvok $[x;y]$ patrí do relácie T, zapisujeme $[x;y]\in T$, resp. xTy.

Hovoríme, že binárna relácia $T\subset A\times A$ je **reláciou ekvivalencie**[7] **na množine A**, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna na množine A, t. j. ak pre všetky $x,y,z\in A$ platí:

reflexívnosť:	$[x;x]\in T$,	resp.	xTx,
symetria:	$[x;y]\in T\Leftrightarrow[y;x]\in T$,		$xTy\Leftrightarrow yTx$,
tranzitívnosť:	$([x;y]\in T\wedge[y;z]\in T)\Rightarrow[x;z]\in T$,		$(xTy\wedge yTz)\Rightarrow xTz$.

[7] Je potrebné ju odlišovať od logickej operácie ekvivalencie.

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem zobrazenie (v matematickej analýze sa uprednostňuje názov funkcia). Nech $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. **Zobrazením (funkciou) z množiny A do množiny B** nazývame každú reláciu $f \subset A \times B$ takú, že pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$, že $[x;y] \in f$.

Prvok $x \in A$ sa nazýva **vzor** (**nezávislá premenná**). Príslušné $y = f(x)$ sa nazýva **obraz prvku x v zobrazení f** (**závislá premenná**), resp. **hodnota zobrazenia f v bode x** (**funkčná hodnota v bode x**).

Množinu $D(f)$ všetkých $x \in A$, pre ktoré existuje $y = f(x) \in B$, nazývame **definičný obor zobrazenia f**. Množinu $H(f)$ všetkých obrazov $y \in B$, pre ktoré existuje vzor $x \in A$ taký, že $y = f(x)$, nazývame **obor hodnôt zobrazenia f**. To znamená, že

$$D(f) = \{x \in A;\ \exists y \in B\colon\ [x;y] \in f\}, \qquad H(f) = \{y \in B;\ \exists x \in D(f)\colon\ [x;y] \in f\}.$$

Namiesto zápisov $[x;y] \in f$ a xfy sa častejšie používajú zápisy

$$f\colon\ x \mapsto y, \qquad \text{resp.}\ \ y = f(x), \qquad \text{resp.}\ \ y = f(x)\colon\ D(f) \to B.$$

Ak $D(f) = A$, t. j. ku každému $x \in A$ existuje $y \in B$, potom f nazývame **zobrazenie zobrazujúce množinu A do množiny B** a značíme $y = f(x)\colon\ A \to B$, resp. $f\colon\ A \to B$.

Nech $C \subset D(f)$, potom množinu $f(C) = \{f(x);\ x \in C\}$ nazývame **obraz množiny C v zobrazení f**.

Poznámka 1.3.1.
Ak definičný obor nie je zadaný, potom pod $D(f)$ rozumieme množinu všetkých x, pre ktoré existuje $y = f(x)$ (t. j. maximálnu možnú množinu vzorov).
Obor hodnôt funkcie f je množina $H(f) = \{f(x);\ x \in D(f)\}$, takže zápisom $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je zároveň určený aj obor hodnôt $H(f)$. To znamená, že zápis $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a zápis $y = f(x)\colon\ D(f) \to H(f)$ sú ekvivalentné.

Príklad 1.3.2.
a) Relácia $f = \big\{[x;y] \in R^2;\ \sin y = x\big\}$ nie je zobrazenie (funkcia), pretože vzor $x = 0$ má dva obrazy $y = 0$ a $y = \pi$, t. j. $[0;0] \in f$, $[0;\pi] \in f$.
b) Relácia $f = \big\{[x;y] \in R^2;\ x^2 + y^2 = -1\big\}$ je zobrazenie, pretože $f = \emptyset$ a $[x;y]$ s danými vlastnosťami neexistuje. T. j. každému vzoru je priradený najviac jeden obraz. ■

Hovoríme, že $f\colon\ A \to B$ je **injektívne zobrazenie** (**injekcia**, **prosté zobrazenie**), ak dvom rôznym vzorom z množiny A prislúchajú rôzne obrazy z množiny B, t. j. ak rovnaké obrazy majú rovnaké vzory (obrátená implikácia). Symbolicky to môžeme vyjadriť:

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \text{t. j.}\ \ \forall x_1, x_2 \in A\colon\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

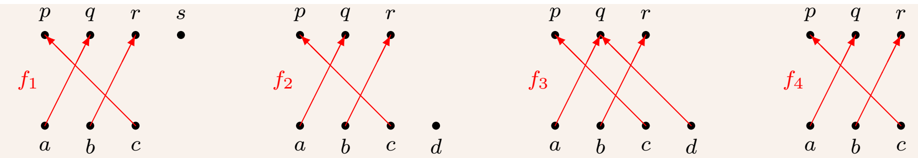
Hovoríme, že $f\colon\ A \to B$ je **surjektívne zobrazenie** (**surjekcia**, **zobrazenie na množinu B**), ak ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A, t. j. ak $f(A) = B$. To znamená, ak platí: $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$.

Hovoríme, že $f\colon\ A \to B$ je **bijektívne zobrazenie** (**bijekcia**, **jednojednoznačné zobrazenie**), ak je injektívne a zároveň surjektívne (prosté na množinu B), t. j. ak

$$\forall\,[x_1;y_1], [x_2;y_2] \in f\colon\ y_1 = y_2 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2, \qquad \forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ [x;y] \in f.$$

Je zrejmé, že ak je zobrazenie $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t. j. $f\colon\ D(f) \to H(f)$ injektívne, potom je zároveň aj surjektívne, t. j. je bijektívne.

Príklad 1.3.3.
Nech $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a, b, c, d\}$, $B_1 = \{p, q, r, s\}$, $B_2 = \{p, q, r\}$.
$f_1 = \{[a; q], [b; r], [c; p]\} : A_1 \to B_1$ je injekcia, ale nie je surjekcia (s nemá vzor).
$f_2 = \{[a; q], [b; r], [c; p]\} : A_2 \to B_2$ je surjekcia, ale nie je injekcia (d nemá obraz).
$f_3 = \{[a; q], [b; r], [c; p], [d; q]\} : A_2 \to B_2$ je surjekcia, ale nie je injekcia ($f_3(a) = f_3(d)$).
$f_4 = \{[a; q], [b; r], [c; p]\} : A_1 \to B_2$ je bijekcia, t. j. injekcia a surjekcia (obr. 1.3.2). ■



Obr. 1.3.2: Injekcia f_1, sujekcie f_2, f_3 a bijekcia f_4 z príkladu 1.3.3

Príklad 1.3.4.
Označme $f(x) = \sqrt{x}$, potom $f\colon \langle 0; \infty) \to \langle 0; \infty)$ je bijekcia.
$f\colon R \to R$ nie je injekcia ani surjekcia ($x = -1$ nemá obraz, $y = -1$ nemá vzor).
$f\colon \langle 0; 4\rangle \to \langle 0; 1\rangle$ nie je injekcia, je surjekcia ($x = 3$ nemá obraz).
$f\colon \langle 0; 2\rangle \to \langle 0; 4\rangle$ je injekcia, nie je surjekcia ($y = 3$ nemá vzor). ■

Zobrazenia sú množiny usporiadaných dvojíc, takže **ich rovnosť musíme chápať ako rovnosť množín.** Inými slovami $f = g$ práve vtedy, ak $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$. To znamená, že **zobrazenie f, $x \in D(f)$ sa rovná zobrazeniu g, $x \in D(g)$** práve vtedy, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Nech $M \subset D(f) \cap D(g)$, potom **zobrazenie f, $x \in D(f)$ sa rovná zobrazeniu g, $x \in D(g)$ na množine M** práve vtedy, ak pre všetky $x \in M$ platí $f(x) = g(x)$.

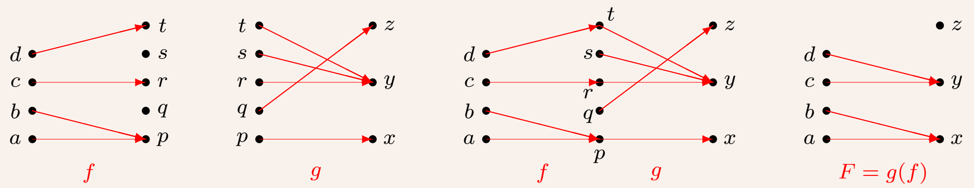
Príklad 1.3.5.
Nech $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|^2$, $h(x) = \frac{x^3}{x}$.
Platí $f = g$, $f \neq h$, pretože $D(f) = D(g) = R$, $D(h) = R - \{0\}$ a pre všetky $x \in R$: $x^2 = |x|^2$.
Na druhej strane $f = h$ na množine $D(h)$, pretože pre všetky $x \in D(h)$: $x^2 = \frac{x^3}{x}$. ■

Nech $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, pričom $H(f) \subset C$. Potom zobrazenie $F\colon A \to D$, ktoré každému $x \in A$ priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, nazývame **zložené zobrazenie** (**kompozícia**, resp. **zloženie**) **zobrazení f a g**. Zložené zobrazenie zapisujeme

$$F = g(f) = f \circ g, \quad \text{resp.} \quad F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x), \ x \in D(f).$$

Zobrazenie f nazývame **vnútorná zložka** a g **vonkajšia zložka** zobrazenia $g(f)$.

Príklad 1.3.6.
Nech $g = \{[p; x], [q; z], [r; y], [s; y], [t; y]\}$, $f = \{[a; p], [b; p], [c; r], [d; t]\}$. $\Rightarrow$
$F(a) = g[f(a)] = g(p) = x$, $F(b) = g[f(b)] = g(p) = x$, $F(c) = g[f(c)] = g(r) = y$,
$F(d) = g[f(d)] = g(t) = y \ \Rightarrow \ F = g[f] = \{[a; x], [b; x], [c; y], [d; y]\}$ (obr. 1.3.3). ■



Obr. 1.3.3: Zložené zobrazenie $F = g(f)$ z príkladu 1.3.6

Príklad 1.3.7.
Ak $f(x)=x^3\colon R \to R$, $g(x)=\sin x\colon R \to \langle -1;1\rangle$, potom
$f[g(x)] = [g(x)]^3 = \sin^3 x\colon\ R \to \langle -1;1\rangle$, $g[f(x)] = \sin f(x) = \sin x^3\colon\ R \to \langle -1;1\rangle$. ■

Veta 1.3.4.
$f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ sú bijekcie $\implies$ $F=g[f]\colon A \to C$ je bijekcia.

Dôkaz.
f, g sú injekcie: $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2) \Rightarrow z_1 = g(y_1) \neq z_2 = g(y_2) \Rightarrow$
$g(y_1) = g[f(x_1)] = F(x_1) \neq g(y_2) = g[f(x_2)] = F(x_2)$ $\Rightarrow$ F je injekcia.
g, f sú surjekcie: $\forall z \in C\ \exists y \in B\colon\ z = g(y)$, $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\forall z \in C\ \exists x \in A\colon\ z = g(y) = g[f(x)] = F(x)$ $\Rightarrow$ F je surjekcia. ■

Identickým zobrazením (**identitou**) nazývame zobrazenie $f(x) = x$, $x \in D(f)$. Je zrejmé, že identita je injektívna a zároveň surjektívna, t. j. bijektívna.

Ak je $y = f(x)\colon A \to B$ bijektívne, potom existuje zobrazenie $x = f^{-1}(y)\colon B \to A$ také, že platí $[x;y] \in f \Leftrightarrow [y;x] \in f^{-1}$. Zobrazenie f^{-1} nazývame **inverzným k zobrazeniu** f.

Príklad 1.3.8.
a) Ak $f(x) = 2x+3\colon R \to R$, potom $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}\colon R \to R$, pretože platí:
$$[x;y] = [x;2x+3] \in f \ \Leftrightarrow\ [y;x] = [2x+3;x] = \left[y;\tfrac{y-3}{2}\right] \in f^{-1}.$$
b) Ak $f(x) = \operatorname{cotg} x\colon\ (0;\pi) \to R$, potom $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x\colon R \to (0;\pi)$.

c) Ak $f(x) = x\colon R \to R$, potom $f^{-1}(x) = x\colon R \to R$, pretože $[x;x] \in f \Leftrightarrow [x;x] \in f^{-1}$. ■

Veta 1.3.5.
$f\colon\ A \to B$ je bijekcia $\implies$ a) $f^{-1}\colon\ B \to A$ je bijekcia, b) $(f^{-1})^{-1} = f$,
c) $\forall y \in B\colon\ f[f^{-1}(y)] = y$, d) $\forall x \in A\colon\ f^{-1}[f(x)] = x$.

Dôkaz.
a) Vyplýva z definície.

b) $f\colon\ A \to B$, $f^{-1}\colon\ B \to A$ sú bijekcie, $x \in A$, $y \in B$ $\Rightarrow$
$[x;y] \in f \Leftrightarrow [y;x] \in f^{-1}$, $[y;x] \in f^{-1} \Leftrightarrow [x;y] \in (f^{-1})^{-1}$ $\Rightarrow$ $f = (f^{-1})^{-1}$.

c) $y \in B \Rightarrow \exists x \in A\colon\ y = f(x)$, $x = f^{-1}(y) \Rightarrow [x;y] = \left[f^{-1}(y);y\right] \in f \Rightarrow y = f[f^{-1}(y)]$.

d) $x \in A \Rightarrow \exists y \in B\colon\ y = f(x)$, $x = f^{-1}(y) \Rightarrow [y;x] = [f(x);x] \in f^{-1} \Rightarrow x = f^{-1}[f(x)]$. ■

Postupnosťou nazývame ľubovoľné zobrazenie f s definičným oborom N, t. j.

$$f = \{[n; f(n)]\,;\, n\in N\} = \{[1; f(1)]\,,\, [2; f(2)]\,,\, [3; f(3)]\,,\, \ldots,\, [n; f(n)]\,,\, \ldots\}\,.$$

Pre jednoduchosť označíme $f(n)=a_n$, $n\in N$ a postupnosť f budeme zapisovať

$$f = \{f(1),\, f(2),\, f(3),\, \ldots,\, f(n),\, \ldots\} = \{a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

kde a_n, $n\in N$ nazývame[8] **členy postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Obor hodnôt $H(f)$, t. j. množinu hodnôt, ktoré nadobúdajú a_n, nazývame **množina hodnôt postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1.3.3 Mohutnosť množín

Hovoríme, že **množina A je ekvivalentná s množinou B**, ozn. $A \sim B$, ak existuje bijekcia $f\colon\ A \to B$. Ak množiny A a B nie sú ekvivalentné, potom píšeme $A \not\sim B$.

Ak $A \sim B$, potom tiež hovoríme, že **množiny A a B majú rovnakú mohutnosť**. Ak existuje injekcia, ale neexistuje bijekcia (t. j. surjekcia) $A \to B$, hovoríme, že **množina A má menšiu mohutnosť ako množina B**, resp. **B má väčšiu mohutnosť ako A**.

Príklad 1.3.9.
a) $\{1,2,3\}\sim\{a,b,c\}$, pretože zobrazenie $\{[1;a]\,,[2;b]\,,[3;c]\}$ je bijekcia.

b) $N \sim Z$, pretože zobrazenie $f\colon\ N \to Z$ definované vzťahom $f(n) = \frac{n}{2}$ pre n párne a vzťahom $f(n) = \frac{1-n}{2}$ pre n nepárne je bijekcia.

c) $N \not\sim R$, pretože neexistuje bijekcia $N \to R$ (N má menšiu mohutnosť ako R).

d) $(-\pi;\pi) \sim R$, pretože zobrazenie $f(x)=2\operatorname{tg} x\colon\ (-\pi;\pi) \to R$ je bijekcia. ∎

Množina A sa nazýva **nekonečne spočítateľná**, ak je ekvivalentná s množinou prirodzených čísel, t. j. ak $A \sim N$. Ak je A nekonečne spočítateľná alebo konečná, nazývame ju **spočítateľná**. Ak A nie je spočítateľná, nazývame ju **nespočítateľná**.

Poznámka 1.3.2.
Množina môže byť konečná, nekonečná, spočítateľná alebo nespočítateľná (tab. 1.3.4). Množina A je konečná práve vtedy, ak je prázdna (t. j. $A=\emptyset$) alebo je konečne spočítateľná (t. j. $A \sim \{1,\, 2,\, \ldots, n\}$, kde $n\in N$). Keď nie je konečná, potom je nekonečne spočítateľná (t. j. $A \sim N=\{1,\, 2,\, 3,\, \ldots\}$) alebo je nespočítateľná.

Veta 1.3.6.
Množiny A, B sú spočítateľné $\implies$ $A\cup B$, $A\times B$, $C\subset A$ sú spočítateľné.

Príklad 1.3.10.
a) Množina celých čísel Z je spočítateľná (príklad 1.3.9).

b) Množina párnych prirodzených čísel $\{2n;\ n\in N\}$ je spočítateľná, t. j. $\{2n;\ n\in N\} \sim N$.

c) Množina hodnôt ľubovoľnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konečná alebo konečne spočítateľná.

d) Množiny $N^2 = \{[n_1;n_2]\,;\, n_1, n_2\in N\}$ a $Q = \left\{\frac{m}{n};\ m\in Z, n\in N\right\}$ sú spočítateľné.

e) Nespočítateľné sú napríklad $(a;b)$, $\langle a;b)$, $(a;b\rangle$, $\langle a;b\rangle$ pre $a < b$, R, R^3, $I=R-Q$. ∎

[8]Každý člen a_n, $n\in N$ predstavuje usporiadanú dvojicu $[n;a_n]$, t. j. vzor a_n je určený jeho poradím.

$$\text{množina}\begin{cases}\text{konečná}\begin{cases}\text{prázdna}\\ \text{konečne spočítateľná}\end{cases}\\ \text{nekonečná}\begin{cases}\text{nekonečne spočítateľná}\\ \text{nespočítateľná}\end{cases}\end{cases}$$

(prázdna, konečne spočítateľná, nekonečne spočítateľná → spočítateľná; spočítateľná, nespočítateľná → množina)

Tabuľka 1.3.4: Konečná, nekonečná, spočítateľná, nespočítateľná množina

Cvičenia

1.3.1. Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $A, B, C \subset X$ platí:

a) $[(A \cap C) - B] \cup [(A \triangle B) - C] = \{[A \triangle B] \cup [C \cap (A - B)]\} - [B \cap (C - A)]$,
b) $[(A \cap C) - B] \cup [(A \triangle B) - C] \subset (A - B) \cup (A \cup C)'$.

1.3.2. Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nájdite potenčné množiny 2^A a 2^B. ♣

1.3.3. Nech $n \in N$ a nech $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koľko prvkov a koľko podmnožín majú množiny A_n, A_n^2, A_n^3, $\ldots$, A_n^k, kde $k \in N$? ♣

1.3.4. Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C \subset X$. Ktoré z uvedených vzťahov sú pravdivé: ♣

a) $A \subset (A \cap B)$, b) $A \subset (A \cup B)$, c) $(A - B) \subset A$,
d) $(A - B) \subset B$, e) $(A - B) \cup B = B$, f) $(A - B) \cap B = B$,
g) $(A - B) \cup A = A$, h) $(A - B) \cap A = A$, i) $(A - B) \cup B = A$,
j) $(A - B) \cap B = A$, k) $(A - B) \cap A = B$, l) $(A - B) \cap B = \emptyset$.

1.3.5. Nech $X \neq \emptyset$ a nech pre množiny $A, B, C, D \subset X$ platia vzťahy $A \cup B' \subset C$, $(A \cap B)' \cup D = A' \cup B$. Zistite, aké sú vzťahy medzi množinami $A' \cup C$, $B \cup (D - A)'$, $D \triangle (A \cap C)$, $(D - B)'$ navzájom (rovnosť, podmnožina) a ich vzťah k množine X.

1.3.6. Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x, y, z\}$. Napíšte všetky prvky množín $A \times B$, $A \times C$, $A \times B \times C$.

1.3.7. Nech $A = \{x \colon x \in N, x < 11\}$ a nech $A_2, A_3, A_5 \subset A$ sú také, že A_2 obsahuje všetky párne čísla, A_3 obsahuje všetky čísla deliteľné tromi a A_5 obsahuje všetky čísla deliteľné piatimi. Určte a graficky znázornite nasledujúce množiny: ♣

a) $A_2 - A_3$, $A_2 - A_5$, $A_3 - A_5$, b) $A_3 - A_2$, $A_5 - A_2$, $A_5 - A_3$,
c) $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cup A_5$, $A_3 \cup A_5$, d) $A_2 \cap A_3$, $A_2 \cap A_5$, $A_3 \cap A_5$,
e) $A_2 \cap A_3 \cap A_5$, $A_2 \cup A_3 \cup A_5$, f) $A_2 \triangle A_3$, $A_2 \triangle A_5$, $A_3 \triangle A_5$,
g) $(A_2 \cap A_3) \cup A_5$, $(A_2 \cup A_3) \cap A_5$, h) $(A_2 \cap A_5) \cup A_3$, $(A_2 \cup A_5) \cap A_3$,
i) $(A_3 \cap A_5) \cup A_2$, $(A_3 \cup A_5) \cap A_2$, j) $(A_3 - A_5) \cup A_2$, $(A_3 - A_5) \cap A_2$.

1.3.8. Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre všetky $A, B, C, D \subset X$ platí:

a) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$, b) $A \subset (A \cup B)$, $(A \cap B) \subset A$,
c) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A - B = \emptyset$, d) $A \subset C, B \subset D \;\Rightarrow\; (A \cup B) \subset (C \cup D)$,
e) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$, f) $A \subset C, B \subset D \;\Rightarrow\; (A \cap B) \subset (C \cap D)$.

1.3.9. Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C, D \subset X$. Zistite, ktoré z rovností sú pravdivé: ♣

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

1.3.10. Uvažujme množiny $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$. Rozhodnite, či množiny: ♣

a) $f_1 = \{[1; 1], [1; 3], [3; 1]\}$,
b) $f_2 = \{[2; 3], [3; 2], [1; 7], [7; 9]\}$,
c) $f_3 = \{[1; 1], [3; 3], [7; 7], [7; 9]\}$,
d) $f_4 = \{[1; 1], [1; 3], [1; 7], [1; 9]\}$

sú reláciami medzi A a B, resp. B a A. Zistite, v ktorých prípadoch sú zobrazením.

1.3.11. Nech je daná množina $A = \{a, b, c, d, e\}$. Definujte reláciu $f \in A^2$ tak, aby bola: ♣

a) reflexívna, symetrická, tranzitívna,
b) reflexívna, symetrická, nie tranzitívna,
c) reflexívna, tranzitívna, nie symetrická,
d) symetrická, tranzitívna, nie reflexívna.

1.3.12. Rozhodnite, ktoré z množín sú spočítateľné a ktoré nespočíateľné: ♣

a) $(0; 1) \cap Q$, b) $(0; 1) \cap I$, c) $\langle 0; 1\rangle \times \{0, 1\}$, d) $\langle 0; 1\rangle \times Q$.

„Tati, bila tě někdy tvoje maminka?“ „Ne, jenom tvoje.“
úryvok z filmu SLUNCE, SENO A PÁR FACEK

Ach milí priatelia, priatelia neexistujú!
ARISTOTELES

„Múdrejší ustúpi!“ — Smutná pravda, zdôvodňuje nadvládu hlúposti nad svetom.
MARIE von EBNER–ESCHENBACHOVÁ

Nerád sa miešam do svojich súkromných záležitostí.
KARL KRAUS

Vyhľadávanie ľudských chýb je jediná zábava, z ktorej sa možno tešiť zadarmo.
MAXIM GORKIJ

Škola rozvíja všetky vlohy, vrátane hlúposti.
ANTON PAVLOVIČ ČECHOV

Aj tie najkrajšie nohy niekde končia.
JULIUS TUWIM

Mám rád prácu, priam ma fascinuje. Celé hodiny sa vydržím na ňu dívať.
JEROME K. JEROME

Niektoré charaktery sú nezlomné, pretože sú pružné.
STANISŁAV JERZY LEC

Čakal som to, ale nie tak skoro!
NÁHROBNÝ NÁPIS

Kapitola 2

Reálne čísla

2.1 Algebraické vlastnosti reálnych čísel

Ak hovoríme o množine reálnych čísel, nemyslíme tým iba čísla, ale aj ich porovnávanie a operácie na nich definované (sčítanie, odčítanie, násobenie).

Nech A je neprázdna množina. Zobrazenie, ktoré každej usporiadanej dvojici $[a;b]\in A^2$ priradí ďalší prvok z A nazývame **binárna operácia** (**definovaná**) **na množine** A. Výsledok binárnej operácie φ označujeme $\varphi(a,b)$, resp. $a\varphi b$. V praxi sa mnohé binárne operácie označujú špeciálnymi symbolmi, napr. $+$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $\wedge$ a podobne.[1]

Príklad 2.1.1.
Nech $X\neq\emptyset$ a nech $2^X = \{A;\ A\subset X\}$. Symboly $\cup$, $\cap$, $-$, $\triangle$ predstavujú binárne operácie $2^X\times 2^X \to 2^X$. Doplnok množiny je unárna operácia $2^X \to 2^X$. ∎

Jedným zo základných pojmov, s ktorým sa stále stretávame, je **číslo**. Pojem čísla je intuitívne jasný asi každému človeku. Medzi najvšeobecnejšie číselné množiny patrí **množina komplexných čísel** C, ktorá obsahuje tzv. **imaginárnu jednotku** i s vlastnosťou $\mathrm{i}^2 = -1$. Najdôležitejšou číselnou množinou je jej podmnožina, ktorú nazývame **množina reálnych čísel** a označujeme R. Množinu reálnych čísel definujeme ako celok s reláciami, operáciami a ich vlastnosťami. Zadávame ich pomocou tzv. **axióm reálnych čísel**. Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom **číslo** rozumieť číslo reálne.

Základným vzťahom medzi číslami je **rovnosť** „=“. Hovoríme, že **číslo** a **sa rovná číslu** b (**čísla** a, b **sa rovnajú**), ozn. $a=b$, ak výrazy a, b vyjadrujú to isté číslo. V opačnom prípade hovoríme, že **číslo** a **sa nerovná číslu** b (**čísla** a, b **sa nerovnajú**) a zapisujeme $a\neq b$. Rovnosť je reláciou ekvivalencie na R, t. j. pre všetky $a,b,c\in R$ platí:

$$a=a, \qquad a=b \;\Leftrightarrow\; b=a, \qquad (a=b\wedge b=c) \;\Rightarrow\; a=c.$$

Sčítanie „+“ je binárna operácia, ktorá číslam a, b (**sčítancom**) priradí číslo $a+b$, tzv. **súčet čísel** a **a** b. **Násobenie** „·“ je binárna operácia, ktorá číslam a, b (**činiteľom**)

[1] $\varphi\colon A^n \to A$, $n\in N$ nazývame n**-nárna operácia** Ak $n=1$, potom hovoríme o **unárnej operácii**.

priradí číslo $a\cdot b = ab$, tzv. **súčin čísel a a b**. Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

(S_1)	$a + b = b + a,$	(N_1)	$a \cdot b = b \cdot a,$
(S_2)	$(a + b) + c = a + (b + c),$	(N_2)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$
(S_3)	$\exists!\, 0 \in R\ \forall a \in R\colon\ a = a + 0,$	(N_3)	$\exists!\, 1 \in R\ \forall a \in R\colon\ a = a \cdot 1,$
(S_4)	$\forall a \in R\ \exists!\, x \in R\colon\ 0 = a + x,$	(N_4)	$\forall a \in R, a \neq 0\ \exists!\, y \in R\colon\ 1 = a \cdot y,$
(D)	$(a + b)c = (ac) + (bc) = ac + bc.$		

Axiómy (S_1) a (N_1) nazývame **komutatívny zákon**, (S_2) a (N_2) nazývame **asociatívny zákon**. Číslo 0 nazývame **nula** (**nulový prvok**), x nazývame **opačné číslo k číslu a** a značíme $x = -a$. Číslo 1 nazývame **jednotka** (**jednotkový prvok**), y nazývame **inverzné** (**obrátené**) **číslo k číslu a** a značíme $a^{-1} = 1/a = \frac{1}{a}$. Axiómu (D) nazývame **distributívny zákon násobenia vzhľadom na sčítanie**.

Odčítanie „$-$“ je binárna operácia, ktorá číslam a (**menšenec**), b (**menšiteľ**) priradí $x \in R$ také, že $b + x = a$. Číslo $x = a + (-b) = a - b$ nazývame **rozdiel čísel a a b**. **Delenie** „/“ je binárna operácia, ktorá číslam a (**delenec**), $b \neq 0$ (**deliteľ**) priradí $y \in R$ také, že $by = a$. Výsledok $y = ab^{-1} = a : b = a/b = \frac{a}{b}$ nazývame **podiel čísel a a b**, resp. **zlomok s čitateľom a a menovateľom b**. Nech $a, b, c, d \in R$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, potom platí:[2]

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \Leftrightarrow\ ad = bc, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Reálne čísla môžeme porovnávať a usporiadať podľa veľkosti pomocou relácie usporiadania **menší** „$<$“, resp. **väčší** „$>$“. Výrazy $a < b$ (**a je menšie ako b**), $b > a$ (**b je väčšie ako a**) sú ekvivalentné. Nech $a, b, c \in R$, potom platí:

(U_1)	Platí práve jeden zo vzťahov $a < b,\ \ a = b,\ \ b < a,$		
(U_2)	$(a < b \wedge b < c) \ \Rightarrow\ a < c,$	(U_3)	$a \not< a$, t. j. neplatí $a < a$,
(U_4)	$a < b \ \Rightarrow\ a + c < b + c,$	(U_5)	$(a < b \wedge 0 < c) \ \Rightarrow\ ac < bc.$

Ak binárna relácia T definovaná na $A \neq \emptyset$ spĺňa (U_1), (U_2), (U_3), potom ju nazývame **usporiadanie** a množinu A **usporiadaná**. Je zrejmé, že R, N, Z, Q sú usporiadané.

Ak platí $a = b$ alebo $a < b$, resp. $a > b$, potom stručne píšeme $a \leq b$ (**a je menšie alebo rovné b**), resp. $a \geq b$ (**a je väčšie alebo rovné b**). Tieto nerovnosti nazývame **neostré**. Nerovnosti $<$, $>$ nazývame **ostré**.

Reálne číslo $x > 0$ sa nazýva **kladné**, $x \geq 0$ sa nazýva **nezáporné**, $x < 0$ **záporné** a $x \leq 0$ **nekladné**. Číslo 0 je nezáporné a nekladné. Špeciálne označujeme

$$R^+ = \{x \in R;\ x > 0\}, \quad R^- = \{x \in R;\ x < 0\}, \quad R_0^+ = \{x \in R;\ x \geq 0\}, \quad R_0^- = \{x \in R;\ x \leq 0\}.$$

Nech $A \subset R$. Ak pre všetky $x \in A$ platí $x \leq a$ [resp. $b \leq x$], potom číslo $a \in R$ [resp. $b \in R$] nazývame **horné** [resp. **dolné**] **ohraničenie množiny A**. Množinu A nazývame **zhora** [resp. **zdola**] **ohraničená**. Ak je A ohraničená zdola a aj zhora, potom sa nazýva **ohraničená**. Ak množina A nie je ohraničená zhora [resp. zdola], nazýva sa **neohraničená zhora** [resp. **neohraničená zdola**]. Ak A nie je ohraničená, t. j. nie je ohraničená zhora alebo nie je ohraničená zdola, nazýva sa **neohraničená**.

[2] Rovnosť dvoch zlomkov, resp. **úprava dvoch zlomkov na spoločného menovateľa**.

Nech $A \subset R$. Ak $a \in R$ je horné [resp. dolné] ohraničenie množiny A a zároveň $a \in A$, potom a nazývame **najväčší prvok** (**maximum**) [resp. **najmenší prvok** (**minimum**)] **množiny** A a označujeme $a = \max A$ [resp. $a = \min A$].

Najmenšie z horných ohraničení nazývame **suprémum** a najväčšie z dolných ohraničení nazývame **infimum množiny** A, označujeme $\sup A$ a $\inf A$. Potom platí:[3]

$$\alpha = \sup A \iff \text{i) } \forall x \in A\colon\ x \leq \alpha, \quad \text{ii) } \forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon\ x \leq b) \Rightarrow \alpha \leq b,$$
$$\beta = \inf A \iff \text{i) } \forall x \in A\colon\ \beta \leq x, \quad \text{ii) } \forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon\ b \leq x) \Rightarrow b \leq \beta.$$

Jednou zo základných axióm je **axióma o najmenšom hornom ohraničení**: „*Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má suprémum patriace do R.*“, t. j.

$$\forall A \subset R, A \neq \emptyset\colon\ (\exists a \in R\ \forall x \in A\colon\ x \leq a) \implies \exists\ \alpha = \sup A \in R. \tag{AH}$$

2.1.1 Číselné množiny

Čísla $1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 2+1,\ 4 = 3+1,\ \ldots,\ n = (n-1)+1,\ \ldots$ nazývame **prirodzené**. **Množinu všetkých prirodzených čísel** označujeme N. Symbolicky ju môžeme vyjadriť

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots\}.$$

Celými číslami nazývame čísla, ktoré sa dajú zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel. **Množinu všetkých celých čísel** označujeme Z. Do množiny Z patria všetky prirodzené čísla, všetky čísla k nim opačné a číslo 0. To znamená, že platí:[4]

$$Z = \{m-n;\ m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}.$$

V množine Z nie je vo všeobecnosti definovaný podiel čísel. Každé číslo, ktoré sa dá vyjadriť ako m/n, kde $m \in Z$, $n \in N$ sa nazýva **racionálne číslo**. **Množinu všetkých racionálnych čísel** označujeme Q. Čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame **iracionálne** (napr. $\sqrt{2}$, e, π). **Množinu všetkých iracionálnych čísel** označujeme I. Platí:

$$Q = \left\{\tfrac{m}{n};\ m, n \in Z,\ n \neq 0\right\} = \left\{\tfrac{m}{n};\ m \in Z,\ n \in N\right\}, \qquad I = R - Q.$$

Je zrejmé, že súčin a podiel dvoch racionálnych čísel (s nenulovým menovateľom) je opäť racionálne číslo. Racionálne číslo môže mať viacero rôznych vyjadrení, napr.:

$$0{,}5 = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2} = \tfrac{0{,}7}{1{,}4} \quad \text{a v konečnom dôsledku aj } \tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

Na druhej strane súčin a podiel dvoch iracionálnych čísel môže byť rôzny:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2 \in Q, \quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6} \in I, \quad \tfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2 \in Q, \quad \tfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \in I.$$

Príklad 2.1.2.
Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Riešenie.
Sporom. $\sqrt{2} \in Q \ \Rightarrow\ \sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in N$ sú nesúdeliteľné $\ \Rightarrow\ 2 = \frac{m^2}{n^2} \ \Rightarrow\ 2n^2 = m^2 \ \Rightarrow$
$2 \mid m \ \Rightarrow\ m = 2k,\ k \in N \ \Rightarrow\ 2n^2 = m^2 = 4k^2 \ \Rightarrow\ n^2 = 2k^2 \ \Rightarrow\ 2 \mid n \ \Rightarrow$
$2 \mid m$ a $2 \mid n \ \Rightarrow\ m, n$ sú súdeliteľné číslom 2 (spor) $\ \Rightarrow\ \sqrt{2} \notin Q$. ■

[3]Pre sup: i) α je horné ohraničenie, ii) každé iné horné ohraničenie b je väčšie ako α, t. j. α je najmenšie.
[4]Symbol $\pm n$ vyjadruje číslo n a zároveň opačné číslo $-n$. V praxi sa používa tiež symbol $\mp n$.

Príklad 2.1.3.
Množina N je zdola ohraničená a zhora neohraničená, t. j. nie je ohraničená.
Množina Z je zhora aj zdola neohraničená. ■

Veta 2.1.1.
$A \subset R,\ A \neq \emptyset \implies \min A = \inf A,\ \max A = \sup A$ (pokiaľ min, resp. max existujú).

Dôkaz.
Dokážeme pre max, pre min je dôkaz analogický. Z definície supréma vyplýva:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) sup: } \max A \in A \ \Rightarrow\ \max A \leq \sup A \\ \text{ii) sup: } \max A \text{ je horné ohraničenie } A \ \Rightarrow\ \sup A \leq \max A \end{array}\right\} \Rightarrow\ \max A = \sup A. ■$$

Aj keď je množina reálnych čísel R nekonečná, všetky jej prvky sú konečné, pretože pod pojmom číslo rozumieme **konečné číslo**. To znamená, že počet prvkov množiny R nemôžeme vyjadriť číslom. Preto má zmysel rozšíriť množinu R o prvky **mínus nekonečno** a (**plus**) **nekonečno**, ktoré označujeme symbolmi $-\infty$ a ∞. Túto množinu nazývame **rozšírená množina reálnych čísel** a značíme $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Operácie a relácie, definované na R, môžeme čiastočne rozšíriť aj na množinu R^*. Pre všetky $a \in R$ platí $-\infty < a < \infty$. Pre všetky $a, b \in R$, $b > 0$ definujeme výrazy:

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad a \pm \infty = \pm\infty, \quad \pm\infty \cdot \infty = \pm\infty, \quad -\infty \cdot (-\infty) = \infty,$$
$$\pm b \cdot \infty = \pm\infty, \quad \pm b \cdot (-\infty) = \mp\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{\pm b} = \pm\infty, \quad \frac{-\infty}{\pm b} = \mp\infty.$$

Nedefinujeme výrazy (nazývajú sa **neurčité** a bližšie sa im venujeme na strane 105):

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\infty}, \quad \frac{\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{a}{0}.$$

Z definície infima a supréma je zrejmé, že každá množina $A \subset R$ môže mať najviac jedno infimum a najviac jedno suprémum. Ak je množina A zhora ohraničená, potom na základe axiómy (AH) platí $\sup A \in R$. V opačnom prípade definujeme $\sup A = \infty$.

Analogicky ak je množina A zdola ohraničená, potom $\inf A \in R$ a v opačnom prípade pre množinu A neohraničenú zdola definujeme $\inf A = -\infty$.

Nech $A \subset R$, $c \in R$, potom označme symbolmi $-A$, cA množiny:

$$-A = \{-x;\ x \in A\} = \{x;\ -x \in A\}, \qquad cA = \{cx;\ x \in A\}.$$

Veta 2.1.2.
Ak $A \subset R$, potom platí: $\alpha = \sup A \Leftrightarrow -\alpha = \inf(-A)$, $\beta = \inf A \Leftrightarrow -\beta = \sup(-A)$.

Veta 2.1.3.
$A \subset B \subset R,\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset \implies \inf B \leq \inf A,\ \sup A \leq \sup B$.

Dôkazy predchádzajúcich viet vyplývajú z definície infima a supréma. ■

Intervaly a ich zjednotenia sú najčastejšími množinami, s ktorými pracujeme.

Nech $a, b \in R$, $a < b$, potom **ohraničenými intervalmi s krajnými bodmi** a **a** b (**ľavým** a, **pravým** b) nazývame nasledujúce množiny:

$\langle a; b\rangle = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$ **uzavretý interval**,

$\langle a; b) = \{x \in R;\ a \leq x < b\}$ **zľava uzavretý a sprava otvorený interval**,

$(a;b\rangle = \{x\in R;\ a < x \le b\}$ **zľava otvorený a sprava uzavretý interval**,[5]

$(a;b) = \{x\in R;\ a < x < b\}$ **otvorený interval**.

Ak I je ohraničený interval, potom **dĺžkou intervalu** I nazývame číslo $d_I = b - a$.

Nech $a\in R$. **Neohraničenými intervalmi** nazývame množiny:

$(-\infty;a\rangle = \{x\in R;\ x \le a\}$, $\langle a;\infty) = \{x\in R;\ a \le x\}$,
$(-\infty;a) = \{x\in R;\ x < a\}$, $(a;\infty) = \{x\in R;\ a < x\}$.

Množinu R zvykneme zapisovať ako neohraničený interval $(-\infty;\infty) = \{x\in R\} = R$.

Všetky predchádzajúce intervaly nazývame **nedegenerované**. Pokiaľ nebude povedané ináč, budeme pod pojmom interval rozumieť nedegenerovaný interval.

Ak $a = b$, potom intervaly nazývame **degenerované**. Sú to intervaly:

$$\langle a;a\rangle = \{x\in R;\ a \le x \le a\} = \{a\}\,, \qquad (a;a) = \{x\in R;\ a < x < a\} = \emptyset.$$

Usporiadaná množina $M \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**, ak pre všetky prvky $a, b\in M$, $a < b$ existuje prvok $c\in M$ taký, že $a < c < b$.

Je zrejmé, že R je husto usporiadaná. Pre každé $a, b\in R$ stačí položiť $c = (a+b)/2$.

Množina racionálnych čísel Q je tiež husto usporiadaná. Lenže medzi dvomi racionálnymi číslami existujú medzery, ktoré vypĺňajú iracionálne čísla.

Množina $A \subset R$ sa nazýva **súvislá**, ak pre všetky $a, b\in A$, $a < b$, platí $\langle a;b\rangle \subset A$.

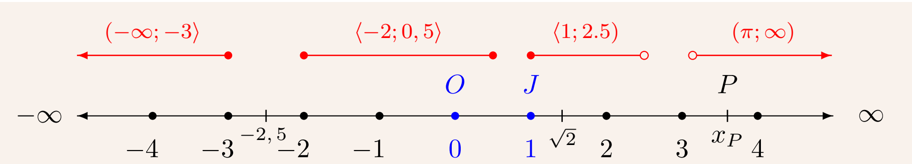
Z definície vyplýva, že každý interval v množine R je súvislá množina. Množiny N, Z, Q, I a ľubovoľné ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.

Veta 2.1.4 (Princíp súvislosti).
$A \subset R$ je súvislá množina, A obsahuje aspoň dva rôzne body $\implies$ A je interval.

Dôkaz.
Sporom. A je súvislá, existujú $a\neq b$, $a, b\in A$, A nie je interval $\xRightarrow{A\text{ nie je interval}}$

$$\text{existuje } c\in\langle a;b\rangle,\ c\notin A \xRightarrow{A\text{ je súvislá}} \langle a;b\rangle \subset A \;\Rightarrow\; c\in\langle a;b\rangle \subset A \;\Rightarrow\; c\in A \text{ (spor).} \blacksquare$$

Množinu R môžeme reprezentovať priamkou. Zvoľme v rovine priamku p a na nej dva body O, J tak, aby vzdialenosť $|OJ| = 1$. Ak bod P leží na polpriamke OJ, potom mu priradíme číslo $x_P = |OP|$. V opačnom prípade mu priradíme číslo $x_P = -|OP|$. Je zrejmé, že $x_O = 0$ a $x_J = 1$. Priamku p nazývame **reálna číselná os**, bod O **nulový bod** a bod J **jednotkový bod** (obr. 2.1.1).

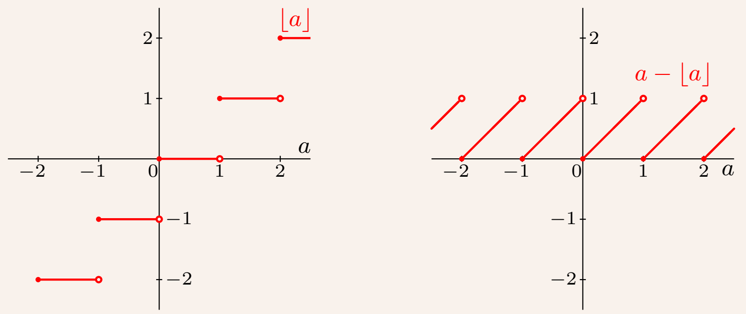


Obr. 2.1.1: Reálna číselná os

[5] Intervaly $\langle a;b)$ a $(a;b\rangle$ stručne nazývame **polouzavreté**, resp. **polootvorené**.

Veta 2.1.5 (Archimedova vlastnosť reálnych čísel).
$a \in R$, $x \in R$, $x > 0 \implies$ existuje $k \in Z$ také, že: $kx \leq a < (k+1)x$.

Archimedova vlastnosť je dôležitým dôsledkom axiómy (AH). Špeciálne pre $x = 1$ dostaneme $k \leq a < k+1$. Číslo k nazývame (**dolná**) **celá časť čísla**[6] a a označujeme $\lfloor a \rfloor$, resp. $[a]$, resp. Int a. Rozdiel $a - \lfloor a \rfloor$ nazývame **lomená časť čísla** $a \in R$ (viď obr. 2.1.2).



Obr. 2.1.2: Celá a lomená časť čísla a

Veta 2.1.6.
$a \in R$, $a > 0 \implies$ existuje $n \in N$ také, že $\frac{1}{n} < a$.

Dôkaz.
$a > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > 0 \xRightarrow{\text{veta 2.1.5}} \exists n \in N\colon\ n-1 \leq \frac{1}{a} < n \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < a.$ ■

Veta 2.1.7.
$a, b \in R$, $a < b \implies$ existujú $s \in Q$, $v \in I$ také, že $s \in (a;b)$, $v \in (a;b)$.

Dôkaz.
$a < b \;\Rightarrow\; 0 < b - a \;\Rightarrow\; \exists n \in N\colon\ \frac{1}{n} < b - a \;\Rightarrow\; \exists k \in Z\colon\ k \leq na < k+1 \;\Rightarrow$

$$\frac{k}{n} \leq a < \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b \;\Rightarrow\; s = \frac{k+1}{n} \in Q,\ s \in (a;b).$$

$a-\pi < b-\pi \;\Rightarrow\; \exists s_0 \in Q\colon\ a-\pi < s_0 < b-\pi \;\Rightarrow\; a < s_0+\pi < b$, $v = s_0+\pi \in I$, $v \in (a;b)$. ■

Veta 2.1.8.
$r \in R \implies \sup\{s;\ s \in Q,\ s \leq r\} = r$.

Príklad 2.1.4.
Pre množinu $A = \{x \in Q;\ x \leq \sqrt{2}\}$ platí $\sup A = \sqrt{2} \notin Q$.
To znamená, že axióma (AH) neplatí v množine racionálnych čísel Q. ■

Veta 2.1.9 (Cantorov princíp vložených intervalov).
Nech $\langle a_1; b_1 \rangle \supset \langle a_2; b_2 \rangle \supset \langle a_3; b_3 \rangle \supset \cdots \supset \langle a_{n+1}; b_{n+1} \rangle \supset \langle a_n; b_n \rangle \supset \cdots \implies$
existuje $c \in R$, ktoré leží vo všetkých intervaloch, t. j. $\exists c \in R\colon\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n; b_n \rangle$.
Ak navyše $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in N\colon\ b_n - a_n < \varepsilon \implies$ existuje také c iba jedno.

[6] Analogicky sa **hornou celou časťou čísla** a nazýva také celé číslo $l = \lceil a \rceil$, pre ktoré platí $l < a \leq l+1$.

Dôkaz.
Označme $A = \{a_n;\, n\in N\}$, $B = \{b_n;\, n\in N\}$ $\Rightarrow$

$$a_n \leq \sup A \leq \inf B \leq b_n,\quad n\in N \;\Rightarrow\; c\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n; b_n\rangle = \langle \sup A; \inf B\rangle.$$

Jednoznačnosť. Označme $d = \inf B - \sup A$, $D = \{d\}$, $R^+ = (0;\infty) = \{\varepsilon;\, \varepsilon > 0\}$ $\Rightarrow$

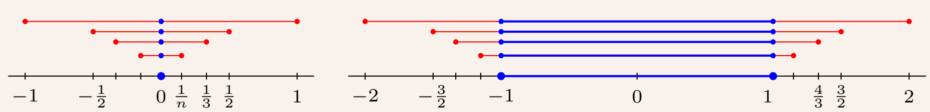
$$0 \leq d = \inf B - \sup A \leq b_n - a_n < \varepsilon \;\Rightarrow\; D \subset R^+ \xRightarrow{\text{veta 2.1.3}}$$

$$0 \leq d = \inf D \leq \inf R^+ = 0 \;\Rightarrow\; 0 = d = \inf B - \sup A \;\Rightarrow\; c = \inf B = \sup A. \blacksquare$$

Cantorov princíp vložených intervalov sa v matematike využíva často. Postupnosť intervalov sa spravidla konštruuje **metódou bisekcie**. Pri tejto metóde sa interval rozdelí na dva rovnaké podintervaly. Z nich sa vyberie vhodný interval a ten sa opäť rozdelí na dva rovnaké podintervaly. Tento postup sa opakuje až po požadovanú presnosť.

Príklad 2.1.5.
Dané postupnosti spĺňajú predpoklady vety 2.1.9 (obr. 2.1.3) a platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\langle -\tfrac{1}{n}; \tfrac{1}{n} \right\rangle = \{0\}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\langle -1-\tfrac{1}{n}; 1+\tfrac{1}{n} \right\rangle = \langle -1; 1\rangle. \blacksquare$$



Obr. 2.1.3: Obrázok k príkladu 2.1.5

Absolútnou hodnotou čísla $a\in R$ nazývame číslo $|a| = \max\{-a, a\} = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$

Priamo z definície (viď obr. 2.1.4) vyplýva:

$$|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \quad |-a| = |a|, \quad |ab| = |a|\cdot|b|, \quad \left|\frac{a}{c}\right| = \frac{|a|}{|c|}, \quad a, b, c\in R,\; c\neq 0.$$

Veta 2.1.10.
$a, b\in R \implies$ a) $|a+b| \leq |a| + |b|$, b) $|a| - |b| \leq |a+b|$.

Dôkaz.
a) Nerovnosť sa nazýva **trojuholníková**. Zo vzťahov $\pm a \leq |a|$, $\pm b \leq |b|$ vyplýva:

$$\left.\begin{aligned} a+b &\leq |a| + b \leq |a| + |b| \\ -a-b &\leq |a| - b \leq |a| + |b| \end{aligned}\right\} \Rightarrow\; |a+b| = \max\{a+b, -a-b\} \leq |a| + |b|.$$

b) Ak dosadíme do trojuholníkovej nerovnosti čísla $-b$, $a+b$, dostaneme:

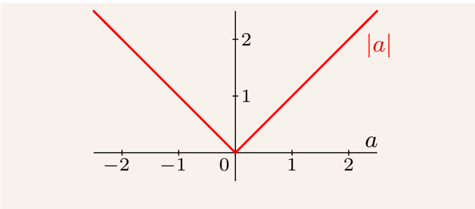
$$|-b + (a+b)| \leq |-b| + |a+b| \;\Leftrightarrow\; |a| \leq |b| + |a+b|, \quad \text{t. j. } |a| - |b| \leq |a+b|. \blacksquare$$

Priamo z definície vyplýva aj nasledujúce tvrdenie.

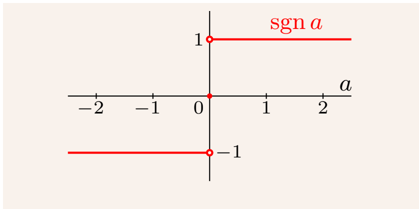
Veta 2.1.11.
Ak $a \in R$, $a > 0$, potom platí: $|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a \;\Leftrightarrow\; x \in \langle -a; a\rangle$.

Výraz $|x-a|$ predstavuje vzdialenosť bodov a a x na číselnej osi. Pre $\delta > 0$ platí:

$$|x-a| \leq \delta \iff -\delta \leq x-a \leq \delta \iff a-\delta \leq x \leq a+\delta \iff x \in \langle a-\delta; a+\delta\rangle\,.$$



Obr. 2.1.4: Absolútna hodnota čísla a



Obr. 2.1.5: Signum čísla a

Veta 2.1.12.
Množina $A \subset R$ je ohraničená $\iff$ existuje $a > 0$ také, že $|x| \leq a$ pre všetky $x \in A$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: A je ohraničená $\Rightarrow$ $\exists c_1, c_2 \in R\ \forall x \in A$: $c_1 \leq x \leq c_2$ $\Rightarrow$ $a = \max\{|c_1|, |c_2|\}$.
$PP_{\Leftarrow}$: $a > 0$ $\Rightarrow$ $\forall x \in A$: $-a \leq x \leq a$ $\Rightarrow$ A je ohraničená. ■

Ak pre $a \in R$ označíme $a^+ = \max\{a,\ 0\}$, $a^- = \max\{-a,\ 0\}$, potom platí:

$$|a| = a^+ + a^-, \qquad a = a^+ - a^-, \qquad a^+ = \tfrac{a+|a|}{2}, \quad a^- = \tfrac{a-|a|}{2}.$$

Nech $a \in R$, potom **signum čísla** a definujeme vzťahom $\operatorname{sgn} a = \begin{cases} -1, & \text{pre } a < 0, \\ 0, & \text{pre } a = 0, \\ 1, & \text{pre } a > 0. \end{cases}$

Veta 2.1.13.
$a, b \in R \implies$ a) $a = \operatorname{sgn} a \cdot |a|$, $|a| = \operatorname{sgn} a \cdot a$, b) $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b$.

Dôkaz.
a) $a = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn} a \cdot |a| = 0 \cdot 0 = 0$.
$a \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn} a \cdot |a| = (\pm 1) \cdot (\pm a) = a$, $\operatorname{sgn} a \cdot a = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} a \cdot |a| = (\pm 1) \cdot (\pm 1) \cdot |a| = |a|$.
b) $a = 0$ alebo $b = 0 \;\Rightarrow\; ab = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = 0$.
$a \neq 0,\ b \neq 0 \overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \operatorname{sgn}(ab) = \frac{ab}{|ab|} = \frac{ab}{|a| \cdot |b|} = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{b}{|b|} = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b$. ■

Nech $a \in R$, $n \in N$, potom vzťah $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n\text{-krát}}$ nazývame **n-tá mocnina čísla a** (čítame a na n-tú). Číslo a nazývame **mocnenec** (**základ mocniny**), n nazývame **mocniteľ** (**exponent**). Pre $a \neq 0$ definujeme $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

S mocninou 0^0 je to trochu zložitejšie. Na základe predchádzajúceho môžeme definovať $0^0 = 1$, ale na základe vzťahov (2.1) môžeme definovať[7] $0^0 = 0$. V bežných prípadoch

[7] Prvý pohľad je založený na funkcii $y = x^0 = 1$, $x \neq 0$ a druhý na funkcii $y = 0^x = 0$, $x > 0$.

definujeme $0^0 = 1$. Na druhej strane limita v tomto tvare patrí medzi neurčité výrazy a je potrebné ju individuálne vyčísľovať (str. 105).

Poznámka 2.1.1.
Výraz a^{m^n} nemá zmysel, pretože nie je určené, či vyjadruje $(a^m)^n$ alebo $a^{(m^n)}$. Tieto dva výrazy sa nemusia rovnať, napr. $(2^2)^3 = 4^3 = 64$, $\;2^{(2^3)} = 2^8 = 256$.

Nech $n \in N$, potom **n-tou odmocninou čísla $a \geq 0$** nazývame také číslo $x \geq 0$, pre ktoré platí $x^n = a$. Označujeme $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{1/n}$ a pre $n = 2$ stručne $x = \sqrt{a}$.

Nech $s = \frac{m}{n} \in Q$, $m \in Z$, $n \in N$. Potom **s-tú mocninu čísla $a \geq 0$** definujeme:

$$a^s = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \quad \text{pre } a > 0,\ s \in Q, \qquad 0^s = 0, \quad \text{pre } a = 0,\ s > 0.$$

Nech $r \in R$, potom **r-tú mocninu čísla $a \geq 0$** definujeme:

$$a^r = \begin{cases} \sup\{a^s;\ s \in Q,\ s \leq r\}, & \text{pre } a > 1, \\ 1^r = 1, & \text{pre } a = 1, \\ (a^{-1})^{-r} = (\frac{1}{a})^{-r}, & \text{pre } a \in (0;1)\,,\ \text{t. j. } \frac{1}{a} > 1, \\ 0^r = 0, & \text{pre } a = 0,\ r > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Uvedená definícia je založená na skutočnosti, že pre $a \in (1;\infty)$, $s, t \in Q$, $s < t$ platí nerovnosť $a^s < a^t$ a že každé $r \in R$ sa dá vyjadriť v tvare $r = \sup\{s;\ s \in Q,\ s \leq r\}$.

Navyše pre $n \in N$ **definujeme** $\infty^n = \infty$, $\infty^{-n} = \frac{1}{\infty^n} = 0$ a **nedefinujeme** ∞^0.

Veta 2.1.14.
$a, b, r, u \in R$, $a > 0$, $b > 0 \implies \quad a^r \cdot a^u = a^{r+u}, \quad (a^r)^u = (a^u)^r = a^{ru}, \quad a^r \cdot b^r = (ab)^r.$

Veta 2.1.15.
$a, b, r \in R$, $0 < a < 1 < b \implies \quad a^r < 1 < b^r$ pre $0 < r$, $\quad b^r < 1 < a^r$ pre $r < 0$.

Veta 2.1.16.
$a, b, r \in R$, $0 < a < b \implies \quad a^r < b^r$ pre $0 < r$, $\quad b^r < a^r$ pre $r < 0$.

Veta 2.1.17.
$a, r, u \in R$, $a > 0$, $r < u \implies \quad a^r < a^u$ pre $1 < a$, $\quad a^u < a^r$ pre $a < 1$.

Cvičenia

2.1.1. Nech $a \in Q$, $b \in I$, potom $(a + b) \in I$. Dokážte.

2.1.2. Nech $a, b \in Q$, $\sqrt{ab} \in I$, potom $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in I$. Dokážte.

2.1.3. Dokážte, že sú iracionálne: a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, c) $\sqrt{15}$, d) $\sqrt{5}$.

2.1.4. Dokážte, že pre $a, b \in R$, $a > b > 0$ platí: a) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, b) $2 < \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

2.1.5. Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín: ♣

a) $\left\{\frac{2n+1}{n};\ n \in N\right\}$, b) $\left\{\frac{2+(-1)^n}{n};\ n \in N\right\}$, c) $\left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n^2};\ n \in N\right\}$,

d) $\{\sin\frac{1}{n!};\ n \in N\}$, e) $\left\{\frac{1}{n+n^{-1}};\ n \in N\right\}$, f) $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}};\ n \in N\right\}$.

2.1.6. Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín: ♣

a) $\{a\in R;\ |2a+1|<a<|a-1|\}$, b) $\big\{a\in R;\ \big|a^2-1\big|<a<|a+1|\big\}$.

2.1.7. Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Označme **súčet**, resp. **súčin množín** A, B symbolmi $A+B=\{a+b;\ a\in A, b\in B\}$, resp. $AB=\{ab;\ a\in A, b\in B\}$ a n**-tú mocninu množiny** A, $n\in N$ symbolom $A^n=\{a^n;\ a\in A\}$. Dokážte, že platí:

a) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$, b) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$,
c) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A, \sup B\}$, d) $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A, \inf B\}$,
e) $\sup(A\cap B)\le\min\{\sup A, \sup B\}$, f) $\inf(A\cap B)\ge\max\{\inf A, \inf B\}$,
g) $\sup A^n=(\sup A)^n$, h) $\inf A^n=(\inf A)^n$.

2.1.8. Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Dokážte, že aj množiny $A\cup B$, $A\cap B$, $A+B$, AB, A^n pre $n\in N$ sú ohraničené množiny.

2.1.9. Nájdite všetky $x\in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla: ♣

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{4-x}$, b) $\frac{x}{\sqrt{x-3}}+\frac{x}{\sqrt{4-x}}$, c) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{\frac{4-x}{4-x}}$.

2.1.10. Nájdite všetky $x\in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla: ♣

a) $\sqrt{1-\operatorname{sgn}x}$, b) $\sqrt{\operatorname{sgn}x-1}$, c) $\sqrt{|x|-x}$, d) $\sqrt{x^3+x^2-x}$,
e) $\frac{x^2-2}{3-x^2}$, f) $\sqrt{x+x^3}$, g) $\sqrt{\operatorname{sgn}x-x^2}$, h) $\frac{x}{\sqrt{x\operatorname{sgn}x-x}}$.

2.1.11. Dokážte, že ak $a, b\in R$, potom: a) $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\le\frac{a^n+b^n}{2}$.

2.1.12. Do akej množiny patrí číslo x, ak platí: ♣

a) $x^2+3x-1\in(2;3)$, b) $x^2-4x+1\in\langle 2;\infty)$, c) $x^2+x-1\in R-\langle 1;2)$.

2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel

2.2.1 Okolie bodu

Topologická štruktúra vyjadruje polohové vzťahy medzi prvkami a podmnožinami danej množiny. Základným topologickým pojmom je **okolie bodu**. Najprv uvedieme geometrickú interpretáciu okolia bodu (obr. 2.2.6) Okolím $O(A)$ bodu $A\in R$ na priamke je vnútro úsečky so stredom v bode A, v rovine R^2 je to vnútro kruhu so stredom v bode A a v priestore R^3 je to vnútro gule so stredom v bode A.

Nech $M\neq\emptyset$, $M\subset R$, resp. $M\subset R^2$, $M\subset R^3$, potom pre všetky body z množiny M a ich okolia platia tzv. **Hausdorffove axiómy** (viď obr. 2.2.7):

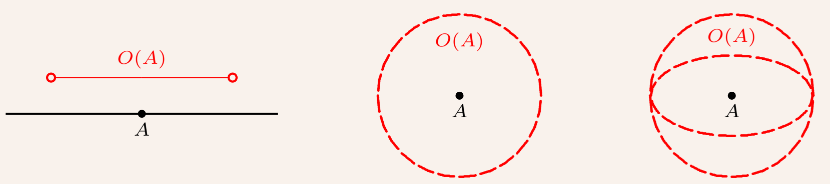
(O_1) Ku každému bodu $A\in M$ existuje aspoň jedno okolie $O(A)$.

(O_2) Pre každé $O(A)$ a každé $B\in O(A)$ existuje $O(B)\subset O(A)$.

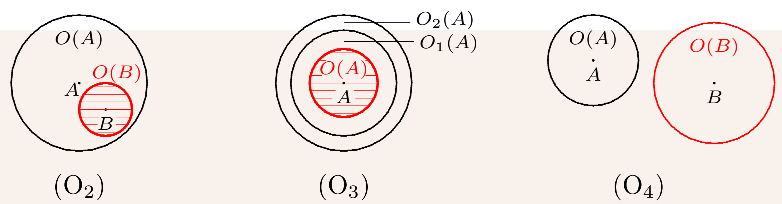
(O_3) Pre všetky $O_1(A), O_2(A)$ existuje $O(A)\subset O_1(A)\cap O_2(A)$.

(O_4) Pre všetky $A\neq B$ existujú $O(A)$, $O(B)$ také, že $O(A)\cap O(B)=\emptyset$.

Veta 2.2.1.
$A, B\in M,\ C\in O(A)\cap O(B) \implies \exists\, O(C)\colon\ O(C)\subset O(A)\cap O(B)$.



Obr. 2.2.6: Okolie $O(A)$ bodu A na priamke, v rovine a v priestore



Obr. 2.2.7: Axiómy (O_2), (O_3), (O_4)

Nech $a \in R$, potom interval $(a-\delta; a+\delta)$ označujeme $O_\delta(a)$ a nazývame **δ-okolím bodu a**. Číslo $\delta > 0$ nazývame **polomer okolia**.

Niekedy je výhodné z okolia vylúčiť samotný bod $a \in R$. Množinu $O_\delta(a) - \{a\}$ nazývame **prstencovým δ-okolím bodu $a \in R$** a označujeme $P_\delta(a)$.

V prípade, že nie je veľkosť polomeru δ podstatná, hovoríme o **okolí bodu a**, resp. o **prstencovom okolí bodu a** a označujeme stručne $O(a)$, resp. $P(a)$.

Okolím (r-okolím) bodu ∞ nazývame interval $(r; \infty)$ a označujeme $O_r(\infty)$, resp. $O(\infty)$. Analogicky interval $(-\infty; r)$ nazývame **okolím (r-okolím) bodu $-\infty$** a označujeme $O_r(-\infty)$, resp. $O(-\infty)$. Tieto okolia sú zároveň aj prstencovými okoliami.

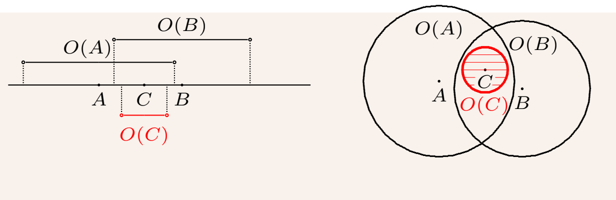
Poznámka 2.2.1.
Množina $R = (-\infty; \infty)$ je okolím každého bodu $a \in R^*$ (t. j. aj $\pm\infty$) s polomerom $r = \infty$. Množina $\emptyset = (a; a)$ je okolím každého bodu $a \in R$ s polomerom $\delta = 0$. Otvorený interval $(a; b)$, $a, b \in R$, $a < b$ je okolím bodu $c = \frac{a+b}{2}$ s polomerom $\delta = \frac{b-a}{2}$.

Nech $r \in R$, $\delta > 0$, potom môžeme okolia bodov $a \in R$ a $\pm\infty$ vyjadriť nasledujúco:

$$O_\delta(a) = (a-\delta; a+\delta) = \{x \in R;\ a-\delta < x < a+\delta\} = \{x \in R;\ |x-a| < \delta\},$$
$$P_\delta(a) = (a-\delta; a+\delta) - \{a\} = (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta) = \{x \in R;\ 0 < |x-a| < \delta\},$$
$$O_r(\infty) = (r; \infty) = \{x \in R;\ r < x\}, \qquad O_r(-\infty) = (-\infty; r) = \{x \in R;\ x < r\}.$$

V matematike majú veľký význam a často sa používajú tzv. **jednostranné okolia**:

$O_\delta^+(a) = \langle a; a+\delta)$ nazývame **pravé δ-okolie bodu a**,
$O_\delta^-(a) = (a-\delta; a\rangle$ nazývame **ľavé δ-okolie bodu a**,
$P_\delta^+(a) = (a; a+\delta)$ nazývame **pravé prstencové δ-okolie bodu a**,
$P_\delta^-(a) = (a-\delta; a)$ nazývame **ľavé prstencové δ-okolie bodu a**.



Obr. 2.2.8: Obrázok k vete 2.2.1

2.2.2 Otvorené a uzavreté množiny

Bod $a \in A$ sa nazýva **vnútorný bod množiny** $A \subset R$, ak existuje okolie $O(a) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny A nazývame **vnútro množiny** A a označujeme $\operatorname{int} A$, resp. A^0.

Bod $a \in R$ sa nazýva **vonkajší bod množiny** $A \subset R$, ak je vnútorným bodom jej doplnku $A' = R – A$. Množinu všetkých vonkajších bodov množiny A nazývame **vonkajšok množiny** A a označujeme $\operatorname{ext} A$.

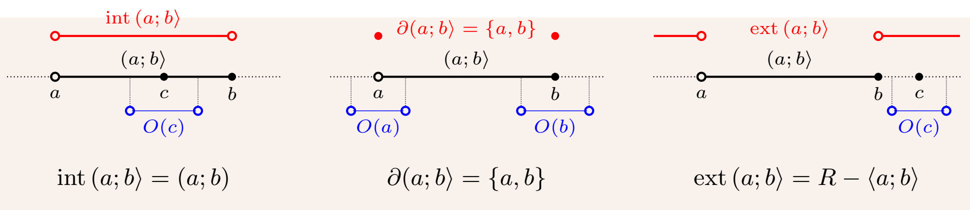
Bod $a \in R$ sa nazýva **hraničný bod množiny** $A \subset R$, ak nie je ani vnútorným a ani vonkajším bodom[8] množiny A. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame **hranica množiny** A a označujeme ∂A.

Množiny $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$ sú disjunktné. Navyše pre množiny A a A' platí:

$$\partial A = \partial A', \qquad \operatorname{int} A = \operatorname{ext} A', \qquad \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A'.$$

Príklad 2.2.1.
a) $\operatorname{int} \emptyset = \operatorname{ext} R = \emptyset, \quad \operatorname{ext} \emptyset = \operatorname{int} R = R, \quad \partial\emptyset = \partial R = \emptyset, \qquad \partial Q = R.$

b) Interval $(a; b)$ je vnútrom, množina $R - \langle a; b\rangle$ je vonkajškom a množina $\{a, b\}$ je hranicou (obr. 2.2.9) každého z intervalov $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$, $\langle a; b\rangle$. ■



Obr. 2.2.9: Množiny $\operatorname{int}\langle a;\ b\rangle$, $\partial\langle a;\ b\rangle$, $\operatorname{ext}\langle a;\ b\rangle$ z príkladu 2.2.1 b)

Bod $a \in R$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a, t. j. pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.

[8] T. j. v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A a aspoň jeden bod z množiny A'.

Poznámka 2.2.2.
Množina N nemá hromadný bod patriaci medzi reálne čísla. Ale v každom okolí bodu ∞ leží aspoň jedno prirodzené číslo. Preto rozšírime definíciu hromadného bodu na množinu $R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ a pri vyšetrovaní hromadných bodov, budeme overovať aj $\pm\infty$.

Bod $a \in R^*$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $A \subset R^*$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a.

Uzáverom množiny $A \subset R$, ozn. $\overline{A}$, nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých jej hromadných bodov. Množina $A \subset R$ sa nazýva **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje hromadné body, t. j. ak $A = \overline{A}$.

Ak bod $a \in A$ nie je hromadným bodom A, nazýva sa **izolovaný bod množiny** A. Množina, ktorá obsahuje iba izolované body sa nazýva **izolovaná množina**.

Množina $A \subset R$ sa nazýva **otvorená**, ak každý jej bod je vnútorný, t. j. ak $A = \operatorname{int} A$.

Poznámka 2.2.3.
Je zrejmé, že ak v okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod rôzny od a, leží ich tam nekonečne veľa. To znamená, že $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží nekonečne veľa rôznych bodov z množiny A.

Príklad 2.2.2.
a) Interval $(0;1)$ je otvorená množina, $\langle 0;1\rangle$ je uzavretá množina,[9] $(0;1\rangle$, $\langle 0;1)$ nie sú ani otvorené ani uzavreté množiny a ich uzáverom je $\langle 0;1\rangle$.

b) Interval $(-\infty;1)$ je otvorená množina. Jeho uzáverom je množina $(-\infty;1\rangle \cup \{-\infty\}$.

c) Množina N neobsahuje svoj hromadný bod ∞, preto nie je uzavretá. Všetky jej body sú izolované, takže je izolovaná.

d) Množina Q nie je uzavretá, pretože neobsahuje všetky svoje hromadné body (neobsahuje napríklad hromadný bod $\sqrt{2}$). Nie je ani otvorená, pretože žiaden jej bod nie je vnútorný.

e) Množina $\{1,2,3,4,5,6\}$ nemá hromadné body. To znamená, že obsahuje všetky svoje hromadné body a je uzavretá. Navyše každý jej bod je izolovaný.

f) Množina $\left\{\frac{1}{n}, n;\, n \in N\right\} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots\right\}$ má dva hromadné body 0, ∞. ■

Veta 2.2.2.
$A \subset R$ je otvorená $\iff$ $A' = R - A$ je uzavretá.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. A je otvorená, A' nie je uzavretá $\xRightarrow{A' \text{ nie je uzavretá}}$

$$A' \text{ má hromadný bod } a \notin A' \;\Rightarrow\; a \in A \xRightarrow{A \text{ je otvorená}} \text{existuje okolie } O(a) \subset A \;\Rightarrow$$
$$O(a) \cap A' = \emptyset \;\Rightarrow\; a \text{ nie je hromadný bod } A' \;\Rightarrow\; A' \text{ je uzavretá (spor).}$$

$PP_{\Leftarrow}$: Sporom. A' je uzavretá, A nie je otvorená $\xRightarrow{A \text{ nie je otvorená}}$

$$\text{existuje } a \in A \text{ hraničný (nie vnútorný)} \;\Rightarrow\; \text{v každom okolí } O(a) \text{ leží } b \in A',\ b \neq a \;\Rightarrow$$
$$a \in A \text{ je hromadný bod } A' \;\Rightarrow\; A' \text{ nie je uzavretá (spor).} \;■$$

[9] Preto aj názov otvorený a uzavretý interval.

Veta 2.2.3.
$A, B \subset R$ sú otvorené $\Longrightarrow$ $A \cap B$, $A \cup B$ sú otvorené.

Dôkaz.
$a \in A \cap B$ $\Rightarrow$ existujú okolia $O_1(a) \subset A$, $O_2(a) \subset B \xrightarrow{\text{axioma } (O_3)}$

existuje okolie $O(a) \subset O_1 \cap O_2 \subset A \cap B$ $\Rightarrow$ $A \cap B$ je otvorená.

$a \in A \cup B$ $\Rightarrow$ $a \in A$ alebo $a \in B \Rightarrow a$ je vnútorným bodom A alebo $B \Rightarrow$

a je vnútorným bodom $A \cup B \Rightarrow A \cup B$ otvorená. ■

Veta 2.2.4.
$A, B \subset R$ sú uzavreté $\Longrightarrow$ $A \cap B$, $A \cup B$ sú uzavreté.

Dôkaz.
A, B sú uzavreté $\Rightarrow$ A', B', $A' \cup B'$, $A' \cap B'$ sú otvorené $\Rightarrow$

$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B$, $(A' \cap B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B$ sú uzavreté. ■

Veta 2.2.5.
$A_k \subset R$, $k \in N$ sú otvorené množiny $\Longrightarrow$ $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ je otvorená množina.

Dôkaz.
$a \in A \Rightarrow$ existuje otvorená A_m taká, že $a \in A_m \Rightarrow a$ je vnútorným bodom $A_m \Rightarrow$

a je vnútorným bodom nadmnožiny A $\Rightarrow$ A je otvorená množina. ■

Veta 2.2.6.
$A_k \subset R$, $k \in N$ sú uzavreté množiny $\Longrightarrow$ $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ je uzavretá množina.

Dôkaz.
A_k, $k \in N$ sú uzavreté množiny $\Rightarrow$ A'_k, $k \in N$ sú otvorené množiny $\Rightarrow$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A'_k$ je otvorená $\xrightarrow{\text{de Morganové zákony}} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \Big[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A'_k \Big]'$ je uzavretá. ■

Ako dokazuje nasledujúci príklad, prienik nekonečného systému otvorených množín nemusí byť otvorená množina. A taktiež zjednotenie nekonečného systému uzavretých množín nemusí byť uzavretá množina.

Príklad 2.2.3.
a) $\left(-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$, $k \in N$ sú otvorené množiny, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right) = \{0\}$ je uzavretá.

b) Množiny $\left\{\frac{1}{k}\right\}$, $k \in N$ sú uzavreté, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k}\right\} = \left\{\frac{1}{k};\, k \in N\right\}$ nie je uzavretá, pretože neobsahuje bod 0, ktorý je jej hromadným bodom. ■

2.2.3 Metrické vlastnosti čísel

S pojmami ako dĺžka vektora, skalárny súčin dvoch vektorov, vzdialenosť dvoch bodov sme sa už stretli v analytickej geometrii. Tieto pojmy predstavujú metrické vlastnosti množiny a v tejto časti sa budeme zaoberať metrickými vlastnosťami reálnych čísel.

Keďže je množina $R^1 = R$ špeciálnym prípadom R^n, uvedieme nasledujúce pojmy všeobecne pre $n \in N$. Množina $R^n = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n);\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$ tvorí lineárny priestor, ktorý nazývame **Euklidov (euklidovský) n-rozmerný priestor**.

Prvky $x = (x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_n) \in R^n$ nazývame **vektory** (**n-rozmerné vektory**). Vektor $x = (x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_n) \in R^n$ graficky reprezentuje orientovanú úsečku zo začiatku súradnicového systému[10] $O = (0;\, 0;\, \dots;\, 0)$ do bodu $x = (x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_n)$.

Rozdiel vektorov $x - y = (x_1 - y_1;\, x_2 - y_2;\, \dots;\, x_n - y_n)$ predstavuje orientovanú úsečku z bodu $x = (x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_n)$ do bodu $y = (y_1;\, y_2;\, \dots;\, y_n)$.

Skalárnym súčinom vektorov $x, y \in R^n$, $n \in N$ nazývame číslo

$$(x, y) = ((x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_n), (y_1;\, y_2;\, \dots;\, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Pomocou skalárneho súčinu môžeme vybudovať v priestore R^n geometriu s použitím vzdialeností a uhlov, ako sme zvyknutí v rovine, resp. v priestore.

Veta 2.2.7.
$n \in N,\ x, y, z \in R^n,\ c \in R \implies$
$(x, y) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = O, \quad (x, y) = (y, x), \quad (x+y, z) = (x, z) + (y, z), \quad (cx, y) = c\,(x, y).$

Dôkaz.
Vyplýva priamo z definície. ■

(**Euklidovskou**) **normou vektora** $x = (x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_n) \in R^n$, $n \in N$ nazývame číslo

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Vektor $x \in R^n$, pre ktorý platí $|x| = 1$ nazývame **jednotkový**, resp. **normovaný vektor**. Z geometrického hľadiska predstavuje norma $|x|$ dĺžku vektora x.

V priestore R sa norma vektora $x \in R$, t. j. reálneho čísla x, redukuje na absolútnu hodnotu. Vyplýva to zo vzťahov $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^2} = |x|$.

Lema 2.2.8 (Cauchyho nerovnosť).
$x_1, x_2, \dots, x_n \in R,\ y_1, y_2, \dots, y_n \in R,\ n \in N \implies \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$

Dôkaz.
Označme[11] $S_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $S_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$, $a_i = \frac{x_i}{S_x}$, $b_i = \frac{y_i}{S_y}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $S_x \neq 0$, $S_y \neq 0$.

Platí: $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S_x^2} = \frac{1}{S_x^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{S_x^2}{S_x^2} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{y_x^2} = \frac{1}{S_y^2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{S_y^2}{S_y^2} = 1.$

$$0 \leq (a_i \pm b_i)^2 = a_i^2 \pm 2a_i b_i + b_i^2,\ i = 1, 2, \dots, n \ \Rightarrow\ \mp 2a_i b_i \leq a_i^2 + b_i^2,\ i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow\ \mp 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (\mp 2a_i b_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow\ 2 \geq 2 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{S_x} \frac{y_i}{S_y} \right) \right| = \frac{1}{S_x S_y} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \ \Rightarrow\ S_x S_y \geq \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|. \ ■$$

Veta 2.2.9.
$n \in N,\ x, y \in R^n,\ c \in R \implies$
a) $|x| \geq 0,\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = (0;\, 0;\, \dots;\, 0)$, b) $|cx| = |c| \cdot |x|$, c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

[10] To znamená, že vektor vyjadruje smer a vzdialenosť od začiatku súradnicového systému O.
[11] Pre $S_x = 0$ $(x_1 = \dots = x_n = 0)$, resp. $S_y = 0$ $(y_1 = \dots = y_n = 0)$ platí nerovnosť triviálne.

Dôkaz.
a) Vyplýva priamo z definície.
b) $|cx| = \sqrt{(cx, cx)} = \sqrt{c\,(x, cx)} = \sqrt{c\,(cx, x)} = \sqrt{c^2\,(x, x)} = |c|\,\sqrt{(x, x)} = |c| \cdot |x|$.

c) Z Cauchyho nerovnosti vyplýva: $|x+y|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\,\right]^2 = (|x|+|y|)^2. \blacksquare$$

(**Euklidovskou**) **metrikou priestoru** R^n nazývame zobrazenie $\rho\colon R^n \times R^n \to R$:

$$\rho(x, y) = |x-y| = \sqrt{(x-y, x-y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad x, y \in R^n.$$

Číslo $\rho(x, y)$ nazývame **vzdialenosť vektorov** x **a** y.

Poznámka 2.2.4.
Euklidovská metrika reprezentuje vzdialenosť, ako ju poznáme z geometrie. Pre $x, y \in R$ platí $\rho(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$ a pre $x, y \in R^2$ platí $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$.

Veta 2.2.10.
$n \in N$, $x, y, z \in R^n \implies$
a) $\rho(x, y) \ge 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, c) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Dôkaz.
a), b) Vyplýva z definície.
c) $\rho(x, y) = |x-y| = |(x-z) + (z-y)| \le |x-z| + |z-y| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. $\blacksquare$

Nerovnosti c) vo vetách 2.2.9 a 2.2.10 nazývame **trojuholníkové nerovnosti**. Sú to analógie z geometrie známej nerovnosti, platnej medzi dĺžkami strán v trojuholníku.

Cvičenia

2.2.1. Dokážte, že v R^n, $n \in N$ je zjednotením konečného počtu otvorených, resp. uzavretých množín otvorená, resp. uzavretá množina.

2.2.2. Dokážte Cauchyho nerovnosť (lema 2.2.8).
[Návod: Pre všetky $t \in R$, $x, y \in R^n$ platí $P(t) = \sum_{i=1}^{n}(tx_i + y_i)^2 \ge 0$. Takže kvadratická rovnica $P(t) = 0$ má najviac jeden reálny koreň a nekladný diskriminant.
Iný návod: Pre všetky $x, y \in R^n$ platí $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 \ge 0$.]

2.2.3. Nájdite všetky hromadné body množín: ♣

a) $\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n};\ m, n \in N\right\}$, b) $\left\{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n};\ m, n \in N\right\}$, c) $\left\{\frac{1}{n};\ n \in N\right\}$,
d) $\left\{\frac{1}{m^2} + n;\ m, n \in N\right\}$, e) $\left\{\frac{1}{m} + n^2;\ m, n \in N\right\}$, f) $\left\{\frac{1}{n^2};\ n \in N\right\}$,
g) $\left\{p^2 + q^2;\ p, q \in Q\right\}$, h) $\left\{\frac{1}{n} + p^2;\ n \in N,\ p \in Q\right\}$, i) $\left\{\frac{1}{p^2};\ p \in Q\right\}$.

2.2.4. Dokážte, že každá množina, ktorá má nekonečne veľa prvkov, má aspoň jeden hromadný bod.

2.2.5. Zostrojte v priestore R^n, $n \in N$ s euklidovskou metrikou množinu A s $n+1$ prvkami tak, aby $\{\rho(x,y);\ x,y \in A\} = \{0,1\}$. ♣

2.3 Postupnosti reálnych čísel

Postupnosťou reálnych čísel (**reálnou postupnosťou**) nazývame každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej členy sú reálne čísla $a_n \in R$. T. j. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zobrazením $N \to R$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame **explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n alebo **rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a zadaním člena a_n pomocou predchádzajúcich členov.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (**postupnosti sa rovnajú**), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$. Symbolicky to zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 2.3.1.
a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1,3,5,\dots\}$ je explicitne zadaná vzťahmi $a_n = 2n-1$, $n \in N$ a rekurentne vzťahmi $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \in N$.
b) $\left\{5^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rekurentne zadaná vzťahmi $a_1 = 25$, $a_{n+1} = 25a_n$, $n \in N$.
c) Explicitný zápis $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Niekedy potrebujeme definovať postupnosť nie od prvého člena, ale od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. Najčastejšie je to od nultého člena a_0. Postupnosť potom zapisujeme v tvare $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$. Ak pre $n \in N$ označíme $b_n = a_{n+k-1}$, potom platí:

$$\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\} = \{a_{1+k-1}, a_{2+k-1}, \dots\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:
– **ohraničená zdola**, ak existuje $\alpha \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $\alpha \le a_n$,
– **ohraničená zhora**, ak existuje $\beta \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \le \beta$,
– **ohraničená**, ak je ohraničená zdola a zhora,
t. j. existujú $\alpha, \beta \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $\alpha \le a_n \le \beta$,
– **neohraničená zdola** [resp. **zhora**], ak nie je ohraničená zdola [resp. zhora],
– **neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola, t. j. pre každé $\alpha \in R$ existuje $a_n < \alpha$,
– **neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora, t. j. pre každé $\beta \in R$ existuje $a_n > \beta$,
– **neohraničená**, ak nie je ohraničená (je neohraničená zdola alebo neohraničená zhora),
– **rastúca** [resp. **klesajúca**], ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$ [resp. $a_n > a_{n+1}$],
– **neklesajúca** [resp. **nerastúca**], ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \le a_{n+1}$ [resp. $a_n \ge a_{n+1}$],
– **stacionárna** (**konštantná**), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_1 = a$,
– **monotónna**, ak je neklesajúca, nerastúca alebo stacionárna,
– **rýdzo monotónna**, ak je rastúca alebo klesajúca.

Nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Potom sa postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť** (**vybraná postupnosť z**) **postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$**.

Príklad 2.3.2.
Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$.
Ak vyberieme párne členy, t. j. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 6, \ldots\}$, potom vybraná postupnosť má tvar $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
Vybrané sú tiež postupnosti $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$, $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$. ■

Súčtom, **rozdielom**, **súčinom**, resp. **podielom postupností** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **a** $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosti $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$. V prípade podielu predpokladáme, že pre všetky $n \in N$ platí $b_n \neq 0$.

2.3.1 Limita postupnosti

Jedným zo základných pojmov v matematike je limita a s ňou spojené limitné procesy.

Príklad 2.3.3.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ je klesajúca a s rastúcou hodnotou n sa členy a_n blížia k bodu 0. Bod 0 je hranica, ktorú nikdy neprekročia. Môžeme povedať, že sa **body** a_n **hromadia v bode** 0.

b) Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$. Nepárne členy a_n sa neobmedzene zväčšujú a párne členy zmenšujú. Nepárne sa približujú k bodu ∞ (**hromadia v** ∞). Párne členy sa približujú k bodu 0 (**hromadia v bode** 0). ■

Bod $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ sa nazýva **hromadnou hodnotou postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa členov $a_n \in O(a)$. Navyše $a \in R$ sa nazýva **vlastná hromadná hodnota** a body $\pm\infty$ **nevlastné hromadné hodnoty**.

Poznámka 2.3.1.
Bod $a \in R$ je **vlastnou hromadnou hodnotou** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečne veľa členov $a_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, t. j. $|a_n - a| < \varepsilon$.
Bod ∞ [resp. $-\infty$] je **nevlastnou hromadnou hodnotou** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé $\alpha \in R$ existuje nekonečne veľa členov $a_n > \alpha$ [resp. $a_n < \alpha$].

Veta 2.3.1.
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu.

Dôkaz.
Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zhora, potom pre každé $\alpha \in R$ existuje aspoň jedno $a_n > \alpha$. Vzhľadom na to, že čísel väčších ako α existuje nekonečne veľa, musí existovať aj nekonečne veľa členov $a_n > \alpha$. To znamená, že $a = \infty$ je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zdola, potom analogicky je hromadnou hodnotou $a = -\infty$.

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, potom existuje interval $\langle b_1; c_1 \rangle$ taký, že všetky $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$. Označme jeho dĺžku $d = c_1 - b_1$ a rozdeľme ho na dva rovnaké intervaly

$$\left\langle b_1; \tfrac{b_1+c_1}{2} \right\rangle, \qquad \left\langle \tfrac{b_1+c_1}{2}; c_1 \right\rangle$$

V aspoň jednom z nich leží nekonečne veľa členov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme ho $\langle b_2; c_2 \rangle$. Pre jeho dĺžku platí $c_2 - b_2 = \frac{d}{2} = \frac{d}{2^{2-1}}$. Rozdeľme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na dva rovnaké intervaly

$$\left\langle b_2; \tfrac{b_2+c_2}{2} \right\rangle, \qquad \left\langle \tfrac{b_2+c_2}{2}; c_2 \right\rangle$$

V aspoň jednom z nich leží nekonečne veľa členov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme ho $\langle b_3; c_3\rangle$. Pre jeho dĺžku platí $c_3 - b_3 = \frac{d}{2^2} = \frac{d}{2^{3-1}}$. Rozdeľme $\langle b_3; c_3\rangle$ na dva rovnaké intervaly atď.
Predpokladajme, že pre $m \in N$ máme zostrojený interval $\langle b_m; c_m\rangle$. Rozdelíme ho na dva rovnaké intervaly a symbolom $\langle b_{m+1}; c_{m+1}\rangle$ označme ten z intervalov

$$\left\langle b_m; \tfrac{b_m+c_m}{2}\right\rangle, \qquad \left\langle \tfrac{b_m+c_m}{2}; c_m\right\rangle$$

v ktorom leží nekonečne veľa členov a_n. Pre jeho dĺžku platí $c_{m+1} - b_{m+1} = \frac{d}{2^m}$.
Je zrejmé, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle b_m; c_m\rangle$ taký, že $c_m - b_m < \frac{d}{2^{m-1}} < \varepsilon$.
Potom (veta 2.1.9) existuje práve jeden bod $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \langle b_m; c_m\rangle$.
Ak to zhrnieme, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle b_m; c_m\rangle$, v ktorom leží nekonečne veľa členov a_n, pre ktoré platí $|a_n - a| \le c_m - b_m < \varepsilon$. To znamená, že a je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Dôsledok 2.3.1.a.
Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, potom má hromadnú hodnotu $a \in R$. Ak je neohraničená zhora [resp. zdola], potom má hromadnú hodnotu ∞ [resp. $-\infty$].

Označme množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ symbolom E. Suprémum E nazývame **limes superior** (**horná limita**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Infimum E nazývame **limes inferior** (**dolná limita**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Príklad 2.3.4.
a) $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a 1.
b) $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ má jednu nevlastnú hromadnú hodnotu ∞.
c) $\{n, -n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 2, -2, \ldots\}$ má dve hromadné hodnoty $\pm\infty$.
d) $\left\{n, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a ∞.
e) $\left\{0, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ má jednu hromadnú hodnotu 0. ■

Bod $a \in R^*$ nazývame **limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak je jedinou hromadnou hodnotou tejto postupnosti, t. j. ak $a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Označujeme ju $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Limitu $a \in R$ nazývame **vlastná limita** a hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje k** (**číslu**) a. Stručne to zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$. Ďalej hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** (**je konvergentná**) a označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$.

Limitu $a \pm \infty$ nazývame **nevlastná** a hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje do** ∞, resp. $-\infty$. Stručne to zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$, resp. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto -\infty$.

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **osciluje**.

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$ alebo osciluje, potom hovoríme, že **diverguje** (**je divergentná**) a zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$.

Príklad 2.3.5.
a) Postupnosti $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n, -n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{n, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ oscilujú.
b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\left\{0, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$, $\{a\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$,
c) $\{n^3\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$, $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$, $\{n^n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$. ■

Z definície vyplýva, že ak existuje limita postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom existuje jediná.

Veta 2.3.2.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R^* \;\Leftrightarrow$
pre každé $O(a)$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \in O(a)$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech $O(a)$ je také, že ku každému $n_0 \in N$ existuje $a_n \notin O(a)$, $n \geq n_0$. Potom existuje nekonečne veľa $a_n \notin O(a)$. Potom na základe dôkazu vety 2.3.1 má postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ďaľšiu hromadnú hodnotu $b \neq a$. To je spor s definíciou limity.
$PP_{\Leftarrow}$: Je zrejmé, že a je hromadným bodom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukážeme sporom, že je jediným. Ak $b \neq a$ je hromadným bodom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(b)$ existuje nekonečne veľa $a_n \in O(b)$. Ak zvolíme $O(b) \cap O(a) = \emptyset$, potom neexistuje n_0 také, aby pre všetky $n \geq n_0$ platilo $a_n \in O(a)$. To je spor. ■

Z poznámky 2.3.1 a z predchádzajúcej vety vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N, n \geq n_0 \colon\ a_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in R\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N, n \geq n_0 \colon\ \alpha < a_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in R\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N, n \geq n_0 \colon\ a_n < \alpha.$$

Veta 2.3.3.
$a \in R^*$ je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \;\Leftrightarrow\;$ existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Nech $a \in R^*$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
$a \in R \;\Rightarrow\;$ Pre každé $k \in N$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $|a_n - a| < \frac{1}{k}$. Pre každé k vyberieme jeden z členov tak, aby jeho index bol väčší ako index predtým vybraného a označíme ho a_{k_n}. Z konštrukcie vyplýva, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.
$a = \infty$ [resp. $a = -\infty$] $\;\Rightarrow\;$ Pre každé $k \in N$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $k < a_n$ [resp. $a_n < k$]. Postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$, [resp. $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto -\infty$] zvolíme analogicky.
$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z definície hromadnej hodnoty a limity. ■

Príklad 2.3.6.
a) $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a 1.
Vybrané postupnosti sú napríklad $\{0, 0, \ldots\} \longmapsto 0$, $\{1, 1, \ldots\} \longmapsto 1$.
b) $\{\pm n, 0\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 0, 2, -2, 0, \ldots\}$ má tri hromadné hodnoty $\pm\infty$, 0.
Platí napríklad $\{-1, -2, -3, \ldots\} \longmapsto -\infty$, $\{0, 0, 0, \ldots\} \longmapsto 0$, $\{1, 2, 3, \ldots\} \longmapsto \infty$. ■

V mnohých prípadoch môžeme o konvergencii postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali jej limitu. Táto skutočnosť vyplýva z axiómy o najmenšom hornom ohraničení. Základné kritérium je uvedené v nasledujúcej vete a uvádzame ho bez dôkazu.

Veta 2.3.4 (Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie).
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

2.3.2 Prehľad základných tvrdení

V tejto časti sformulujeme a dokážeme niektoré jednoduché tvrdenia, ktoré nám uľahčia prácu s postupnosťami a hlavne s limitami postupností (reálnych čísel).

Veta 2.3.5.
Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dôkaz.
Z poznámky 2.2.3 vyplýva, že bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží nekonečne veľa bodov, ktoré sú rôzne od bodu a.
Na druhej strane je bod a hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že v každom jeho okolí leží nekonečne veľa bodov z tejto postupnosti, t. j. bodov $a_n \in A$, $a_n \neq a$.
Keďže uvedené tvrdenia sú ekvivalentné, dôkaz je ukončený. ■

Príklad 2.3.7.
Bod 0 je hromadným bodom intervalu $(0;2)$, pretože $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$ a pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{n} \neq 0$, $\frac{1}{n} \in (0;2)$. ■

Veta 2.3.6.
Ak existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$, potom majú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovnaké hromadné hodnoty.

Dôkaz.
Ak $a \in R^*$ je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa bodov $a_n = b_n$. To znamená, že a je hromadným bodom $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak $b \in R^*$ je hromadnou hodnotou $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(b)$ existuje nekonečne veľa bodov $b_n = a_n$. To znamená, že b je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Dôsledok 2.3.6.a.
Ak existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$, potom (pokiaľ limity existujú) platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Poznámka 2.3.2.
Z vety 2.3.6 vyplýva, že **konečný počet členov neovplyvní konvergenciu, resp. divergenciu postupnosti**, t. j. nemá vplyv na chovanie postupnosti. Prakticky to znamená, že podmienky platia až od nejakého n_0 (platia pre $n \in N$, $n \geq n_0$). T. j. existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platia podmienky.

V budúcnosti budeme predpoklady a tvrdenia formulovať v zjednodušenom tvare **pre všetky a_n okrem konečného počtu členov** a zapisovať **o.k.p.**.

Veta 2.3.7.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R^* \;\Leftrightarrow\;$ pre každú podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto b$, kde $b \neq a$.

Z vety 2.3.3 vyplýva, že b je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve rôzne hromadné hodnoty a nemá limitu. To je spor.

$PP_{\Leftarrow}$: Z vety 2.3.3 vyplýva, že a je jedinou hromadnou hodnotou, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ■

Dôsledok 2.3.7.a.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \;\Rightarrow\;$ pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

Dôsledok 2.3.7.b.
Ak existujú vybrané postupnosti také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Príklad 2.3.8.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ osciluje, pretože vybrané postupnosti $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto -1$, $\{1\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 1$.

b) Bod 0 je jediná hromadná hodnota postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ■

Veta 2.3.8.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \;\Longrightarrow\; \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Dôkaz.
Sporom. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a nie je ohraničená.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora, potom z dôsledku 2.3.1.a vyplýva, že ∞ je jej hromadným bodom. To je spor s konvergenciou a znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zdola, dôkaz je analogický. ■

Opačné tvrdenie neplatí. Ohraničená postupnosť nemusí konvergovať. Napríklad postupnosť $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ale nekonverguje.

Veta 2.3.9 (Bolzano–Weierstrass).
Z každej ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

Dôkaz.
Z vety 2.3.1 vyplýva, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu reálnu hromadnú hodnotu a. Z vety 2.3.3 vyplýva existencia vybranej postupnosti, ktorá konverguje k a. ■

Veta 2.3.10.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna $\;\Rightarrow\;$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in R^*$.

Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, potom je jej limita reálne číslo a ak nie je ohraničená potom má nevlastnú limitu ∞ (v prípade neklesajúcej postupnosti) alebo $-\infty$ (v prípade nerastúcej postupnosti).

Základom pre výpočet zložitejších limít a zjednodušenie tohto výpočtu je použitie nasledujúcich dvoch viet a ich dôsledkov.

Veta 2.3.11.
$c \in R,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R^*,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in R^* \xRightarrow{\text{ak majú príslušné výrazy zmysel}}$

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = |a|, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \tfrac{1}{b}, \qquad \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \tfrac{a}{b}.$$

Veta 2.3.12.
$a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in N$ o.k.p. $\xRightarrow{\text{ak limity existujú}} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Tvrdenie vety sa nezmení, ak nahradíme výraz $a_n \leq b_n$ výrazom $a_n < b_n$. Napríklad pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dôsledok 2.3.12.a (Veta o zovretí).
$a_n \leq c_n \leq b_n$ pre všetky $n \in N$ o.k.p., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \in R^*$ $\Rightarrow$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Dôkaz.
Vyplýva z nerovností $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} c_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Veta 2.3.13.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow a_n < b_n$ pre všetky $n \in N$ o.k.p..

Dôkaz.
Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a < b$. Potom existujú okolia $O(a) \cap O(b) = \emptyset$.
Z vety 2.3.2 vyplýva, že existujú $n_1, n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \geq n_1$: $a_n \in O(a)$ a pre všetky $n \geq n_2$: $b_n \in O(b)$. Potom pre všetky $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n < b_n$. ■

Príklad 2.3.9.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

Riešenie.
$q = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

$q > 0 \Rightarrow$ je postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca a neohraničená zhora $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.

$q < 0 \Rightarrow -q > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0$. ■

Ak niektorý z čiastkových výrazov nemá zmysel, neznamená to ešte, že daná limita neexistuje. V tomto prípade musíme nájsť limitu iným spôsobom. Niekedy pomôže vhodná úprava výrazu, ktorým je daná postupnosť definovaná.

Príklad 2.3.10.
a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ neexistujú, ale existujú:

$$\lim_{n\to\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 - \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty - \infty$ nemá zmysel.

Limita ale existuje pretože $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - n) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (n-1) = \infty \cdot \infty = \infty$. ■

Príklad 2.3.11.
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^3-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}}=\frac{0+0}{1-0}=0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}}=\frac{\infty-0}{1+0}=\infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-n^3}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4(1-n^{-1})}{n^2(1+n^{-1})}=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}}=\infty\cdot\frac{1-0}{1+0}=\infty\cdot 1=\infty.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(1+n^{-1})}{n^2(1-2n^{-2})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n^{-1}}{1-2n^{-2}}=\frac{1+0}{1-0}=1.$ ∎

Limitu môžeme vypočítať rôznymi spôsobmi. Musíme si dávať pozor, aby sme nedostali nedefinované výrazy, ako napríklad v limite z príkladu 2.3.11 c):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-n^3}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2-n)}{n^2(1+n^{-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{1+n^{-1}}=\frac{\infty-\infty}{1+0}=\infty-\infty.$$

Veta 2.3.14.
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0.$

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Vyplýva z vety 2.3.11.

$PP_{\Leftarrow}$: $0=-\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}(-|a_n|)\le\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0\;\Rightarrow\;\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$ ∎

Príklad 2.3.12.
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\sqrt{1+n^{-1}}-\sqrt{n}\right]=\infty\cdot(1-\infty)=-\infty.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty+\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-n\right]\cdot\frac{\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1-n^2}{\sqrt{n+1}+n}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}\,\frac{1+n^{-1}-n}{\sqrt{n^{-1}+n^{-2}}+1}=\frac{1+0-\infty}{0+1}=-\infty.$ ∎

Príklad 2.3.13.
Vypočítajte limitu **geometrickej postupnosti** $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$, kde $a\in R$.

Riešenie.
$a>1\;\Rightarrow\;a^n\longmapsto\infty,\qquad a=1\;\Rightarrow\;a^n=1,\qquad a\in(-1;1)\;\Rightarrow\;a^n\longmapsto 0,$
$a=-1\;\Rightarrow\;a^n=a^{2k}\longmapsto 1,\;a^n=a^{2k-1}\longmapsto -1\;\Rightarrow$ limita neexistuje,
$a<-1\;\Rightarrow\;a^n=a^{2k}\longmapsto\infty,\;a^n=a^{2k-1}\longmapsto-\infty\;\Rightarrow$ limita neexistuje.

$$\Rightarrow\;\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}\nexists, & \text{pre } a\in(-\infty;-1\rangle,\\ \infty, & \text{pre } a\in(1;\infty),\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & \text{pre } a\in(-1;1),\\ 1, & \text{pre } a=1.\end{cases}$$ ∎

Nasledujúce dve vety nám môžu uľahčiť výpočet limít.

Veta 2.3.15.
$a_n>0$ pre všetky $n\in N$ o.k.p. $\xRightarrow{\text{ak limity existujú}}\;\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$

Veta 2.3.16.
$a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p., $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^* \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } a < 1, \\ \infty, & \text{pre } a > 1. \end{cases}$

Dôkaz.
$a<1 \Rightarrow$ zvoľme $q\in R$: $a<q<1 \xRightarrow{\text{veta 2.3.13}}$ existuje $n_0\in N$, že $\sqrt[n]{a_n}<q$ pre $n\geq n_0 \Rightarrow$

$$0 \leq a_n < q^n \;\Rightarrow\; 0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$a>1 \Rightarrow$ zvoľme $q\in R$: $1<q<a \Rightarrow$ existuje $n_0\in N$, že $q<\sqrt[n]{a_n}$ pre $n\geq n_0 \Rightarrow$

$$1 < q^n < a_n \;\Rightarrow\; \infty = \lim_{n\to\infty} q^n \leq \lim_{n\to\infty} a_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \infty. \blacksquare$$

Dôsledok 2.3.16.a.
$a_n > 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^* \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } a < 1, \\ \infty, & \text{pre } a > 1. \end{cases}$

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, potom vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o konvergencii postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Napríklad pre $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad \text{ale} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Na záver tejto časti uvedieme bez výpočtu niektoré dôležité limity, na ktoré sa budeme v budúcnosti odvolávať, a vyriešime niektoré ukážkové príklady.

Veta 2.3.17.
Pre všetky $a, b \in R$, $a > 0$ platí:[12] $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{b}{n}\right)^n = \mathrm{e}^b,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a, \quad \lim_{n\to\infty} \tfrac{n!}{n^n} = 0.$$

Príklad 2.3.14.
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \mathrm{e}^2.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n}{n}(n+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty. \blacksquare$

Príklad 2.3.15.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$, kde $a > 0$, $q > 0$.

Riešenie.
$a \neq 1 \;\Rightarrow\; a_n = \frac{n^q}{a^n} \;\Rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}\frac{a^n}{n^q} = \frac{1}{a}(1+\frac{1}{n})^q \mapsto \frac{1}{a}\cdot 1^q = \frac{1}{a}.$

$a = 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty. \qquad \Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } a > 1, \\ \infty, & \text{pre } a \leq 1. \end{cases} \blacksquare$

Príklad 2.3.16.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

Riešenie.
$a_n = \frac{n^n}{n!} \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \;\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n = \mathrm{e}. \blacksquare$$

[12] Číslo e nazývame **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je približne $2{,}718\,281\,827$.

Príklad 2.3.17.
Dokážte, že pre všetky $a \in R$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Riešenie.
Zvoľme $k \in N$: $\frac{|a|}{k} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!}\frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!}\frac{k^k}{k^k}\frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!}\left[\frac{|a|}{k}\right]^n \Rightarrow$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} \le \lim_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!}\left[\frac{|a|}{k}\right]^n = \frac{k^k}{k!}\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{|a|}{k}\right]^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

Iné riešenie.
$a_n = \frac{a^n}{n!} \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} \;\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Iné riešenie.
$a_n = \frac{a^n}{n!} \;\Rightarrow\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \;\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0. \blacksquare$$

Príklad 2.3.18.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, kde $a \in R$, $a > 0$, $a \ne \mathrm{e}$.

Riešenie.
$a_n = \frac{a^n n!}{n^n} \;\Rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{a^n n!} = \frac{a\, n^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \;\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a\lim_{n\to\infty}\left[\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \frac{a}{\mathrm{e}} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } a < \mathrm{e},\\ \infty, & \text{pre } a > \mathrm{e}. \end{cases} \blacksquare$$

Príklad 2.3.19.
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n}\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3} = 1\cdot\frac{0+1}{2\cdot 0+3} = \frac{1}{3}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2} - \frac{1+\cdots+n}{n+2}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2} - \frac{n(n+1)}{2(n+2)}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3\cdot 1 = 3. \blacksquare$

Príklad 2.3.20.
Vypočítajte limitu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}$.

Riešenie.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+6) = a+6 \Rightarrow a^2 = a+6 \Rightarrow$

$$a^2-a-6 = (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ alebo } a = 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3 \text{ (pokiaľ existuje).}$$

Ešte musíme ukázať, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, t. j. že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

$a_1 = 1 \;\Rightarrow\; a_2 = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3 \;\Rightarrow\; a_3 = \sqrt{a_2+6} < \sqrt{3+6} = 3 \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}+6} < \sqrt{3+6} = 3,\ n \in N \;\Rightarrow\; \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená zhora.}$$

$a_n > 0$, $a_n < 3$, $n \in N \;\Rightarrow\; a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - a_n - 6 = (a_n-3)(a_n+2) < 0 \;\Rightarrow$

$$a_n^2 < a_{n+1}^2 \;\Rightarrow\; a_n < a_{n+1} \;\Rightarrow\; \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je rastúca.}$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, zhora ohraničená $\;\Rightarrow\; \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3. \blacksquare$

Príklad 2.3.21.
Vypočítajte limitu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,2;\ 0,23;\ 0,233;\ \ldots\}$, t. j. vyjadrite $0,2\overline{3}$ ako zlomok.

Riešenie.
$q=0,1<1 \Rightarrow a_1=0,2 \Rightarrow a_2=0,2+0,03 \Rightarrow a_3=0,2+0,03+0,003=0,2+0,03(1+q) \Rightarrow$

$$a_n = 0,2+0,03(1+q+\cdots+q^{n-2}) = 0,2+0,03\tfrac{1-q^{n-1}}{1-q},\ n\in N \ \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [0,2+0,03\,\tfrac{1-q^{n-1}}{1-q}] = 0,2+0,03\,\tfrac{1}{1-q} = 0,2+\tfrac{0,03}{0,9} = \tfrac{7}{30} \ \Rightarrow\ 0,2\overline{3} = \tfrac{7}{30}.\ \blacksquare$$

Cvičenia

2.3.1. Nájdite množinu hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak: $\clubsuit$

a) $a_n = 2/(n+3)$ pre n nepárne a $a_n = 3^{-n}$ pre n párne,
b) $a_n = (n+1)/(n-1)$ pre n nepárne a $a_n = 3^n/(1+3^n)$ pre n párne,
c) $a_n = 1+3^{-n}$ pre n nepárne a $a_n = n/(n+1)$ pre n párne,
d) $a_n = n/(2n+3)$ pre n nepárne a $a_n = (2n+3)/n$ pre n párne.

2.3.2. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$. Zistite, či $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú alebo divergujú. Uveďte príklady. $\clubsuit$

2.3.3. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$. Zistite, či $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú alebo divergujú. Uveďte príklady. $\clubsuit$

2.3.4. Nájdite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platí: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq 1,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty,$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) \neq 0.$

2.3.5. Dokážte, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadaná rekurentne $a_{n+1} = 1+a_n-n$, $a_1 = 1$ je nerastúca a ohraničená zhora. Nájdite všeobecný vzorec pre člen a_n a vypočítajte jej limitu. $\clubsuit$

2.3.6. Nájdite rekurentné vyjadrenie pre člen a_n, $n\in N$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\clubsuit$

a) $\{2^n+3\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, c) $\{1-n\}_{n=1}^{\infty}$, d) $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

2.3.7. Nájdite všeobecný vzorec pre n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne: $\clubsuit$

a) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+1$, b) $a_1=1,\ a_{n+1}=-a_n$, c) $a_1=1,\ a_{n+1}=2(n+1)a_n$,

2.3.8. Nájdite množiny hromadných hodnôt postupností: $\clubsuit$

a) $\{(-1)^n \sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\{(-n)^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$, c) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, d) $\{n^{-2n}\}_{n=1}^{\infty}$,
e) $\{n+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, f) $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$, g) $\{(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n)\}_{n=1}^{\infty}$.

2.3.9. Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť štvorcov, kde S_1 je štvorec so stranou $a_1 = a > 0$ a štvorec S_n, $n \geq 2$ má vrcholy umiestnené v stredoch strán štvorca S_{n-1}. $\clubsuit$

a) Určte všeobecný vzorec pre dĺžku strany a_n štvorca S_n, $n\in N$.
b) Určte súčet obvodov štvorcov S_n. c) Určte súčet obsahov štvorcov S_n.

2.3.10. Určte, ktoré z nasledujúcich rekurentne zadaných postupností konvergujú: ♣

a) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{a_n} + 1}$,
b) $a_0 = 11,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 5}$,
c) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$,
d) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$,
e) $a_0 = 0,\ a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n}$,
f) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n}$,

2.3.11. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rekurentne zadaná vzťahmi: ♣

a) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2},\ a_0 > 0$,
b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12},\ a_0 > 0$,
c) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 20},\ a_0 > 0$,
d) $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2},\ a_0 \in \langle -1; 1\rangle$,
e) $a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n},\ a_0 \in R$.
f) $a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{4},\ a_0 \in \langle -1; 1\rangle$,
g) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n},\ a_0 > 0$,
h) $a_{n+1} = 1 + a_n^{-1},\ a_0 = 1$,

2.3.12. Určte $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, ak pre všetky $n \in N$ platí: ♣

a) $a_n = \frac{n \sin n!}{n^2+1}$,
b) $a_n = \frac{n \cos n!}{n^2+1}$,
c) $a_n = \frac{n \sin n!}{n^2-1}$,
d) $a_n = \frac{n \cos n!}{n^2-1}$.

2.3.13. Určte limity nasledujúcich postupností (vyjadrite periodické čísla ako zlomky): ♣

a) $\{0,1;\ 0,13;\ 0,135;\ 0,1355;\ \ldots\}$,
b) $\{0,5;\ 0,53;\ 0,533;\ 0,5333;\ \ldots\}$,
c) $\{0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots\}$,
d) $\{0,5;\ 0,50;\ 0,505;\ 0,5050;\ \ldots\}$,
e) $\{0,6;\ 0,66;\ 0,666;\ 0,6666;\ \ldots\}$,
f) $\{0,1;\ 0,12;\ 0,121;\ 0,1212;\ \ldots\}$.

2.3.14. Určte $a \in R$ tak, aby nasledujúce limity boli vlastné: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a+5}{1+n^3}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a + \frac{1}{n}\right]^n$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a+1}{3}\right]^n$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-a^n}{1+a^n}$.

2.3.15. Nájdite všetky čísla $a, b \in R$ tak, aby platilo: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+2} + an + b\right] = 0$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n+2} + an + b\right] = 0$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^a}{n^2+1} + bn\right] = 0$.

2.3.16. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2}{1-n^2}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$.

2.3.17. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n+1}{2n^2+1}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n+1}{2n^4+1}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n+1}{2n^6+1}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+3}\right]$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{2n^2}{n+2} - 2n\right]$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{3n^2-n+1}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n - \frac{n^2}{n+1}\right]$,
h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-3n^2+2}{n^2+1}$,
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n+3}\right]$.

2.3.18. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3^n}{n-3^n}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n+1}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n-1}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-n}{n^4}$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$,
h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}$, j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n n+1}{n!+1}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!}{(3n)^n}$, n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$, o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n-1}{n+1}\right]^n$, p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n-3}{n}\right]^{\frac{n}{2}}$,

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{2n-1}{2n+1}\right]^n$, r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\frac{5}{n}\right]^n$, s) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\frac{1}{3n}\right]^n$, t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+6}{n+5}\right]^n$.

2.3.19. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$.

2.3.20. Nech $a, b\in R$, $b \geq a > 0$. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n-b^n}{a^{n+1}-b^{n+1}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right]^n$.

2.3.21. Nech $a\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{a^n+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^{2n}+1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a+3}{2}\right]^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a+\frac{1}{n}\right]^n$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} a^2\sqrt{\frac{n-a}{n}}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n-a}{n+a}\right]^n$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-3^n}$.

2.3.22. Nech $a, b\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n}-\sqrt{n-a}\right]$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n(n-a)}-n\right]$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+n}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1}-n\right]$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\sqrt{n^2-1}\right]$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3-1}-n\right]$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{an^2}{n+1}-\frac{bn^2}{n-1}\right]$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n-a}-\frac{n^2}{n-b}\right]$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-an^2+3n}{n+5}$.

2.3.23. Nech $a, b\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[3n-\sqrt{9n^2-10n+1}\right]$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n+1}-\sqrt[3]{n^3-n+1}\right]$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right]$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n-a)(n-b)}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n-\sqrt{n+1}}\right]$.

2.3.24. Nech $a, b\in R$, $a \geq b \geq 0$. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[2\sqrt{a}\right]^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} na^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[n\sqrt{a}-1]^2}{[n\sqrt{b}-1]^2}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right]$.

2.4 Číselné rady

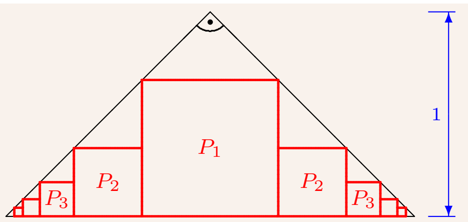
Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. S výrazmi, ktoré obsahujú nekonečne veľa sčítancov sa nepriamo stretávame už v základnej škole. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

Príklad 2.4.1.
Nech T je pravouhlý trojuholník (obr. 2.4.10) s preponou 2, výškou 1 a odvesnami $\sqrt{2}$. Obsah trojuholníka T je $S = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$.
Uvažujme postupnosť štvorcov vpísaných do T . Prvý štvorec má stranu $a = \frac{2}{3}$ a obsah $P_1 = \frac{4}{9}$. Druhý štvorec (sú dva) má stranu $a_2 = \frac{a}{2}$ a obsah $P_2 = \frac{P_1}{4} = \frac{4}{9\cdot 4}$. Tretí štvorec (sú dva) má stranu $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{a}{2^2}$ a obsah $P_3 = \frac{P_1}{4^2} = \frac{4}{9\cdot 4^2}$ atď. Je zrejmé, že obsah trojuholníka T je väčší ako súčet obsahov štvorcov, t. j.

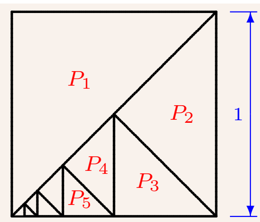
$$1 > P_1 + 2\frac{P_1}{4} + 2\frac{P_1}{4^2} + \cdots + 2\frac{P_1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{9} + \frac{8}{9\cdot 4} + \frac{8}{9\cdot 4^2} + \cdots + \frac{8}{9\cdot 4^n} + \cdots > 0. \blacksquare$$

Príklad 2.4.2.
Nech S je štvorec so stranou $a = 1$ a obsahom $P = 1^2 = 1$ (obr. 2.4.11).
Štvorec S rozdeľme uhlopriečkou na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Jeden označíme T_1 a druhý rozdelíme na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Jeden označíme T_2 a druhý opäť rozdelíme na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Takto pokračujeme pre všetky $n \in N$.
Obsah trojuholníka T_1 je $P_1 = \frac{P}{2} = \frac{1}{2}$, obsah trojuholníka T_2 je $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{1}{2^2}$, obsah trojuholníka T_3 je $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{1}{2^3}$ atď. Je zrejmé, že tieto trojuholníky pokryjú celý štvorec S, t. j. súčet ich obsahov je rovný číslu $P = 1$. Potom platí:

$$1 = P_1 + \frac{P_1}{2} + \frac{P_1}{2^2} + \cdots + \frac{P_1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots . \blacksquare$$



Obr. 2.4.10: Príklad 2.4.1



Obr. 2.4.11: Príklad 2.4.2

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom **nekonečným číselným radom** (**nekonečným radom čísel**), stručne (**číselným**) **radom**, nazývame výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Číselné rady a postupnosti úzko súvisia. Rad je jednoznačne určený postupnosťou. To znamená, že rad môžeme zadať **všeobecným vyjadrením** (**explicitne**) každého člena a_n, $n \in N$ alebo **rekurentným vyjadrením** prvého člena a členov a_n, $n \in N$.

Poznámka 2.4.1.
Pre spočítavanie nekonečného počtu sčítancov neplatia všetky pravidlá, ktoré platia pre konečné počty sčítancov. Neplatí tu komutatívny zákon (prerovnanie radov, str. 64), a ako

ukazuje nasledujúci príklad, ani asociatívny zákon:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=\begin{cases}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0,\\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+\cdots=1.\end{cases}$$

Nech $k\in N$, **k-tým čiastočným súčtom radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ nazývame konečný súčet

$$s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

Postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **postupnosťou čiastočných súčtov radu** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a **k-tým zvyškom radu** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ nazývame nekonečný súčet

$$r_k=a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\cdots.$$

Z definície vyplýva, že pre všetky $k\in N$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s_k+r_k=\sum_{n=1}^{k}a_n+\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{k}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{k+n}.$$

Vzťah medzi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný. Pre $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2=s_1+a_2,\quad \ldots,\quad s_n=a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n=s_{n-1}+a_n,\quad \ldots.$$

Ak označíme $s_0=0$, potom pre rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ platí:

$$a_1=s_1=s_1-s_0,\quad a_2=s_2-s_1,\quad \ldots,\quad a_n=s_n-s_{n-1},\quad \ldots.$$

Ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, potom hovoríme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **má súčet** $s\in R^*$ a zapisujeme:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}s_n=s,\quad \text{resp.}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\longmapsto s.$$

Ak $s\in R$, potom hovoríme, že **rad konverguje k číslu s** (**je konvergentný k s**) alebo stručne **rad konverguje** (**je konvergentný**), označujeme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\longmapsto$.

Ak $s=\infty$ [resp. $-\infty$], potom hovoríme, že **rad diverguje do ∞** [resp. **do $-\infty$**]. Ak rad súčet nemá, t. j. ak $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **rad osciluje**.

Ak rad nemá konečný súčet, t. j. ak diverguje do $\pm\infty$ alebo osciluje, potom hovoríme, že **rad diverguje** (**je divergentný**) a označujeme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\not\longmapsto$.

Príklad 2.4.3.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}0=0$, pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$, pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)=-\infty$, pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\{-n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ osciluje, pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\{-1,0,-1,0,\ldots\}$ a $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ neexistuje.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$ ■

Príklad 2.4.4.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1.$

Riešenie.
Pre všetky $n \in N$ platí $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - 0 = 1. \blacksquare$$

Príklad 2.4.5.
Harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$

Riešenie.
Pre všetky $n \in N$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a podľa vety 2.3.10 má limitu. Pre vybranú postupnosť $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_{2^0} = s_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}, \qquad s_{2^1} = s_2 = s_1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2},$$
$$s_{2^2} = s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}, \quad \cdots, \quad s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Poslednú nerovnosť dokážeme pomocou matematickej indukcie. Pre s_1 sme vzťah už dokázali. Predpokladajme, že platí $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Potom pre $s_{2^{k+1}}$ platí:

$$s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq$$
$$\geq 1 + \frac{k}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k-\text{krt}} = 1 + \frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}.$$

Potom: $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} \geq \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{n}{2}\right) = \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty. \blacksquare$

Príklad 2.4.6.
Geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots$, kde $q \in R$.

Riešenie.
$q = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$
$q \neq 1 \;\Rightarrow\; s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = (q^{n-1} + \cdots + q + 1)\frac{q-1}{q-1} = \frac{q^n-1}{q-1} \xrightarrow{\text{príklad 2.3.13}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \begin{cases} \frac{\infty-1}{q-1} = \infty, & \text{pre } q > 1, \text{ t. j. diverguje do } \infty, \\ \infty, & \text{pre } q = 1, \text{ t. j. diverguje do } \infty, \\ \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}, & \text{pre } q \in (-1;1), \text{ t. j. konverguje}, \\ \nexists, & \text{pre } q \leq -1, \text{ t. j. osciluje.}^{13} \end{cases} \blacksquare$$

[13] Použili sme nerovnosť $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ pre $a, b \in R$, $n \in N$.

Príklad 2.4.7.
Vyšetrite konvergenciu číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Riešenie.
$\forall n \in N$: $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \blacksquare$$

2.4.1 Vlastnosti konvergentných radov

V tejto časti uvedieme niektoré základné vlastnosti číselných radov, ako aj niektoré kritériá na určovanie konvergencie, resp. divergencie radov.

Veta 2.4.1 (Nutná podmienka konvergencie radu).
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$.
$n \in N$: $a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \blacksquare$

Ako dokazujú príklady 2.4.5 a 2.4.7, tvrdenie vety sa nedá obrátiť, t. j. z podmienky $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nevyplýva konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 2.4.1.a.
Ak neplatí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longmapsto$.

Príklad 2.4.8.
a) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+5+\cdots$ nekonverguje (tento rad diverguje do ∞), pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

b) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n = -1+2-3+4-5+\cdots$ nekonverguje (tento rad osciluje), pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$ totiž neexistuje. $\blacksquare$

Podobne ako pri postupnostiach, môžeme niekedy o konvergencii radu rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali jeho súčet. Nasledujúca veta je analógiou Cauchy–Bolzanovho princípu pre číselné postupnosti (veta 2.3.4, str. 42), ktorý je pre postupnosti čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sformulovaný v leme 2.4.2.

Lema 2.4.2.
$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Veta 2.4.3 (Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie radu).
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n, k \in N$, $n \geq n_0$ platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

Dôkaz.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in R$, $m = n+k > n \xLeftrightarrow{\text{lema 2.4.2}} |s_m - s_n| = |s_{n+k} - s_n| =$
$= |(a_1 + \cdots + a_n + \cdots + a_{n+k}) - (a_1 + \cdots + a_n)| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$ ■

Podobne, ako pri číselných postupnostiach, ak zmeníme v číselnom rade konečný počet členov, jeho konvergencia, divergencia do $\pm\infty$, resp. oscilácia sa nezmenia. Toto platí pre rady vo všeobecnosti, t. j. **konečný počet členov nemá vplyv na vlastnosti radu.**

Rady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ nazývame **súčtom** a **rozdielom radov** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, resp. **násobkom číselného radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **číslom** $c \in R$.

Veta 2.4.4.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in R^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \in R^*$, $c \in R \xRightarrow{\text{ak majú príslušné výrazy zmysel}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cs.$$

Dôkaz.
Ak označíme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom sú postupnosti $\{s_n \pm t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c\, s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosťami čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ a tvrdenie vyplýva z vety 2.3.11. ■

Opačné tvrdenie v predchádzajúcej vete neplatí, t. j. konvergencia súčtu radov ešte nezaručuje konvergenciu jednotlivých radov. Napríklad $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] \longmapsto 0$, aj keď $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \not\longmapsto$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \not\longmapsto$.

Príklad 2.4.9.
Určte súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} text\frac{ap^n+bq^n}{p^nq^n}$, kde $a, b, p, q \in R$, $|p| > 1$, $|q| > 1$.

Riešenie.
$|p| > 1$, $|q| > 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{|p|} < 1$, $\frac{1}{|q|} < 1 \xRightarrow{\text{príklad 2.4.6}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{p}\right]^n = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} \;\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{q}{q-1} \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ap^n+bq^n}{p^nq^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a}{q^n} + \frac{b}{p^n}\right] = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} + b\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{aq}{q-1} + \frac{bp}{p-1}. \;■$$

Pre číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ (poznámka 2.4.1) neplatí asociatívny zákon. Problém je v tom, že tento rad nemá súčet. Ale ak rad súčet má, potom asociatívny zákon platí.

Veta 2.4.5.
Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in R^*$, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť indexov, potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_1}}_{c_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{c_2} + \cdots \underbrace{a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}}_{c_n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = s.$$

Dôkaz.
Pre $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ platí:

$$t_1 = c_1 = a_1 + \cdots + a_{k_1} = s_{k_1}, \quad t_2 = c_1 + c_2 = a_1 + \cdots + a_{k_2} = s_{k_2}, \;\ldots$$
$$t_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_1 + \cdots + a_{k_n} = s_{k_n}, \;\ldots . \;\Rightarrow$$

$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. ■

Dôsledok 2.4.5.a.
Ak z radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vynecháme všetky nulové členy alebo doň vložíme ľubovoľný (aj spočítateľný) počet nulových členov, potom sa jeho súčet nezmení.

2.4.2 Číselné rady s nezápornými členmi

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi, t. j. nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$, Jeho postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a podľa vety 2.3.10 má limitu. To znamená, že každý **rad s nezápornými členmi má súčet**.

Ak je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora, potom rad konverguje, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$. V opačnom prípade rad diverguje do ∞, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longmapsto$.

Ak z takéhoto radu vylúčime všetky jeho nulové členy, dostaneme rad s rovnakým súčtom a pri vyšetrovaní konvergencie môžeme použiť aj podielové kritériá.

Veta 2.4.6.
$0 \leq a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in N \implies 0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty.$

Dôkaz.
$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
$n \in N \;\Rightarrow\; 0 \leq\; s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n = t_n \;\Rightarrow$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty. \blacksquare$$

Rovnako ako pri postupnostiach (poznámka 2.3.2) **konečný počet členov nemá vplyv na konvergenciu a divergenciu radu**. Je ale zrejmé, že **má vplyv na súčet**.

V budúcnosti budeme niektoré podmienky pre rady taktiež formulovať v zjednodušenom tvare **pre všetky a_n okrem konečného počtu členov** a zapisovať **o.k.p.**.

Veta 2.4.7 (Porovnávacie kritérium).
$0 \leq a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in N$ o.k.p. $\implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto, \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \infty.$$

Dôkaz.
Tvrdenie vyplýva priamo z vety 2.4.6. $\blacksquare$

Príklad 2.4.10.
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, $\forall n \in N$: $\sqrt{n} \leq n$, t. j. $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \longmapsto \infty$.
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \longmapsto$ (príklad 2.4.4), $\forall n \in N$: $(n+1)^2 = (n+1)(n+1) \geq n(n+1) \;\Rightarrow$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \longmapsto. \blacksquare$$

Príklad 2.4.11.
Vyšetrite konvergenciu **Riemannovho rad** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Riešenie.
$p = 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longmapsto \infty$ (harmonický rad).
$p \leq 0 \;\Rightarrow\; -p \geq 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} n^{-p} = \left\{\begin{matrix} 1, & \text{pre } p = 0 \\ \infty, & \text{pre } p < 0 \end{matrix}\right\} \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p} \longmapsto \infty.$

$p\in(0;1) \;\Rightarrow\; \forall n\in N\colon\ n^p \le n \;\Rightarrow\; 0 \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n^p} \xRightarrow{\text{veta 2.4.7}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \longmapsto \infty.$

$p = 2 \xRightarrow{\text{príklad 2.4.10}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \longmapsto.$

$p > 2 \;\Rightarrow\; \forall n\in N\colon\ n^p \ge n^2 \;\Rightarrow\; 0 \le \frac{1}{n^p} \le \frac{1}{n^2} \xRightarrow{\text{veta 2.4.7}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \longmapsto.$

$p\in(1;2) \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \longmapsto.$ (Dôkaz tohto tvrdenia je s našimi doterajšími vedomosťami pomerne zložitý a prácny a preto ho nebudeme robiť.) ■

Dôsledok 2.4.7.a (Limitný tvar).
$0 < a_n \le b_n$ pre všetky $n\in N$ o.k.p., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;\infty) \implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ súčasne konvergujú alebo divergujú, t. j. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto.$$

Dôkaz.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;\infty) \;\Rightarrow\; \{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \xRightarrow{\text{veta 2.3.8}} \{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow$

$\exists\, \alpha,\beta\in R,\ 0 < \alpha < \beta < \infty\ \forall n\in N\colon\ \alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta \;\Rightarrow\; \alpha b_n < a_n < \beta b_n \;\Rightarrow$

$$\xRightarrow[\text{veta 2.4.7}]{\text{veta 2.4.4}} \begin{cases} NP_{\Rightarrow}\colon \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha b_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto. \\ PP_{\Leftarrow}\colon \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \beta b_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto. \end{cases}$$ ■

Ekvivalencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto$ znamená aj $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \not\longmapsto \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longmapsto$.

Príklad 2.4.12.
Uvažujme rady z príkladu 2.4.10.

a) O divergencii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ pomocou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nevieme rozhodnúť, pretože platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \longmapsto,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \longmapsto.$ ■

Veta 2.4.8.
$a_n > 0,\ b_n > 0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pre všetky $n\in N$ o.k.p. $\implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \infty.$$

Dôkaz.
Nech $k\in N$ je také, že pre všetky $n \ge k$ platí $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \;\Rightarrow\; 0 < \frac{b_n}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \;\Rightarrow$

$\forall n \ge k\colon\ 0 < \alpha = \frac{b_k}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \le \cdots \le \frac{b_n}{a_n} \le \cdots \;\Rightarrow\; \forall n \ge k\colon\ \alpha a_n \le b_n \;\Rightarrow$

$$\xRightarrow[\text{veta 2.4.7}]{\text{veta 2.4.4}} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \longmapsto \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto. \end{cases}$$ ■

Veta 2.4.9 (Podielové d'Alembertovo[14] kritérium).
Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p. a nech:

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, kde $q \in (0;1) \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

Dôkaz.
a) $n \in N$o.k.p. $\Rightarrow\ 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \longmapsto \xrightarrow{\text{veta } 2.4.8} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$.

b) $n \in N$o.k.p. $\Rightarrow\ \frac{1}{1} = 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 \longmapsto \infty \xrightarrow{\text{veta } 2.4.8} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$. ■

Dôsledok 2.4.9.a (Limitný tvar).
Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p \Longrightarrow$

a) $p < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 < p \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$,
c) $p = 1 \Longrightarrow$ nevieme rozhodnúť o konvergencii alebo divergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz.
a) $a_n > 0,\ p \in \langle 0;1),$ zvoľme $\varepsilon > 0$ tak, aby $p+\varepsilon < 1 \xrightarrow{\text{veta } 2.3.2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \in O_\varepsilon(p) \text{ pre všetky } n \in N\text{o.k.p.} \Rightarrow 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < p+\varepsilon < 1 \xrightarrow{\text{veta } 2.4.9} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto.$$

b) $1 < p \xrightarrow{\text{dôsledok } 2.3.16.\text{a}} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \xrightarrow{\text{dôsledok } 2.4.1.\text{a}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

c) Napríklad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \longmapsto,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longmapsto \infty$. ■

Príklad 2.4.13.
Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2\cdot 6^{k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$, $k \in N$.

Riešenie.
Daný rad môžeme vyjadriť v tvare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2\cdot 6^0} + \frac{1}{6^1} + \frac{1}{2\cdot 6^1} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 6^{k-1}}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{6^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 6^k}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{6^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots.$$

$$\left.\begin{array}{ll} n = 2k & \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{6^k}{2\cdot 6^k} = \frac{1}{2} \\ n = 2k+1 & \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{2\cdot 6^k}{6^{k+1}} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ neexistuje } \Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2} < 1 \text{ pre všetky } n \in N \xrightarrow{\text{veta } 2.4.9} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto. \ ■$$

Veta 2.4.10 (Odmocninové Cauchyho kritérium).
Nech $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p. a nech:

a) $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, kde $q \in (0;1) \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 \leq \sqrt[n]{a_n} \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

[14] *Jean Baptiste d'Alembert* [1717–1783] — francúzsky matematik, fyzik a filozof.

Dôkaz.

a) $n \in N$ o.k.p. $\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a_n} \leq q$, t. j. $a_n \leq q^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \longmapsto \xRightarrow{\text{veta 2.4.7}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$.

b) $n \in N$ o.k.p. $\Rightarrow 1 < \sqrt[n]{a_n}$, t. j. $1 < a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 \longmapsto \infty \xRightarrow{\text{veta 2.4.7}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$. ■

Dôsledok 2.4.10.a (Limitný tvar).
Nech $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p., $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p \implies$

a) $p < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 < p \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$,
c) $p = 1 \implies$ nevieme rozhodnúť o konvergencii alebo divergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz.

a) $a_n > 0$, $p \in \langle 0; 1)$, zvoľme $\varepsilon > 0$ tak, aby $p+\varepsilon < 1 \xRightarrow{\text{veta 2.3.2}}$

$$\sqrt[n]{a_n} \in O_\varepsilon(p) \text{ pre všetky } n \in N \text{ o.k.p.} \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a_n} < p+\varepsilon < 1 \xRightarrow{\text{veta 2.4.10}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto.$$

b) $1 < p \xRightarrow{\text{dôsledok 2.3.16}} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \xRightarrow{\text{dôsledok 2.4.1.a}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

c) Napríklad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \longmapsto$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longmapsto \infty$. ■

Poznámka 2.4.2.
Predpoklady a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ z viet 2.4.9 a 2.4.10 nemôžeme nahradiť jednoduchšími tvarmi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\sqrt[n]{a_n} < 1$. Dokazuje to rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longmapsto \infty$, ktorý spĺňa obidva predpoklady $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1$ pre všetky $n \in N$.

Príklad 2.4.14.
Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$, $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$, $k \in N$.

Riešenie.
Daný rad môžeme vyjadriť v tvare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{3^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{3^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots.$$

$$\left.\begin{array}{ll} n = 2k-1 \Rightarrow & \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{2^k}{3^k} < 1 \\ n = 2k \quad\ \Rightarrow & \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{3^k}{2^{k+1}} > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ podielové d'Alembertovo kritérium nemôžeme použiť.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} n = 2k-1 \Rightarrow & \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = \frac{1}{\sqrt[2k-1]{2^k}} \leq \frac{1}{\sqrt[2k]{2^k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n = 2k \quad\ \Rightarrow & \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[2k]{a_{2k}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{3^k}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ pre všetky } n \in N \xRightarrow{\text{veta 2.4.10}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto. \ ■$$

Príklad 2.4.15.
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longmapsto \infty$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longmapsto$ pre $a > 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1$,

resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1$. ■

Na záver uvedieme bez dôkazu Raabeho kritérium, ktoré je ešte silnejšie ako Cauchyho kritérium a samozrejme tiež ako D'Alembertovo kritérium. To znamená, že ak o konvergencii radu môžeme rozhodnúť pomocou d'Alembertovho kritéria, potom môžeme rozhodnúť tiež pomocou Cauchyho a taktiež pomocou Raabeho kritéria.

Veta 2.4.11 (Raabeho[15] kritérium).
Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p. a nech:

a) $r \leq n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right]$, kde $r > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] \leq 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

Dôsledok 2.4.11.a (Limitný tvar).
Nech $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$ o.k.p., $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = t \in R^* \implies$

a) $1 < t \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $t < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

Príklad 2.4.16.
Vyšetrite konvergeciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > 0$.

Riešenie.
Limitné d'Alembertovo a Cauchyho kritériá použiť nemôžeme, pretože:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)(n+1)!}{n!\ a(a+1)\cdots(a+n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} = 1.$$

Raabe: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{na}{n+1} = a \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = a$.

$a = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \longmapsto \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$ pre $a > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$ pre $a \leq 1$. ■

2.4.3 Absolútna, relatívna konvergencia a alternujúce rady

Doteraz sme sa zaoberali číselnými radmi s nezápornými členmi. Tieto rady konvergujú alebo divergujú do ∞. Rady vo všeobecnosti môžu mať aj záporné členy. Pri vyšetrovaní radov je niekedy vhodné skúmať rady s absolútnymi hodnotami ich členov.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne (je absolútne konvergentný), ak konverguje rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, t. j. ak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longmapsto$. Označujeme $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \overset{\text{a}}{\longmapsto}$.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne (neabsolútne), ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, t. j. ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longmapsto \infty$. Označujeme $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \overset{\text{r}}{\longmapsto}$.

[15] *Wilhelm Raabe* [1831–1910] — nemecký matematik.

Veta 2.4.12.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xmapsto{\text{a}}$ (absolútne) $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$ (konverguje).

Dôkaz.
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longmapsto \xrightarrow{\text{Cauchy-Bolzanov princíp konvergencie (veta 2.4.3)}}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n, k \in N,\ n \geq n_0\colon\ \Big| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| \Big| < \varepsilon\ \Rightarrow$

$\quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto .$ ■

Príklad 2.4.17.
Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$.

Riešenie.
Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:
$n \in N \Rightarrow s_{2n} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,\ s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xmapsto{\text{r}}.$$ ■

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad, potom rady[16]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = s^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = s^-$$

obsahujú iba nezáporné členy. To znamená, že majú vždy súčet, pričom môže byť aj nevlastný. Potom na základe vety 2.4.4, pokiaľ majú uvedené výrazy zmysel, platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = s^+ - s^-, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = s^+ + s^-.$$

Poznámka 2.4.3.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xmapsto{\text{a}} \implies (s^+ - s^-) \in R,\ (s^+ + s^-) \in R \implies s^+, s^- \in R.$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xmapsto{\text{r}} \implies (s^+ - s^-) \in R,\ s^+ + s^- = \infty \implies s^+ = s^- = \infty.$

Nech $a_n \geq 0$ [resp. $a_n \leq 0$] pre všetky $n \in N$, potom **alternujúcim radom** (**radom so striedavými znamienkami**) nazývame rad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots .$$

Veta 2.4.13 (Leibnizovo kritérium).
Nech $a_n \geq 0$ pre $n \in N$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longmapsto$.

Dôkaz.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca $\Rightarrow\ \forall n \in N\colon\ a_n \geq a_{n+1}\ \Rightarrow\ \forall n \in N\colon\ a_n - a_{n+1} \geq 0.$
$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n\ \Rightarrow$
$\quad s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$

[16]Strana 30: $a^+ = \max\{a,\ 0\}$, $a^- = \max\{-a,\ 0\}$.

$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n} \;\Rightarrow$$
$\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a ohraničená zhora $\Rightarrow\; \{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto s \in R \;\Rightarrow$
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s \;\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longmapsto. \;\blacksquare$$

Príklad 2.4.18.
Anharmonický rad[17] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \overset{\text{r}}{\longmapsto} \ln 2.$

Riešenie.
$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \xRightarrow{\text{veta 2.4.13}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \longmapsto.$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{r}}{\longmapsto}. \;\blacksquare$$

Príklad 2.4.19.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} \overset{\text{a}}{\longmapsto} \ln 2.$

Riešenie.
$a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, $n \in N$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$
$n \in N \;\Rightarrow\; 0 < a_n,\quad 0 < s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} =$
$$= \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n}\right) = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n} = t_{2n} \;\Rightarrow$$
$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a je podpostupnosťou z postupnosti čiastočných súčtov anharmonického radu $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \ln 2$. Z toho vyplýva $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{a}}{\longmapsto} \ln 2$. $\blacksquare$

Niekedy je pri vyšetrovaní radu výhodné jeho členy vyjadriť v tvare súčinu $a_n b_n$ a vyšetrovať $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre ilustráciu uvedieme dve kritériá bez dôkazov.

Veta 2.4.14 (Abelovo[18] kritérium).
$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ \text{b) } \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je monotónna a ohraničená} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \text{číselný rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje.}$$

Požiadavku monotónnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemôžeme vynechať. Pre $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = (-1)^n$ by boli predpoklady vety splnené, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Veta 2.4.15 (Dirichletovo kritérium).
Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a nech platí:
$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená} \\ \text{b) } \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerastúca, } \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \text{číselný rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje.}$$

Leibnizovo kritérium je špeciálnym prípadom Dirichletovho. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria, potom stačí položiť $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = c_n$.

[17] Jeho súčet je $\ln 2$ (viď napr. [9]).
[18] *Niels Henrik Abel* [1802–1829] — nórsky matematik.

Príklad 2.4.20.
Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ln\left[c+\frac{1}{n}\right]$, $c>0$.

Riešenie.
Pre $c>0$ sú splnené predpoklady Abelovho kritéria:

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n\in N \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \longmapsto \ln 2.$

$b_n = \ln\left[c+\frac{1}{n}\right]$, $n\in N \;\Rightarrow\; c+1 \geq c+\frac{1}{n} \geq c+\frac{1}{n+1} \geq c \xRightarrow{\text{vlastnosti funkcie ln (str. 85)}}$

$$\ln(c+1) \geq \underbrace{\ln\left[c+\tfrac{1}{n}\right]}_{b_n} \geq \underbrace{\ln\left[c+\tfrac{1}{n+1}\right]}_{b_{n+1}} \geq \ln c \;\Rightarrow\; \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená, nerastúca}$$

$$\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ln\left[c+\frac{1}{n}\right] \longmapsto \text{ pre všetky } c>0. \;\blacksquare$$

2.4.4 Prerovnanie radov a rady s predpísaným súčtom

Už sme spomínali, že pre nekonečné rady vo všeobecnosti neplatí asociatívny zákon. Platí iba pre konvergentné rady (veta 2.4.5). S komutatívnym zákonom je to trochu zložitejšie, nemusí platiť ani pre konvergentné rady (príklad 2.4.21).

Nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel, ktorá obsahuje každé prirodzené číslo práve raz.[19] **Prerovnaným radom (prerovnaním) radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \cdots + a_{k_n} + \cdots .$$

Príklad 2.4.21.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots = \ln 2.$
Rad prerovnáme pomocou postupnosti

$$\{2k-1,\; 2(2k-1),\; 2\cdot 2k\}_{k=1}^{\infty} = \{1,2,4,\; 3,6,8,\; 5,10,12,\; 7,14,16,\; \ldots\}.$$

Potom dostaneme prerovnaný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \;+\; \frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8} \;+\; \cdots \;+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k} \;+\; \cdots .$$

Označme postupnosť čiastočných súčtov pôvodného radu $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a prerovnaného radu $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pre $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$, $k\in N$ a pre $k\longmapsto\infty$ platí:

$$t_{3k} = \left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k}\right] = \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k} = \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right] = \frac{1}{2}s_{2k} \longmapsto \frac{\ln 2}{2},$$

$$t_{3k+1} = t_{3k}+\frac{1}{2k+1} = \frac{s_{2k}}{2}+\frac{1}{2k+1} \longmapsto \frac{\ln 2}{2}, \qquad t_{3k+2} = \frac{s_{2k}}{2}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)} \longmapsto \frac{\ln 2}{2}.$$

To znamená, že prerovnaný rad konverguje k (inému) číslu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \frac{\ln 2}{2}$. $\blacksquare$

---
[19] Postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bijekcia množiny N na množinu N. To znamená, že pre každé $n\in N$ existuje $m\in N$ také, že platí $k_m=n$ (surjekcia) a pre všetky $m,n\in N$, $m\neq n$ platí $k_n\neq k_m$ (injekcia).

Prerovnaním konvergentného radu môžeme dostať aj divergentný rad. Dokonca môžeme tento rad prerovnať tak, aby smeroval k dopredu zvolenej hodnote $s \in R^*$.

Z poznámky 2.4.3 vyplýva, že prerovnávať k inému súčtu môžeme iba relatívne konvergentné rady.

Veta 2.4.16 (Riemann).
$\alpha \in R^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\mathrm{r}}{\longmapsto} \implies$ existuje prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longmapsto \alpha$.

Dôkaz.
Dôkaz je formálne náročný a nebudeme ho robiť. Myšlienku ukážeme na príklade 2.4.22. Je založená na skutočnosti, že súčty kladných a záporných členov relatívne konvergentného radu sú nevlastné (poznámka 2.4.3). ■

Príklad 2.4.22.
Prerovnajte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby konvergoval k číslu $\frac{5}{4}$.

Riešenie.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\mathrm{r}}{\longmapsto} \ln 2$ (príklad 2.4.18). Z poznámky 2.4.3 vyplýva:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \cdots = \infty, \quad M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} - \cdots = -\infty.$$

Z radu P vyberieme toľko prvých členov, aby ich súčet $s > \frac{5}{4}$. Potom k nim pridáme toľko prvých členov z radu M, aby ich spoločný súčet $s < \frac{5}{4}$. V našom prípade to bude:

$$1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3} \approx 1,333 > \tfrac{5}{4} = 1,25, \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{6} \approx 0,8333 < \tfrac{5}{4} = 1,25.$$

K nim pridáme toľko prvých nevybratých členov radu P, aby spoločný súčet $s > \frac{5}{4}$:

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{811}{630} \approx 1,287 > 1,25.$$

Potom k nim pridáme toľko prvých nevybratých členov radu M, aby spoločný súčet $s < \frac{5}{4}$:

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1307}{1260} \approx 1,037 < 1,25.$$

Takto môžeme pokračovať do nekonečna a prerovnaný rad bude konvergovať k číslu $\frac{5}{4}$. Prakticky pokračujeme po požadovanú presnosť. Pre ilustráciu uvedieme ešte dva kroky:

$$\begin{aligned} &1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} && \approx 1,272 > 1,25, \\ &1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{6} && \approx 1,105 < 1,25. \end{aligned}$$ ■

Pre absolútne konvergentné rady Riemannova veta neplatí. V tomto prípade každé prerovnanie daného radu konverguje k rovnakému súčtu (poznámka 2.4.3).

Príklad 2.4.23.
Určte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ pre n nepárne a $a_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$ pre n párne.

Riešenie.
Daný rad môžeme zapísať v tvare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \tfrac{1}{2^2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^4} - \tfrac{1}{2^3} + \cdots = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^4 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots.$$

Tento rad je prerovnaním geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xmapsto{\text{a}}$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = -1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}. \blacksquare$$

Na záver sa budeme zaoberať **úlohou ako nájsť nejaký rad s predpísaným súčtom**. Vytvoriť rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s konkrétnym súčtom $s \in R^*$ nie je zložité.

Príklad 2.4.24.
Nech $s \in R^*$. Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto s$.

Riešenie.
Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto s \in R^*$. Označme $s_0 = 0$. Ak pre $n \in N$ položíme:

$$a_1 = s_1 = s_1 - s_0, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad a_3 = s_3 - s_2, \quad \ldots, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots,$$

potom pre n-tý čiastočný súčet t_n radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$t_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) = s_n.$$

$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s.$

Iné riešenie.
Nech $s \in R$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$. Ak položíme $s_n = s + b_n$ pre $n \in N$, potom $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_1 = s_1 = s + b_1, \quad a_n = s_n - s_{n-1} = (s+b_n) - (s+b_{n-1}) = b_n - b_{n-1} \quad \text{pre } n \geq 2.$$

Zvoľme b_0 tak, aby $b_1 - b_0 = a_1 = s + b_1$, t. j. $b_0 = -s$. Potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s + b_n) = s + 0 = s.$$

Ak je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca, resp. neklesajúca, potom $a_n = b_n - b_{n-1} \geq 0$, resp. $a_n \leq 0$. To znamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s predpísaným súčtom obsahuje iba nezáporné. resp. nekladné členy a konverguje absolútne, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) \xmapsto{\text{a}} s.$ $\blacksquare$

Príklad 2.4.25.
Ak $s = 0$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$, potom pre všetky $n \in N$ platí:

$$a_1 = s_1 = 1, \quad a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-n}{n(n-1)} = \frac{-1}{(n-1)n} < 0 \quad \text{pre } n \geq 2 \ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \cdots - \frac{1}{(n-1)n} - \cdots = \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Z toho navyše vyplýva $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \xmapsto{\text{a}} 1.$ $\blacksquare$

Príklad 2.4.26.
Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto s,\ s=1.$

Riešenie.
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0.$ Potom (príklad 2.4.24) pre $n \in N$ platí:

$$s_n = s + b_n = 1 + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = 1, \quad a_1 = s + b_1 = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = \tfrac{2\cdot 1+1}{1\cdot(1+1)},$$

$$a_n = b_n - b_{n-1} = \tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \tfrac{(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1}\left[\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n}\right] = (-1)^{n+1}\tfrac{2n+1}{n(n+1)} \text{ pre } n \geq 2 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\tfrac{2n+1}{n(n+1)} = \tfrac{3}{1\cdot 2} - \tfrac{5}{2\cdot 3} + \tfrac{7}{3\cdot 4} - \tfrac{9}{4\cdot 5} + \cdots + (-1)^{n+1}\tfrac{2n+1}{n(n+1)} + \cdots \longmapsto 1.$$

Iné riešenie.
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{-1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0.$ Potom (príklad 2.4.24) pre $n \in N$ platí:

$$s_n = s + b_n = 1 - \tfrac{1}{(n+1)^2}, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = 1, \quad a_1 = s + b_1 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = \tfrac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot(1+1)^2},$$

$$a_n = b_n - b_{n-1} = -\tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{-n^2+n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2} = \tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0 \text{ pre } n \geq 2 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \tfrac{3}{1\cdot 4} + \tfrac{5}{4\cdot 9} + \tfrac{7}{9\cdot 16} + \tfrac{9}{16\cdot 25} + \cdots + \tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \cdots \overset{a}{\longmapsto} 1. \blacksquare$$

Vytváranie radov s predpísaným súčtom nie je samoúčelné. Znalosť súčtu niektorého radu môžeme využiť pri určovaní súčtu iného radu (príklad 2.4.27).

Príklad 2.4.27.
Určte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots.$

Riešenie.
Na základe príkladov 2.4.19 a 2.4.25 platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n(n+1)} &= \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \tfrac{1}{4\cdot 5} + \tfrac{1}{5\cdot 6} + \tfrac{1}{6\cdot 7} + \tfrac{1}{7\cdot 8} + \tfrac{1}{8\cdot 9} + \cdots = 1,\\
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(2n-1)2n} &= \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \tfrac{1}{5\cdot 6} + \tfrac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2,\\
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2n(2n+1)} &= \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{4\cdot 5} + \tfrac{1}{6\cdot 7} + \tfrac{1}{8\cdot 9} + \cdots = ?.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} = 1 - \ln 2.$ $\blacksquare$

Na záver uvedieme bez výpočtu niektoré číselné rady a ich súčty:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a,\ a \in R, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^4} = \tfrac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \tfrac{\pi}{4}.$$

Cvičenia

2.4.1. Vyšetrite konvergenciu radov: $\clubsuit$

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{n}}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$, p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$, s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$.

2.4.2. Vyšetrite konvergenciu radov: $\clubsuit$

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n^2}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2.4.3. Vyšetrite konvergenciu radov: $\clubsuit$

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdots n^2}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[2]{3}\,\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n}-\sqrt{n-1}]$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{(-1)^n 2n}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}\right)$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$,

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{2n-1}$, q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$.

2.4.4. Vypočítajte súčet radov: $\clubsuit$

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{n+3}{n}^{-1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+7)}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right]$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{7}\right)^n$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

2.4.5. Vyšetrite relatívnu a absolútnu konvergenciu radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n-1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$,

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{6^n}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+\ln n}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$.

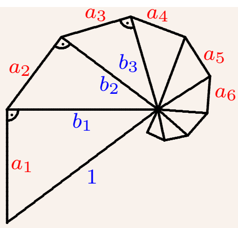
2.4.6. Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergujú. Čo platí o konvergencii radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

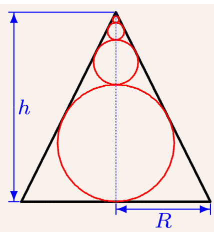
2.4.7. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Čo platí o konvergencii radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

2.4.8. Prerovnajte rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, aby divergoval do ∞, $-\infty$ a konvergoval k 0.



Obr. 2.4.12: Cvičenie 2.4.10



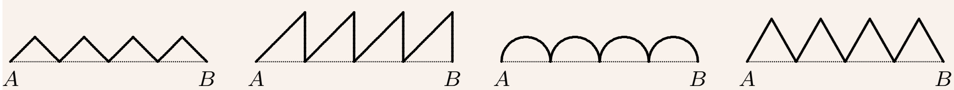
Obr. 2.4.13: Cvičenie 2.4.11

2.4.9. Určte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho člen a_n, ak jeho n-tý čiastočný súčet je: ♣

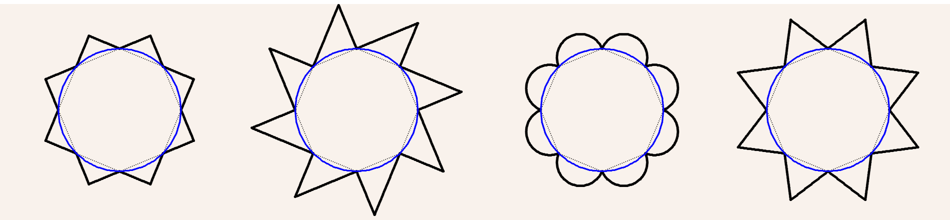
a) $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, b) $s_n = 1 + \frac{1}{2^n}$, c) $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$, d) $s_n = \frac{n-2}{2n}$.

2.4.10. Uvažujme pravouhlý trojuholník s preponou 1 a odvesnami $a_1, b_1 \in (0;1)$. Nech b_1 je preponou podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami a_2, b_2. Nech b_2 je preponou podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami a_3, b_3. Takto pokračujeme až do nekonečna (obr. 2.4.12). Zistite, či rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a vypočítajte jeho súčet a. Vypočítajte súčet obsahov P týchto trojuholníkov. ♣

2.4.11. Do rotačného kužeľa s výškou h a polomerom podstavy R sú postupne vpísané gule (obr. 2.4.13). Nájdite súčet objemov týchto gulí. ♣



Obr. 2.4.14: Cvičenie 2.4.12



Obr. 2.4.15: Cvičenie 2.4.13

2.4.12. Úsečka AB dĺžky $d > 0$ je rozdelená deliacimi bodmi na $n \in N$ rovnakých častí. Nad každou z týchto častí zostrojíme (viď obrázok 2.4.14): ♣

a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na úsečke AB,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na úsečke AB,
c) polkružnicu, ktorej priemer leží na úsečke AB, d) rovnostranný trojuholník.

Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte ju s hodnotou d.

2.4.13. Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšeme pravidelný n-uholník, $n \in N$. Nad každou z jeho strán zostrojíme smerom von z kružnice (viď obrázok 2.4.15): ♣

a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na strane n-uholníka,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na strane n-uholníka,
c) polkružnicu s priemerom na strane n-uholníka, d) rovnostranný trojuholník.

Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte s obvodom kružnice o.

„Mi řekni, prosím tě, co na tom chlastu máš?" „Ja ti to řeknu a ty začneš chlastat taky."
úryvok z filmu SLUNCE, SENO A PÁR FACEK

Každá brzda si myslí, že je záchranna.
TOMÁŠ JANOVIC

Sprostý je ako peň, ale strýka má múdreho.
DARGINSKÉ PRÍSLOVIE

Nie všetci somári majú veľké uši.
NEMECKÉ PRÍSLOVIE

Kapitola 3

Reálne funkcie

3.1 Funkcie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať zobrazeniami, ktorých definičný obor a obor hodnôt sú podmnožinami množiny reálnych čísel R. Takéto zobrazenia nazývame **funkcie**.

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t. j. $f\colon D(f) \to H(f)$. Ak $D(f) \subset R$, potom f nazývame **funkcia reálnej premennej**. Ak $H(f) \subset R$, potom f nazývame **reálna funkcia**.

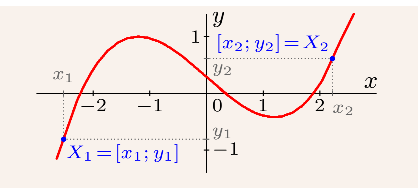
Hodnoty x nazývame **nezávislé premenné** a $D(f)$ **definičný obor funkcie** f.

Hodnoty $f(x)$ nazývame **závislé premenné** (**funkčné hodnoty**) **v bode** x a množinu $H(f) = f[D(f)] = \{f(x);\ x \in D(f)\}$ nazývame **obor hodnôt funkcie** f.

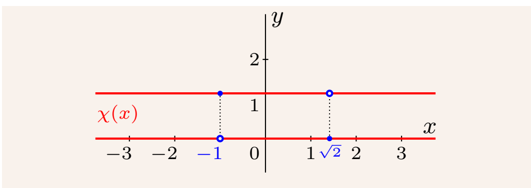
Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom **funkcia** rozumieť **reálnu funkciu jednej reálnej premennej**.

Funkciu $y = f(x)$ tvoria usporiadané dvojice $[x; f(x)]$, takže ju môžeme v rovine R^2 zobraziť v **pravouhlom súradnicovom systéme**[1] ako množinu bodov s týmito súradnicami. Túto množinu $\big\{[x;y] \in R^2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\big\}$ nazývame **graf funkcie** f.

Karteziánsky súradnicový systém sa skladá z x**-ovej** a na ňu kolmej y**-ovej** (**súradnicovej**) **osi**. Ich priesečník označujeme 0 alebo O a nazývame **počiatok súradnicového systému**. Každému bodu $X \in R^2$ je priradená dvojica hodnôt $[x; y]$, ktoré nazývame x**-ová súradnica** a y**-ová súradnica** (obr. 3.1.1).



Obr. 3.1.1: Karteziánsky systém



Obr. 3.1.2: Dirichletova funkcia $\chi(x)$

Geometrická interpretácia funkcie nám v mnohých prípadoch pomôže pri skúmaní jej

[1] Tiež sa azýva **karteziánsky súradnicový systém**.

vlastností. Pojem grafu je ale u mnohých ľudí spojený s pojmom krivka, t. j. „súvislá čiara“. Táto predstava je ale zavádzajúca. Existujú funkcie, ktorých grafy majú veľmi málo spoločné s touto predstavou, dokonca sa dajú veľmi ťažko nakresliť. Príkladom je **Dirichletova funkcia** χ (obr. 3.1.2) definovaná $\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in I$. Ďalším príkladom sú číselné postupnosti, t. j. funkcie s definičným oborom $N \subset R$.

Funkcia $y = f(x)$ je určená definičným oborom $D(f)$ a vzťahom medzi x a y. Predpis $y = f(x)$, $x \in D(f)$ vyjadruje zároveň aj obor hodnôt $H(f)$.

Ak nie je definičný obor funkcie f zadaný, potom budeme pod $D(f)$ rozumieť tzv. **prirodzený** (**maximálny**) **definičný obor**, t. j. množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré má predpis funkcie zmysel. Potom predpisy $y = f(x)$, resp. $y = f(x)$, $x \in R$, resp. $y = f(x)\colon R \to R$ predstavujú funkciu s maximálnym definičným oborom a predpisy $y = f(x)$, $x \in A$ resp. $y = f(x)\colon A \to R$ funkciu s definičným oborom $D(f) = A$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in A$ je **injektívna** (**injekcia**, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, t. j. ak zo vzťahu $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva $x_1 = x_2$.

Ak $f(A) \subset B$, potom hovoríme, že funkcia $f\colon A \to B$ **zobrazuje** A **do** B.

Ak $f(A) = B$, potom hovoríme, že funkcia $f\colon A \to B$ **zobrazuje** A **na** B a funkciu f nazývame **surjektívna** (**surjekcia**, **na množinu** B). To znamená, že f je surjektívna, ak ku každému $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$

Ak je funkcia f injektívna a zároveň surjektívna, nazývame ju **bijektívna** (**bijekcia**, **prostá na množinu**, **jednojednoznačná**).

Príklad 3.1.1.
Predpis $f\colon y = \sqrt{x}$ vyjadruje $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0; \infty)$, t. j. $f\colon \langle 0; 1\rangle \to R$.
Predpis $f\colon y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ vyjadruje inú funkciu $f(x) = \sqrt{x}$, $f\colon \langle 0; 1\rangle \to R$ alebo presnejšie povedané $f\colon \langle 0; 1\rangle \to \langle 0; 1\rangle$. ■

Výraz, ktorým je daná funkcia definovaná, môže mať rôzne tvary. Najčastejšie a pre účely matematickej analýzy najvhodnejšie je analytické zadanie vzorcom, t. j. rovnicou $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Hovoríme, že funkcia f je zadaná **explicitne**.

Časté v praxi je **parametrické vyjadrenie** (obr. 3.1.3), t. j. vyjadrenie dvojicou rovníc

$$x = \varphi(t), \ \ y = \psi(t), \quad t \in J, \tag{3.1}$$

kde φ, ψ sú funkcie definované na množine (obyčajne intervale) $J \subset R$. Premenná t sa nazýva **parameter** a má pomocný význam, pretože nás zaujíma vzťah medzi x a y.

Predchádzajúce rovnice definujú reláciu

$$f = \big\{[x; y] \in R^2;\, x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J\big\} \subset R^2,$$

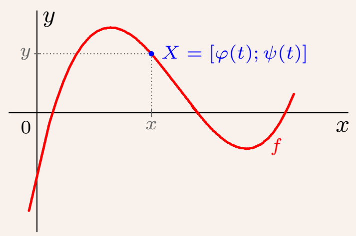
ktorá môže byť za určitých podmienok funkciou. Je to v prípade, keď je $x = \varphi(t)$, $t \in J$ prostá a ku každému $\varphi(t)$, $t \in J$ existuje práve jedno $\psi(t)$. Potom hovoríme, že funkcia f je definovaná **parametricky** (funkciu **parametrizujeme**) rovnicami (3.1).

Keďže je funkcia $x = \varphi(t)$ na množine J prostá (t. j. aj bijektívna), existuje inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in M = \varphi(J)$. Funkciu f môžeme potom vyjadriť v tvare:

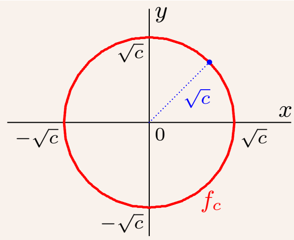
$$y = f(x) = \psi(t) = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right], \ x \in M. \tag{3.2}$$

Prechod od systému rovníc (3.1) k tvaru (3.2) nazývame **eliminácia**[2] **parametra** t.

Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme parametrizovať nekonečným množstvom spôsobov. Stačí zvoliť funkciu $x = \varphi(t)$, $t \in J$ tak, aby bola bijekciou : $J \to D(f)$. Pre y potom platí $y = f(x) = f(\varphi(t))$, $t \in J$. Najjednoduchšie vyjadrenie má tvar $x = t$, $y = f(t)$, $t \in D(f)$.



Obr. 3.1.3: Funkcia $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ zadaná parametricky



Obr. 3.1.4: Kružnica $x^2 + y^2 - c = 0$, $c \geq 0$ z príkladu 3.1.2

Funkcia f môže byť zadaná rovnicou $F(x, y) = 0$, kde $F\colon R^2 \to R$. Niekedy sa navyše požaduje, aby $[x; y]$, kde $A \subset R^2$ je vopred daná množina. Tým je definovaná relácia:

$$f = \{[x; y] \in R^2;\ F(x, y) = 0\}, \text{ resp. } f = \{[x; y] \in R^2;\ F(x, y) = 0, [x; y] \in A\} \subset R^2.$$

Ak je f funkciou, potom hovoríme, že f je definovaná **implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$. Ak uvážime $y = f(x)$, potom môžeme písať $F(x, f(x)) = 0$.

Príklad 3.1.2.

Uvažujme reláciu $f_c = \{[x; y] \in R^2;\ x^2 + y^2 = c\}$, $c \in R$.

$c = 0 \Rightarrow f_0 = \{[0; 0]\}$ je reálna funkcia, môžeme ju vyjadriť napríklad $f\colon y = x$, $x \in \{0\}$.

$c < 0 \Rightarrow f_c = \emptyset$, pretože pre všetky $x, y \in R$ platí $x^2 + y^2 - c \geq -c > 0$.

$c > 0 \Rightarrow f_c = \{[x; \pm\sqrt{c - x^2}]\,;\ x \in \langle -\sqrt{c}; \sqrt{c}\rangle\}$ nie je funkciou, geometricky predstavuje kružnicu so stredom v počiatku $[0; 0]$ a s polomerom $\sqrt{c}$ (obr. 3.1.4). ■

Príklad 3.1.3.

Funkciu $f\colon y = |x|$, $x \in R$ môžeme zadať mnohými spôsobmi. Sú to napríklad:

Explicitne: $y = \sqrt{x^2}$, resp. $y = \max\{-x, x\}$, resp. $y = \begin{cases} -x, & \text{pre } x < 0, \\ x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

Parametricky: $\begin{array}{l} x = t,\ t \in R, \\ y = |t|, \end{array}$ resp. $\begin{array}{l} x = t,\quad t \in R, \\ y = \sqrt{t^2}, \end{array}$ resp. $\begin{array}{l} x = t^3,\ t \in R. \\ y = |t^3|, \end{array}$

Implicitne: $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. $y - |x| = 0$, resp. $y - \sqrt{x^2} = 0$. ■

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môže byť niekedy zadaná aj **tabuľkou**, t. j. dvojicami hodnôt x a $f(x)$. Táto metóda sa používa najmä v praktických prípadoch pre závislosť medzi nejakými nameranými hodnotami.

[2]Teoreticky vieme eliminovať parameter z každého vyjadrenia, prakticky to ale môže byť problém.

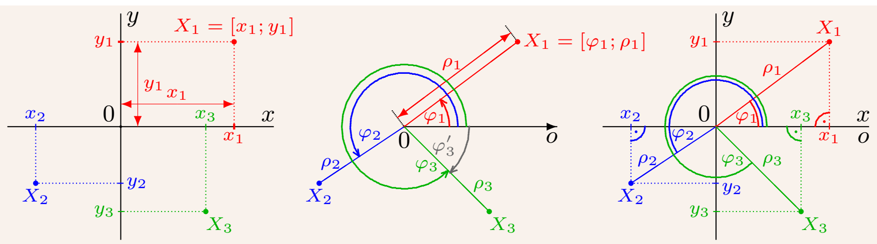
V technických aplikáciach sa niekedy funkcia zadáva **grafický**, pomocou nakresleného grafu. Z grafu môžeme hodnoty funkcie určiť iba približne a teda pre ďalšie spracovanie je táto metóda prinajmenšom málo vhodná.

Okrem pravouhlého súradnicového systému sa často používa tzv. **polárny súradnicový systém**, ktorý sa skladá z **počiatku** (**pólu**) a z jednej poloosi z neho vychádzajúcej, ktorú nazývame **polárna os** a označujeme o.

Pól ztotožníme s počiatkom 0 pravouhlého systému a polárnu os ztotožníme s kladnou x-ovou poloosou (obr. 3.1.5). Ak má bod X v pravouhlom systéme súradnice $[x; y]$, potom má v polárnych súradniciach súradnice $[\varphi; \rho]$. Súradnica ρ predstavuje vzdialenosť bodu X od počiatku 0 a nazýva sa **sprievodič** (**rádiusvektor**) **bodu** X. Súradnica φ predstavuje orientovaný uhol, ktorý zviera polárna os o s polpriamkou $0X$ a nazýva sa **polárny uhol** (**amplitúda**) **bodu** X. Z vlastností goniometrických funkcií potom vyplýva:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \;\; y = \rho \cdot \sin\varphi, \quad \text{pričom } \rho \in \langle 0; \infty), \;\; \varphi \in (-\infty; \infty),$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{pre } x^2 + y^2 > 0.$$



Obr. 3.1.5: Pravouhlý a polárny súradnicový systém v Euklidovskej rovine R^2

Bod $X \in R^2$ má v karteziánskom systéme súradnice určené jednoznačne. Ten istý bod má v polárnych súradniciach nekonečne veľa vyjadrení, pretože funkcie sínus a kosínus sú periodické s periódou 2π. Preto sa pre rozsah uhla φ zvykne určiť interval dĺžky 2π.

Funkcia má v polárnom systéme tvar $f = \{[\varphi; \rho] \in R^2\}$, resp. $f\colon \rho = f(\varphi)$, $\varphi \in A$.

Príklad 3.1.4.

a) $y = f_1(x) = 1$, $x \in R$ je konštantná (v pravouhlom systéme), jej grafom je priamka.

b) $\rho = f_2(\varphi) = 1$, $\varphi \in R$ je konštantná (v polárnom systéme), jej grafom je kružnica so stredom v počiatku 0 a polomerom $\rho = 1$. V prvouhlom systéme ale funkciou nie je. ■

Príklad 3.1.5.

Nech $[x_1; y_1], [x_2; y_2] \in R^2$, $x_1 \neq x_2$.
Určte koeficienty $a, b \in R$ funkcie $f\colon y = ax + b$ tak, aby $[x_1; y_1] \in f$, $[x_2; y_2] \in f$.

Riešenie.

$[x_1; y_1], [x_2; y_2] \in f \;\Rightarrow\; y_1 = ax_1 + b,\; y_2 = ax_2 + b \;\Rightarrow$

$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \;\Rightarrow\; a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \;\Rightarrow$

$b = y_1 - ax_1 = y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1 = \frac{y_1x_2-y_1x_1-y_2x_1+y_1x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow$

$f\colon y = ax + b = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x + \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_2x-y_1x+y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2 + \frac{x_2-x}{x_2-x_1}y_1,\ x\in R.$ ■

Funkcia $f\colon y = ax + b$, kde $a, b \in R$, sa nazýva **lineárna**. Jej grafom je priamka. Hodnota a predstavuje jej smernicu, t. j. tangens uhla, ktorý zviera priamka s osou x.

3.1.1 Základné vlastnosti funkcií

Funkcia $y = f(x)$, $x\in D(f)$ sa nazýva **na množine $A \subset D(f)$**:
- **ohraničená zdola**, ak je ohraničená zdola množina $f(A)$, t. j. ak existuje $\alpha\in R$ také, že pre všetky $x\in A$ platí $\alpha \leq f(x)$,
- **ohraničená zhora**, ak je ohraničená zhora množina $f(A)$, t. j. ak existuje $\beta\in R$ také, že pre všetky $x\in A$ platí $f(x) \leq \beta$,
- **ohraničená**, ak je ohraničená zdola a zhora na množine A, t. j. ak existujú $\alpha, \beta\in R$ také, že pre všetky $x\in A$ platí $\alpha \leq f(x) \leq \beta$,
- **neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola na množine A,
- **neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora na množine A,
- **neohraničená**, ak nie je ohraničená (t. j. je neohraničená zdola alebo zhora) na A,

kde $f(A) = \{f(x);\, x\in A\}$ je množina funkčných hodnôt funkcie f.

Uvedené vlastnosti boli definované na množine $A \subset D(f)$, preto hovoríme o **lokálnych vlastnostiach**. Ak nejaká vlastnosť platí na celom definičnom obore $D(f)$, potom hovoríme **o globálnej vlastnosti** a prívlastok „na množine $D(f)$" vynechávame.

Funkcia $y = f(x)$, $x\in D(f)$ sa nazýva:
- **ohraničená zdola**, ak existuje $\alpha\in R$ také, že pre všetky $x\in D(f)$ platí $\alpha \leq f(x)$,
- **ohraničená zhora**, ak existuje $\beta\in R$ také, že pre všetky $x\in D(f)$ platí $f(x) \leq \beta$,
- **ohraničená**, ak existujú $\alpha, \beta\in R$ také, že pre všetky $x\in D(f)$ platí $\alpha \leq f(x) \leq \beta$,
- **neohraničená zdola**, resp. **zhora**, ak nie je ohraničená zdola, resp. zhora,
- **neohraničená**, ak nie je ohraničená (t. j. nie je ohraničená zdola alebo zhora).

Príklad 3.1.6.
a) Funkcia $f\colon y = x^2+1$ je ohraničená zdola a nie je ohraničená zhora. Na intervale $(0; 1)$ je ohraničená, pretože pre všetky $x\in(0; 1)$ platí $1 < x^2 + 1 < 2$.
b) $f\colon y = (x^2 + 1)^{-1}$ je ohraničená, pretože pre všetky $x\in R$ platí $0 < (x^2 + 1)^{-1} \leq 1$. ■

Nech $y = f(x)$, $x\in D(f)$, $A \subset D(f)$, potom:
- $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf\{f(x); x\in A\} = \inf f(A)$ nazývame **infimum funkcie f na množine A**,
- $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup\{f(x); x\in A\} = \sup f(A)$ nazývame **suprémum funkcie f na A**,
- $\inf f(x) = \inf\{f(x); x\in D(f)\}$ nazývame **infimum funkcie f**,
- $\sup f(x) = \sup\{f(x); x\in D(f)\}$ nazývame **suprémum funkcie f**.

Z definície vyplýva, že ak je funkcia f ohraničená zdola na A, potom $\inf f(A)\in R$ a ak je neohraničení zdola na A, potom $\inf f(A) = -\infty$. Analogicky platí $\sup f(A)\in R$ pre funkciu ohraničenú zhora na A a $\sup f(A) = \infty$ pre neohraničenú zhora funkciu.

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$. Potom **funkcia f nadobúda v bode $x_0 \in A$**:

- **minimum** (**minimálnu hodnotu, najmenšiu hodnotu**) **na množine** A, ak platí $f(x_0) = \min f(A) = \min\limits_{x\in A} f(x)$, t. j. ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x_0) \leq f(x)$,
- **maximum** (**maximálnu hodnotu, najväčšiu hodnotu**) **na množine** A, ak platí $f(x_0) = \max f(A) = \max\limits_{x\in A} f(x)$, t. j. ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(x_0)$,
- **ostré minimum na množine** A, ak pre všetky $x \in A$, $x \neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$,
- **ostré maximum na množine** A, ak pre všetky $x \in A$, $x \neq x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$,

Minimum a maximum súhrnne nazývame (**ostré**) **extrémy funkcie** f.

Ak $A = D(f)$, potom hovoríme o **globálnych** (**absolútnych**) **extrémoch funkcie** f a označujeme ich symbolmi $\min f(x)$, resp. $\max f(x)$.

V opačnom prípade hovoríme o **lokálnych extrémoch funkcie** f. Lokálne extrémy postačí vyšetrovať v nejakom okolí $O(x_0) \subset D(f)$.

Z predchádzajúceho vyplýva, že ak existuje $\min\{f(x);\, x \in A\}$, resp. $\max\{f(x);\, x \in A\}$, potom $\min\{f(x);\, x\in A\} = \inf\{f(x);\, x\in A\}$, $\max\{f(x);\, x\in A\} = \sup\{f(x);\, x\in A\}$.

Príklad 3.1.7.
Uvažujme funkciu $f\colon y = x^2 + 1$, $x \in R$.

$A = D(f) \;\Rightarrow\; \inf f(x) = \min f(x) = 1,\; \sup f(x) = \infty,\; \max f(x)$ neexistuje.

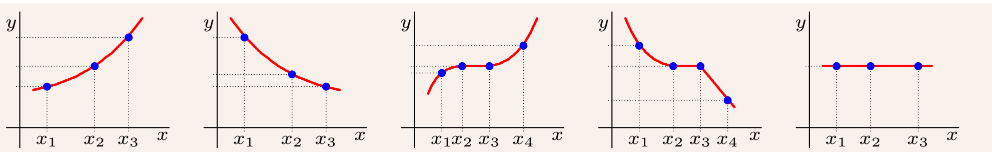
$A = (0;1) \;\Rightarrow\; \inf\limits_{x\in A} f(x) = 1,\; \sup\limits_{x\in A} f(x) = 2,\; \min\limits_{x\in A} f(x)$ a $\max\limits_{x\in A} f(x)$ neexistujú.

$A = \langle 0;1\rangle \;\Rightarrow\; \inf\limits_{x\in A} f(x) = \min\limits_{x\in A} f(x) = 1,\; \sup\limits_{x\in A} f(x) = \max\limits_{x\in A} f(x) = 2.$ ■

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine** $A \subset D(f)$:

- **rastúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesajúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesajúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerastúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **konštantná**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$, t. j. ak existuje $c \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = c$, stručne ju označujeme $f(x) =$ konšt.,
- **monotónna**, ak je neklesajúca alebo nerastúca (aj rastúca, klesajúca alebo konšt.),
- **rýdzo** (**ostro**) **monotónna**, ak je rastúca alebo klesajúca.

Ak $A = D(f)$ potom prívlastok „na množine $D(f)$“ vynechávame a hovoríme o **rastúcej**, **klesajúcej**, **neklesajúcej**, **nerastúcej** alebo **konštantnej funkcii** (obr. 3.1.6).



Obr. 3.1.6: Grafy rastúcej, klesajúcej, neklesajúcej, nerastúcej a konštantnej funkcie

Niekedy je výhodné definovať uvedené pojmy v konkrétnom bode množiny. Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **v bode** $x_0 \in D(f)$:

- **rastúca**, ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^-(x_0)$ (t. j. $x < x_0$) platí $f(x) < f(x_0)$ a pre všetky $x \in O^+(x_0)$ (t. j. $x_0 < x$) platí $f(x_0) < f(x)$,
- **klesajúca**, ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^-(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0)$ a pre všetky $x \in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) > f(x)$,
- **neklesajúca**, ak existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^-(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ a pre všetky $x \in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) \leq f(x)$,
- **nerastúca**, ak existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^-(x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$ a pre všetky $x \in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) \geq f(x)$.

Veta 3.1.1.
f je rastúca [resp. klesajúca] na intervale $(a; b)$ $\iff$
f je rastúca [resp. klesajúca] v každom bode $x_0 \in (a; b)$.

Príklad 3.1.8.
a) Funkcia $f\colon y = x + 1$ je rastúca na $D(f) = R$

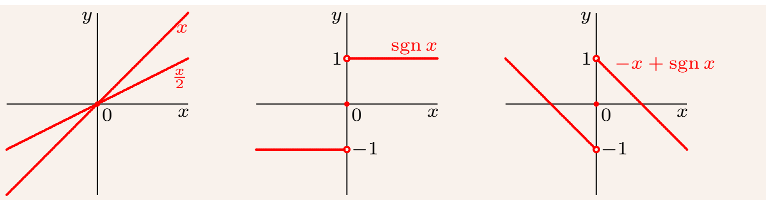
b) Funkcia $f\colon y = \lfloor x \rfloor$ je neklesajúca na R, konštantná na intervaloch $\langle k; k+1)$, $k \in Z$.

c) Funkcia $f\colon y = x^2$ je klesajúca na intervale $(-\infty; 0\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 0; \infty)$.

d) Funkcia $f\colon y = \frac{x}{x}$ je konštantná na množine $R - \{0\}$. ■

Z predchádzajúcich definícií vyplýva nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta 3.1.2.
f je rastúca [resp. klesajúca] na A $\implies$
f je rastúca [resp. klesajúca] v každom vnútornom bode $x_0 \in A$.



Obr. 3.1.7: Grafy funkcií z príkladu 3.1.9 a), b), c)

Ako dokazuje nasledujúci príklad, ak je funkcia f rastúca [resp. klesajúca] v jednom bode $x_0 \in A$, ešte nemusí byť rastúca [resp. klesajúca] v jeho okolí $O(x_0)$.

Príklad 3.1.9.
a) Funkcia f definovaná vzťahmi $f(x) = x$ pre $x \in Q$ a $f(x) = \frac{x}{2}$ pre $x \in I$ je rastúca v bode $x_0 = 0$, rastúca na množine Q a na množine I. Na druhej strane je zrejmé, že neexistuje reálny interval I, na ktorom je f rastúca (obr. 3.1.7).

b) Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je rastúca v bode 0, konštantná na $(-\infty; 0)$ a na $(0; \infty)$.

c) Funkcia $f(x) = -x + \operatorname{sgn} x$ je rastúca v bode 0 a klesajúca na $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$. ■

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

– **párna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = f(-x)$,

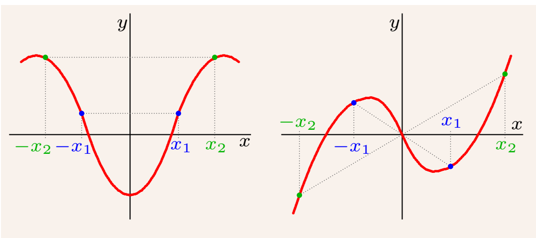
– **nepárna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = -f(-x)$.

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y a graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku súradnicového systému (obr. 3.1.8).

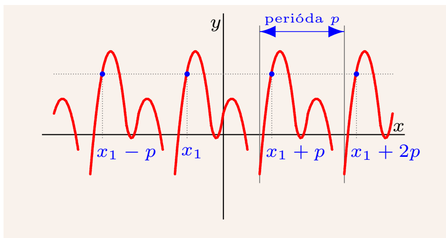
Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **periodická**, ak existuje $p \in R$, $p \neq 0$ (nazývame ho **perióda funkcie** f) také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $x+p \in D(f)$, $x-p \in D(f)$ a $f(x) = f(x+p) = f(x-p)$.

Najmenšia kladná perióda funkcie f (pokiaľ existuje) sa nazýva **primitívna** (**základná**). Je zrejmé, že každý celočíselný násobok periódy je tiež perióda.

Ak je funkcia f periodická s periódou $p > 0$, potom ju stačí vyšetrovať na intervale s dĺžkou p. Každý interval s dĺžkou p nazývame **interval periodicity** (obr. 3.1.9).



Obr. 3.1.8: Graf párnej a nepárnej funkcie



Obr. 3.1.9: Graf periodickej funkcie

Príklad 3.1.10.

a) Funkcia $y = |x|$ je párna, funkcia $y = \operatorname{sgn} x$ je nepárna.

b) Funkcia $y =$ konšt. je párna, funkcia $y = 0$ je párna a zároveň aj nepárna.

c) Funkcia $y = x^2$, $x \in R$ je párna, ale funkcia $y = x^2$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ párna nie je.

d) Funkcie $y = \frac{1}{x^5}$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ sú nepárne.

e) Dirichletova funkcia $y = \chi(x)$ je párna. ■

Príklad 3.1.11.

a) Funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$ sú periodické so základnou periódou 2π.

b) Funkcie $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ sú periodické so základnou periódou π.

c) Funkcia $y = x - \lfloor x \rfloor$ je periodická s periódou 1 (obr. 2.1.2 na str. 28).

d) Funkcia $y = 1$ je periodická, periódou je každé $p \in R$, $p \neq 0$. Základnú periódu nemá.

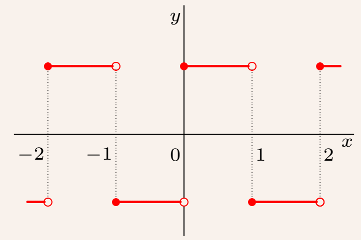
e) Dirichletova funkcia χ je periodická, pričom periódou je každé $p \in Q$, $p \neq 0$.

f) Funkcia $y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ je periodická so základnou periódou 2 (obr. 3.1.10). ■

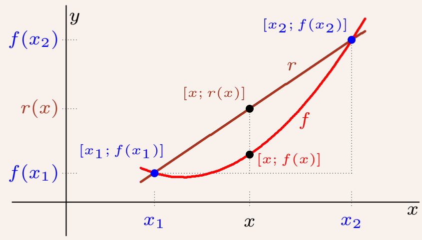
Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na intervale** $I \subset D(f)$:

– **konvexná**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) \leq r(x)$,

– **konkávna**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) \geq r(x)$,

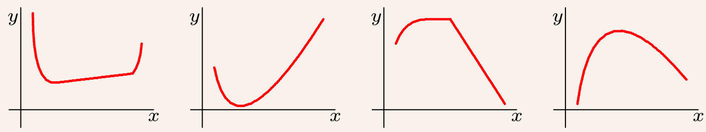


Obr. 3.1.10: Funkcia $y=(-1)^{\lfloor x \rfloor}$



Obr. 3.1.11: Konvexná funkcia

– **rýdzo konvexná**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) < r(x)$,
– **rýdzo konkávna**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) > r(x)$,
pričom[3] $r(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1)$.



Obr. 3.1.12: Grafy konvexnej, rýdzo konvexnej, konkávnej a rýdzo konkávnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **v bode** $x_0 \in D(f)$:
– **rýdzo konvexná**, ak existuje okolie $O(x_0)$, v ktorom je funkcia f rýdzo konvexná,
– **rýdzo konkávna**, ak existuje okolie $O(x_0)$, v ktorom je funkcia f rýdzo konkávna.

Funkcia f **má v bode** $x_0 \in D(f)$ **inflexný bod** (**inflexiu**), ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že v $O^-(x_0)$ je f rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna] a v $O^+(x_0)$ je rýdzo konkávna [resp. rýdzo konvexná].

Príklad 3.1.12.
a) Funkcia $y = ax+b$ je konvexná a konkávna na R pre všetky $a, b \in R$.
b) Funkcia $y =$ konšt. je konvexná (nie rýdzo) a konkávna (nie rýdzo) na R.
c) Funkcia $y = \sin x$ je rýdzo konkávna na $\langle 0; \pi \rangle$ a rýdzo konvexná na $\langle \pi; 2\pi \rangle$.
d) Funkcia $y = x^2$ je rýdzo konvexná na R a funkcia $y = -x^2$ je rýdzo konkávna na R. ■

Veta 3.1.3.
f je konvexná [resp. konkávna] na intervale $I \subset D(f)$ $\iff$
pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $p \in (0; 1)$, $q = 1-p$ platí:
$$f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2) \qquad [\text{resp. } f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2)].$$

[3] Graficky leží $[x; r(x)]$ na priamke spájajúcej body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$ (obr. 3.1.11). Z príkladu 3.1.5 vyplýva $r(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} x + \frac{f(x_1)x_2 - f(x_2)x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1)$.

Dôkaz.
Vetu dokážeme iba pre konvexnosť, pre konkávnosť sa dokáže analogicky.
$NP_{\Rightarrow}$: $p\in(0;1)$, $q=1-p$, nech $x_1<x_2 \;\Rightarrow\;$ existuje $x\in(x_1;x_2)$ také, že platí:

$$p=\tfrac{x_2-x}{x_2-x_1},\quad q=1-p=\tfrac{x_2-x_1}{x_2-x_1}-\tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}=\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\;\Rightarrow$$
$$px_1+qx_2=\tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2=\tfrac{x_2x_1-xx_1+xx_2-x_1x_2}{x_2-x_1}=\tfrac{x(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=x\in(x_1;x_2)$$
$$\xRightarrow{\text{konvexnosť}} f(px_1+qx_2)=f(x)\le\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)+\tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)=qf(x_2)+pf(x_1).$$

$PP_{\Leftarrow}$: $p\in(0;1)$, $q=1-p$, nech $x_1<x_2$, označme $x=px_1+qx_2\;\Rightarrow$

$$x_1<x_1+q(x_2-x_1)=(1-q)x_1+qx_2=\underbrace{px_1+(1-p)x_2}_{x}=x_2+p(x_1-x_2)<x_2\;\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} x=(1-q)x_1+qx_2=x_1+q(x_2-x_1)\;\Rightarrow\; q=\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\\ x=px_1+(1-p)x_2=x_2-p(x_2-x_1)\;\Rightarrow\; p=\tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$
$$f(x)=f(px_1+qx_2)\le pf(x_1)+qf(x_2)=\tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).\;\blacksquare$$

Bod $c\in D(f)$ sa nazýva **nulový bod (koreň) funkcie** $y=f(x)$, ak platí $f(c)=0$. Korene funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x)=0$, $x\in D(f)$.

Príklad 3.1.13.
a) Funkcie $y=|x|$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^2+x^4$ majú jediný koreň $c=0$.

b) Dirichletova funkcia $\chi(x)$ má nekonečne veľa koreňov, sú to všetky iracionálne čísla.

c) Funkcia $y=x^2+2$ nemá koreň, pretože pre všetky $x\in R$ platí $x^2+2\ge 2>0$. $\blacksquare$

Funkcie sú množiny, ktorých prvkami sú usporiadané dvojice $[x; f(x)]$. Takže aj relácie a operácie s funkciami musíme chápať ako relácie a operácie s množinami.
Funkcia $y=f(x)$ **sa rovná funkcii** $y=g(x)$, ak $D(f)=D(g)$ a pre všetky $x\in D(f)$ platí $f(x)=g(x)$. Označujeme $f=g$ a v opačnom prípade $f\ne g$.
Funkcia f **sa rovná funkcii** g **na množine** $A\subset D(f)\cap D(g)$, ak pre všetky $x\in A$ platí $f(x)=g(x)$. Zapisujeme $f=g$, $x\in A$.

Funkcia f **je menšia** [resp. **väčšia**] **ako funkcia** g **na množine** $A\subset D(f)\cap D(g)$, ak pre všetky $x\in A$ platí $f(x)<g(x)$ [resp. $f(x)>g(x)$].
Funkcie vo všeobecnosti nemôžeme porovnávať. Môžeme ale určiť množiny, na ktorých platí $f<g$, $f=g$ alebo $f>g$, prípadne $f\le g$ alebo $f\ge g$.

Príklad 3.1.14.
a) Funkcie $f\colon y=1$, $g\colon y=\frac{x}{x}$ sa nerovnajú, t. j. $f\ne g$, pretože $D(f)=R$, $D(g)=R-\{0\}$. Ale $f=g$ na množine $R-\{0\}$, pretože pre všetky $x\ne 0$ platí $1=\frac{x}{x}$.

b) Nech $f\colon y=x$, $g\colon y=x^2$. Na množine R neplatí ani jedna z relácií $f<g$, $f=g$, $f>g$. Ale platí $f<g$ na množine $R-\langle 0;1\rangle$, $f=g$ na $\{0,1\}$ a $f>g$ na $(0;1)$. $\blacksquare$

Nech $A \subset D(f) \cap D(g)$. **Súčet** $f+g$, **rozdiel** $f-g$, **súčin** fg, **podiel** f/g (pre $g(x) \neq 0$) **funkcií f a g na množine A** definujeme vzťahmi:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ x \in A.$$

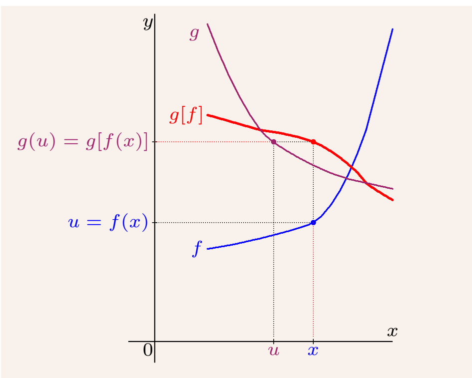
Absolútnu hodnotu $|f|$ a **n-tú mocninu** f^n **funkcie f na množine A** definujeme vzťahmi $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in A$ a $f^n(x) = [f(x)]^n$, $x \in A$, $n \in N$.

Nech $A \subset D(f)$. Funkcia $y = h(x)$, $x \in A$ sa nazýva **zúžením (reštrikciou) funkcie $y = f(x)$ na množinu A**, ak pre všetky $x \in A$ platí $h(x) = f(x)$. Označujeme $h = f|_A$.

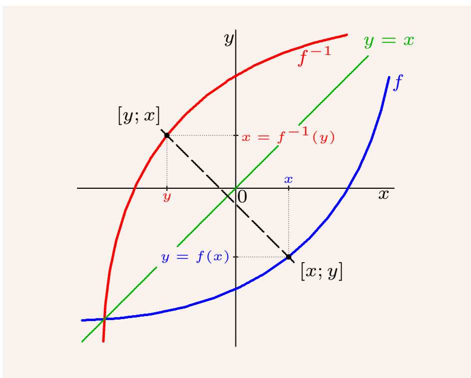
Príklad 3.1.15.
a) $f\colon\ y = 0,\ x \in \langle 0; 1)$ je zúžením funkcie $g\colon\ y = \lfloor x \rfloor$ na interval $\langle 0; 1)$, t. j. $f = g|_{\langle 0;1)}$.
b) $y = x^2$, $x \in \langle -1; 1\rangle$ je zúžením funkcie $y = x^2$, $x \in R$ na interval $\langle -1; 1\rangle$.
c) $y = 1$, $x \in Q$ je zúžením Dirichletovej funkcie $\chi(x)$ na množinu Q. ■

Nech $y = f(x)$, $y = g(x)$, pričom $H(f) \subset D(g)$. Funkcia $y = F(x) = g[f(x)]$, $x \in D(f)$ sa nazýva **zložená funkcia f a g** (viď str. 18) a označuje sa $g(f)$, resp. $f \circ g$. Funkcia f sa nazýva **vnútorná zložka** a g **vonkajšia zložka** (obr. 3.1.13).

Ak sú funkcie zadané analyticky $u = f(x)$, $y = g(u)$, potom do vzorca pre $g(f)$ stačí za u dosadiť $f(x)$. Hovoríme, že **vykonávame substitúciu premennej u výrazom $f(x)$**.



Obr. 3.1.13: Graf zloženej funkcie



Obr. 3.1.14: Graf inverznej funkcie

Príklad 3.1.16.
Nech $f\colon y = x^2$, $g\colon\ y = \sin x$. Nájdite zložené funkcie $f(g)$ a $g(f)$.

Riešenie.
Keďže $D(f) = D(g) = R$, $H(f) = \langle 0; \infty)$, $H(g) = \langle -1; 1\rangle$, potom platí:

$$f(g)\colon y = f[g(x)] = [g(x)]^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x, \ \ D(f(g)) = R, \ \ H(f(g)) = \langle -1; 1\rangle\,,$$
$$g(f)\colon y = g[f(x)] = \sin f(x) = \sin(x^2), \ \ D(g(f)) = R, \ \ H(g(f)) = \langle -1; 1\rangle\,. \ ■$$

V mnohých prípadoch potrebujeme danú funkciu rozložiť na vnútornú a vonkajšiu zložku. Takýto rozklad väčšinou nebýva jednoznačný, preto ho musíme prispôsobiť našim možnostiam a daným požiadavkám.

Príklad 3.1.17.
Funkciu $F\colon\, y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in\langle -1;1\rangle$ môžeme považovať za zloženú funkciu $F=g(f)$, pričom $f\colon\, y=1-x^2$, $x\in\langle -1;1\rangle$, $g\colon\, y=\sqrt{x}$, $x\in\langle 0;\infty)$. ■

Ak je $y=f(x)$, $x\in D(f)$ injektívna, je $y=f(x)\colon D(f)\to H(f)$ bijektívna.[4] Potom existuje **inverzná funkcia** $x=f^{-1}(y)$, $H(f)\to D(f)$ taká, že $x=f^{-1}(y)$ práve vtedy, ak $y=f(x)$. Keďže sa $[x;y]\in f$ a $[y;x]\in f^{-1}$ líšia iba poradím prvkov, sú grafy funkcií f a f^{-1} osovo súmerné podľa priamky $y=x$ (obr. 3.1.14).

Veta 3.1.4.
$f\colon D(f)\to H(f)$ je bijekcia $\implies$ $f^{-1}\colon H(f)\to D(f)$ je bijekcia a platí:[5]

$$(f^{-1})^{-1}=f,\qquad \forall y\in D(f^{-1})\colon f[f^{-1}(y)]=y,\qquad \forall x\in H(f^{-1})\colon f^{-1}[f(x)]=x.$$

Spravidla sa dodržiava dohoda, že argument funkcie f a inverznej funkcie f^{-1} značíme rovnakým symbolom. Preto namiesto $x=f^{-1}(y)$ píšeme $y=f^{-1}(x)$.

Príklad 3.1.18.
Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f\colon\, y=3x+2$, $x\in R$.

Riešenie.
Funkcia f je prostá na množinu R. Ak vyriešime rovnicu $y=3x+2$ vzhľadom k x, dostaneme $x=\frac{y-2}{3}$. Z toho vyplýva $f^{-1}\colon\, y=\frac{x-2}{3}$, $x\in R$. ■

Nech $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$ je parametrické vyjadrenie funkcie f. Ak je φ je prostá, potom existuje inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)\colon \varphi(J)\to J$ a f môžeme vyjadriť v explicitne:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),\ \ x\in\varphi(J).$$

Tento prechod k explicitnému vyjadreniu nazývame **vylúčenie parametra** t.

Veta 3.1.5.
$y=f(x)$, $x\in D(f)$ je rýdzo monotónna $\Rightarrow$ f je prostá.

Ako dokazuje príklad 3.1.19, funkcia f môže byť prostá a nemusí byť rýdzo monotónna. To znamená, že tvrdenie vety 3.1.5 nemôžeme obrátiť.

Veta 3.1.6.
$y=f(x)$, $x\in D(f)$ je rastúca [resp. klesajúca] $\Rightarrow$
$y=f^{-1}(x)$, $x\in H(f)$ je tiež rastúca [resp. klesajúca].

Dôkaz.
f je rastúca: $x_1,x_2\in D(f)$, $x_1<x_2$ $\Rightarrow$ $y_1,y_2\in H(f)$, $y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2$.

---
[4] Surjektívnosť je zaručená existenciou vzoru pre každý obraz z množiny $H(f)$.
[5] Analógia vety 1.3.5 na strane 19.

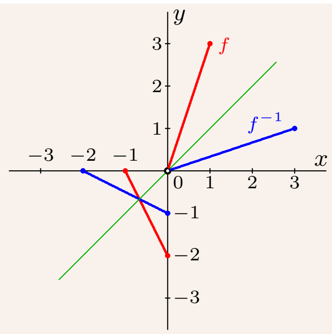
$y = f(x)$, $x \in D(f)$ je rastúca $\xRightarrow{\text{veta 3.1.5}}$ $f\colon D(f) \to H(f)$ je prostá a tiež bijektívna $\Rightarrow$ existuje inverzná funkcia $x = f^{-1}(y)\colon H(f) \to D(f)$, ktorá je tiež bijektívna.

f^{-1} nie je rastúca $\Rightarrow$ existujú $y_1, y_2 \in H(f)$, $y_2 < y_1$: $x_2 = f^{-1}(y_2) \geq f^{-1}(y_1) = x_1 \Rightarrow$ $\xRightarrow{f^{-1}\text{ je prostá}} x_1 < x_2 \xRightarrow{f\text{ je rastúca}} y_1 < y_2$, t. j. spor $\Rightarrow$ f^{-1} je rastúca.

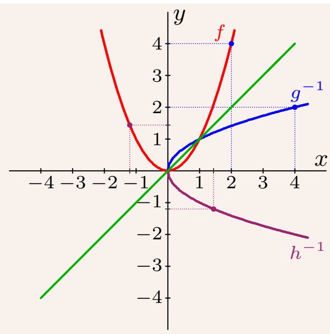
Pre klesajúcu funkciu je dôkaz analogický. ■

Príklad 3.1.19.
Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f\colon y = \begin{cases} 2x+2, & \text{pre } x \in \langle -1; 0\rangle\,, \\ 3x+3, & \text{pre } x \in (0; 1\rangle\,. \end{cases}$

Riešenie.
Funkcia f je prostá a nie je rýdzo monotónna na $D(f) = \langle -1; 1\rangle$.
Na intervale $\langle -1; 0\rangle$ je klesajúca a na intervale $(0; 1\rangle$ je rastúca (obr. 3.1.15). Ľahko overíme, že $f^{-1}\colon\ y = \frac{x}{2} - 1$ pre $x \in \langle 0; 2\rangle$, $y = \frac{x}{3} - 1$ pre $x \in (3; 6\rangle$. ■



Obr. 3.1.15: Graf k príkladu 3.1.19



Obr. 3.1.16: Graf k príkladu 3.1.20

Často sa stáva, že funkcia f je prostá iba na nejakej časti $A \subset D(f)$. V tomto prípade môžeme utvoriť reštrikciu $g = f|_A$, ku ktorej inverzná funkcia g^{-1} existuje.

Príklad 3.1.20.
Funkcia $f\colon y = x^2$, $x \in R$ nie je prostá, t. j. k nej inverzná funkcia neexistuje.
Funkcia $g = f|_{(-\infty;0\rangle}$ má inverznú funkciu $g^{-1} = -\sqrt{x}$, $x \in \langle 0; \infty)$ a funkcia $h = f|_{\langle 0;\infty)}$ má inverznú funkciu $h^{-1} = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0; \infty)$ (obr. 3.1.16). ■

3.1.2 Elementárne funkcie

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam, pretože sa dajú pomocou nich popísať (aspoň približne) mnohé prírodné a spoločenské zákonitosti a javy.

Elementárnou funkciou nazývame každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania z funkcií:

$$y = \text{konšt.},\quad y = x,\quad y = \mathrm{e}^x,\quad y = \ln x,\quad y = \sin x,\quad y = \arcsin x,\quad y = \operatorname{arctg} x.$$

Polynómom (racionálnou celistvou funkciou)[6] **stupňa** n nazývame funkciu:

$$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad \text{kde}\ \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R,\ n \in N \cup \{0\},\ a_n \neq 0.$$

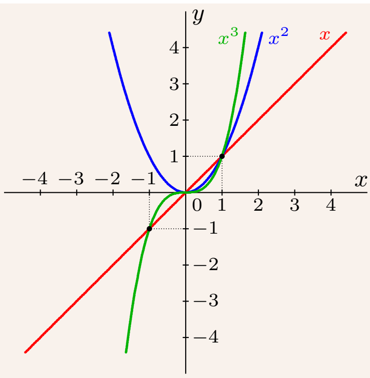
Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame **koeficienty**. Prirodzený $D(f_n) = R$.

Funkcia $f_2\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická**, $f_1\colon\ y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**, $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ sa nazýva **konštantná funkcia**.

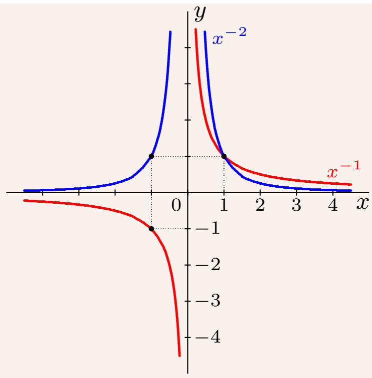
Z algebry vieme, že funkcia f_n, $n \in N$ má najviac n reálnych koreňov.[7]

Príklad 3.1.21.
a) Funkcia $f_n\colon\ y = x^n$, $n \in N$ je definovaná pre všetky $x \in R$. Jej grafom je tzv. **parabola stupňa** n. Pre $n = 1$ je grafom priamka (obr. 3.1.17). Funkcia f_n má pre všetky $n \in N$ práve jeden nulový bod $x = 0$.

b) Funkcia $f\colon\ y = x^3 - 2x^2$ má korene $x_1 = 0$ (dvojnásobný), $x_2 = 2$ (obr. 3.1.19). ■



Obr. 3.1.17: $f\colon\ y = x^n$, $n = 1, 2, 3$



Obr. 3.1.18: $f\colon\ y = x^{-n}$, $n = 1, 2$

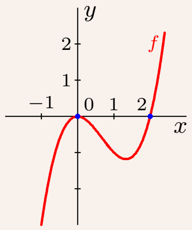
Racionálnou lomenou funkciou nazývame funkciu:

$$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + b_mx^m}, \quad \text{kde}\ \ n, m \in N - \{0\}.$$

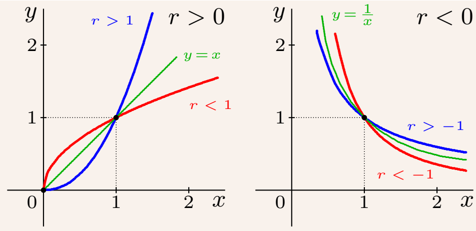
Funkcie f_n, f_m sú polynómy stupňov n a m, pričom $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$. Aby mala funkcia f zmysel, musí platiť $f_m(x) \neq 0$.

Príklad 3.1.22.
Funkcia $f\colon\ y = x^{-n}$, $n \in N$ je definovaná pre všetky $x \in R - \{0\}$. Jej grafom je tzv. **hyperbola stupňa** $n{+}1$. Funkcia f nemá nulový bod (obr. 3.1.18). ■

[6] Viac informácií o polynómoch čitateľ nájde v [18].
[7] V množine komplexných čísel C má práve n koreňov (vrátane násobnosti).



Obr. 3.1.19: $f\colon\ y = x^3 - 2x^2$



Obr. 3.1.20: $f\colon\ y = x^r$ pre $r > 0$ a $r < 0$

Mocninnou funkciou nazývame funkciu:

$$f\colon\ y = x^r, \qquad \text{kde} \ \ r \in R,\ r \neq 0.$$

Pre $r \in N$ sa stáva polynómom a pre $r \in Z^-$ racionálnou lomenou funkciou.

Pre $r > 0$ je f rastúca a prirodzený $D(f) = \langle 0; \infty)$. Pre $r < 0$ je f klesajúca (obr. 3.1.20) a prirodzený $D(f) = (0; \infty)$. Inverznou funkciou je $f^{-1}\colon\ y = x^{1/r}$.

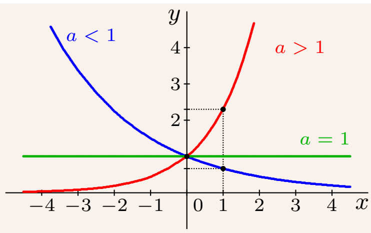
Exponenciálnou funkciou so základom $a > 0$ nazývame funkciu:

$$f\colon\ y = a^x, \quad x \in R.$$

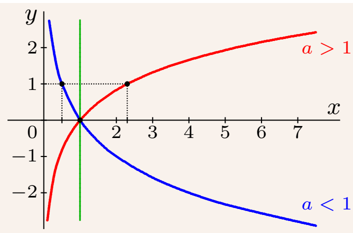
Najdôležitejšia z nich je funkcia $f\colon\ y = \exp x = \mathrm{e}^x$ so základom e (Eulerovo číslo).

Pre $a = 1$ sa rovná konštantnej funkcii $y = 1$. Pre $a \in (0; 1)$ je klesajúca a pre $a > 1$ je rastúca. Jej graf nazývame **exponenciálna krivka** alebo **exponenciála** (obr. 3.1.21).

Každá exponenciálna krivka prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$. Navyše sú grafy funkcií $y = a^x$ a $y = a^{-x}$ symetrické podľa osi y.



Obr. 3.1.21: $f\colon\ y = a^x$, $a > 0$



Obr. 3.1.22: $f\colon\ y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Logaritmickou funkciou so základom $a > 0$, $a \neq 1$ nazývame funkciu:

$$f\colon\ y = \log_a x,\ \ x \in \langle 0; \infty) \quad \text{takú, že} \ \ x = a^y.$$

Graf funkcie f sa nazýva **logaritmická krivka**, prechádza bodmi $[1; 0]$, $[a; 1]$ a je osovo súmerný podľa priamky $y = x$ s grafom funkcie $y = a^x$, $x \in R$. Pre $a \in (0; 1)$ je f klesajúca a pre $a > 1$ je f rastúca (obr. 3.1.22).

Číslo $\log_a x$ nazývame **logaritmus čísla x so základom a**. Logaritmus so základom 10 nazývame **dekadický** a označujeme $\log x$. Logaritmus so základom e nazývame **prirodzený** a označujeme[8] $\ln x$.

Logaritmická funkcia $f\colon\ y = \log_a x,\ x > 0$ a exponenciálna funkcia $g\colon\ y = a^x,\ x \in R$ sú inverzné, takže platí $x = a^{\log_a x}$ pre všetky $x > 0$ a $x = \log_a a^x$ pre všetky $x \in R$.

Veta 3.1.7.
$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ r \in R \implies \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$
$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2), \quad \log_a x^r = r \log_a x, \quad \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}.$

Mocninná, exponenciálna a logaritmická funkcia sú elementárne funkcie, pretože platí

$$y = x^r = \mathrm{e}^{\ln x^r} = \mathrm{e}^{r \ln x}, \quad y = a^x = \mathrm{e}^{\ln a^x} = \mathrm{e}^{x \ln a}, \quad y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Základné **goniometrické** (**trigonometrické**) **funkcie** sú sínus, kosínus, tangens, kotangens. Definujú sa pomocou jednotkovej kružnice v rovine R^2.

Uvažujme v rovine R^2 súradnicový systém s osami u, v a kružnicu so stredom v bode $O = [0; 0]$ a s polomerom $r = 1$. Označme $J = [1; 0]$. Každému $x \in R$ je priradený práve jeden orientovaný uhol JOA (bod $A = [u; v]$ zvoľme na kružnici). Číslo x vyjadruje veľkosť tohto uhla **v oblúkovej miere** v jednotkách **radiány**. Pre $x < 0$ je orientácia tohto uhla súhlasná so smerom otáčania hodinových ručičiek a pre $x > 0$ je jeho orientácia opačná.

Prvú súradnicu bodu A nazývame **kosínus uhla x**, druhú nazývame **sínus uhla x** a označujeme $A = [\cos x; \sin x]$. Tým sú definované funkcie $\cos x$ a $\sin x$ pre všetky $x \in R$.

V prípade $\cos x \neq 0$, resp. $\sin x \neq 0$ definujeme **tangens** a **kotangens uhla x** vzťahmi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Pre hodnoty goniometrických funkcií (obr. 3.1.23) platí $|OA_x| = \cos x$, $|AA_x| = \sin x$, $|OJ| = |OK| = 1$. Z podobnosti trojuholníkov OA_xA, OJT a OA_xA, CKO vyplýva:

$$\operatorname{tg} x = TJ = \frac{TJ}{OJ} = \frac{AA_x}{OA_x}, \quad \operatorname{cotg} x = CK = \frac{CK}{OK} = \frac{OA_x}{AA_x}.$$

Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod[9] 2π, veľkosť oblúka od bodu J po $[0; 1]$ je $\frac{\pi}{2}$, veľkosť oblúka od bodu J po bod $[0; -1]$ je $-\frac{\pi}{2}$, resp. $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$. Je zrejmé, že ak sa veľkosť oblúku x zväčší o 2π, hodnoty goniometrických funkcií sa nezmenia.

Niekedy sa na vyjadrenie veľkosti uhla používajú **stupne**, ktoré značíme °. Jeden stupeň sa delí na 60 **minút** a jedna minúta na 60 **sekúnd**. Uhlu 2π zodpovedá $360°$. Uhol $x°$ prevedieme na rádiany pomocou vzorca $\pi x°/180°$.

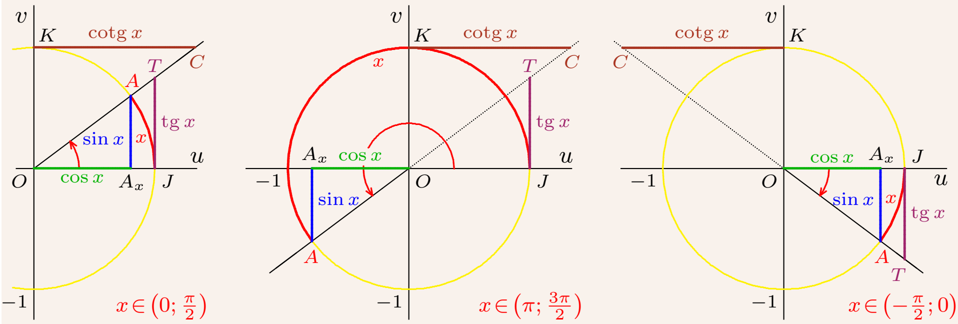
Funkcia $y = \sin x\colon R \to \langle -1; 1\rangle$ je nepárna, periodická s periódou 2π. Jej graf nazývame **sínusoida** a nulové body sú $k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.24).

Funkcia $y = \cos x\colon R \to \langle -1; 1\rangle$ je párna, periodická s periódou 2π. Jej graf nazývame **kosínusoida** a nulové body sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.25).

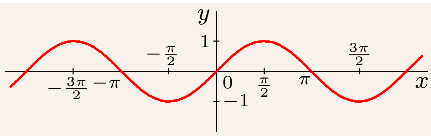
Funkcia $y = \operatorname{tg} x\colon (R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z\}) \to R$ Je nepárna, periodická s periódou π. Jej graf nazývame **tangenta** a nulové body sú $k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.26).

Funkcia $y = \operatorname{cotg} x\colon (R - \{k\pi;\ k \in Z\}) \to R$ Je nepárna, periodická s periódou π. Jej graf nazývame **kotangenta** a nulové body sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.27).

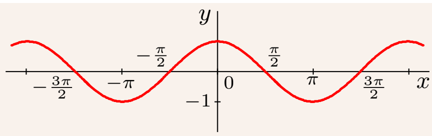
[8]Niekedy (hlavne v anglickej literatúre) sa označenie $y = \log x$ používa pre prirodzený logaritmus.
[9]Číslo π sa nazýva **Ludolfovo**, je iracionálne a jeho hodnota je približne $3,141592654$.



Obr. 3.1.23: Funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$



Obr. 3.1.24: $f\colon\ y = \sin x$



Obr. 3.1.25: $f\colon\ y = \cos x$

Hodnoty $\cos x$, $\sin x$ sú odvesnami pravouhlého trojuholníka s preponou 1. Potom z Pytagorovej vety pre všetky $x \in R$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2}$	$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$	$\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

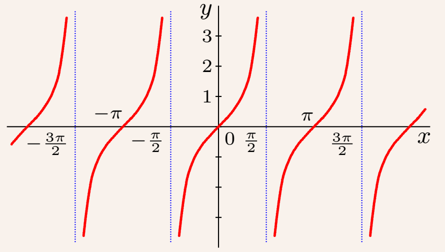
Tabuľka 3.1.1: Niektoré dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus

Na záver uvedieme bez dôkazov niektoré vzťahy, ktoré platia pre goniometrické funkcie.

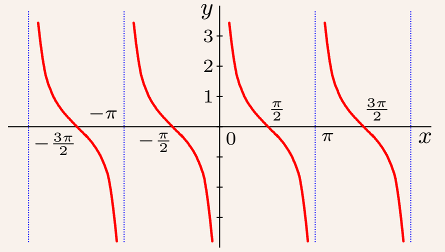
Veta 3.1.8 (Súčtové vzorce pre sínus a kosínus).
$x, y \in R \implies \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$

Veta 3.1.9.
$x, y \in R \implies \quad \sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$
$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$

Veta 3.1.10 (Súčtové vzorce pre tangens a kotangens).
$x, y \in R \implies \operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}, \quad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ (pokiaľ výrazy existujú).



Obr. 3.1.26: $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$



Obr. 3.1.27: $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$

$\sin x =$		$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}$
$\cos x =$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x =$	$\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}$
$\operatorname{cotg} x =$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$	

Tabuľka 3.1.2: Vzťahy medzi goniometrickými funkciami pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté. Keď ich zúžime na vhodné intervaly, potom k nim inverzné funkcie utvoriť môžeme. Tieto funkcie sa nazývajú **cyklometrické funkcie**.

Reštrikcia $y = \sin x|_{\langle -\pi/2; \pi/2\rangle}$, t. j. funkcia $y = \sin x\colon \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \to \langle -1; 1\rangle$, je bijektívna. Inverznú funkciu $y = \arcsin x\colon \langle -1; 1\rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ nazývame **arkussínus**. Funkcia arkussínus je rastúca a nepárna (obr. 3.1.28).

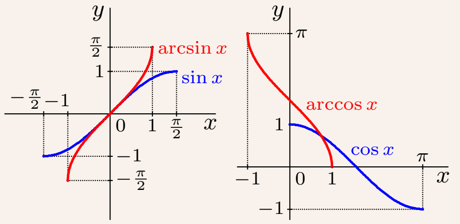
$y = \cos x$, $x \in \langle 0; \pi\rangle$ je bijekcia. Inverznú funkciu $y = \arccos x\colon \langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle$ nazývame **arkuskosínus**. Funkcia arkuskosínus je klesajúca (obr. 3.1.28).

$y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je bijektívna. Inverznú funkciu $y = \operatorname{arctg} x\colon R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nazývame **arkustangens**. Funkcia arkustangens je rastúca a nepárna (obr. 3.1.29).

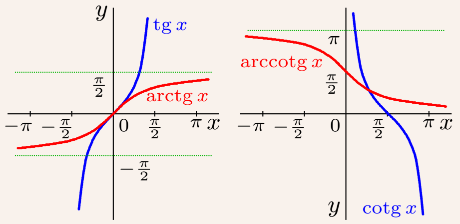
$y = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0; \pi)$ je bijektívna. Inverznú funkciu $y = \operatorname{arccotg} x\colon R \to (0; \pi)$ nazývame **arkuskotangens**. Funkcia arkuskotangens je klesajúca (obr. 3.1.29).

Veta 3.1.11 (Súčtové vzorce pre cyklometrické funkcie).

$x \in \langle -1; 1\rangle \implies \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in R \implies \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$



Obr. 3.1.28: Funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$



Obr. 3.1.29: Funkcie $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

Sínus hyperbolický a **kosínus hyperbolický**, definujeme vzťahmi:

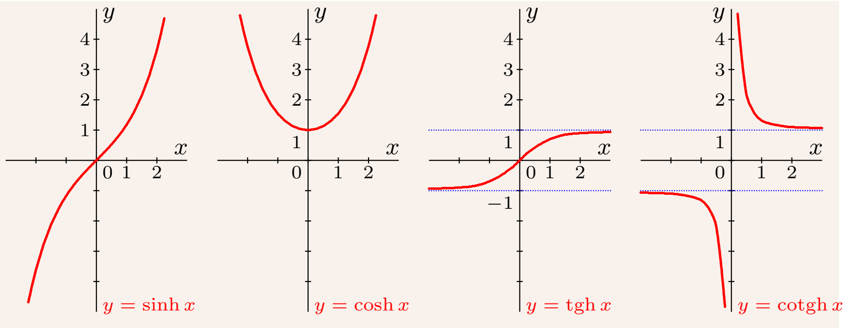
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x} \colon R \to R, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x} \colon R \to \langle 1; \infty) \,.$$

Funkcia $y = \sinh x$ je nepárna a rastúca. Funkcia $y = \cosh x$ je párna (obr. 3.1.30).

Tangens hyperbolický a **kotangens hyperbolický** definujeme vzťahmi:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \colon R \to (-1; 1)\,, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \colon (R - \{0\}) \to \langle -1; 1\rangle \,.$$

Funkcia $y = \operatorname{tgh} x$ je nepárna a rastúca. Funkcia $y = \operatorname{cotgh} x$ je nepárna (obr. 3.1.30).



Obr. 3.1.30: Hyperbolické funkcie $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$

Hyperbolické funkcie[10] majú podobné vlastnosti ako goniometrické funkcie, preto majú podobné názvy. Na záver uvedieme bez dôkazov niektoré vzťahy, ktoré pre ne platia.

Veta 3.1.12.
$x \in R \implies \quad \sinh x \pm \cosh x = \pm\, e^{\pm x}, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

[10] Rovnosť $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ znamená, že body $[\cosh x; \sinh x]$ ležia na hyperbole $y^2 - x^2 = 1$. Odtiaľ pochádza názov hyperbolické funkcie.

Veta 3.1.13 (Súčtové vzorce pre hyperbolický sínus a kosínus).
$x, y \in R \Rightarrow \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,\ \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,\ \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,\ \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2},\ \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}.$

Veta 3.1.14.
$x, y \in R \implies \sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \frac{x \pm y}{2} \cosh \frac{x \mp y}{2},$

$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2},\quad \cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}.$

Veta 3.1.15 (Súčtové vzorce pre hyperbolický tangens a kotangens).
$x, y \in R \implies \operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y},\quad \operatorname{cotgh}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cotgh} x \operatorname{cotgh} y}{\operatorname{cotgh} x \pm \operatorname{cotgh} y}$ pre $x \neq y$.

Veta 3.1.16 (Moivreov vzorec).
$x \in R,\ n \in N \implies (\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{cotgh} x$
$\sinh x =$	$\sinh x$	$\sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\frac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$
$\cosh x =$	$\sqrt{\sinh^2 x + 1}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotgh} x}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$
$\operatorname{tgh} x =$	$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$	$\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\operatorname{cotgh} x}$
$\operatorname{cotgh} x =$	$\frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$	$\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\operatorname{tgh} x}$	$\operatorname{cotgh} x$

Tabuľka 3.1.3: Vzťahy medzi jednotlivými hyperbolickými funkciami pre $x > 0$

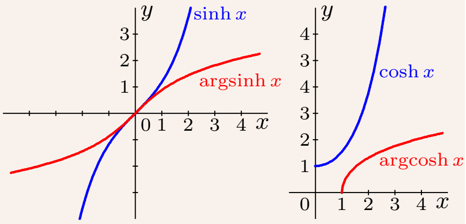
Funkcie $\sinh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$ sú bijektívne, funkcia $\cosh x$ je bijektívna na $\langle 0; \infty)$. Inverzné funkcie k týmto funkciám nazývame **hyperbolometrické funkcie**.

Inverzná funkcia k $y = \sinh x$, $x \in R$ sa nazýva **argument sínusu hyperbolického** a označuje $\operatorname{argsinh} x$. Je rastúca a platí $y = \operatorname{argsinh} x \colon R \to R$ (obr. 3.1.31).

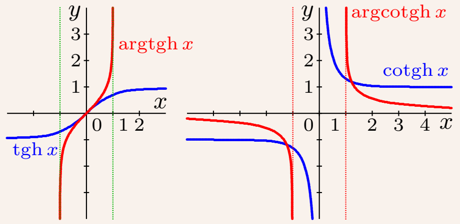
Inverzná funkcia k $y = \cosh x$, $x \in \langle 0; \infty)$ sa nazýva **argument kosínusu hyperbolického** a označuje $\operatorname{argcosh} x$. Je rastúca a platí $\operatorname{argcosh} x \colon \langle 1; \infty) \to \langle 0; \infty)$ (obr. 3.1.31).

Funkcie $\operatorname{argsinh} x$ a $\operatorname{argcosh} x$ môžeme vyjadriť v tvare:

$$\operatorname{argsinh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right],\ x \in R, \quad \operatorname{argcosh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right],\ x \in \langle 1; \infty).$$



Obr. 3.1.31: Funkcie $y = \operatorname{argsinh} x$, $y = \operatorname{argcosh} x$



Obr. 3.1.32: Funkcie $y = \operatorname{argtgh} x$, $y = \operatorname{argcotgh} x$

Inverzná funkcia k $\operatorname{tgh} x$ sa nazýva **argument tangensu hyperbolického** a označuje $\operatorname{argtgh} x$. Je rastúca (obr. 3.1.32) a má tvar:

$$\operatorname{argtgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1+x}{1-x} = \tfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{2} \colon\ (-1;1) \to R.$$

Inverzná funkcia k $\operatorname{cotgh} x$ sa nazýva **argument kotangensu hyperbolického** a označuje $\operatorname{argcotgh} x$. Na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(1;\infty)$ je klesajúca (obr. 3.1.32):

$$\operatorname{argcotgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{x+1}{x-1} = \tfrac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{2} \colon\ (R-\langle -1;1\rangle) \to (R-\{0\}).$$

Cvičenia

3.1.1. Rozhodnite, či sú nasledujúce relácie funkciami: ♣

a) $f = \{[x;\, y] \in R^2;\ x + |y-1| = 0\}$, b) $f = \{[x;\, y] \in R^2;\ |x-1| + y = 0\}$,
c) $f = \{[x;\, y] \in R^2;\ |x| + |y| = 2, y \geq 0\}$, d) $f = \{[x;\, y] \in R^2;\ |x-1| + |y| = 0\}$,
e) $f = \{[x;\, y] \in R^2;\ x^2 + y^2 - 2x = -2\}$, f) $f = \{[x;\, y] \in R^2;\ y^2 + 2y + 1 = 0\}$.

3.1.2. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y = \arcsin \ln x$, b) $y = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$, c) $y = \arcsin x^{-1}$, d) $y = \sqrt{\sin x^2}$,
e) $y = \frac{x+2}{2x^2-1}$, f) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$, g) $y = \ln \sin \frac{\pi}{x}$, h) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$,
i) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$, j) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$, k) $y = \frac{2}{2-\lfloor x \rfloor}$, l) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$,

3.1.3. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg} 2x}$, b) $y = \ln(x^2 - 4)$, c) $y = \ln(x-2) + \ln(x+2)$,
d) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$, e) $y = \sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}$, f) $y = \sqrt{\ln \sin x}\sqrt{\ln \cos x}$,
g) $y = \arccos(2 \sin x)$, h) $y = \ln|1 - \sqrt{x}|$, i) $y = \ln|x^2 - 2x - 6|$,

3.1.4. Zostrojte graf funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:

a) $y = \lfloor \sin^2 x \rfloor$, b) $y = \lfloor \cos^2 x \rfloor$, c) $y = \sin(x+1)$, d) $y = |x| - |x-1|$,

e) $y=\arcsin 3x$, f) $y=\sin 3x$, g) $y=3\sin x$, h) $y=\max\{x,x^2\}$,
i) $y=\mathrm{e}^{\lfloor x\rfloor}$, j) $y=\lfloor \mathrm{e}^x\rfloor$, k) $y=\lfloor \ln x\rfloor$, l) $y=\arcsin x+1$,
m) $y=x^2\sin x$, n) $y=x^3\sin x$, o) $y=\lfloor \sin x\rfloor$, p) $y=|x+|x|+1|$.

3.1.5. Zostrojte graf parametricky zadanej funkcie $y=f(x)$ a určte jej explictný tvar.

a) $x=1-t$, $y=t$, $t\in(-\infty;\infty)$, b) $x=t$, $y=t^2$, $t\in(-\infty;\infty)$,
c) $x=1-t^2$, $y=t^2$, $t\in(-\infty;\infty)$, d) $x=t^2$, $y=t^3$, $t\in(-\infty;\infty)$,
e) $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $t\in\langle 0;2\pi)$, f) $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $t\in\langle 0;\pi\rangle$,
g) $x=t-t^2$, $y=t^2-t^3$, $t\in(-\infty;\infty)$, h) $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$, $t\in\langle 0;2\pi)$.

3.1.6. Rozhodnite, či je funkcia $y=f(x)$ párna alebo nepárna. ♣

a) $y=x^2+\sin x^2$, b) $y=\cos(\pi-x)$, c) $y=x\cosh x$, d) $y=\sin x+\cos x$,
e) $y=x\ln|x|$, f) $y=x-x^3$, g) $y=x-x^2$, h) $y=\chi(x)-\chi^2(x)$,
i) $y=|x|\,x^{-1}$, j) $y=x^2+|x|$, k) $y=x+\sin x$, l) $y=|x|+\cos x$,
m) $y=\ln\frac{2-x}{2+x}$, n) $y=\frac{\sinh x}{\sin x}$, o) $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$, p) $y=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$.

3.1.7. Nech $y=f(x)$ je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale $(-k;k)$, $k>0$. Dokážte, že funkcia $f(x)+f(-x)$ je párna a funkcia $f(x)-f(-x)$ je nepárna na $(-k;k)$.

3.1.8. Je funkcia $y=f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu: ♣

a) $y=|\sin x|$, b) $y=\sin x^2$, c) $y=\sin^2 x$, d) $y=(-1)^{\lfloor x-1\rfloor}$,
e) $y=x-\lfloor x\rfloor$, f) $y=\lfloor \chi(x)\rfloor$, g) $y=\chi(\lfloor x\rfloor)$, h) $y=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.

3.1.9. Je funkcia $y=f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu: ♣

a) $y=\sin x+\cos x$, b) $y=\sin x+\mathrm{tg}\,x$, c) $y=\mathrm{sgn}\,(x-\lfloor x\rfloor)$,
d) $y=\sin x+\cos 2x$, e) $y=\arcsin\sin x$, f) $y=\cos x-3\sin 4x$,
g) $y=\ln|\sin x+\cos x|$, h) $y=2^{3+\sin 2x}$, i) $y=x\arccos x$.

3.1.10. Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $y=f(x)$ monotónna: ♣

a) $y=\lfloor x^{-1}\rfloor$, b) $y=(x^2-x)^3$, c) $y=2^{x^2-3x+2}$, d) $y=2^{|x-2|+|x+1|}$,
e) $y=x^2-3x+2$, f) $y=x^4-3x^2+2$, g) $y=x-|x|$, h) $y=\ln^2 x-\ln x$,
i) $y=2-3x$, j) $y=x^3-x$, k) $y=\sqrt{2-3x}$, l) $y=|x+3|-|x|$,
m) $y=x-\lfloor x\rfloor$, n) $y=|x+1|$, o) $y=x+|x|$, p) $y=x+\sqrt{x-1}$.

3.1.11. Zistite, či je funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ ohraničená zhora alebo zdola a určte jej suprémum a infimum, prípadne maximum a minimum, ak existuje. ♣

a) $y=(1+x^2)^{-1}$, $x\in\langle 0;\infty)$, b) $y=(1+x^2)^{-1}$, $x\in R$,
c) $y=(1+x^2)^{-1}$, $x\in(-1;1\rangle$, d) $y=1-3x$, $x\in\langle 0;5)$,
e) $y=x^2-4x+5$, $x\in R$, f) $y=x^2-4x+5$, $x\in\langle 3;6)$.

3.1.12. Nájdite maximum a minimum funkcie $y=f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y=x^2-3x+1$, b) $y=x^3-3x+1$, c) $y=x^2+|x|$, d) $y=x^2-|x|$,
e) $y=\sin^2 x$, f) $y=\sin x^2$, g) $y=2+\sin x$, h) $y=\sin(x+1)$.

3.1.13. Nech $f\colon\ y=x$, $g\colon\ y=1-x^2$, $h\colon\ y=\sin x$. Určte funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(h)$, $h(f)$, $g(h)$, $h(g)$, $f[g(h)]$, $f[h(g)]$, $g[f(h)]$, $g[h(f)]$, $h[f(g)]$, $h[g(f)]$. ♣

3.1.14. Nájdite funkcie $f\pm g$, fg, f/g, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, ak: ♣

a) $f(x)=2x$, $g(x)=4-x$, b) $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x^2-1$,
c) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sqrt{1-|x|}$, d) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sinh x$,
e) $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=\sqrt{x}$, f) $f(x)=x^2$, $g(x)=\lfloor x\rfloor$,
g) $f(x)=x+\lfloor x\rfloor$, $g(x)=x^2-x$, h) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=(x+2)^{-1}$.

3.1.15. Nájdite funkcie $|g|$, $f+g$, g^2, fg, f/g, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ a ich definičné obory, ak $f(x)=x$ pre $x<0$ a $f(x)=x^2$ pre $x\geq 0$ a platí: ♣

a) $g(x)=\begin{cases}1, & \text{pre } x<0,\\ x^2+1, & \text{pre } x\geq 0,\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}x^2, & \text{pre } x<0,\\ x+1, & \text{pre } x\geq 0.\end{cases}$

3.1.16. Nájdite zložené funkcie $f_2=f(f)$, $f_3=f(f(f))$, $\ldots$, $f_n=f(f(f\cdots f(f)))$, ak funkcia $f_1=f$ je definovaná predpisom: ♣

a) $f(x)=1+x$, b) $f(x)=1-x$, c) $f(x)=\frac{1+x}{x}$, d) $f(x)=\frac{x}{1+x}$,
e) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$, f) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, g) $f(x)=\frac{x}{1-x}$, h) $f(x)=\frac{x}{x-1}$,
i) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, j) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, k) $f(x)=\frac{1-x}{x}$, l) $f(x)=\frac{x-1}{x}$.

3.1.17. Nájdite inverznú funkciu k funkcii $y=f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y=x^2-1$, $x\in\langle 2;5\rangle$, b) $y=x/(x+3)$, $x\in R-\{3\}$,
c) $y=x^2-8x+16$, $x\in\langle 4;5\rangle$, d) $y=\sin(3x-1)$, $|3x-1|<\pi/2$,
e) $y=\ln\sqrt{x-1}$, $x\in(1;\infty)$, f) $y=\ln(\sqrt{x}-1)$, $x\in(1;\infty)$.

3.1.18. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $y=f(x)$ tak, aby bola prostá. Potom k nej určte inverznú funkciu $y=f^{-1}(x)$. ♣

a) $y=1+2\,\mathrm{tg}\,x$, b) $y=\arcsin\sin x$, c) $y=\sqrt{1+\sin x}$, d) $y=\arccos \mathrm{e}^x$,
e) $y=\ln\cos x$, f) $y=\mathrm{e}^{1-x^2}-1$, g) $y=\ln(1+\mathrm{e}^x)$, h) $y=\mathrm{e}^{x-1}-1$,
i) $y=|x|(-1)^{\lfloor x\rfloor}$, j) $y=x^2-2x-1$, k) $y=x^4-1$, l) $y=\sqrt{|x+1|}$.

3.2 Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti, t. j. jej chovanie v okoliach daných bodov, napríklad v okolí bodu, v ktorom nie je definovaná.

Príklad 3.2.1.
Nech $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$. Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Je zrejmé, že ak $x \to 2$, potom $f(x) \to 2+2 = 4$. To znamená, že ak postupnosť argumentov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 2$, potom príslušná postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 4$. ■

Funkcia f nemusí byť definovaná v bode a, v okolí ktorého ju skúmame. Bod a musí byť hromadným bodom $D(f)$. Ak to zhrnieme, zaujíma nás správanie $f(x)$ pre $x \to a$.

Funkcia $y = f(x)$ má v bode $a \in R^*$ limitu rovnajúcu sa $b \in R^*$ (**limita funkcie f v bode a sa rovná b**)[11] a označujeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

a) Bod a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

b) Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto b$ (t. j. ak $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$).

Ak $a \in R$, potom hovoríme **o limite vo vlastnom bode a**. Ak $a = \pm\infty$, potom hovoríme **o limite v nevlastnom bode a**. Ak $b \in R$, potom hovoríme o **vlastnej limite** a ak $b = \pm\infty$, hovoríme **o nevlastnej limite**.

Poznámka 3.2.1.
Z a) vyplýva existencia aspoň jednej postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ (veta 2.3.5). Z b) vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$.

Príklad 3.2.2.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$, kde $\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in I$.

Riešenie.
Je zrejmé, že bod 0 je hromadným bodom množiny $D(\chi) = R$.
Uvažujme postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$, $\{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$. Pre všetky $N \in n$ platí:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} \neq 0,\ \frac{1}{n} \in Q,\ \chi(\frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow \{\chi(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 1 \\ \frac{\pi}{n} \neq 0,\ \frac{\pi}{n} \in I,\ \chi(\frac{\pi}{n}) = 0 \Rightarrow \{\chi(\frac{\pi}{n})\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \chi(x) \ \text{ neexistuje.} ■$$

Príklad 3.2.3.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to a} c$, kde $c \in R$, $a \in R^*$.

Riešenie.
Označme $f\colon\ y = c$. Je zrejmé, že $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, $x_n \in R$, $x_n \neq a \ \Rightarrow\ f(x_n) = c \ \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c. ■$$

Príklad 3.2.4.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^2$, kde $a \in R^*$.

Riešenie.
Každý bod $x = a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $D(f) = R$.

[11] Táto definícia sa nazýva **definícia limity funkcie v zmysle Heineho**.

Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, $x_n \in R$, $x_n \neq a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a \;\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a \cdot a = \begin{cases} a^2, & \text{pre } a \in R, \\ \infty, & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases} \blacksquare$$

Príklad 3.2.5.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$.

Riešenie.
Označme $f\colon\ y = \cos \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadný bod množiny $D(f) = R - \{0\}$.
Nech $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\pi+2n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0 \;\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2n\pi} \neq 0,\ f(\alpha_n) = \cos(2n\pi) = 1,\ n \in N \quad \Rightarrow \{f(\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 1 \\ \frac{1}{\pi+2n\pi} \neq 0,\ f(\beta_n) = \cos(\pi+2n\pi) = 0,\ n \in N \Rightarrow \{f(\beta_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x} \nexists. \blacksquare$$

Z definície je zrejmé, že $\lim_{x\to a} f(x) = b$ predstavuje lokálnu záležitosť v $O(a)$, $O(b)$. Na základe vety 2.3.2 existujú $n_a, n_b \in N$také, že pre všetky $n \geq n_a$ platí $x_n \in O(a) - \{a\}$ a pre všetky $n \geq n_b$ platí $f(x_n) \in O(b)$. Limitu potom môžeme charakterizovať pomocou $O(a)$, $O(b)$.[12] Tento vzťah vyjadruje nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta 3.2.1.
$a, b \in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff$ platí a) a zároveň platí b), pričom:

a) Bod a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
b) Pre každé $O(b)$ existuje $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

Ak označíme ε, δ polomery okolí $O(a)$, $O(b)$, môžeme tvrdenie b) symbolicky zapísať:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ a, b \in R \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\forall O_\varepsilon(b)}_{\forall \varepsilon>0}\, \underbrace{\exists O_\delta(a)}_{\exists \delta>0}\, \forall x \in D(f)\colon\ \underbrace{x \in O_\delta(a), x \neq a}_{0<|x-a|<\delta} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in O_\varepsilon(b)}_{|f(x)-b|<\varepsilon},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b,\ b \in R \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta \in R \qquad \delta<x\ [\text{resp. } x<\delta] \qquad |f(x)-b|<\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ a \in R \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon \in R \quad \exists \delta>0 \qquad 0<|x-a|<\delta \qquad \delta<f(x)\ [f(x)<\delta].$$

Veta 3.2.2.
$a \in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R$ (konečná) $\Longrightarrow$ existuje okolie $O(a)$, v ktorom je f ohraničená.

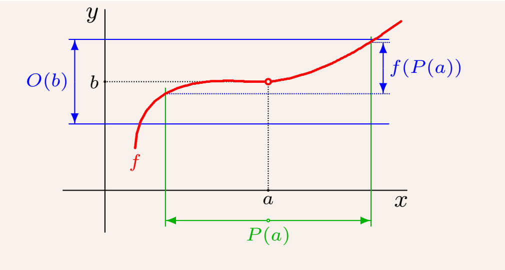
Dôkaz.
$O(b)$ je ľubovoľné okolie $\xrightarrow{\text{veta 3.2.1}}$ existuje $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$, t. j. v ktorom je f ohraničená (obr. 3.2.34). $\blacksquare$

Nasledujúce vety reprezentujú základné vlastnosti limít funkcií. Tieto tvrdenia vyplývajú z definície a z analogických vlastností limít postupností. Uvádzame ich bez dôkazov.

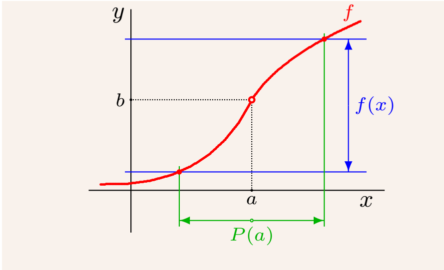
Veta 3.2.3.
$a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$ a $D(g)$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ potom:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existuje práve vtedy, ak existuje } \lim_{x\to a} g(x) \text{ a platí } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

[12] V literatúre sa limita funkcie v danom bode často definuje pomocou okolí a definícia pomocou postupností sa uvádza ako ekvivalentná definícia.



Obr. 3.2.33: Veta 3.2.1



Obr. 3.2.34: Veta 3.2.2

Príklad 3.2.6.
Dokážte, že $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = 5$.

Riešenie.
$x\in R-\{1\} \;\Rightarrow\; \frac{2x^2+x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1} = 2x+3 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (2x+3) = 5.$

V praxi sa veta 3.2.3 neuvádza: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (2x+3) = 5$. ■

Veta 3.2.4.
$a\in R^*$ je hromadný bod $D(f)$ a $D(g)$, $f(x)\leq g(x)$ pre všetky $x\in O(a)$, $x\neq a \implies$
(pokiaľ limity existujú) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Pre $f(x) < g(x)$ sa tvrdenie vety $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ nezmení (príklad 3.2.7).

Príklad 3.2.7.
Nech $f\colon\, y=0,\ x\in R$ a $g\colon\, y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$. Bod ∞ je hromadným bodom $D(f)$, $D(g)$.
Pre všetky $x>0$ platí $0<\frac{1}{x}$, ale $\lim\limits_{x\to\infty} 0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. ■

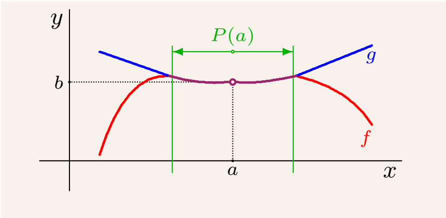
Dôsledok 3.2.4.a (Veta o zovretí).
$a\in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b\in R^*$,
$h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ pre všetky $x\in O(a)$, $x\neq a \implies$ existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Dôsledok 3.2.4.b.
$a\in R^*$ je hromadný bod $D(f)$ a $D(g)$,
f je ohraničená v nejakom okolí $O(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \implies \lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = 0$.

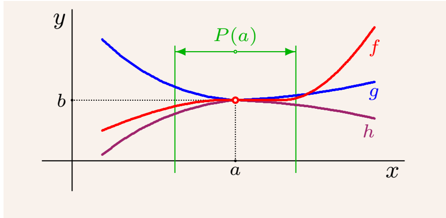
Príklad 3.2.8.
Dokážte, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Riešenie.
∞ je hromadný bod definičného oboru funkcie $y=\frac{\sin x}{x}$, $-1\leq \sin x\leq 1$ pre $x\in R \;\Rightarrow$

$$-\frac{1}{x}\leq \frac{\sin x}{x}\leq \frac{1}{x} \text{ pre } x>0 \;\Rightarrow\; 0=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\leq \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\leq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$



Obr. 3.2.35: Veta 3.2.3



Obr. 3.2.36: Dôsledok 3.2.4.a

Iné riešenie.
$y = \sin x$ je ohraničená na R, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \xRightarrow{\text{dôsledok 3.2.4.b}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$ ■

Veta 3.2.5.
$a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0.$

Dôsledok 3.2.5.a.
$b \in R$, $a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff \lim\limits_{x\to a} (f(x) - b) = 0.$

Príklad 3.2.9.
Dokážte, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Riešenie.
0 je hromadný bod $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x \;\Rightarrow\; 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \\ x < 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0 \;\Rightarrow\; 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$0 < \cos x < \frac{x}{\sin x} < 1 \;\Rightarrow\; 1 = \lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \text{ ■}$$

Veta 3.2.6.
$a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$] pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty, \qquad \text{[resp. } \lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty\text{]}.$$

Príklad 3.2.10.
$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje, pretože $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \mapsto 0$, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \infty$,
ale $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \mapsto 0$, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto -\infty$. ■

Veta 3.2.7.
$a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$ a $D(g)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x) \implies$
existuje $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

Dôsledok 3.2.7.a.
$a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$, [resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$] $\implies$
existuje $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$].

Veta 3.2.8 (Limita zloženej funkcie).

$$\left.\begin{array}{l} a,b,c\in R^*,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u)=c,\ H(f)\subset D(g) \\ \underbrace{f(x)\neq b \text{ pre všetky } x\in O(a),\ x\neq a}_{a)} \quad \text{alebo} \quad \underbrace{g(b)=c}_{b)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{u\to b} g(u)=c.$$

Dôkaz.
Označme $F=g(f)$, potom a je hromadným bodom $D(F)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x)=b\colon\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto a,\ x_n\neq a \ \Rightarrow\ \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto b \\ \lim\limits_{u\to b} g(u)=c\colon\ \{u_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto b,\ u_n\neq b \ \Rightarrow\ \{g(u_n)\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{platí a)}} u_n=f(x_n)\neq b \ \Rightarrow\ \{g(u_n)\}_{n=1}^{\infty}=\{g(f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}=\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto c.$$

$$\xRightarrow{\text{platí b)}} \{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}=\{g(f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}=\{g(b)\}_{n=1}^{\infty}=\{c\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto c. \ \blacksquare$$

Ak pri výpočte $\lim\limits_{x\to a} g(f)$ položíme $u=f(x)$, potom hovoríme, že **vykonávame substitúciu** $u=f(x)$.

Ak položíme $x=h+a$, $h\to 0$, potom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(h+a)$.

Príklad 3.2.11.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Riešenie.
Zo vzorca $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}b+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ vyplýva:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-1}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left[\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right]}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left[\sqrt[6]{x}+1\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+1}=\frac{3}{2}.$$

Ak použijeme substitúciu $z=\sqrt[6]{x}$, t. j. $x=z^6$, $z\to 1$, potom je riešenie prehľadnejšie:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z^6}-1}{\sqrt[3]{z^6}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z+1}{z+1}=\frac{3}{2}. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.12.
a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\begin{bmatrix} x-2=z \\ z\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\ln\frac{x^2-1}{x-1}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\right]=\ln 2. \ \blacksquare$

Veta 3.2.9.
$a,b,c\in R^*$, $r\in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c \xRightarrow{\text{pokiaľ majú dané výrazy zmysel}}$

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a} f(x)\right|=|b|, \qquad \lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=b\pm c,$$

$$\lim_{x\to a}\left[r\,f(x)\right]=r\lim_{x\to a} f(x)=rb, \qquad \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=bc,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{1}{c}, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{b}{c}$$

Ak niektorý z daných výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že limita neexistuje. V tomto prípade ju musíme vypočítať iným spôsobom, napr. vhodnou úpravou výrazu.

Príklad 3.2.13.
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$
Vetu 3.2.9 nemôžeme použiť priamo, pretože $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. ■

Príklad 3.2.14.
$$\left.\begin{array}{r} a\in\langle 0;1),\ x\longmapsto\infty \Rightarrow\ a^x\longmapsto 0 \\ a=1,\ x\longmapsto\infty \Rightarrow\ a^x\longmapsto 1 \\ a>1,\ x\longmapsto\infty \Rightarrow\ a^x\longmapsto\infty \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{pre } a\in\langle 0;1), \\ 1, & \text{pre } a=1, \\ \infty, & \text{pre } a\in(1;\infty). \end{cases}$$ ■

3.2.1 Limita vzhľadom na množinu a jednostranné limity

Limitu funkcie v bode $a\in R^*$ sme definovali v nejakom okolí $O(a)-\{a\}$. Ako ukazuje nasledujúci príklad, niekedy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje, ale existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, kde g je zúženie f na konkrétnu množinu $A\subset D(f)$. Preto má zmysel definovať limitu vzhľadom na množinu.

Príklad 3.2.15.
a) Uvažujme Dirichletovu funkciu χ a jej zúženie $f=\chi|_Q\colon\ y=1,\ x\in Q$.
Je zrejmé, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, aj keď $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje (príklad 3.2.2).

b) Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, kde $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{pre } x\in(-\infty;0), \\ 2, & \text{pre } x\in\langle 0;\infty), \end{cases}$ neexistuje (obr. 3.2.37).

Ale ak označíme $g=f|_{(-\infty;0)}$, $h=f|_{\langle 0;\infty)}$, potom $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=2$. ■

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$ vzhľadom na množinu $A\subset D(f)$, ak má v bode a limitu b jej zúženie $g=f|_A$, t. j. ak $\lim\limits_{x\to a}\left[f|_A(x)\right]=b$.

Veta 3.2.10.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \iff \lim\limits_{x\to a}\left[f|_A(x)\right]=b$ pre všetky $A\subset D(f)$.

Limitou zľava a **limitou sprava funkcie f v bode a** nazývame limity:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a}\left[f|_{D(f)\cap(-\infty;a)}(x)\right], \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a}\left[f|_{D(f)\cap(a;\infty)}(x)\right].$$

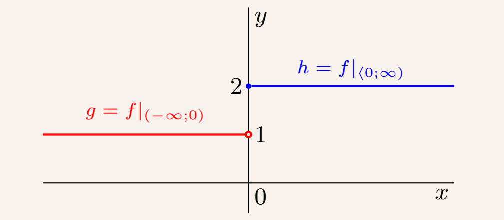
Súhrnne ich nazývame **jednostranné limity**, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nazývame **obojstranná limita**.

Priamo z definície obojstrannej a jednostranných limít vyplýva nasledujúca veta.

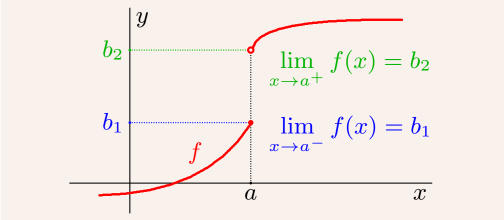
Veta 3.2.11.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b.$

Príklad 3.2.16.
a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje, ale existujú $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg} x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg} x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x=\pm\frac{\pi}{2}$ (obr. 3.1.26, 3.1.29). ■



Obr. 3.2.37: Funkcia z príkladu 3.2.15



Obr. 3.2.38: Jednostranné limity

Príklad 3.2.17.
a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \begin{bmatrix} z = 1/x \\ z\to\infty \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \begin{bmatrix} z = -1/x \\ z\to\infty \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty} \left(1-\frac{a}{z}\right)^{-z} = \lim\limits_{z\to\infty} \left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = (\mathrm{e}^{-a})^{-1} = \mathrm{e}^a.$

$\xRightarrow{\text{veta 3.2.11}} \lim\limits_{x\to 0^-} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln \mathrm{e}^1 = 1.$ ■

Na záver uvedieme bez výpočtu niektoré dôležité limity.

Veta 3.2.12.
$a, b \in R$, $a > 0$, $q \in R \implies$

$$\lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right] = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{1}{x}\right]^x = \mathrm{e}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty, & \text{pre } a \in (0;1\rangle, \\ 0, & \text{pre } a \in (1;\infty), \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left[a^{\frac{1}{x}} - 1\right] = \ln a, \quad \lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{b}{x}\right]^x = \mathrm{e}^b, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0, & \text{pre } a \in (0;1\rangle, \\ \infty, & \text{pre } a \in (1;\infty). \end{cases}$$

3.2.2 Asymptotické vlastnosti

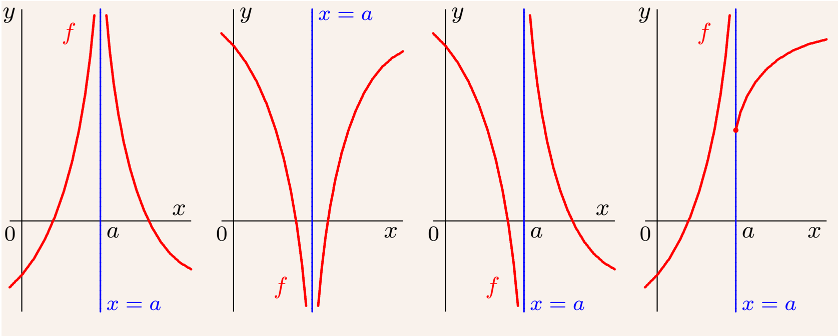
Nech $a \in R^*$ a nech f, g sú definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Potom hovoríme, že **funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a** (**funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú**) a označujeme $f \sim g$, $x \to a$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú napríklad funkcie:

$$x^2 \sim x,\ x\to 1, \quad \sin x \sim x,\ x\to 0, \quad \sin x \sim 1,\ x\to \pi/2, \quad \ln(x+1) \sim x,\ x\to 0.$$

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti v nevlastných bodoch, t. j. pre $x \to \pm\infty$. A taktiež v okolí bodov $a \in R$, v ktorých je aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ nevlastná, t. j. rovná ∞ alebo $-\infty$.

Ak má funkcia f v bode a aspoň jednu z jednostranných limít nevlastnú, potom priamku $x = a$ nazývame **asymptota bez smernice** (**vertikálna**) **grafu funkcie f**.

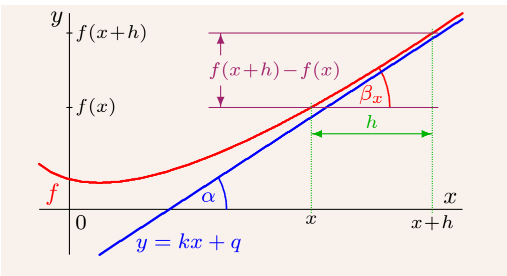


Obr. 3.2.39: Príklady asymptoty bez smernice

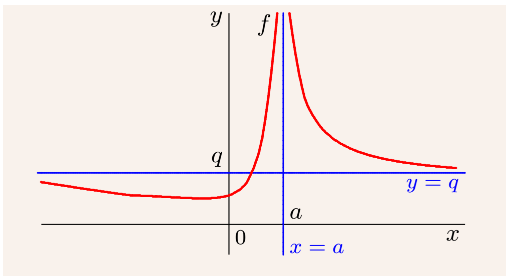
Priamka $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou grafu funkcie** f, ak platí:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Číslo k predstavuje smernicu priamky (obr. 3.2.40). Ak $k = 0$, potom sa priamka $y = q$ nazýva **horizontálna** (**vodorovná**) **asymptota** (obr. 3.2.41).



Obr. 3.2.40: Asymptota so smernicou



Obr. 3.2.41: Asymptoty $y = q$, $x = a$

Veta 3.2.13.
$y = kx + q$ je asymptotou grafu funkcie $y = f(x)$ práve vtedy, ak existujú reálne limity:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre $x \to \infty$. Pre $x \to -\infty$ je dôkaz analogický.
$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je asymptota so smernicou $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \Big[\frac{f(x)}{x} \underbrace{-k - \frac{q}{x}}_{\to -k}\Big] = 0 \xRightarrow{\text{dôsledok 3.2.5.a}} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+q)] = \lim\limits_{x\to\infty}[(f(x)-kx)-q] = 0 \xrightarrow{\text{dôsledok 3.2.5.a}} \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx] = q.$
$PP_{\Leftarrow}$: $k, q\in R \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+q)] = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx] - \lim\limits_{x\to\infty} q = q-q = 0.$ ■

Na obrázku 3.2.40 je načrtnutý graf funkcie f s asymptotou $y = kx + q$. Smernica k priamky predstavuje tangens uhla α, ktorý zviera s osou x, t. j. $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Nech $h > 0$ je pevne dané číslo. Hodnota β_x predstavuje uhol, ktorý zviera priamka určená bodmi $[x; f(x)]$, $[x + h; f(x+h)]$ so súradnicovou osou x. Pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t. j. $\operatorname{tg}\beta_x \to \operatorname{tg}\alpha = k$. Ak uvážime vetu 3.2.13, potom platí:

$$\operatorname{tg}\beta_x = \tfrac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \operatorname{tg}\alpha \ \Rightarrow\ k = \lim_{x\to\infty}\tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Príklad 3.2.18.
Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$.

Riešenie.
$D(f) = R - \{0\}$, t. j. asymptota bez smernice môže byť iba v bode $x_0 = 0$. Platí:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\tfrac{2x^2+x+1}{8x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}-\infty = -\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\tfrac{2x^2+x+1}{8x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\infty = \infty.$$

Pre koeficienty asymptoty $y = kx + q$ so smernicou na základe vety 3.2.13 platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8x}+\tfrac{1}{8x^2}\right] = \tfrac{1}{4}+0+0 = \tfrac{1}{4},$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\tfrac{2x^2+x+1}{8x}-\tfrac{x}{4}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{8x}+\tfrac{x}{4}\right] =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = \tfrac{1}{8}+0 = \tfrac{1}{8}.$$

Potom asymptoty (obr. 3.2.42) sú $x = 0$ (bez smernice) a $y = \frac{x}{4}+\frac{1}{8}$ (so smernicou). ■

Príklad 3.2.19.
Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Riešenie.
$D(f) = R$, takže asymptoty bez smernice neexistujú.

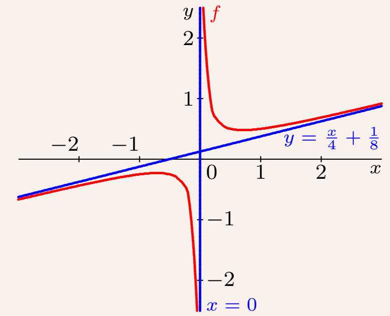
$x > 0 \ \Rightarrow\ k_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[2-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right] = 2-\frac{3}{\infty} = 2.$

$x < 0 \ \Rightarrow\ k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \left[\begin{matrix} z=-x \\ z\to\infty\end{matrix}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\frac{-2z-3\sqrt[3]{z^2}}{-z} = \lim\limits_{z\to\infty}\left[2+\frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right] = 2.$

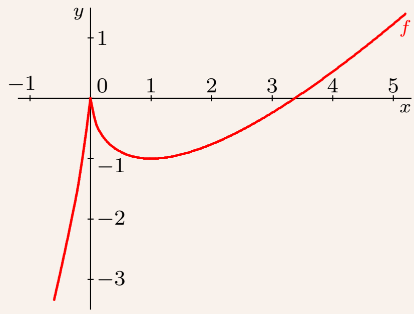
Asymptoty so smernicou tiež neexistujú (obr. 3.2.43), pretože v oboch prípadoch platí:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x-3\sqrt[3]{x^2}-2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-3\sqrt[3]{x^2}\right] = -\infty \notin R.$$ ■

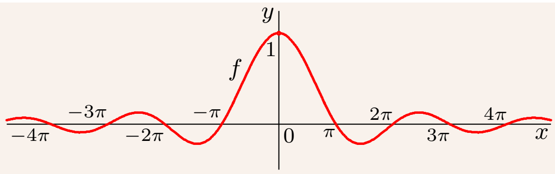
V zhode s definíciou, je priamka $y = kx + q$ asymptotou so smernicou grafu funkcie f aj v prípade, keď graf funkcie f okolo priamky osciluje. Príkladom je funkcia $f\colon\ y = \frac{\sin x}{x}$, $x\in R - \{0\}$. Jej graf osciluje pre $x \to \pm\infty$ okolo priamky $y = 0$ (obr. 3.2.44).



Obr. 3.2.42: Graf funkcie s dvoma asymptotami (príklad 3.2.18)



Obr. 3.2.43: Graf funkcie bez asymptôt (príklad 3.2.19)



Obr. 3.2.44: Funkcia $f\colon\ y=\frac{\sin x}{x}$ a jej asymptota so smernicou $y=0$

3.2.3 Riešené príklady

Príklad 3.2.20.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}\cdot\frac{x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2}{x^2+4}=\frac{3\cdot 0+2}{0+4}=\frac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$ ■

Príklad 3.2.21.

Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$, $m\in R$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Riešenie.

a) $m=0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}0=0.$

$$m\neq 0 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}=\left[\begin{array}{c|c} z^3=1+mx & x=\frac{z^3-1}{m}\\ z\to 1 & \end{array}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)m}{z^3-1}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{m(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{m}{z^2+z+1}=\frac{m}{3}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\left[\begin{array}{c} x=z^{12}\\ z\to 1\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^3-1}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\frac{4}{3}.$ ■

Príklad 3.2.22.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1}+2^0=6.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=1+1=2.$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=1.$$

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^{-1}\sqrt{x^2-x^3}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=1. \blacksquare$$

Príklad 3.2.23.

Nech $a>0$. Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{-x}-1}{x}$.

Riešenie.

a) Substitúcia $a^x-1=z$, $a^x=z+1$, $z\to0 \;\Rightarrow\; x\ln a=\ln a^x=\ln(z+1) \;\Rightarrow$

$$x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a}\xrightarrow{\text{príklad 3.2.17}}\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{z\to0}\frac{z\ln a}{\ln(z+1)}=1\cdot\ln a=\ln a.$$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{-x}-1}{x}=\left[\begin{array}{c}x=-z\\ z\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to0}\frac{a^z-1}{-z}=-\lim\limits_{z\to0}\frac{a^z-1}{z}=-\ln a. \blacksquare$

Príklad 3.2.24.

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=\left[\begin{array}{c}5x=z\\ z\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to0}\frac{5\sin z}{z}=5.$

b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x}=\left[\begin{array}{c}\arcsin(x-2)=z\\ x-2=\sin z,\ z\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to0}\left(\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{1}{2+\sin z}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\left[\begin{array}{c}x=\operatorname{tg}z\\ z\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to0}\frac{z}{\operatorname{tg}z}=\lim\limits_{z\to0}\left(\frac{z}{\sin z}\cos z\right)=1\cdot1=1. \blacksquare$

Príklad 3.2.25.

Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2x}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin2x)^{\operatorname{tg}^22x}$.

Riešenie.

a) Substitúcia $\sin^2x=z$, $z\to0^+$. Pre $x\to0$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ platí:

$$\cos x>0 \;\Rightarrow\; \cos x=|\cos x|=\sqrt{1-\sin^2x}=(1-z)^{\frac{1}{2}},\quad \operatorname{cotg}^2x=\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{1-z}{z}\;\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2x}=\lim_{z\to0}\left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}}=\lim_{z\to0}\left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}}=\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

b) Substitúcia $\cos^22x=z$, $z\to0^+$. Pre $x\to\frac{\pi}{4}$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ platí $\sin2x>0$. Potom:

$$\sin2x=|\sin2x|=\sqrt{1-\cos^22x}=(1-z)^{\frac{1}{2}},\quad \operatorname{tg}^22x=\frac{\sin^22x}{\cos^22x}=\frac{1-z}{z}\xrightarrow{\text{a)}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin2x)^{\operatorname{tg}^22x}=\lim_{z\to0}\left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}. \blacksquare$$

Príklad 3.2.26.
Vypočítajte pre $a\in R$: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{a/\ln x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{a/\ln x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$.

Riešenie.
a) Z inverznosti funkcií e^x, $\ln x$ a zo skutočnosti $x\to 0^+$, $x>0$ vyplýva:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{a/\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln\left[x^{a/\ln x}\right]} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a\,.$$

b) Analogicky ako v časti a) platí: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{a}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\ln x} = \mathrm{e}^a$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x} = \mathrm{e}^{(-\infty)\cdot(-\infty)} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty$ ■

V príklade 3.2.26 sme počítali limity výrazov v tvare 0^0. Vo všeobecnosti nevieme určiť, čomu sa takýto výraz rovná a nazývame ho neurčitý. S neurčitými výrazmi sa stretávame pomerne často a počítame ich pomocou limít. Medzi **neurčité výrazy** patria:

$$\infty-\infty,\quad \pm\infty\cdot 0,\quad \tfrac{0}{0},\quad \tfrac{1}{0},\quad \tfrac{\pm\infty}{0},\quad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0^0,\quad 0^{\pm\infty},\quad 1^{\pm\infty},\quad (\pm\infty)^0.$$

Príklad 3.2.27.
a) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+2)-\ln x] = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left[1+\frac{2}{x}\right]^x = \ln \mathrm{e}^2 = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix} tx=z \\ z\to 0\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{t\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{t}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix} 3x+1=z \\ z\to\infty\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}} =$

$= \lim\limits_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[\mathrm{e}^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$ ■

Príklad 3.2.28.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$.

Riešenie.
Pre všetky $x>0$ platí $x^{1/x} = \mathrm{e}^{\ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{\ln x/x}$.

a) $x\to 0^+$, $x\in(0;1)$ $\Rightarrow$ $\ln x\to-\infty$, $\ln x<0$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x/x} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$$

b) Z vety 3.2.12 vyplýva: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \begin{bmatrix} z=\ln x \\ z\to\infty\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{\mathrm{e}^z} = 0 \;\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x^{1/x}} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x/x} = \mathrm{e}^0 = 1.\ ■$$

Príklad 3.2.29.
Nech $m,n\in N$. Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$, a) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Riešenie.
a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin mx}{mx}\cdot\frac{nx}{\sin nx}\cdot\frac{mx}{nx}\right] = 1\cdot 1\cdot\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$ (príklad 3.2.9).

b) Pre všetky $n\in N$ platí: $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n \;\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \begin{bmatrix} x=\pi+z \\ z\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(m\pi+mz)}{\sin(n\pi+nz)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin m\pi\cos mz+\cos m\pi\sin mz}{\sin n\pi\cos nz+\cos n\pi\sin nz} =$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{0+(-1)^m\sin mz}{0+(-1)^n\sin nz} = (-1)^{m-n}\lim_{z\to 0}\frac{\sin mz}{\sin nz} = (-1)^{m-n}\frac{m}{n}. \blacksquare$$

Cvičenia

3.2.1. Nech $a, b\in R$, $a>0$, $b>0$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$, d) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$, f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$,

i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$, j) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2/3}-1}{x^{3/5}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$, l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, p) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}$,

q) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3^x}{\sin 3x}$, r) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3^x}{\sin 3x}$, s) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3^x}{\sin 3x}$, t) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-3^x}{\sin 3x}$.

3.2.2. Nech $a, b\in R$, $m, n\in N$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{4x}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-e^{-x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{3x}-1}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{6^x-1}$,

i) $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$, j) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{a}{x}\right)^x$, p) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x+6}{x^3+8}$,

q) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}$, r) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$, s) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}$, t) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}$.

3.2.3. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{\sin x}}$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{tgh} x$, p) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tgh} x$,

q) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$, r) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$, s) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x-2}$, t) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 5x}$.

3.2.4. Nech $a\in R$, $n\in N$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$,

g) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$,

j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, k) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, l) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3+a}-x\right)$, n) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin 2\pi n$, o) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin 2\pi x$,

p) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x \sin 2\pi x$, q) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x} \sin 2\pi x$, r) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} \sin 2\pi x$.

3.2.5. Nech $n\in N$. Vypočítajte limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$, e) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-5x+4}{x^3-1}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$, i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$, k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$,

m) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$,

p) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, r) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

s) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$, t) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$, u) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

3.2.6. Nech $a\in R$, $m,n\in R$. Vypočítajte limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}$, b) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6}$, f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{5x}$, i) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, o) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$,

p) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$, q) $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$, r) $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$.

3.2.7. Nech $a\in R$, $m,n\in R$. Vypočítajte limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln x-\ln(x+2)]$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+3)-\ln x]$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+a)-\ln(x-a)]$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+a)-\ln x]$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, j) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$,

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$, n) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

3.2.8. Dokážte, že neexistujú limity $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x \sin x$, $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(1+\sin x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(1-\sin x)$.

3.3 Spojitosť funkcie

S pojmom limity funkcie f v danom bode a úzko súvisí pojem spojitosti tejto funkcie f v bode a. Prírodné deje často prebiehajú spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“. Niekedy môžu samozrejme prebiehať diskrétne alebo v kvantách, ale kvantá sú väčšinou také malé, že nám (ako nedokonalým pozorovateľom) sa celý proces javí ako spojitý. Najznámejším príkladom je premietanie filmu, kde postačí frekvencia väčšia ako 10 obrázkov za sekundu a pohyb sa nám javí ako spojitý.

Uvažujme hmotný bod, ktorý sa pohybuje po nejakej dráhe. Veľkosť dráhy závisí od času pohybu. Predpokladajme, že dráhu popisuje funkcia $y=f(t)$, kde t reprezentuje čas. V čase T bude veľkosť dráhy rovná hodnote $f(T)$. Ak sa čas T zmení o malú hodnotu, potom sa dráha $f(T)$ tiež zmení o nejakú malú hodnotu. Ak $t\to T$, potom $f(t)\to f(T)$. To znamená, že ak $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\to T$, potom $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}\to f(T)$.

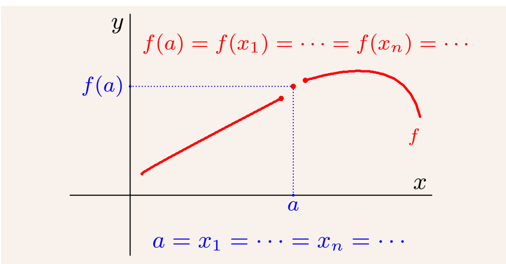
Funkcia $y=f(x)$ je spojitá v bode $a\in D(f)$, ak pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto f(a)$
(t. j. ak $x_n\in D(f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$).

Bod $a\in D(f)$ môže byť iba hromadný alebo izolovaný:

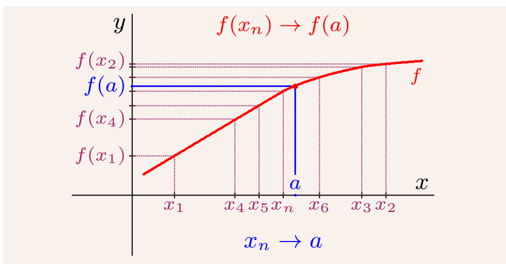
– Ak je bod a izolovaný (obr. 3.3.45), potom existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto a$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(a)=f(a)$, t. j. **$f$ je spojitá v izolovanom bode a** vždy.

– Ak je a hromadný (obr. 3.3.46), potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (veta 3.3.1).

Ak je f spojitá v bode $a\in D(f)$, potom a nazývame **bodom spojitosti funkcie f**.



Obr. 3.3.45: Spojitosť funkcie f v izolovanom bode $a\in D(f)$



Obr. 3.3.46: Spojitosť funkcie f v hromadnom bode $a\in D(f)$

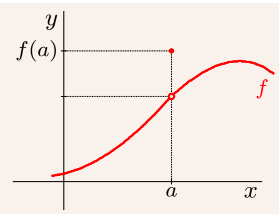
Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a\in D(f)$, nazýva sa **nespojitá v bode a**. Bod a nazývame **bodom nespojitosti funkcie f**. To znamená, že f je nespojitá v bode a, ak existuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto a$ taká, že $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\not\longmapsto f(a)$ (t. j. ak limita existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq f(a)$ alebo $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ neexistuje).

Je zrejmé, funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $D(f)$. Preto rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky hromadné body množiny $D(f)$. Body nespojitosti rozdeľujeme na body odstrániteľnej a neodstrániteľnej nespojitosti.

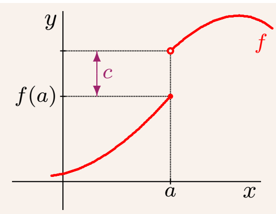
Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- **bod odstrániteľnej nespojitosti**, ak existuje konečná $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Ak položíme $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, nespojitosť sa odstráni (obr. 3.3.47).
- **bod neodstrániteľnej nespojitosti 1. druhu**, ak existujú $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ a sú konečné. Číslo $c = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ nazývame **skok funkcie f v bode a**.
- **bod neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu**, ak aspoň jedna z limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná (obr. 3.3.49). Ak je niektorá z nich nevlastná, hovoríme o **asymtotickej nespojitosti funkcie f v bode a**.

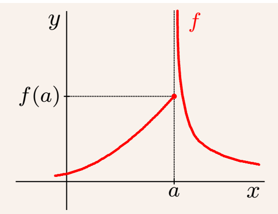
Z definície asymptoty bez smernice vyplýva, že funkcia f má v bode a asymptotu bez smernice práve vtedy, ak je v bode a asymptoticky nespojitá (obr. 3.2.39).



Obr. 3.3.47: Nespojitosť odstrániteľná



Obr. 3.3.48: Nespojitosť neodstrániteľná 1. druhu



Obr. 3.3.49: Nespojitosť neodstrániteľná 2. druhu

Príklad 3.3.1.

a) $y = \frac{\sin x}{x}$: bod 0 je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$: bod 1 odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$.

c) $y = \lfloor x \rfloor$: všetky $k \in Z$ sú bodmi nespojitosti 1. druhu so skokom $c = 1$ (obr. 2.1.2), pretože platí $\lim\limits_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1$, $\lim\limits_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = k$.

d) $y = \sin \frac{1}{x}$: bod 0 je neodstrániteľný bod nespojitosti 2. druhu, pretože ani jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ neexistuje (postačí neexistencia aspoň jednej).

e) $y = \frac{1}{x}$: bod 0 je neodstrániteľný bod nespojitosti 2. druhu, pretože $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. ■

Veta 3.3.1.

f je spojitá v bode $a \in D(f)$ $\iff$ a je hromadný bod $D(f)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Podobne ako limita, je aj spojitosť lokálna záležitosť v nejakom okolí $O(a)$. Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.

Veta 3.3.2.
f je spojitá v bode $a\in D(f) \iff$
pre každé okolie $O(f(a))$ existuje $O(a)$ tak, že pre všetky $x\in O(a)$ platí $f(x)\in O(f(a))$.

Ak označíme ε, δ polomery okolí, potom je f spojitá v bode $a\in D(f)$ práve vtedy, ak:

$$\underbrace{\forall O_\varepsilon(f(a))}_{\forall\varepsilon>0}\underbrace{\exists O_\delta(a)}_{\exists\delta>0}\forall x\in D(f)\colon \underbrace{x\in O_\delta(a)}_{|x-a|<\delta}\Rightarrow \underbrace{f(x)\in O_\varepsilon(f(a))}_{|f(x)-f(a)|<\varepsilon}.$$

Veta 3.3.3.
f, g sú spojité v bode $a\in D(f)\cap D(g)$, $r\in R \implies$
v bode a sú spojité $|f|$, $f\pm g$, rf, fg, pre $g(a)\neq 0$ sú v bode a spojité aj $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Veta 3.3.4 (Spojitosť zloženej funkcie).
f je spojitá v bode $a\in D(f)$, g spojitá v bode $b=f(a)\in D(g)$, $H(f)\subset D(g) \implies$
$F=g(f)$ je spojitá v bode a.

Príklad 3.3.2.
a) Funkcia $f\colon y=x$ spojitá v bode 1, $f(1)\neq 0$. Potom sú v bode 1 spojité tiež funkcie $2f\colon y=2x$, $f^2\colon y=x^2$, $f^n\colon y=x^n$, $n\in N$, $1/f^n\colon y=x^{-n}$.
b) Zložená funkcia $g(f)\colon\ y=\sqrt{x^2+1}$ je spojitá v bode $a=1$, pretože $f\colon\ u=x^2+1$ je spojitá v bode $a=1$, $g\colon\ y=\sqrt{u}$ je spojitá v bode $b=f(1)=2$. ■

Veta 3.3.5.
f je spojitá v bode $a\in A$, $A\subset D(f) \implies$ reštrikcia $g=f|_A$ je spojitá v bode a.

Dôkaz.
a je izolovaný bod $D(f) \Rightarrow a$ je izolovaný bod $A\subset D(g) \Rightarrow g$ je spojitá v bode a.
a je hromadný bod $D(f) \Rightarrow f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(a)=g(a) \Rightarrow$ sú dve možnosti:
– a je izolovaný bod $A \Rightarrow g$ je spojitá v bode a.
– a je hromadný bod $A \xRightarrow{\text{veta 3.2.10}} \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} f|_A(x)=f(a)=g(a) \Rightarrow$
g je v spojitá v bode a. ■

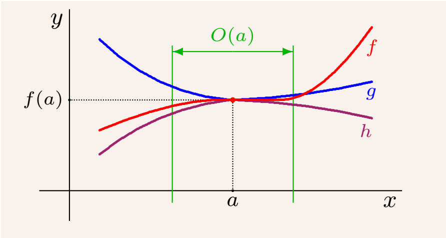
Veta 3.3.6 (O zovretí).
g,h sú spojité v bode $a\in D(f)\cap D(g)\cap D(h)$, $h(a)=f(a)=g(a)$,
existuje $O(a)$, že $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ pre pre všetky $x\in O(a) \implies f$ je spojitá v bode a.

Dôkaz.
Zo spojitosti funkcií f,g v bode a a z predpokladu $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ vyplýva:

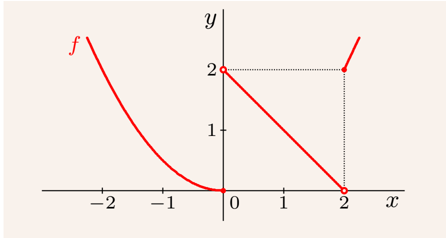
$$h(a)=\lim_{x\to a} h(x)\leq \lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} g(x)=g(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Rightarrow f \text{ je spojitá v } a. \ ■$$

Predpoklad $h(a)=f(a)=g(a)$ je dôležitý (obr. 3.3.50). Ak nie je splnený, potom funkcia f v bode a nemusí byť spojitá.

Funkcia $y=f(x)$ je spojitá v bode $a\in D(f)$ vzhľadom na množinu $A\subset D(f)$, ak je v a spojitá reštrikcia $f|_A$ (t. j. ak $x_n\in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$).



Obr. 3.3.50: Veta 3.3.4 o zovretí



Obr. 3.3.51: Príklad 3.3.3

Funkcia f sa nazýva **spojitá zľava** [resp. **spojitá sprava**] **v bode** a, ak je spojitá v bode a vzhľadom na množinu $D(f) \cap (-\infty; a\rangle$ [resp. na množinu $D(f) \cap \langle a; \infty)$]. V týchto prípadoch hovoríme o **jednostrannej spojitosti funkcie** f **v bode** a.

Veta 3.3.7.
f je spojitá v bode $a \in D(f) \iff f$ je spojitá zľava a sprava v bode a.

Príklad 3.3.3.
Funkcia f na obrázku 3.3.51 je spojitá v každom bode množiny $R - \{0; 2\}$. V bode 0 je spojitá zľava a v bode 2 je spojitá sprava. ■

Funkcia f **je spojitá na množine** $A \subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode $a \in A$. Ak je funkcia f spojitá na celom svojom $D(f)$, potom ju nazývame **spojitá**.

Je zrejmé, že ak je f spojitá na A, potom je spojitá na každej podmnožine $B \subset A$.

Funkcia f **sa nazýva po častiach spojitá na intervale** $\langle a; b\rangle \subset D(f)$, ak má na $\langle a; b\rangle$ konečný počet bodov nespojitosti a ani jeden z nich nie je neodstrániteľný 2. druhu.

Túto definíciu môžeme rozšíriť na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$, napr. $(-\infty; \infty)$, $\langle 0; \infty)$. Funkcia f sa nazýva **po častiach spojitá na intervale** $I \subset D(f)$, ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset I$.

Príklad 3.3.4.
a) Funkcia $f\colon y = x^2$ je spojitá na R, t. j. aj po častiach spojitá na R.

b) Funkcia $f\colon y = \lfloor x \rfloor$ je po častiach spojitá na R, pretože je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b\rangle$, $a, b \in R$. ■

3.3.1 Vlastnosti spojitých funkcií na intervale

Spojitosť funkcie f na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$ znamená obojstrannú spojitosť na $(a; b)$, spojitosť sprava v bode a, spojitosť zľava v bode b.

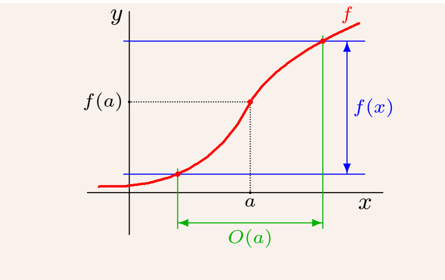
Veta 3.3.8 (Lokálna ohraničenosť).
f je spojitá v bode $a \in D(f) \implies$
f je lokálne ohraničená (t. j. existuje okolie $O(a)$, v ktorom je f ohraničená).

Dôkaz.
Ak je a izolovaný bod množiny $D(f)$, tvrdenie je zrejmé. Ak je a hromadný bod, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a tvrdenie vyplýva z vety 3.2.2 (obr. 3.3.52). ■

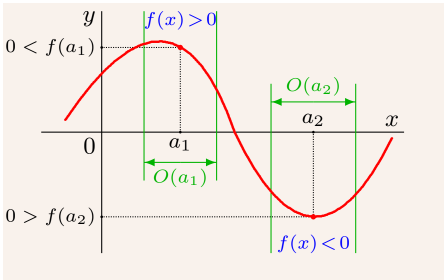
Zo spojitosti funkcie f na množine $A \subset D(f)$ ešte nevyplýva jej ohraničenosť na tejto množine. Napríklad $f\colon y = x^{-1}$, $x \in R$ je spojitá na intervale $(0;1)$, ale nie je ohraničená.

Veta 3.3.9.
f je spojitá v bode $a \in D(f)$, $f(a) > 0$ [resp. $f(a) < 0$] $\Longrightarrow$
existuje okolie $O(a)$, že pre všetky $x \in O(a)$ platí $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$].

Dôkaz.
Vyplýva z dôsledku 3.2.7.a (obr. 3.3.52) ■



Obr. 3.3.52: Veta 3.3.8

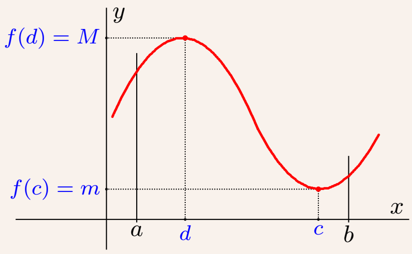


Obr. 3.3.53: Veta 3.3.9

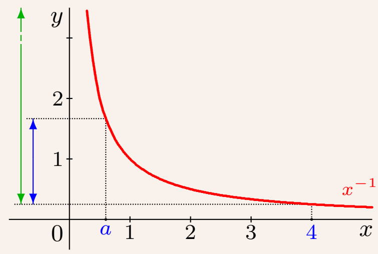
Veta 3.3.10 (Weierstrass).
f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle$ $\Longrightarrow$
a) f je na $\langle a; b\rangle$ ohraničená, b) f nadobúda na $\langle a; b\rangle$ svoje extrémy.

Dôkaz.
a) Sporom. Nech je f spojitá a neohraničená na $\langle a; b\rangle$ $\Rightarrow$
pre každé $n \in N$ existuje $x_n \in \langle a; b\rangle$ také, že $|f(x_n)| > n$ $\Rightarrow$ $\{|f(x_n)|\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$.
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená $\xRightarrow{\text{veta 2.3.9}}$ existuje podpostupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto c \in \langle a; b\rangle$
$\xRightarrow{\text{spojitosť}}$ $\{f(x_{k_n})\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto f(c) \in R$ $\Rightarrow$ $\{|f(x_{k_n})|\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto |f(c)| \neq \infty$, t. j. spor.
b) f je ohraničená na $\langle a; b\rangle$ $\Rightarrow$ existujú $\alpha, \beta \in R$ také, že $\alpha = \inf_{x \in \langle a; b\rangle} f(x)$, $\beta = \sup_{x \in \langle a; b\rangle} f(x)$.
Sporom. Ukážeme pre β (pre α je dôkaz analogický). Nech f nenadobúda β $\Rightarrow$
pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ platí $f(x) < \beta$ $\Rightarrow$ $0 < \beta - f(x)$ $\Rightarrow$ $0 < \frac{1}{\beta - f(x)}$
funkcia $g\colon y = \frac{1}{\beta - f(x)}$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá $\xRightarrow{\text{a)}}$ g je ohraničená $\Rightarrow$
existuje $k > 0$, že pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ platí $0 < \frac{1}{\beta - f(x)} < k$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{k} < \beta - f(x)$ $\Rightarrow$
$\forall x \in \langle a; b\rangle : f(x) < \beta - \frac{1}{k} < \beta$, t. j. spor s tým, že $\beta = \sup A$. ■

Veta 3.3.10 platí iba pre uzavretý interval $\langle a; b\rangle$. Funkcia $f\colon y = \frac{1}{x}$, $x \in (0; 4\rangle$ je spojitá, ale nie je ohraničená (obr. 3.3.55). Ohraničená je napríklad na každom otvorenom intervale $(a; 4)$, kde $0 < a < 4$.



Obr. 3.3.54: Veta 3.3.10



Obr. 3.3.55: $f\colon y = \frac{1}{x},\ x\in(0;4\rangle$

Veta 3.3.11 (Cauchyho o nulovom bode).
f je spojitá na $\langle a;b\rangle$, $f(a)f(b) < 0 \implies$ existuje $c\in(a;b)$ také, že $f(c) = 0$.

Dôkaz.
Nech[13] $f(a)<0<f(b)$ (pre $f(a)>0>f(b)$ je dôkaz analogický).
Označme $a=a_0$, $b=b_0$, $d=\frac{b-a}{2}$. Rozdeľme $\langle a_0;b_0\rangle$ na polovičné intervaly (obr. 3.3.56):

$$\langle a_0;x_1\rangle\,,\ \langle x_1;b_0\rangle\,, \qquad \text{kde}\ \ x_1 = \tfrac{a_0+b_0}{2}.$$

Ak $f(x_1) = 0$, potom x_1 je koreň. V opačnom prípade zvoľme za $\langle a_1;b_1\rangle$ interval:

$$\left.\begin{matrix}\langle a_0;x_1\rangle\ \text{ pre } f(x_1) > 0\\ \langle x_1;b_0\rangle\ \text{ pre } f(x_1) < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a_1)<0<f(b_1),\ \ \langle a_1;b_1\rangle \subset \langle a_0;b_0\rangle\,,\ \ b_1-a_1 = \tfrac{b_0-a_0}{2} = \tfrac{d}{2}.$$

Interval $\langle a_1;b_1\rangle$ rozdelíme na polovičné intervaly $\langle a_1;x_2\rangle$, $\langle x_2;b_1\rangle$, kde $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Ak $f(x_2) = 0$, potom x_2 je koreň. V opačnom prípade zvoľme za $\langle a_2;b_2\rangle$:

$$\left.\begin{matrix}\langle a_1;x_2\rangle\ \text{ pre } f(x_2)>0\\ \langle x_2;b_1\rangle\ \text{ pre } f(x_2)<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a_2)<0<f(b_2),\ \ \langle a_2;b_2\rangle \subset \langle a_1;b_1\rangle\,,\ \ b_2-a_2 = \tfrac{b_1-a_1}{2} = \tfrac{d}{2^2}.$$

Ak budeme takto pokračovať ďalej, dostaneme po konečnom počte krokov koreň x_k, alebo dostaneme postupnosť do seba vložených intervalov $\{\langle a_n;b_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú platí:

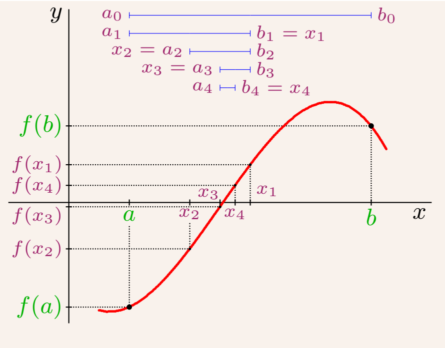
$$f(a_n)<0<f(b_n),\ \ \langle a_n;b_n\rangle \subset \langle a_{n-1};b_{n-1}\rangle\,,\ \ b_n-a_n = \tfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} = \tfrac{d}{2^n},\ \ n\in N.$$

Z Cantorovho princípu vložených intervalov (veta 2.1.9) vyplýva, že existuje jediné c také, že $c\in\langle a_n;b_n\rangle$ pre všetky $n\in N$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Zo spojitosti f vyplýva:

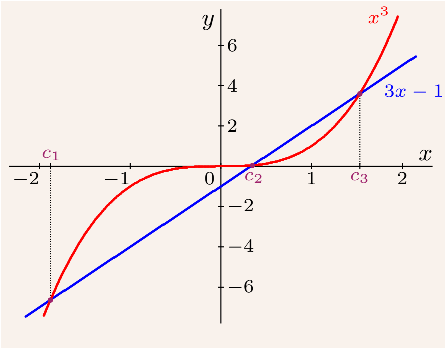
$$f(a_n)<0<f(b_n) \ \Rightarrow\ f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0 \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \ \Rightarrow\ f(c) = 0. \ ■$$

Metóda z dôkazu predchádzajúcej vety sa nazýva **metóda delenia intervalu** (**metóda bisekcie**) a často sa používa pri numerickom hľadaní koreňov rovnice $f(x) = 0$.

[13] Predpoklad $f(a)f(b) < 0$ znamená, že platí $f(a) < 0 < f(b)$ alebo $f(a) > 0 > f(b)$.



Obr. 3.3.56: Veta 3.3.11



Obr. 3.3.57: Príklad 3.3.5

Koreň rovnice $f(x) = 0$ aproximujeme hodnotou $x_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ tak, aby $b_n - a_n < \varepsilon$, resp. $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$, kde ε je dopredu zvolená tolerancia (chyba výpočtu).

Metóda bisekcie je pomerne jednoduchá, ale aj prácna. Na spresnenie koreňa o jeden rád potrebuje približne 4 kroky, preto sa väčšinou používa iba ako štartovacia metóda na získanie počiatočných hodnôt pre iné metódy.

k	a_k $[f(a_k) > 0]$	b_k $[f(b_k) < 0]$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$		$b_k - a_k$
0	0,0	1,0	0,5	−0,375	$\to b_1$	1,0
1	0,0	0,5	0,25	0,265 625	$\to a_2$	0,5
2	0,25	0,5	0,375	−0,072 265 625	$\to b_3$	0,25
3	0,25	0,375	0,312 5	0,093 017 578	$\to a_4$	0,125
4	0,312 5	0,375	0,343 75	0,009 368 896	$\to a_5$	0,062 5
5	0,343 75	0,375	0,359 375	−0,031 711 578	$\to b_6$	0,031 25
6	0,343 75	0,359 375	0,351 562 5	−0,011 235 714	$\to b_7$	0,015 625
7	0,343 75	0,351 562 5	0,347 656 25	−0,000 949 323	$\to b_8$	0,007 812 5
8	0,343 75	0,347 656 25				0,003 906 25

Tabuľka 3.3.4: Riešenie rovnice $x^3-3x+1=0$ z príkladu 3.3.5 metódou bisekcie

Príklad 3.3.5.
Nájdite s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ korene funkcie $f\colon y = x^3 - 3x + 1$.

Riešenie.
Z priesečníkov grafov funkcií $y = x^3$, $y = 3x - 1$ (obr. 3.3.57) odhadneme, že funkcia f má tri korene v intervaloch $\langle -2; -1\rangle$, $\langle 0; 1\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$. Korene skutočne ležia v týchto intervaloch, pretože (veta 3.3.11) platí:

$$f(-2)=-1 < f(-1)=3, \quad f(0)=1 > f(1)=-1, \quad f(1)=-1 < f(2)=3.$$

Pomocou metódy bisekcie nájdeme s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ koreň z intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Na jeho nájdenie budeme potrebovať minimálne n krokov, pričom musí platiť:

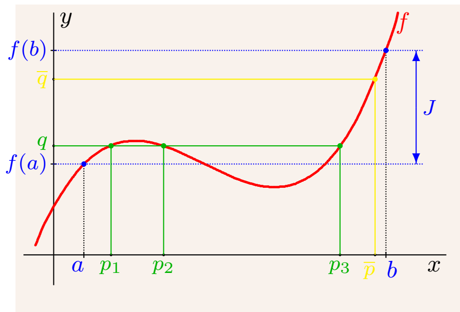
$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = \frac{1}{100} \;\Rightarrow\; 10^2 = 100 < 2^n \;\Rightarrow\; n = 7, 8, \dots \;\Rightarrow\; n = 7.$$

Postup riešenia je znázornený v tabuľke 3.3.4 a koreňom je číslo $x_8 = 0,347\,656\,25$, ktorého odchýlka od skutočného koreňa je menšia ako $0,003\,906\,25$. Keby sme požadovali iba presnosť $|f(c)| < \varepsilon$, postačil by nám koreň $x_5 = 0,343\,75$. Na záver pre porovnanie uvádzame všetky tri korene vypočítané s presnosťou na deväť desatinných miest:

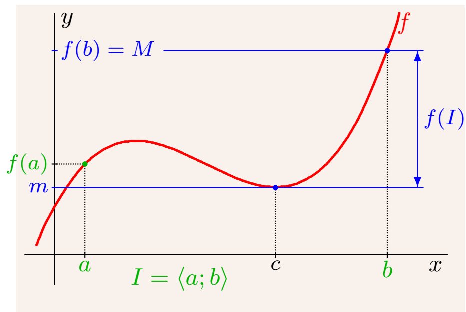
$$c_1 = -1,879\,385\,242, \qquad c_2 = 0,347\,296\,355, \qquad c_3 = 1,532\,088\,886. \blacksquare$$

Veta 3.3.12 (O medzihodnote).
f je spojitá na intervale $I \subset R$, $a, b \in I \implies$
f nadobúda všetky hodnoty z intervalu J s koncovými bodmi $f(a)$, $f(b)$.

Dôkaz.
$f(a) = q = f(b) \ \Rightarrow\ p = a$ alebo $p = b$.
$f(a) < q < f(b)$: označme $g(x) = f(x) - q$, $x \in \langle a; b\rangle \Rightarrow f(a) - q = g(a) < 0 < g(b) = f(b) - q$
$\xRightarrow{\text{veta 3.3.11}}$ existuje $p \in (a; b)$ také, že $g(p) = f(p) - q = 0 \ \Rightarrow\ f(p) = q$.
$f(a) > q > f(b)$: dôkaz je analogický ako v predchádzajúcom prípade (viď obr. 3.3.58). $\blacksquare$



Obr. 3.3.58: Veta 3.3.12



Obr. 3.3.59: Dôsledok 3.3.12.a

Dôsledok 3.3.12.a.
f je spojitá na intervale $I \subset R \implies f(I)$ je interval.

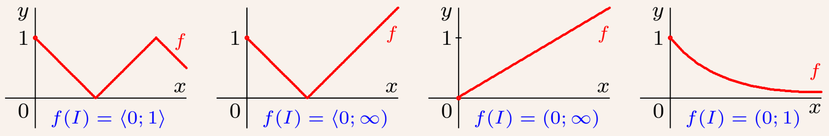
Ak je f spojitá a I je uzavretý (a teda aj ohraničený), potom aj interval $f(I)$ je uzavretý a na základe vety 3.3.10 platí $f(I) = \langle \alpha; \beta\rangle$, pričom[14] $\alpha = \min_{x\in I} f(x)$, $\beta = \max_{x\in I} f(x)$.

Ak je f spojitá a I nie je uzavretý alebo ohraničený, potom vo všeobecnosti typ intervalu $f(I)$ určiť nevieme (obr. 3.3.60). Ale ak je funkcia f rýdzo monotónna, potom interval $f(I)$ má rovnaký typ ako I.

Príklad 3.3.6.
Spojitá funkcia môže zobraziť $I = (-\pi; \pi)$ rôzne, napr. (obr. 3.3.61):

$$f_1(x) = \cos x \colon I \to (-1; 1\rangle\,, \qquad f_2(x) = \sin x \colon I \to \langle -1; 1\rangle\,,$$

[14] Ak $\alpha = \beta$ dostaneme degenerovaný interval $f(I) = \langle \alpha; \alpha\rangle = \{\alpha\}$.



Obr. 3.3.60: Zobrazenie intervalu $I=(0;\,\infty)$ spojitou funkciou f

$$f_3(x)=1\colon I\to\{1\}\,,\qquad f_4(x)=\tfrac{x}{\pi}\colon I\to(-1;1)\,,\qquad f_5(x)=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\colon I\to R,$$
$$f_6(x)=\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right|\colon I\to\langle 0;\infty)\,,\qquad f_7(x)=-\tfrac{2x}{x+\pi}-1=-\tfrac{3x+\pi}{x+\pi}\colon I\to(0;\infty)\,.\ \blacksquare$$

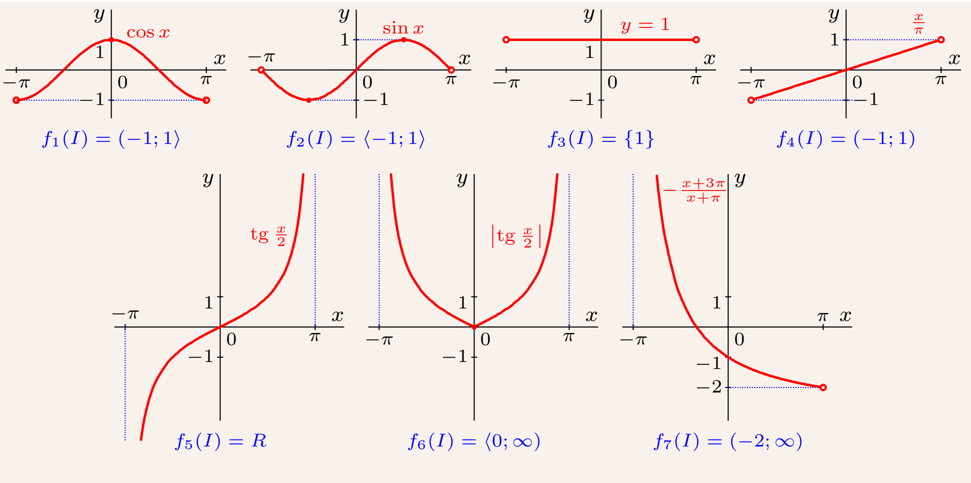
Veta 3.3.13.
f je spojitá na intervale I, potom: $\quad f$ je prostá na $I \iff f$ je rýdzo monotónna na I.

Dôkaz.
$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z vety 3.1.5.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Funkcia f je prostá $\Rightarrow \forall x_i,x_j\in I,\ x_i\neq x_j$ platí $f(x_i)\neq f(x_j)$.
f nie je rýdzo monotónna $\Rightarrow$ existujú $x_1,x_2,x_3\in I,\ x_1<x_2<x_3$ také, že platí:

$i)$ $f(x_1)<f(x_2),\ f(x_3)<f(x_2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$, resp. $f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$.

$ii)$ $f(x_1)>f(x_2),\ f(x_3)>f(x_2)\Rightarrow f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$, resp. $f(x_3)>f(x_1)>f(x_2)$.

T. j. štyri možnosti. Ich dôkaz je podobný a preto dokážeme iba $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$:
$\xRightarrow{\text{veta 3.3.12}}$ existuje $p\in(x_1;x_2)$, t. j. $p\neq x_3$ také, že $f(p)=f(x_3)\ \Rightarrow$ spor. $\blacksquare$



Obr. 3.3.61: Zobrazenie intervalu $I=(-\pi;\,\pi)$ z príkladu 3.3.6

Na záver spomenieme bez dôkazu vetu o spojitosti inverznej funkcie (obr. 3.1.14).

Veta 3.3.14 (Spojitosť inverznej funkcie).
f je prostá a spojitá na intervale $I \implies$ inverzná funkcia f^{-1} je spojitá na $f(I)$.

Ak uvážime všetky doterajšie výsledky o spojitých funkciách, môžeme vysloviť tvrdenie, že **všetky elementárne funkcie sú spojité**.

Cvičenia

3.3.1. Vyšetrite spojitosť a charakter bodov nespojitosti funkcie: ♣

a) $y = x \sin \frac{1}{x}$, b) $y = \frac{1}{\sin x}$, c) $y = \frac{1}{\ln x}$, d) $y = \frac{x}{|x|}$,
e) $y = \lfloor \sin x \rfloor$, f) $y = \lfloor \cos x \rfloor$, g) $y = \ln |\sin x|$, h) $y = \ln |\cos x|$,
i) $y = \sin \frac{1}{x}$, j) $y = \cos \frac{1}{x}$, k) $y = \frac{1}{1+x^2}$, l) $y = \frac{x^2}{|x^2|}$,
q) $y = \frac{\sin x}{x}$, r) $y = \frac{\sin x}{|x|}$, s) $y = \frac{x}{\sin x}$, t) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

3.3.2. Určte $a \in R$ tak, aby bola funkcia f spojitá na svojom $D(f)$, ak: ♣

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x + 2, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{pre } x < 1, \\ 2 - x/a, & \text{pre } x \geq 1, \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

3.3.3. Určte $a, b \in R$ tak, aby bola funkcia f spojitá na svojom $D(f)$, ak:

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle 2; \infty), \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & \text{pre } x \in (-\infty; b\rangle, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (b; a), \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle a; \infty). \end{cases}$

3.3.4. Určte $f(0)$ tak, aby bola funkcia f spojitá v bode 0, ak pre $x \neq 0$ platí: ♣

a) $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$, b) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}$, c) $f(x) = \frac{(x+2)^2-4}{x}$,
d) $f(x) = (1+2x)^{1/x}$, e) $f(x) = x^2 + e^{-1/x^2} - 1$, f) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

3.3.5. Nech je funkcia f nespojitá v bode $a \in D(f)$. Aká je funkcia $|f|$ v bode a? ♣

3.3.6. Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine R, je všade spojitá a má práve 0, 1, 2, …, n, ($n \in N$), resp. nespočítateľne veľa bodov nespojitosti. ♣

3.3.7. Nech sú funkcie f, g nespojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi. ♣

a) $f + g$, b) g/f, c) fg, d) $f(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

3.3.8. Nech je funkcia f spojitá a funkcia g nespojitá v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi. ♣

a) $f + g$, b) g/f, c) fg, d) $g(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

3.3.9. Určte množiny, na ktorých sú spojité funkcie $f(g)$, $g(f)$, ak $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a platí: ♣

a) $g(x) = x(1 - x^2)$, b) $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, c) $g(x) = \operatorname{sgn}(1 - x)$,
d) $g(x) = 1 + x - \lfloor x \rfloor$, e) $g(x) = 1 + x \lfloor x \rfloor$, f) $g(x) = 1 - \chi(x)$.

3.3.10. Dokážte, že ak sú na množine A spojité funkcie f, g, potom sú na množine A spojité aj funkcie $y = \min\{f(x), g(x)\}$, $y = \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in A$.

3.3.11. Metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite všetky korene rovnice: ♣

a) $0 = x^3 + 2x - 11$, c) $0 = \mathrm{e}^x + x$, b) $0 = x^3 - 6x^2 + x^{-1} + 5$,
d) $0 = \ln x - 3 + x$, e) $0 = \mathrm{e}^{x^2-1} - x - 1$, f) $0 = \cos x^2 + x - 1$.

3.3.12. Nájdite množinu $f(I)$, ak: ♣

a) $I = \langle \pi; 3\pi/2 \rangle$, $f(x) = \sin 2x$, b) $I = \langle -2; 4 \rangle$, $f(x) = x^2 + 2$,
c) $I = \langle 0; \infty)$, $f(x) = x\lfloor x \rfloor$, d) $I = \langle 0; 4\pi \rangle$, $f(x) = x\lfloor \sin x \rfloor$,
e) $I = \langle 0; \infty)$, $f(x) = \chi(x^2 + 1)$, f) $I = (0; 1)$, $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Optimista vyhlasuje, že žijeme v najlepšom svete. Pesimista sa obáva, že je to pravda.
JAMES BRANCH CABELL

Život je žart. To som si vždy myslel, teraz to viem.
JOHN GAY — náhrobný nápis

Rečník má vyčerpať tému, nie poslucháčov.
WINSTON CHURCHIL

Každý je taký, ako ho boh stvoril, ba často aj horší.
RODA RODA

Klamár musí mať dobrú pamäť.
QUINTILIANUS

Kde sa nudíme lepšie ako v rodinnom kruhu?
OSKAR WILDE

Nikto učený z neba nespadol, ale hlupákov akoby zhadzovali.
JULIUS TUWIM

Je stále lepšie byť ženatý, ako byť mŕtvy.
JEAN BAPTISTE MOLIÉRE

Tretí v hre je ten, čo nie je.
RAINER MARIA RILKE

Najhoršie je tváriť sa, že chápeme, keď nechápeme.
LEV NIKOLAJEVIČ TOLSTOJ

Zaujímam sa o budúcnosť, pretože v nej hodlám stráviť zvyšok svojho života.
CHARLES KETTERING

Kapitola 4

Diferenciálny počet reálnej funkcie reálnej premennej

4.1 Derivácia reálnej funkcie

Základným pojmom diferenciálneho počtu je derivácia. K zavedeniu derivácie funkcie viedli predovšetkým dva problémy, ktoré sú uvedené v nasledujúcich príkladoch. Po matematickej stránke vedú obidva príklady na rovnakú limitu, ktorá sa v praxi používa veľmi často a nazýva sa **derivácia funkcie**.

Príklad 4.1.1.
Uvažujme auto pohybujúce sa po priamke (obr. 4.1.1). Jeho pohyb je opísaný funkciou $s(t)$, závislou od času t. Čas začneme merať od okamihu t_0 a bod na priamke, v ktorom sa práve auto nachádza, nazveme počiatok P_0.
Ak sa auto nachádza v čase $t > t_0$ v bode P, potom $s(t)$ predstavuje dĺžku úsečky P_0P.
Označme polohu auta v čase $t + \Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ symbolom Q. Úsečka PQ prestavuje jeho dráhu v čase od t po $t + \Delta t$, t. j. v intervale Δt. Ak označíme $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$, potom priemernú rýchlosť $\overline{v}$ auta v časovom intervale Δt môžeme vyjadriť vzťahom:

$$\overline{v} = \tfrac{\Delta s}{\Delta t} = \tfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

Ak $\Delta t \to 0$, potom sa bude $\overline{v}$ približovať k okamžitej rýchlosti $v(t)$ v čase t. Potom platí:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}. \blacksquare$$

Príklad 4.1.2.
Uvažujme bod $P = [x_0; f(x_0)]$ ležiaci na grafe spojitej funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Rovnica dotyčnice d_P k funkcii f v bode P má tvar (obr. 4.1.2):

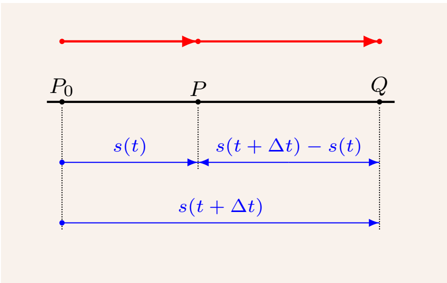
$$y - f(x_0) = k(x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x - x_0) \ \Rightarrow \ \text{smernica} \ \ k = \operatorname{tg} \varphi = \tfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ak bod $Q = [x; f(x)]$ leží na grafe funkcie f, potom pre smernicu priamky PQ platí:

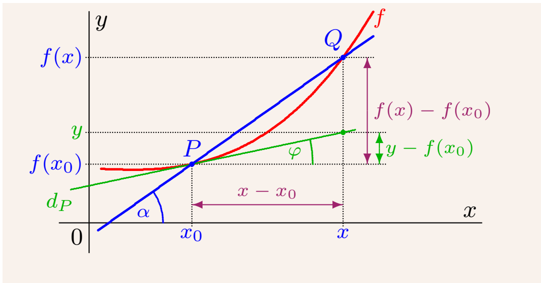
$$\operatorname{tg} \alpha = \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ak sa bude bod Q približovať k P, bude sa priamka PQ približovať k dotyčnici d_P, t. j. $x \to x_0$, $f(x) \to f(x_0)$, $\alpha \to \varphi$, $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$. Smernica $\operatorname{tg}\varphi$ má potom tvar:

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \blacksquare$$



Obr. 4.1.1: Úloha o rýchlosti



Obr. 4.1.2: Úloha o dotyčnici

Funkcia $y = f(x)$ **má v bode** $x_0 \in D(f)$ **deriváciu** $f'(x_0)$, ak existuje limita:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (\text{subst. } h = x - x_0).$$

Podľa toho, či je predchádzajúca limita vlastná alebo nevlastná, hovoríme o **vlastnej** (**konečnej**) alebo **nevlastnej deriváciifunkcie** f **v bode** x_0. Pokiaľ nebude uvedené ináč, budeme pod pojmom derivácia rozumieť vlastnú deriváciu.

Niekedy sa namiesto označenia $f'(x_0)$ používa $f'(x)|_{x=x_0}$ alebo častejšie $y'(x_0)$.

Často sa používa označenie pomocou tzv. diferenciálov, ktoré zaviedol G. W. Leibniz:

$$f'(x_0) = \tfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f(x_0), \qquad \text{resp.} \quad y'(x_0) = \tfrac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x_0). \tag{4.1}$$

Tieto vzťahy čítame **derivácia** f **podľa** x **v bode** x_0, resp. stručne $\mathrm{d}f(x_0)$ **podľa** $\mathrm{d}x$.

Príklad 4.1.3.
a) $f\colon y = c$, kde $c \in R$ (konštantná funkcia) $\Rightarrow$ pre všetky $x_0 \in R$ platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{c-c}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0,$$

$$\text{resp.} \quad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

b) $f\colon y = x^n$, $x \in R$, $n \in N$ $\Rightarrow$ pre všetky $x_0 \in R$ platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1})(x - x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}. \blacksquare$$

Veta 4.1.1.
f má v bode x_0 konečnú deriváciu $\implies$ f je v bode x_0 spojitá.

Dôkaz.
$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ je konečná, $\lim_{x\to x_0} [x - x_0] = 0 \;\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}[x - x_0] = f'(x_0) \lim_{x\to x_0} [x - x_0] = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \xRightarrow{\text{veta 3.3.1}} \text{funkcia } f \text{ je spojitá v bode } x_0. \blacksquare$$

Ako dokazuje príklad 4.1.4, opačná implikácia neplatí. To znamená, že spojitosť funkcie v danom bode nezaručuje existenciu derivácie v tomto bode.

Geometricky predstavuje $f'(x_0) \in R$ smernicu priamky, ktorá sa dotýka grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ a ktorú nazývame **dotyčnica (so smernicou) ku grafu funkcie f v bode x_0**. Jej rovnica má tvar (príklad 4.1.2):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ak $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bode x_0, potom **dotyčnicou bez smernice ku grafu funkcie f v bode x_0** nazývame priamku, ktorá je rovnobežná s osou y (kolmá na os x) a prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$, t. j. priamku $x = x_0$ (obr. 4.1.3).

Normálou ku grafu funkcie f v bode x_0 nazývame priamku, ktorá prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$ a je kolmá na dotyčnicu ku grafu funkcie f v tomto bode.

Normála ku grafu funkcie f v bode x_0 existuje práve vtedy, ak v tomto bode existuje dotyčnica. Ak $f'(x_0) \in R$, $f'(x_0) \neq 0$, potom má normála tvar:[1]

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \;\Rightarrow\; y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

4.1.1 Jednostranné derivácie a derivácia na množine

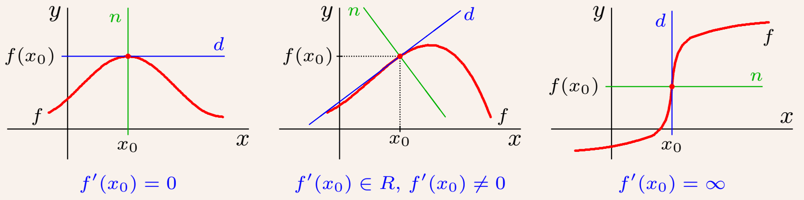
Funkcia f má v bode x_0 deriváciu zľava $f'_-(x_0)$, ak existuje limita:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funkcia f má v bode x_0 deriváciu sprava $f'_+(x_0)$, ak existuje limita:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

[1]Priamky $y = kx + a$, $y = qx + b$ (t. j. $kx - y + a = 0$, $qx - y + b = 0$) sú na seba kolmé, ak sú na seba kolmé ich normálové vektory $(k; -1)$, $(q; -1)$. T. j. ak platí $kq + (-1)(-1) = kq + 1 = 0$, resp. $k = -\frac{1}{q}$.



Obr. 4.1.3: Dotyčnica a normála k funkcii f v bode x_0

Tieto derivácie nazývame **jednostranné**, $f'(x_0)$ nazývame **obojstrannou deriváciou**. Z vlastností jednostranných limít vyplýva nasledujúca veta.

Veta 4.1.2.
$f'(x_0)$ existuje $\iff$ existujú $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Príklad 4.1.4.
a) Funkcia $f\colon y = |x|$ je spojitá na R, $f'(0)$ neexistuje, pretože:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

b) Funkcia $f\colon y = \operatorname{sgn} x$ má deriváciu v každom $x_0 \in R$, aj keď nie je spojitá v bode 0. Pre $x_0 < 0$ platí $f'(x_0) = [-1]' = 0$, pre $0 < x_0$ platí $f'(x_0) = [1]' = 0$. Pre $x_0 = 0$ platí:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1-0}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\frac{1}{0^-} = -(-\infty) = \infty,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty \qquad \Rightarrow f'(0) = \infty. \blacksquare$$

Už sme spomínali, že ak má funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu, potom je v tomto bode spojitá (veta 4.1.1). Analogické tvrdenie platí aj pre jednostranné derivácie.

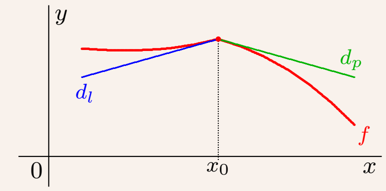
Veta 4.1.3.
$f'_-(x_0)$ [resp. $f'_+(x_0)$] je vlastná $\Longrightarrow$ f je v x_0 spojitá zľava [resp. sprava].

Dôsledok 4.1.3.a.
$f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ sú vlastné (nemusia sa rovnať) $\Longrightarrow$ f je v x_0 spojitá.

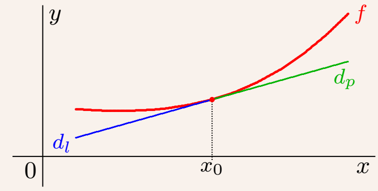
Graficky predstavujú $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ smernice **ľavej** [resp. **pravej**] **poldotyčnice ku grafu funkcie f v bode x_0**, t. j. polpriamky vychádzajúce z bodu x_0 smerom doľava [resp. doprava] a dotýkajúce sa grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ (obr. 4.1.4, 4.1.5).

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a nech $A \subset \{x_0 \in D(f);\, f'(x_0)$ je konečná$\}$. Ak $A \neq \emptyset$, potom má zmysel funkcia $g\colon y = f'(x)$, $x \in A$, ktorú nazývame **derivácia funkcie f na množine A** a označujeme symbolmi f', y', resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Poznámka 4.1.1.
Derivácia funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ je $f'(x_0)$. Je to číslo, prípadne hodnota $\pm\infty$. Na druhej strane derivácia funkcie f na množine $A \subset D(f)$ je funkcia $y = f'(x)$, $x \in A$.



Obr. 4.1.4: Rôznobežné poldotyčnice



Obr. 4.1.5: Jednostranné poldotyčnice

Derivácia funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$, podobne ako spojitosť, znamená obojstrannú deriváciu $f'(x)$, $x\in(a;b)$ a jednostranné derivácie $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Z definície f' a z viet 4.1.1, 4.1.3 vyplýva priamo nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.1.4.
f má na množine A deriváciu $f' \implies f$ je na A spojitá.

Príklad 4.1.5.
Vypočítajte derivácie funkcií $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ na množine R.

Riešenie.
$[e^x]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$.

Na základe vzťahov $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \begin{bmatrix} h/2 = z \\ z\to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$,
$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}$, $\cos x - \cos a = -2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}$ platí:

$$[\sin x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{2\frac{h}{2}} = 1\cdot\cos\frac{2x+0}{2} = \cos x,$$

$$[\cos x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{2\frac{h}{2}} = -1\cdot\sin\frac{2x+0}{2} = -\sin x. \blacksquare$$

4.1.2 Základné pravidlá pre výpočet derivácií

Pri praktickom výpočte derivácií, t. j. pri **derivovaní** rôznych funkcií spravidla nepoužívame definíciu. Používame rôzne vzorce a pravidlá, z ktorých si niektoré odvodíme.

Veta 4.1.5.
$c\in R$, existujú f', g' na množine $A\neq\emptyset \implies (cf)'$, $(f\pm g)'$, $(fg)'$ existujú na A, existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A_1 = \{x\in A; g(x)\neq 0\}$. Navyše pre všetky $x\in A$, resp. $x\in A_1$ platí:

a) $(cf)'(x) = cf'(x)$,
b) $(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)$,
b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
d) $\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dôkaz.
a), b) Vyplýva priamo z definície.

c) $x\in A \Rightarrow (fg)'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0} \left[f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

d) $x \in A_1 \;\Rightarrow\; \left[\frac{1}{g}\right]'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h\, g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \overset{c)}{\Longrightarrow}$

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \left[f\,\frac{1}{g}\right]'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \;\blacksquare$$

Predchádzajúce vzorce zvykneme stručne zapisovať:

$(cf)' = cf', \quad (f\pm g)' = f'\pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{-g'}{g^2}, \quad \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$

Príklad 4.1.6.
Vypočítajte derivácie funkcií $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$.

Riešenie.
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Rightarrow [\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]'\cos x - \sin x[\cos x]'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x[-\sin x]}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$x \neq k\pi,\ k \in Z \;\Rightarrow\; [\operatorname{cotg} x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{[\cos x]'\sin x - \cos x[\sin x]'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}. \;\blacksquare$

Príklad 4.1.7.
Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

Riešenie.
$x \neq 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = \left[\frac{x}{x-1}\right]' = \frac{1\cdot(x-1)-x(1-0)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$

Dotyčnica $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ má smernicu $f'(x_0)$, priamka p má smernicu -1.

$$f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1 \;\Rightarrow\; (x_0-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; x_0 = 0 \text{ alebo } x_0 = 2. \;\Rightarrow$$

Dva dotykové body $[0;0]$, $[2;2]$ a dve dotyčnice:

$$d_1\colon y = 0 - (x-0) = -x, \quad d_2\colon y = 2 - (x-2) = 4 - x. \;\blacksquare$$

Veta 4.1.6 (Derivácia inverznej funkcie).
$y = f(x)$ je spojitá a rýdzomonotónna na intervale $I \subset R$, $x_0 \in I$ je vnútorný bod, $f'(x_0) \neq 0$ je konečná $\Longrightarrow$ inverzná funkcia $x = f^{-1}(y)$ má deriváciu v bode $y_0 = f(x_0)$:

$$[f^{-1}]'(y_0) = \left.\frac{1}{f'(x_0)}\right|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dôkaz.
Z vety 3.3.13 vyplýva, že f je prostá a f^{-1} existuje. Ďalej (veta 3.2.8) platí:

$$[f^{-1}]'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \left[\begin{array}{c|c} y = f(x) & x = f^{-1}(y) \\ y \to y_0 & x \to x_0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \;\blacksquare$$

Ak $f'(x)\neq 0$ platí pre všetky $x\in I$, potom môžeme zjednodušene písať:

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \qquad \text{resp. } \frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}}.$$

Príklad 4.1.8.

a) $f\colon y=\mathrm{e}^x$, $x\in R$ je spojitá a rastúca, $f'(x)=\mathrm{e}^x\neq 0$, $x\in R \Rightarrow f^{-1}\colon x=\ln y$, $y>0 \Rightarrow$

$$[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[\mathrm{e}^x]'} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y},\ y>0.$$

b) $f\colon y=\sin x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá, rastúca, $f'(x)=\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}>0 \Rightarrow$

$$[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin\arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y\in(-1;1)$$

c) $f\colon y=\cos x$, $x\in(0;\pi)$ je spojitá, klesajúca, $f'(x)=-\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}<0 \Rightarrow$

$$[\arccos y]' = \frac{1}{[\cos x]'} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos\arccos y]^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y\in(-1;1).$$

d) $f\colon y=\operatorname{cotg} x$, $x\in(0;\pi)$ je spojitá, klesajúca, $f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}<0 \Rightarrow$

$$[\operatorname{arccotg} y]' = \frac{1}{[\operatorname{cotg} x]'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{1+\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{-1}{1+[\operatorname{cotg}\operatorname{arccotg} y]^2} = \frac{-1}{y^2+1},\ y\in R.$$

e) $f\colon y=\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá, rastúca, $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0 \Rightarrow$

$$[\operatorname{arctg} y]' = \frac{1}{[\operatorname{tg} x]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{[\operatorname{tg}\operatorname{arctg} y]^2+1} = \frac{1}{y^2+1},\ y\in R. \blacksquare$$

Veta 4.1.7 (Derivácia zloženej funkcie).
$u=f(x)$, $y=g(u)$, $H(f)\subset D(g)$, $x_0\in D(f)$, $u_0=f(x_0)$, $f'(x_0)$ a $g'(u_0)$ sú vlastné $\Longrightarrow$

$$[g(f(x_0))]' = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) = g'(u_0)\cdot f'(x_0).$$

Dôkaz.
Označme $F=g(f)$, potom $F(x_0)=g(f(x_0))$ pre $x_0\in D(f)$.
$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $g'(u_0)=\lim\limits_{u\to u_0}\frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}$ sú konečné $\Rightarrow$

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \begin{bmatrix} u=f(x) \\ u\to u_0 \end{bmatrix} = \lim_{u\to u_0}\frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}\cdot f'(x_0) = g'(u_0)\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0). \blacksquare$$

Pre všetky $x\in D(f)$, pre ktoré existujú f', g', môžeme zjednodušene písať:

$$F'(x) = [g(f)]'(x) = g'(u)\cdot f'(x), \qquad \text{resp. } \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Príklad 4.1.9.
Vypočítajte deriváciu funkcie $F\colon y=\sqrt{1-x^2},\ x\in(-1;1)$.

Riešenie.
$F=g(f),\ f\colon u=1-x^2,\ x\in(-1;1),\ g\colon y=\sqrt{u},\ u\in(0;\infty)\ \Rightarrow$

$$f'(x)=\left[1-x^2\right]'=-2x,\ x\in(-1;1),\quad g'(u)=\left[u^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{u}},\ u\in(0;\infty)\ \Rightarrow$$
$$F'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1;1).$$

V praxi jednotlivé funkcie (aj viacnásobne zložené) nevypisujeme:

$$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'=\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot[1-x^2]'=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot(-2x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1;1).\ \blacksquare$$

Príklad 4.1.10.
a) $[\sin(\sin x)]'=\cos(\sin x)\cdot[\sin x]'=\cos(\sin x)\cdot\cos x,\ x\in R.$

b) $[\sin(\sin(\sin(\sin x)))]'=\cos(\sin(\sin(\sin x)))\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x,\ x\in R.$

c) $[a^x]'=\left[e^{\ln a^x}\right]'=\left[e^{x\ln a}\right]'=e^{x\ln a}\cdot[x\ln a]'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\ln a,\ x\in R,\ a>0,\ a\neq 1.$

d) $[x^a]'=\left[e^{\ln x^a}\right]'=\left[e^{a\ln x}\right]'=e^{a\ln x}\cdot[a\ln x]'=e^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x}=x^a\cdot\frac{a}{x}=ax^{a-1},\ x>0,\ a\in R.$

e) $[x^x]'=\left[e^{\ln x^x}\right]'=\left[e^{x\ln x}\right]'=e^{x\ln x}\cdot[x\ln x]'=x^x\left[1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right]=x^x[1+\ln x],\ x>0.$ $\blacksquare$

Na záver uvedieme jeden dôsledok vety o derivácii zloženej funkcie, ktorý môže v mnohých prípadoch zjednodušiť derivovanie zložitejších funkcií.

Dôsledok 4.1.7.a (Logaritmická derivácia).
$y=f(x),\ f'(x_0)$ existuje, $f(x_0)>0$ pre $x_0\in D(f)\ \Longrightarrow\ f'(x_0)=f(x_0)\cdot[\ln f(x_0)]'.$

Dôkaz.
$F(x)=\ln f(x)$ spĺňa predpoklady vety 4.1.7, $f(x_0)>0\ \Rightarrow$

$$F'(x_0)=[\ln f(x_0)]'=\frac{1}{f(x_0)}\cdot f'(x_0)=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\ \Rightarrow\ f'(x_0)=f(x_0)\cdot[\ln f(x_0)]'.\ \blacksquare$$

Výraz $[\ln f(x_0)]'=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ nazývame **logaritmická derivácia funkcie f v bode x_0**.

Poznámka 4.1.2.
Ak použijeme logaritmické derivovanie v príklade 4.1.10 e), dostaneme:

$$[x^x]'=x^x[\ln x^x]'=x^x[x\ln x]'=x^x[\ln x+\tfrac{x}{x}]=x^x[1+\ln x],\ x>0.$$

Nájsť deriváciu danej funkcie v tvare analytického vzorca je pomerne častá a dôležitá úloha pri riešení mnohých problémov nielen v matematike, ale aj v praxi. Základom týchto vzorcov sú derivácie elementárnych funkcií, ktoré sú zhrnuté v tabuľke 4.1.1. Pre praktické potreby **je nevyhnutné si tieto vzorce zapamätať**.

Vzorec	Platnosť	Vzorec	Platnosť
$[c]' = 0,$	$x \in R,\ c \in R$	$[x]' = 1,$	$x \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1},$	$x \in R,\ n \in N$	$[x^a]' = ax^{a-1},$	$x > 0,\ a \in R$
$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x,$	$x \in R$	$[a^x]' = a^x \ln a,$	$x \in R,\ a > 0$
$[\ln x]' = \frac{1}{x},$	$x > 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x},$	$x \neq 0$	$[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\sin x]' = \cos x,$	$x \in R$	$[\cos x]' = -\sin x,$	$x \in R$
$[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$	$[\mathrm{cotg}\, x]' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1; 1)$	$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1; 1)$
$[\mathrm{arctg}\, x]' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$	$[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$
$[\sinh x]' = \cosh x,$	$x \in R$	$[\cosh x]' = \sinh x,$	$x \in R$
$[\mathrm{tgh}\, x]' = \frac{1}{\cosh^2 x},$	$x \in R$	$[\mathrm{cotgh}\, x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$	$x \neq 0$
$[\mathrm{argsinh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$	$x \in R$	$[\mathrm{argcosh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$x > 1$
$[\mathrm{argtgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in (-1; 1)$	$[\mathrm{argcotgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in R - \langle -1; 1 \rangle$

Tabuľka 4.1.1: Derivácie základných elementárnych funkcií

Príklad 4.1.11.
a) $[\log_a x]' = \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]' = \frac{[\ln x]'}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a},\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$

b) $[\log_a \lvert x \rvert]' = \begin{cases} [\log_a(-x)]' = \frac{1}{-x \ln a} \cdot (-x)' = \frac{-1}{x \ln a} \cdot (-1) = \frac{1}{x \ln a},\ x < 0, \\ [\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a},\ x > 0 \qquad \Rightarrow [\log_a(-x)]' = \frac{1}{x \ln a},\ x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1. \end{cases}$ ■

Príklad 4.1.12.
a) $[\sinh x]' = \left[\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]' = \frac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x,\ x \in R.$

b) $[\cosh x]' = \left[\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]' = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x,\ x \in R.$

c) $[\mathrm{tgh}\, x]' = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{[\cosh x]^2} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{[\cosh x]^2} = \frac{1}{\cosh^2 x},\ x \in R.$

d) $[\mathrm{cotgh}\, x]' = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{[\sinh x]^2} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{[\sinh x]^2} = \frac{-1}{\sinh^2 x},\ x \in R.$ ■

Príklad 4.1.13.
a) $[\mathrm{argsinh}\, x]' = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+[\sinh \mathrm{argsinh}\, x]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in R.$

b) $[\mathrm{argcosh}\, x]' = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{[\cosh \mathrm{argcosh}\, x]^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x \in (1; \infty).$

c) $[\mathrm{argtgh}\, y]' = \frac{1}{[\mathrm{tgh}\, x]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{1-[\mathrm{tgh}\,(\mathrm{argtgh}\, y)]^2} = \frac{1}{1-y^2},\ x \in (-1; 1).$

d) $[\operatorname{argcotgh} y]' = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} x]'} = \frac{-1}{\frac{1}{\sinh^2 x}} = \frac{-1}{[\operatorname{cotgh}(\operatorname{argcotgh} y)]^2-1} = \frac{-1}{y^2-1} = \frac{1}{1-y^2}$,

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. ■

Cvičenia

4.1.1. Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$: ♣

a) $y = 2x^2 - 5$, b) $y = \sqrt{x^2+1}$, c) $y = \sqrt{x-1}$, d) $y = x - x^2$,
e) $y = \operatorname{cotg} x$, f) $y = 2 - 3x$, g) $y = (x-1)^{-1}$, h) $y = \mathrm{e}^{-x}$.

4.1.2. Nech $f\colon\ y = 2x^2 + 1$. Nájdite všetky body, pre ktoré platí $f(x) = f'(x)$. ♣

4.1.3. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = 2^{-x^2}$, b) $y = \mathrm{e}^{-\cos x}$, c) $y = \sqrt[x]{x}$, d) $y = \sqrt[3]{x} + 1$, e) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$,
f) $y = x^{(\mathrm{e}^x)}$, g) $y = x^{\sin x}$, h) $y = x^{\ln x}$, i) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tgh} x}$, j) $y = [\ln x]^x$,
k) $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, l) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}$, m) $y = x^{x+1}$, n) $y = x^{(x^x)}$, o) $y = (x^x)^x$,
p) $y = \frac{\sqrt[5]{4x}}{5}$, q) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$, r) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}}$, s) $y = \frac{1}{\cos x}$, t) $y = \frac{\cos^2 x}{\cos x^2}$.

4.1.4. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$, b) $y = \frac{x}{\operatorname{tg} \mathrm{e}^x}$, c) $y = \frac{3^x}{2^x}$, d) $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$, e) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$,
f) $y = x^5\, \mathrm{e}^x$, g) $y = \operatorname{tg}^5 x$, h) $y = \sin x^2$, i) $y = \sqrt{\mathrm{e}^{5x}}$, j) $y = \mathrm{e}^{\sin x}$,
k) $y = |x^3|$, l) $y = x\,|x|$, m) $y = \lfloor x \rfloor$, n) $y = 3^{2x}$, o) $y = |\cos x|$,
p) $y = 3^{\operatorname{cotg} x}$, q) $y = x^{\sqrt{x}}$, r) $y = x^{\cos x}$, s) $y = x^{x^2+1}$, t) $y = \ln x^3$,
u) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, v) $y = \frac{x^2}{\ln x}$, w) $y = \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$, x) $y = \frac{1}{\ln^2 x}$, y) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

4.1.5. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \frac{1+x}{1-x}$, b) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, c) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, d) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$,
e) $y = \mathrm{e}^{-\cos^2 x}$, f) $y = \ln \cos x$, g) $y = x^{-5} + x^{-7}$, h) $y = \sqrt{x^5} - \sqrt[3]{x^4}$,
i) $y = \ln \frac{2-x}{2+x}$, j) $y = \frac{x \ln x}{1+\ln x}$, k) $y = \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$, l) $y = \frac{2\sin x}{\sin x - \cos x}$,
m) $y = \ln[1 + x^2]$, n) $y = [x^2 - 1]^3$, o) $y = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x^2}$, p) $y = x^5[\ln x - 1]$,
q) $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, r) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, s) $y = \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, t) $y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$.

4.1.6. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \sin \frac{1}{x^2}$, b) $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$, c) $y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, d) $y = \frac{1-\sin x}{\sin x + \cos x}$,
e) $y = \mathrm{e}^{\sin x + \cos x}$, f) $y = \sqrt{1 - x^4}$, g) $y = \operatorname{cotg} \sqrt{x}$, h) $y = (1 - x^2)^{20}$,
i) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, j) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$, k) $y = \frac{1-x^2}{\sqrt{x}}$, l) $y = \frac{x^3}{1+x+x^2}$,
m) $y = x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, n) $y = x^2\, \mathrm{e}^x \sin x$, o) $y = x\, \mathrm{e}^{-x^2}$, p) $y = \operatorname{arccotg} \sqrt{x}$.

4.1.7. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \operatorname{tg}\frac{1+x}{x}$, b) $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$, c) $y = \frac{\cos x}{1+\cos x}$, d) $y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$,
e) $y = \ln^4 [x^2+1]$, f) $y = \ln|\sin 2x|$, g) $y = x\sinh x$, h) $y = \ln \operatorname{arccotg} x^2$,
i) $y = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$, j) $y = \ln\frac{x^8-1}{x^8+1}$, k) $y = \arccos \ln\frac{1}{x}$, l) $y = \arccos\frac{3x-1}{4}$,
m) $y = [\sin x]^{\cos x}$, n) $y = [\cos x]^{\sin x}$, o) $y = [\cosh x]^{\ln x}$, p) $y = [x^2+1]^{\operatorname{arctg} x}$,
q) $y = [\operatorname{tg} x]^{\operatorname{cotg} x}$, r) $y = 3^{\ln [x^2+x+1]}$, s) $y = x^2\ln x - x^3$, t) $y = x + 5\cos^2 x$.

4.1.8. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \arccos \ln x$, b) $y = \ln\sin e^{2x}$, c) $y = |x^2-1|$, d) $y = \arcsin \ln x$,
e) $y = x\arcsin x$, f) $y = e^x\cos x$, g) $y = (x-1)\,e^x$, h) $y = \ln\ln\ln\ln x$,
i) $y = \ln|x^2-1|$, j) $y = \ln(x^2-1)$, k) $y = \operatorname{tgh} x - x$, l) $y = \ln\arcsin 5x$,
m) $y = \ln\sin x$, n) $y = \ln\arcsin x$, o) $y = \operatorname{argtgh}\operatorname{tg} x$, p) $y = \operatorname{arccotg}\ln x$,
q) $y = \frac{\operatorname{argsinh} x}{x}$, r) $y = \frac{x^2}{\cosh x}$, s) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, t) $y = \operatorname{arccotg}\ln\frac{1}{x}$.

4.1.9. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = x - \sin x\cos x$, b) $y = x^2\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x^2}$, c) $y = e^{-x}[x^4+x^2+1]$,
d) $y = \arcsin^2\frac{1}{x-1}$, e) $y = \frac{\sin x - \sinh x}{\cos x - \cosh x}$, f) $y = \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{1+\sin x}$,
g) $y = \operatorname{argtgh}\frac{2x}{x^2+1}$, h) $y = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x^2+1}$, i) $y = \frac{1}{x^3+1} + \ln\frac{x^3}{x^3+1}$,
j) $y = \frac{\operatorname{argcotgh} x}{1-x^2}$, k) $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$, l) $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$,
m) $y = \operatorname{arccotg}\frac{3\operatorname{tg} x+2}{x}$, n) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \operatorname{cotg} x$, o) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x} + \frac{\arccos x}{\arcsin x}$.

4.1.10. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \operatorname{arccotg}\operatorname{tg} x$, b) $y = \operatorname{arctg}\operatorname{cotg} x$, c) $y = \arcsin\sin x$,
d) $y = \ln\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-3}$, e) $y = \ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, f) $y = \ln\cos\sqrt{x^2+1}$,
g) $y = \frac{1}{3\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}$, h) $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, i) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}[3\ln x - 2]$,
j) $y = \arcsin\cos x$, k) $y = \sqrt{\operatorname{cotg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}$, l) $y = x\sin[\ln x - \pi]$,
m) $y = \arccos\sqrt{x+1}$, n) $y = \sqrt{\cos x}\, e^{\sqrt{x+1}}$, o) $y = \sqrt{1+\arcsin x}$.

4.1.11. Určte jednostranné derivácie $f'_-(0)$, $f'_+(0)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = |\sin x|$, b) $y = |\sin x^2|$, c) $y = \sqrt{\sin x^2}$, d) $y = \lfloor x\rfloor \sin x$,

e) $y = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{pre } x \neq 0,\\ 0, & \text{pre } x = 0,\end{cases}$ f) $y = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{pre } x \neq 0,\\ 0, & \text{pre } x = 0,\end{cases}$

g) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0,\\ \ln(x+1), & \text{pre } x \geq 0,\end{cases}$ h) $y = \begin{cases} 1-x, & \text{pre } x \leq 0,\\ e^{-x}, & \text{pre } x > 0.\end{cases}$

4.1.12. Nech f je reálna funkcia. Dokážte, že platí:

a) Ak f je nepárna, potom f' je párna. b) Ak f je párna, potom f' je nepárna.
c) Ak f je periodická s periódou p, potom f' je periodická s periódou p.

4.1.13. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode x_0, ak: ♣

a) $y = x^2$, $x_0 = 2$, b) $y = \frac{12}{x}$, $x_0 = 3$, c) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$,
d) $y = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$, e) $y = \ln(x+1)$, $x_0 = 0$, f) $y = \cos 2x$, $x_0 = 0$,
g) $y = \sin 2x$, $x_0 = 0$, h) $y = \mathrm{e}^x - 1$, $x_0 = 1$, i) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 3$.

4.1.14. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola: ♣

a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$, b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[0; 0]$, d) prechádzala bodom $[a; b]$, $a, b \in R$.
e) zvierala s osou x uhol $\frac{\pi}{4}$, f) zvierala s osou y uhol $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

4.1.15. Nájdite rovnicu normály ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola: ♣

a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$, b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[1; 3]$, d) zvierala s osou y uhol $\frac{\pi}{4}$.

4.1.16. Určte všetky dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$, ktoré sú rovnobežné s osou x. Určte body, v ktorých sa dotýkajú grafu funkcie f, ak:

a) $y = \sin(x+1)$, b) $y = \cos 2x$, c) $y = \ln(x+1)$, d) $y = x^3 - x$,
e) $y = \frac{\ln x}{x}$, f) $y = \sqrt{1 - x^2}$, g) $y = x \ln x$, h) $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

4.2 Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

4.2.1 Diferenciál funkcie

Často potrebujeme aproximovať (t. j. približne vyjadriť) danú funkciu f nejakou inou, jednoduchšou funkciou g tak, aby bol ich rozdiel $|f(x) - g(x)|$ čo najmenší. Väčšinou nám postačí **lokálna aproximácia** v nejakom okolí bodu $x_0 \in D(f)$.

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a nech $x_0 \in D(f)$ je vnútorný bod. Hľadáme funkciu $y = g(x)$, $x \in O(x_0)$, $O(x_0) \subset D(f)$, spojitú v bode x_0 tak, aby platilo:

$$f(x_0) = g(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = 0. \tag{4.2}$$

To znamená, že $|f(x) - g(x)| \to 0$ rýchlejšie ako $|x - x_0| \to 0$. Graficky si to môžeme predstaviť tak, že v okolí $O(x_0)$ sú grafy f, g „blízko pri sebe" a v bode x_0 sa dotýkajú.

Ako g sa najčastejšie používa lineárna funkcia, ktorá prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$, t. j.

$$g(x) = f(x_0) + a(x - x_0), \qquad \text{kde} \ \ a \in R.$$

Po dosadení do výrazu (4.2) a substitúcii $x = x_0 + h$, $x - x_0 = h$, $h \to 0$ dostaneme:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} \right| = 0. \tag{4.3}$$

Lineárna funkcia $\lambda(h) = ah$, ktorá vyhovuje limite (4.3), sa nazýva **diferenciál funkcie f v bode x_0** a označuje $\mathrm{d}f(x_0)$. Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná v bode x_0**.

Diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$ je lineárna funkcia s argumentom h a je definovaná na množine R. Namiesto $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ stručne píšeme $\mathrm{d}f(x_0,h)$. Potom platí:

$$\lambda(h) = \mathrm{d}f(x_0)(h) = \mathrm{d}f(x_0,h) = ah, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{d}f(x_0,h) = \mathrm{d}f(x_0, x-x_0) = a(x-x_0).$$

Ak je funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v každom bode množiny $A \subset D(f)$, potom ju nazývame **diferencovateľná funkcia na množine** A.

Poznámka 4.2.1.
Ak je funkcia f diferencovateľná na množine A, potom diferenciál $\mathrm{d}f(x,h)$ môžeme považovať nielen za funkciu premennej h, ale aj za funkciu premennej $x \in A$ (t. j. dvoch nezávislých premenných). Stručne ho označujeme $\mathrm{d}f(x)$, $x \in A$, resp. $\mathrm{d}f$.

Veta 4.2.1 (Existencia a jednoznačnosť diferenciálu).
f má v bode $x_0 \in D(f)$ diferenciál $\iff$ existuje konečná $f'(x_0)$.
Diferenciál je jednoznačne určený vzťahom $\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)\cdot h$, $h \in R$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: existuje $\mathrm{d}f(x_0,h) = ah \xRightarrow{(4.3)}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = f'(x_0) - a = 0 \;\Rightarrow$$

existuje $f'(x_0) = a \;\Rightarrow\; \mathrm{d}f(x_0,h) = ah = f'(x_0)h$ (jednoznačne určený).

$PP_{\Leftarrow}$: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ je konečná $\Rightarrow$ $0 = \lim\limits_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] \Rightarrow$

$$0 = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}\right| \;\Rightarrow$$

existuje $\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h, h \in R$. ■

Príklad 4.2.1.
Vypočítajte diferenciál funkcie $f\colon y = x^3$ v bode $x_0 = 2$.

Riešenie.
$\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h = 3x_0^2h \;\Rightarrow\; \mathrm{d}f(2,h) = f'(2)h = 3\cdot 2^2h = 12h$, $h \in R$.

Tento výsledok dostaneme tiež priamo z definície diferenciálu. Je nutné ale poznamenať, že aj tu prakticky počítame hodnotu $f'(2)$. Zo vzťahu (4.3) vyplýva:

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-2^3-ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8-ah}{h} = \lim_{h\to 0} [12+6h-h^2-a] = 12-a \Rightarrow$$

$a = 12 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}f(2,h) = 12h,\; h \in R$. ■

Pre diferenciál identickej funkcie $f\colon y = x$ v bode $x_0 \in R$ platí:

$$\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h = 1\cdot h = h = (x_0+h) - x_0,\; h \in R.$$

To znamená, že diferenciál identity sa rovná prírastku premennej x. Označuje sa $\mathrm{d}x$.

Uvažujme funkciu $y = f(x)$, ktorá je diferencovateľná v bode x_0. Potom platí:

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h = f'(x_0)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f'(x_0) = \tfrac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{h} = \tfrac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{\mathrm{d}x},\; h \in R.$$

To znamená, že deriváciu $f'(x_0)$ môžeme chápať ako podiel diferenciálu funkcie a diferenciálu premennej v tomto bode x_0 a má zmysel označenie vo výraze (4.1):

$$f'(x_0) = \tfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \tfrac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}, \qquad \text{resp.}\;\; f' = \tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

4.2.2 Využitie diferenciálu na približné výpočty

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná funkcia v bode $x_0 \in D(f)$. Ak označíme

$$\omega(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = f(x_0+h) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0, h),$$

potom zo vzťahu (4.3) vyplýva $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$.

Pre **prírastok funkcie f od bodu x_0 po $x_0 + h$** potom platí:

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) + \omega(h) = f'(x_0)h + \omega(h).$$

Výraz $\omega(h)$ nazývame[2] **zvyšok prírastku.**

Funkciu f aproximujeme v bode $x = x_0 + h$ v tvare:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0)h, \qquad \text{kde} \;\; \lim_{h\to 0} \tfrac{\omega(h)}{h} = 0. \tag{4.4}$$

Ak položíme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $\omega(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ potom platí:

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} \tfrac{\omega(x)}{x-x_0} = 0.$$

Veta 4.2.2 (O najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii).
f je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$,

$$\varphi\colon\; y = f(x_0) + c(x - x_0), \qquad g\colon\; y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \;\Longrightarrow$$

existuje $O(x_0)$ tak, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí: $\;|f(x) - g(x)| < |f(x) - \varphi(x)|$.

Dôkaz.
$\varphi(x_0) = g(x_0) = f(x_0)$, $c \neq f'(x_0)$ $\;\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-\varphi(x)}{x-x_0}\right| &= \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \tfrac{c(x-x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(x_0) - c| > 0 \\ \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right| &= \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right| = \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{\omega(x)}{x-x_0}\right| = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right| < \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-\varphi(x)}{x-x_0}\right| \xrightarrow{\text{veta 3.2.7}}$$

Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí:

$$\tfrac{|f(x)-g(x)|}{|x-x_0|} < \tfrac{|f(x)-\varphi(x)|}{|x-x_0|} \;\Rightarrow\; |f(x) - g(x)| < |f(x) - \varphi(x)|\,. \;\blacksquare$$

[2] Zvyšok prírastku má význam chyby pri nahradení prírastku $\Delta f(x_0, h)$ diferenciálom $\mathrm{d}f(x_0, h)$.

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že aproximácia pomocou dotyčnice v bode x_0:

$$g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)h,\ \ x \in P(x_0)$$

je najlepšia zo všetkých lineárnych aproximácií funkcie f. Táto aproximácia má iba lokálny význam v nejakom okolí $O(x_0)$, ale nie na celom $D(f)$.

Príklad 4.2.2.
Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$.

Riešenie.
Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0 \ \Rightarrow\ f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6}$, $x > 0$.
Nech okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$, potom platí:

$$\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \tfrac{1}{6}(x-1) = \tfrac{x+5}{6} \Rightarrow \sqrt[6]{1,06} \approx \tfrac{1,06+5}{6} = \tfrac{6,06}{6} = 1,01.$$

Presná hodnota je $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$. Chyba výpočtu je menšia ako $0,00025$.

Iné riešenie.
Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1}$, $x > -1 \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{(x+1)^{-5/6}}{6}$, $x > -1$.
Nech $x_0 = 0$, $h = 0,06$ a nech $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$. Potom v okolí $O(0)$ platí:

$$\sqrt[6]{1+h} = f(0+h) \approx f(0) + f'(0)h = 1 + \tfrac{h}{6} = \tfrac{6+h}{6} \ \Rightarrow\ \sqrt[6]{1,06} \approx \tfrac{6+0,06}{6} = 1,01. \blacksquare$$

Vzťah $\sqrt[6]{x} \approx \frac{x+5}{6}$ má zmysel iba pre hodnoty x nachádzajúce sa v blízkosti bodu 1. Ako dokazuje tabuľka 4.2.2, pri neuváženom použití tohto vzťahu môže chyba približného výpočtu narásť do neprijateľných rozmerov.

x	$\sqrt[6]{x}$	$(x+5)/6$	chyba	x	$\sqrt[6]{x}$	$(x+5)/6$	chyba
$0,1$	$0,6812920$	$0,8500000$	$> 0,16870$	$1,3$	$1,0446975$	$1,0500000$	$< 0,00531$
$0,3$	$0,8181888$	$0,8833333$	$< 0,06515$	$1,5$	$1,0699132$	$1,0833333$	$< 0,01343$
$0,5$	$0,8908987$	$0,9166666$	$< 0,02577$	$2,0$	$1,1224620$	$1,1666667$	$< 0,04421$
$0,7$	$0,9422865$	$0,9500000$	$< 0,00772$	$3,0$	$1,2009369$	$1,3333333$	$> 0,13239$
$0,8$	$0,9634924$	$0,9666666$	$< 0,00312$	$5,0$	$1,3076605$	$1,6666667$	$> 0,35900$
$0,9$	$0,9825931$	$0,9833333$	$< 0,00075$	10	$1,4677993$	2.5000000	$> 1,03220$
$1,1$	$1,0160119$	$1,0166667$	$< 0,00066$	20	$1,6475490$	$4,1666667$	$> 2,51911$
$1,2$	$1,0308533$	$1,0333333$	$< 0,00249$	64	$2,0000000$	$11,500000$	$= 9,50000$

Tabuľka 4.2.2: Výpočet $\sqrt[6]{x}$ pomocou približného vzorca $\frac{x+5}{6}$

Nech y je veličina závislá od x podľa vzorca $y = f(x)$. Predpokladajme, že sme veličinu x namerali s chybou Δx, ktorá je v porovnaní s x malá. Túto chybu nazývame **absolútna chyba veličiny x**. **Absolútnu chybu Δy závislej veličiny y** môžeme potom vyjadriť ako diferenciál $\mathrm{d}f(x,h) = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

Nech $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$, t. j. $\Delta x \in O(0)$. Potom pre $\Delta x \in O(0)$ platí:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x) \ \Rightarrow$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x).$$

Chyby sa spravidla vyjadrujú ako **relatívne** (**pomerné**) v tvare: $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$.

Príklad 4.2.3.
Aká je chyba pre objem gule, ak sme jej polomer r namerali s absolútnou chybou Δr?

Riešenie.
$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$, $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$ $\Rightarrow$ pre absolútnu chybu ΔV a relatívnu chybu δ_V platí:
$\Delta V \approx V'(r)\Delta r = \left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]' \Delta r = \frac{4\pi}{3} 3r^2 \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$, $\delta_V = \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r$. ■

4.2.3 Derivácia a diferenciál vyšších rádov

Nech má funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ deriváciu na množine $A_1 \subset D(f)$, $A_1 \neq \emptyset$. Ak má $y = f'(x)$, $x \in A_1$ deriváciu $[f']'$ na $A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$, potom ju nazývame **derivácia druhého rádu** (**druhá derivácia**) **funkcie** f **na množine** A_2 a označujeme $f'' = f^{(2)}$.

Ak má $y = f''(x)$, $x \in A_2$ deriváciu $[f'']'$ na $A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$, potom ju nazývame **derivácia tretieho rádu** (**tretia derivácia**) **funkcie** f **na množine** M_3 a označujeme $[f'']' = f''' = f^{(3)}$. Takto môžeme pokračovať pre $n = 4, 5, 6, \ldots$.

Predpokladajme, že má funkcia f deriváciu $f^{(n-1)}$ na množine $A_{n-1} \neq \emptyset$. Jej deriváciu na množine $A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ nazývame **derivácia** n**-tého rádu** (n**-tá derivácia**) **funkcie** f **na množine** A_n a označujeme $[f^{(n-1)}]' = f^{(n)}$.

Hodnotu derivácie $f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in A_n$ nazývame **derivácia** n**-tého rádu** (n**-tá derivácia**) **funkcie** f **v bode** x_0.

Derivácie $f^{(n)}$, $n \in N$ nazývame **deriváciami vyššieho rádu**. Špeciálne $f' = f^{(1)}$ nazývame **prvou deriváciou** (**deriváciou prvého rádu**) a $f = f^{(0)}$ nazývame **nultou deriváciou** (**deriváciou nultého rádu**) **funkcie** f.

Z definície vyplýva, že $y = f(x)$ má v bode $x_0 \in A$ deriváciu $f^n(x_0)$, ak existuje:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

To znamená, že funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

Výpočet derivácie $f^{(n)}$ môže byť vo všeobecnosti veľmi prácny, pretože musíme začať deriváciou f'. Ako dokazujú nasledujúce príklady, niekedy sa dajú $f^{(n)}$ odvodiť pomerne jednoducho. Vzorce pre elementárne funkcie sú uvedené v tabuľke 4.2.3.

Príklad 4.2.4.
a) $y = x^k$, $x \in R$, $k \in N$ $\Rightarrow$ pre $x \in R$, $n \in N$ platí:

$$[x^k]' = kx^{k-1}, \quad [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}, \; \ldots, \; [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)\cdots 2x, \quad [x^k]^{(k)} = k!,$$
$$[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, \; 2 \le n \le k, \quad [x^k]^{(n)} = 0, \; n > k.$$

b) $y = e^x$, $x \in R$ $\Rightarrow$ $[e^x]^{(n)} = e^x$, $n \in N$.

c) s: $y = \sin x$, $x \in R$, c: $y = \cos x$, $x \in R$ $\Rightarrow$ pre $x \in R$, $n \in N$ platí:

s': $\cos x$, s'': $-\sin x$, s''': $-\cos x$, s'''': $\sin x$, $s^{(5)}$: $\cos x$, $s^{(6)}$: $-\sin x, \ldots$ $\Rightarrow$

$$[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)} = [\sin x]^{(n+4k)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \cos x, & n = 2k-1, \quad k \in N. \end{cases}$$

c': $-\sin x$, c'': $-\cos x$, c''': $\sin x$, c'''': $\cos x$, $c^{(5)}$: $-\sin x$, $c^{(6)}$: $-\cos x, \ldots$ $\Rightarrow$

$$[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)} = [\cos x]^{(n+4k)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & n = 2k, \\ (-1)^k \sin x, & n = 2k-1, \quad k \in N. \end{cases}$$ ■

Vzorec	Podmienky platnosti	Vzorec	Podmienky platnosti
$[x^k]^{(n)} = 0,$	$x\in R,\ k\in N,\ k>n$	$[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},$	$x\in R,\ k\in N,\ k<n$
$[x^n]^{(n)} = n!,$	$x\in R$	$[x^a]^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n},$	$x>0,\ a\in R$
$[\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x,$	$x\in R$	$[a^x]^{(n)} = a^x \ln^n a,$	$x\in R,\ a>0$
$[\ln x]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$	$x>0$	$[\log_a x]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a},$	$x>0,\ a>0,\ a\neq 1$
$[\ln\|x\|]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$	$x\neq 0$	$[\log_a \|x\|]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a},$	$x\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1$
$[\sin x]^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$	$x\in R$	$[\sinh x]^{(n)} = \begin{cases} \sinh x, & n=2k, \\ \cosh x, & n=2k+1, \end{cases}$	$x\in R,\ k\in N$
$[\cos x]^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$	$x\in R$	$[\cosh x]^{(n)} = \begin{cases} \cosh x, & n=2k, \\ \sinh x, & n=2k+1, \end{cases}$	$x\in R,\ k\in N$

Tabuľka 4.2.3: Derivácie $f^{(n)}$, $n\in N$ základných elementárnych funkcií

Veta 4.2.3 (Leibnizov vzorec).
f, g majú na množine A derivácie do rádu $n\in N$ vrátane $\Longrightarrow$

$$[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}.$$

Dôkaz.
Veta sa dokáže matematickou indukciou. Dôkaz prenechávame na čitateľa.

Príklad 4.2.5.
Nech $f\colon y=\mathrm{e}^x x^2$, $x\in R$. Vypočítajte $f^{(n)}$, $n\in N$.

Riešenie.
$[\mathrm{e}^x]^{(k)} = \mathrm{e}^x,\ k\in N,\ [x^2]' = 2x,\ [x^2]'' = 2,\ [x^2]^{(3)} = [x^2]^{(4)} = \cdots = 0 \ \Rightarrow$
$[\mathrm{e}^x x^2]' = \mathrm{e}^x\, 2x + \mathrm{e}^x x^2 = \mathrm{e}^x(x^2+2x),\quad [\mathrm{e}^x x^2]'' = \mathrm{e}^x(x^2+4x+2),$
$[\mathrm{e}^x x^2]^{(n)} = \binom{n}{0}\mathrm{e}^x x^2 + \binom{n}{1}\mathrm{e}^x\, 2x + \binom{n}{2}\mathrm{e}^x\, 2 = \mathrm{e}^x[x^2+2nx+2n(n-1)],\ n\in N,\ n>2.$ ■

Nech má funkcia $y=f(x)$, $x\in A$ konečnú deriváciu $f^{(n)}(x_0)$ vo vnútornom bode $x_0\in A$. **Diferenciálom n-tého rádu** (n**-tým diferenciálom**) **funkcie f v bode x_0** nazývame:

$$\mathrm{d}^n f(x_0)\colon\ \mathrm{d}^n f(x_0,h) = f^{(n)}(x_0)h^n,\ \ h\in R.$$

Ak má funkcia f v bode x_0 diferenciál n-tého rádu, potom ju nazývame **diferencovateľná rádu n v bode x_0**. Ak je f diferencovateľná rádu n v každom bode $x_0\in A$, potom ju nazývame **diferencovateľná rádu n na množine A**.

Pre diferenciál prvého rádu platí $\mathrm{d}^1 f(x_0,h) = \mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h$, $h\in R$.

Poznámka 4.2.2.
Aj diferenciál n-tého rádu $\mathrm{d}^n f(x,h)$ môžeme na množine A považovať za funkciu s dvomi nezávislými premennými $A\in M$, $h\in R$. Stručne ho označujeme $\mathrm{d}^n f(x)$, $x\in A$, resp. $\mathrm{d}^n f$.

Ak označíme $h = x - x_0$, potom $\mathrm{d}^n f(x, x - x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$, $x \in R$. Ak označíme $h = \mathrm{d}x$, potom z definície diferenciálu n-tého rádu funkcie f vyplýva:[3]

$$\mathrm{d}f(x) = f^{(n)}(x_0)[\mathrm{d}x]^n = f^{(n)}(x_0)\,\mathrm{d}x^n \;\Rightarrow\; f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ n \in N.$$

Ak uvážime definíciu derivácie vyšších rádov funkcie f, potom pre $n \in N$ platí:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Príklad 4.2.6.
Vypočítajte piaty diferenciál funkcie $f(x) = \ln x$, $x \geq 0$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie.
$f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$, $f^{(5)}(x) = 24x^{-5} \Rightarrow$
$f^{(5)}(x_0) = f^{(5)}(1) = 24 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}^5 f(1, h) = f^{(5)}(1)h^5 = 24h^5$, resp. $\mathrm{d}^5 f(1) = 24\,\mathrm{d}x^5$. ■

Cvičenia

4.2.1. Vypočítajte diferenciál $\mathrm{d}f(x, h)$, ak je funkcia f definovaná predpisom: ♣

a) $y = x\,\mathrm{e}^x$, b) $y = x^3 2^x$, c) $y = x^{-1}$, d) $y = \arcsin x$,
e) $y = 2^{-\frac{\ln x}{x}}$, f) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, g) $y = \frac{x}{1-x}$, h) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$,
i) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$, j) $y = x \ln x$, k) $y = \operatorname{tg} x$, l) $y = \operatorname{arctg} x$.

4.2.2. Kruhový výsek má polomer $r = 30$ cm a stredový uhol $\varphi = 60°$. Určte približne, ako sa zmení obsah kruhového výseku, ak: ♣

a) r sa zväčší o 1 cm, b) r sa zmenší o 1 cm, c) φ zmenší o $1°$.

4.2.3. Určte absolútnu a relatívnu chybu obsahu kruhu s polomerom r, ak je polomer daný s absolútnou chybou Δr. ♣

4.2.4. Pomocou diferenciálu vypočítajte približne hodnoty: ♣

a) $\cos 61°$, b) $\operatorname{tg} 44°$, c) $\ln 0{,}9$, d) $\sqrt[11]{2000}$, e) $\arcsin 0{,}54$,
f) $\sqrt[4]{17}$, g) $\sqrt[4]{267}$, h) $\sqrt{82}$, i) $\sqrt[3]{214}$, j) $\operatorname{arctg} 0{,}97$,
k) $1{,}04^5$, l) $2^{1{,}002}$, m) $\ln 20$, n) $\log 1001$, o) $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

4.2.5. Vypočítajte deriváciu tretieho a piateho rádu funkcie $y = f(x)$, ak: ♣

a) $y = x^3 \sin x$, b) $y = x^3 \cos x$, c) $y = x^3 \sin 2x$, d) $y = x^3 \cos 2x$,
e) $y = \mathrm{e}^x \sin x$, f) $y = \mathrm{e}^x \cos x$, g) $y = x^5 \ln x$, h) $y = x\,\mathrm{e}^x \sin x$.

4.2.6. Vypočítajte deriváciu n-tého rádu, $n \in N$, funkcie $y = f(x)$, ak: ♣

a) $y = \sin^2 x$, b) $y = \cos^3 x$, c) $y = x \sin x$, d) $y = x^{n-1} \ln x$,
e) $y = \frac{x+1}{x-1}$, f) $y = \frac{x-1}{x+1}$, g) $y = \frac{x+\ln x}{x}$, h) $y = \frac{x}{x^2-1}$,
i) $y = x\,\mathrm{e}^x$, j) $y = x \ln x$, k) $y = x + \ln x$, l) $y = x(\ln x - 1)$.

[3] Pre zjednodušenie sa používa zápis $[\mathrm{d}x]^n = \mathrm{d}x^n$.

4.2.7. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^x \cos x + c_2\,\mathrm{e}^x \sin x + c_3\,\mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4\,\mathrm{e}^{-x} \sin x$, $x \in R$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} + 4y = 0$.

4.2.8. Nech $a > 0$. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^{ax} + c_2\,\mathrm{e}^{-ax} + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax$, $x \in R$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} - a^4 y = 0$.

4.3 Aplikácie diferenciálneho počtu

4.3.1 Vety o strednej hodnote funkcie

Vety o strednej hodnote funkcie (Rolleho, Lagrangeova a Cauchyho) a **l'Hospitalovo pravidlo** patria medzi najčastejšie aplikácie diferenciálneho počtu.

Veta 4.3.1.
f má vo vnútornom bode $c \in D(f)$ lokálny extrém, $f'(c)$ existuje $\implies$ $f'(c) = 0$.

Dôkaz.
$f(c)$ je lokálne min $\Rightarrow$ existuje $O(c)$ také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí $f(x) \geq f(c) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x<c \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow f'_-(c) = \lim\limits_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \\ x>c \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow f'_+(c) = \lim\limits_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_-(c) \leq 0 \leq f'_+(c) \Rightarrow f'(c) = 0.$$

V prípade lokálneho maxima je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi. ■

Veta 4.3.2 (Rolle[4]).
f je spojitá na $\langle a; b\rangle$, $f(a) = f(b)$, pre všetky $x \in (a; b)$ existuje (aj nevlastná) $f'(x)$
$\implies$ existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = 0$.

Dôkaz.
f je spojitá na $\langle a; b\rangle \xRightarrow{\text{veta 3.3.10}} f$ nadobúda na $\langle a; b\rangle$ svoje extrémy α a β $\Rightarrow$
existujú $c_1, c_2 \in \langle a; b\rangle$ také, že $f(c_1) = \alpha \leq f(x) \leq \beta = f(c_2)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ $\Rightarrow$
a) aspoň jeden z c_1, c_2 je vnútorný bod intervalu $\langle a; b\rangle \xRightarrow{\text{veta 4.3.1}} f'(c_1) = 0$ alebo $f'(c_2) = 0$.
b) obidva c_1, c_2 sú hraničné body intervalu $\langle a; b\rangle$ $\Rightarrow$ $f(a) = f(b) = f(c_1) = f(c_2) = \alpha = \beta$
$\Rightarrow$ f je konštantná $\Rightarrow$ pre všetky $c \in \langle a; b\rangle$ platí $f'(c) = 0$. ■

Bod $c \in (a; b)$ leží na úsečke s koncovými bodmi a, b, preto sa často zvykne vyjadrovať v tvare $c = a + \theta(b - a)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

Veta 4.3.3 (Lagrange).
f je spojitá na $\langle a; b\rangle$, pre všetky $x \in (a; b)$ existuje (hoci aj nevlastná) $f'(x)$
$\implies$ existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dôkaz.
$F(x) = [f(x) - f(a)]\,(b-a) - [f(b) - f(a)]\,(x-a)$, $x \in \langle a; b\rangle$ $\Rightarrow$
$F(a) = F(b) = 0$, F je spojitá na $\langle a; b\rangle$, $F'(x)$ existuje na $(a; b) \xRightarrow{\text{Rolleho veta}}$
existuje $c \in (a; b)$ také, že $F'(c) = f'(c)(b-a) - [f(b) - f(a)] = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

[4] *Michel Rolle* [1652–1719] — francúzsky matematik.

Lagrangeova veta sa často nazýva **veta o prírastku funkcie**, pretože

$$f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a).$$

vyjadruje prírastok funkcie f na $\langle a; b\rangle$. Ak označíme $b=a+h$, potom platí:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h, \quad \text{kde} \ \ \theta\in(0;1)\,.$$

Pre dostatočne malé h môžeme predpokladať $f'(a+\theta h) \approx f'(a)$. Potom platí:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a,h).$$

Tento vzťah je zhodný so vzťahom (4.4) pre lokálnu aproximáciu pomocou diferenciálu.

Príklad 4.3.1.
Vypočítajte približne hodnotu výrazu $\mathrm{tg}\, 2,1$.

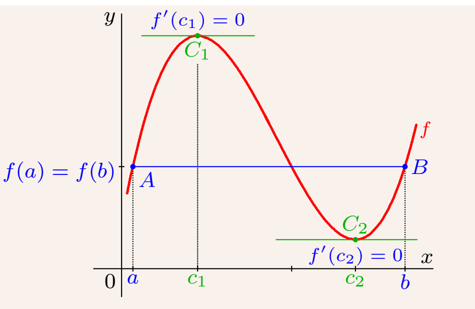
Riešenie.
$f(x)=\mathrm{tg}\, x$, $x\in\left\langle \frac{2\pi}{3}; 2,1\right\rangle$ je spojitá, $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\in\left\langle \frac{2\pi}{3}; 2,1\right\rangle \xRightarrow{\text{veta 4.3.3}}$

existuje $c\in\left(\frac{2\pi}{3}; 2,1\right)$ také, že platí: $\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3} - \mathrm{tg}\, 2,1 = \frac{1}{\cos^2 c}\left(\frac{2\pi}{3} - 2,1\right)$

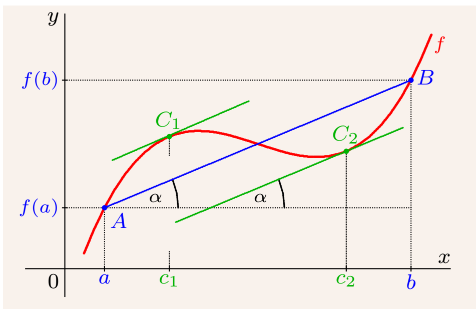
$\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, položíme $c \approx \frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{3} \approx 1,732$, $\frac{2\pi}{3} \approx 2,094$, $\cos^2 c = \frac{1}{4} \ \Rightarrow$

$\mathrm{tg}\, 2,1 = \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\cos^2 c}\left(\frac{2\pi}{3} - 2,1\right) \approx -1,732 - 4(2,094-2,1) = -1,708.$

Po porovnaní s výpočtom kalkulačky $-1,709\,847$, dostaneme chybu $0,001\,847<0,01$. ■



Obr. 4.3.6: Rolleho veta



Obr. 4.3.7: Lagrangeova veta

Rolleho a Lagrangeova veta zaručujú existenciu $c\in(a;b)$. Pomocou nich však takýto bod nevieme nájsť a ani nedokážeme určiť počet takýchto bodov. Geometrický význam viet je ilustrovaný na obrázkoch 4.3.6 a 4.3.7. Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[c; f(c)]$ zviera s osou x uhol α, pre ktorý platí $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(c) = 0$, resp. $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dôsledok 4.3.3.a.
$f'(x)=0$ pre všetky $x\in(a;b) \implies f$ je na $(a;b)$ konštantná.

Dôkaz.
$f'(x) = 0$, $x\in(a;b) \xRightarrow{\text{veta 4.1.1}} f$ je spojitá na $(a;b)$.

Nech $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{Lagrangeova veta}}$ existuje $c \in (x_1; x_2)$, pre ktoré platí:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0 \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2). \blacksquare$$

Veta 4.3.4 (Cauchy).
f, g sú spojité na $\langle a; b\rangle$, na $(a;b)$ existuje (hoci aj nevlastná) $f'(x)$ a vlastná $g'(x) \neq 0$
$\Longrightarrow$ existuje aspoň jedno $c \in (a;b)$ také, že $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dôkaz.
$F(x) = [f(x)-f(a)]\cdot[g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)]\cdot[g(x)-g(a)]$, $x \in \langle a; b\rangle \;\Rightarrow$
$F(a) = F(b) = 0$, F je spojitá na $\langle a; b\rangle$, $F'(x)$ existuje na $(a;b) \xRightarrow{\text{Rolleho veta}}$
existuje $c \in (a;b)$: $F'(c) = f'(c)[g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)]g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. $\blacksquare$

Je zrejmé, že Rolleho veta je dôsledkom Lagrangeovej vety pre $f(a) = f(b)$. Lagrangeovu vetu môžeme považovať za dôsledok Cauchyho vety pre $g(x) = x$, $x \in \langle a; b\rangle$.

Historicky však tieto vety vznikali v poradí, v akom sú uvedené, t. j. najprv Rolleho, potom Lagrangeova a na záver Cauchyho veta.

Ak vynecháme niektorý z predpokladov vo vetách o strednej hodnote, potom ich tvrdenia vo všeobecnosti prestávajú platiť.

Príklad 4.3.2.
Funkcia $f\colon\ y = |x|$, $x \in \langle -1; 1\rangle$ je spojitá, $f(-1) = f(1) = 1$.
$f'(x) = [-x]' = -1$ pre $x \in \langle -1; 0)$, $f'(x) = x' = 1$ pre $x \in (0; 1\rangle$, $f'(0)$ neexistuje.
To znamená, že sú splnené predpoklady Rolleho vety, okrem existencie f'. Je zrejmé, že bod $c \in (-1; 1)$ pre ktorý platí $f'(c) = 0$ neexistuje (obr. 4.3.8). $\blacksquare$

Príklad 4.3.3.
Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{sgn} x$, $x \in \langle -2; 2\rangle$ má deriváciu v každom bode (príklad 4.1.4).
Pre $x \neq 0$ platí $f'(x) = 0$ a pre $x = 0$ platí $f'(0) = \infty$.
Funkcia f nie je spojitá v bode $x = 0$, takže nie sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety. Je zrejmé (obr. 4.3.9), že neexistuje bod $c \in (-2; 2)$, pre ktorý platí:

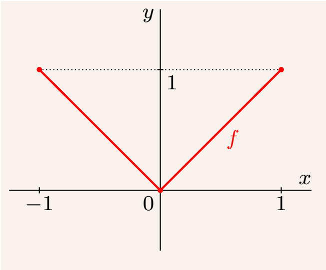
$$f'(c) = \tfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \tfrac{1-(-1)}{2+2} = \tfrac{1}{2}. \blacksquare$$

Vety o strednej hodnote funkcie patria medzi najdôležitejšie výsledky diferenciálneho počtu a ako dokazujú nasledujúce príklady, využívajú sa pri riešení mnohých problémov.

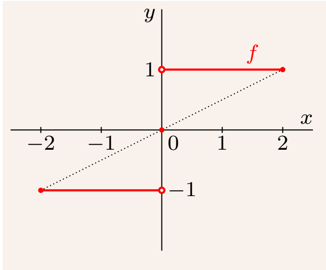
Príklad 4.3.4.
Dokážte, že $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ má iba jeden koreň a nájdite interval, v ktorom leží.

Riešenie.
Funkcia f je spojitá na R a pre všetky $x \in R$ platí:

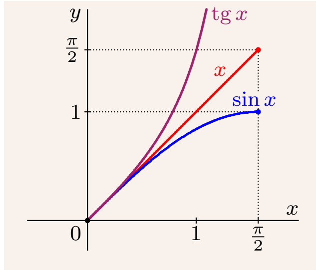
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3(x^2 - 2x + 1) + 3 = 3(x-1)^2 + 3 > 0.$$



Obr. 4.3.8: Príklad 4.3.2



Obr. 4.3.9: Príklad 4.3.3



Obr. 4.3.10: Príklad 4.3.5

$f(-1)=-9<0,\ f(0)=1>0 \xRightarrow{\text{veta 3.3.11}}$ existuje $c\in(-1;0)$ také, že $f(c)=0$.

Ak má funkcia f dva korene $c_1<c_2$, potom (Rolleho veta) existuje $c\in(c_1;c_2)$ také, že $f'(c)=0$. To je spor s tým, že $f'(x)>0$. Takže f má práve jeden koreň $c\in(-1;0)$. ■

Príklad 4.3.5.
Dokážte, že pre všetky $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ platí $\sin x<x<\operatorname{tg} x$.

Riešenie.
Nech $b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ je ľubovoľné (obr. 4.3.10).

$f(x)=\sin x$ je na $\langle 0;b\rangle$ spojitá, pre všetky $x\in(0;b)$ platí $0<f'(x)=\cos x<1$

$\xRightarrow{\text{Lagrangeova veta}}$ existuje $c\in(0;b):\ \sin b-\sin 0=\cos c\cdot(b-0)\Rightarrow \sin b=\cos c\cdot b<b$.

$g(x)=\operatorname{tg} x$ je na $\langle 0;b\rangle$ spojitá, $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>\frac{1}{\cos^2 0}=1$ je konečná pre všetky $x\in(0;b)$

$\xRightarrow{\text{Lagrangeova veta}}$ existuje $c\in(0;b):\ \operatorname{tg} b-\operatorname{tg} 0=\frac{b-0}{\cos^2 c}\Rightarrow \operatorname{tg} b=\frac{b}{\cos^2 c}>\frac{b}{1}=b$. ■

4.3.2 L'Hospitalovo pravidlo, neurčité výrazy

Pri praktickom výpočte limity funkcie, ktorá má v danom bode tvar neurčitého výrazu typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$ sa často používa **l'Hospitalovo pravidlo** (nasledujúca veta).[5]

Veta 4.3.5 (l'Hospitalovo pravidlo).
$a,b\in R^*$, $f'(x)$, $g'(x)\neq 0$ sú konečné na množine $O(a)-\{a\}$,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b,\ \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0 \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b.$$

Dôkaz.
$f'(x)$, $g'(x)\neq 0$ sú konečné $\xRightarrow{\text{veta 4.1.4}}$ f, g sú spojité v $O(a)-\{a\}$.

Ak položíme $f(a)=g(a)=0$, potom budú f, g spojité aj v bode a, t. j. na množine $O(a)$.

a) $a\in R$, $b\in R^*$, $O(a)=(a-\delta;a+\delta)$, $\delta>0 \Rightarrow$
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto a$, $x_n\in(a;a+\delta)$, $n\in N\Rightarrow$ na $\langle a;x_n\rangle$, $n\in N$ platí Cauchyho veta $\Rightarrow$

pre každé $n\in N$ existuje $c_n\in(a;x_n):\ \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f(x_n)-0}{g(x_n)-0}=\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$.

[5]Pravidlo je pomenované po francúzskom matematikovi *G. F. A. de l'Hospitalovi*, ktorý ho publikoval v roku 1696. Jeho skutočným autorom je švajčiarsky matematik *Johann Bernoulli*.

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a \;\Rightarrow\; b = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$

Ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, $x_n \in (a-\delta; a)$, $n\in N \Rightarrow$ (analogicky ako pri limite sprava) $\Rightarrow$

$$b = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; b = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

b) $a=\infty$, $b\in R^*$, $O(\infty) = (\delta;\infty)$, $\delta>0 \;\Rightarrow\;$ označme $x=\frac{1}{t} \;\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} x = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(\frac{1}{t}) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} g(\frac{1}{t}) = 0$, $t\in \big(0; \frac{1}{\delta}\big) \overset{\text{a)}}{\Longrightarrow}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{[f(t^{-1})]'}{[g(t^{-1})]'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-f'(t^{-1})t^{-2}}{-g'(t^{-1})t^{-2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

c) $a=-\infty$, $b\in R^*$, $O(-\infty) = (-\infty;\delta)$, $\delta<0 \;\Rightarrow\;$ dôkaz je analogický ako pri b). ■

Vetu môžeme použiť taktiež v prípade, keď predpoklad $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ nahradíme predokladom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Príklad 4.3.6.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$.

Riešenie.
$f(x) = x^3-8$, $g(x) = x-2$, $x\in R-\{2\}$, $O(2)$ môžeme zvoliť ľubovoľne (aj R).

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 1 \neq 0, \;\; x\in R-\{2\} \\ \lim\limits_{x\to 2} (x^3-8) = \lim\limits_{x\to 2} (x-2) = 0, \;\; \lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12.$$

Bez l'Hospitalovho pravidla: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2+2x+4) = 12.$ ■

Príklad 4.3.7.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Riešenie.
Predpoklady l'Hospitalovho pravidla sú splnené, pretože pre všetky $x\in(0;\infty)$ existujú konečné $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$, $g'(x) = [x]' = 1 \neq 0$ a existujú limity:

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} x = \infty, \;\; \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = 0.$$ ■

Pri praktickom používaní l'Hospitalovho pravidla je veľmi dôležité, aby sme **overili všetky predpoklady**. V opačnom prípade (viď príklady 4.3.8, 4.3.10) môžeme dospieť k nesprávnym výsledkom alebo sa k výsledku daným postupom nedopátrame. Platnosť predpokladu iii) sa v praxi overuje priebežne počas výpočtu limity.

Obrátené tvrdenie l'Hospitalovho pravidla neplatí (príklad 4.3.8). To znamená, že z existencie $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ vo všeobecnosti nevyplýva existencia $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Príklad 4.3.8.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x^{-1}}{\sin x}$.

Riešenie.
L'Hospitalovo pravidlo použiť nemôžeme, pretože neexistuje limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^{-1}+x^2\cos x^{-1}(-x^{-2})}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^{-1}-\cos x^{-1}}{\cos x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}[2x\sin x^{-1}]-\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{-1}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{0-\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{-1}}{1}=-\lim_{x\to 0}\cos x^{-1}.$$

Daná limita existuje, pretože zo vzťahov $\lim\limits_{x\to 0}[x\sin x^{-1}]=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ vyplýva:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x^{-1}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[x\sin x^{-1}\frac{x}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[x\sin x^{-1}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\cdot 1=0.\ \blacksquare$$

L'Hospitalovo pravidlo môžeme pri praktickom výpočte limity použiť aj niekoľkokrát za sebou. Ak sú splnené predpoklady pre funkcie $f',g',\ f'',g'',\ \ldots,\ f^{(k)},g^{(k)},\ k\in N$ a existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$, potom ho môžeme použiť k-krát za sebou podľa vzoru:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

Príklad 4.3.9.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Riešenie.
Použijeme l'Hospitalovo pravidlo niekoľkokrát za sebou.
Zvoľme $O(0)=(-1;1)$. Pre všetky $x\in O(0)$, $x\neq 0$ existujú príslušné derivácie a platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\sin x]'}{[x^3]'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos x]'}{[3x^2]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0-(-\sin x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.\ \blacksquare$$

Príklad 4.3.10.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Riešenie.
L'Hospitalovo pravidlo nám nepomôže. Nedokážeme overiť existenciu $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pretože:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{[e^x+e^{-x}]'}{[e^x-e^{-x}]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{[e^x-e^{-x}]'}{[e^x+e^{-x}]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Lenže platí: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\frac{1+0}{1-0}=1.\ \blacksquare$

L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj na výpočet neurčitých výrazov typu $\pm\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0, $1^{\pm\infty}$. Musíme ich ale vhodnými úpravami previesť na typ $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

- **Typ $\pm\infty\cdot 0$, t. j.** $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ $\Rightarrow$ typ $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Ak sú $\left[\frac{1}{f(x)}\right]'\neq 0$, $g'(x)$ konečné v $O(a)-\{a\}$ a existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]'}$, potom:

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\overset{\text{l'H}}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]'},\qquad \text{t. j. typ } \frac{0}{0}.$$

Ak sú $f'(x)$, $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' \neq 0$ konečné v $O(a)-\{a\}$ a existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}$, potom:

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}, \qquad \text{t. j. typ } \tfrac{\infty}{\infty}.$$

- **Typ $\infty-\infty$, t. j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$** $\Rightarrow$ typ $\frac{0}{0}$.

Ak sú $\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]'$, $\left[\frac{1}{f(x)g(x)}\right]' \neq 0$ konečné v $O(a)-\{a\}$ a existuje limita ich podielu:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to a}\frac{\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]'}{\left[\frac{1}{f(x)g(x)}\right]'}, \qquad \text{t. j. typ } \tfrac{0-0}{0} = \tfrac{0}{0}.$$

- **Typ ∞^0, t. j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$** $\Rightarrow$ typ $0\cdot\infty$.
- **Typ 0^0, t. j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$** $\Rightarrow$ typ $0\cdot(-\infty)$.
- **Typ $1^{\pm\infty}$, t. j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$** $\Rightarrow$ typ $\pm\infty\cdot 0$.

Ak pre $x\in O(a)-\{a\}$ existujú funkcie $\ln f(x)$, $\ln[f(x)]^{g(x)}$, potom:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

Príklad 4.3.11.

Pomocou l'Hospitalovho pravidla vypočítajte:[6]

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}[x\ln x]$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right]$, c) $\lim\limits_{x\to 0}[\sin x]^x$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$.

Riešenie.

a) Typ $\frac{0}{0}$: $x>0 \Rightarrow x' = 1$, $\left[\frac{1}{\ln x}\right]' = [\ln^{-1} x]' = -\ln^{-2} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x\ln^2 x} \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0,\ \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}[x\ln x] = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x'}{\left[\frac{1}{\ln x}\right]'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+}[x\ln^2 x] \Rightarrow \text{typ } \tfrac{0}{0} \text{ nie je vhodný.}$$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$: $x>0 \Rightarrow [\ln x]' = \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\right] = \infty \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+}[x\ln x] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln x]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x - x]'}{[x\sin x]'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{[\cos x - 1]'}{[\sin x + x\cos x]'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

[6]Viď príklad 3.2.28 na strane 105.

c) $[\sin x]^x$ nie je definované pre $x<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} [\sin x]^x$ neexistuje $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} [\sin x]^x$ neexistuje.

Ale: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln [\sin x]^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x \ln \sin x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \left[x \cos x \tfrac{x}{\sin x}\right] = -0\cdot 1\cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0^+} [\sin x]^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln [\sin x]^x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

d) $x > 0 \;\Rightarrow\; x^{1/x} = \mathrm{e}^{\ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$, $x' = 1$, $[\ln x]' = \frac{1}{x} \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty \;\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln x} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$ ■

4.3.3 Taylorov polynóm

Nech je f diferencovateľná v bode $x_0 \in R$. Najlepšia aproximácia funkcie f lineárnou funkciou (polynómom prvého stupňa) v okolí $O(x_0)$ je pomocou funkcie (veta 4.2.2):

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, x - x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} = 0.$$

V nasledujúcej časti sa budeme snažiť f aproximovať v $O(x_0)$ polynómom stupňa n.

Nech má f v bode $x_0 \in R$ konečné derivácie do rádu $n \in N$ vrátane. Potom v bode x_0 existujú diferenciály do rádu n. Funkciu f aproximujeme v okolí $O(x_0)$ polynómom:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$$

tak, aby chyba aproximácie $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ bola minimálna, t. j. aby:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{4.5}$$

Určíme koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zo vzťahu (4.5) pre $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ vyplýva:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \cdot (x-x_0)^{n-k}\right] = 0 \cdot 0 = 0.$$

Po k-násobnom opakovanom použití l'Hospitalovho pravidla typu $\frac{0}{0}$ dostaneme:

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^k} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{[(x-x_0)^k]'} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{k[(x-x_0)^{k-1}]'} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \cdots$$

$$\cdots \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(k)}(x)}{[(x-x_0)^k]^{(k)}} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(k)}(x)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{R_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

To znamená, že pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$R_n^{(k)}(x_0) = [f(x_0) - T_n(x_0)]^{(k)} = 0 \;\Rightarrow\; T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

Pre polynóm $T_n(x)$, $x \in O(x_0)$ potom platí:

$$\begin{aligned}
T_n'(x) &= n\,a_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots + 3\,a_3(x-x_0)^2 + 2\,a_2(x-x_0) + 1\,a_1,\\
T_n''(x) &= n(n-1)\,a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots + 3\cdot 2\,a_3(x-x_0) + 2\cdot 1\,a_2,\\
T_n'''(x) &= n(n-1)(n-2)\,a_n(x-x_0)^{n-3} + \cdots + 3\cdot 2\cdot 1\,a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_n^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2\,a_n(x-x_0) + (n-1)!\,a_{n-1}, \qquad T_n^{(n)}(x) = n!\,a_n.
\end{aligned}$$

Potom pre $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k \;\Rightarrow\; a_k = \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú určené jednoznačne.

Nech $y = f(x)$, $x \in O(x_0)$ a nech $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$ sú konečné. Funkciu

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \; x \in O(x_0)$$

nazývame **Taylorov**[7] **polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0**. Vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \; x \in O(x_0)$$

nazývame **Taylorov vzorec stupňa n funkcie f v strede x_0**.

Funkcia $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, $x \in O(x_0)$ spĺňa vzťah (4.5) a nazýva sa **zvyšok Taylorovho vzorca (stupňa n funkcie f v bode x_0)**.

Taylorov polynóm môžeme pomocou diferenciálov vyšších rádov vyjadriť v tvare:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{\mathrm{d}^k f(x_0, x-x_0)}{k!} = f(x_0) + \tfrac{\mathrm{d} f(x_0, x-x_0)}{1!} + \cdots + \tfrac{\mathrm{d}^n f(x_0, x-x_0)}{n!}, \; x \in O(x_0).$$

Špeciálne pre $x_0 = 0$ sa Taylorov polynóm nazýva **Maclaurinov**[8] a má tvar:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \; x \in O(0)$$

V prípade $f^{(n)}(x_0) = 0$ bude mať polynóm $T_n(x)$ stupeň menší ako n. To je dôvod, prečo niekedy hovoríme o polynóme stupňa najviac n.

Ak označíme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $R_n(x) = R_n(x_0 + h) = \omega_n(h)$, potom môžeme Taylorov polynóm $T_n(x)$ so stredom x_0 vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned}
T_n(x_0+h) &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k = f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}h + \tfrac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{\mathrm{d}^k f(x_0, h)}{k!} = f(x_0) + \tfrac{\mathrm{d} f(x_0, h)}{1!} + \tfrac{\mathrm{d}^2 f(x_0, h)}{2!} + \cdots + \tfrac{\mathrm{d}^n f(x_0, h)}{n!}, \; h \in O(0).
\end{aligned}$$

[7] *Brook Taylor* [1685–1731] — anglický matematik.
[8] *Colin Maclaurin* [1698–1746] — škótsky matematik.

Pre Taylorov vzorec funkcie f v bode x_0 potom platí:

$$f(x_0+h) = T_n(x_0+h) + \omega_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \omega_n(h), \quad \lim_{h\to 0} \tfrac{\omega_n(h)}{h^n} = 0.$$

Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu, s akou aproximuje Taylorov polynóm T_n funkciu f v bode $x \in O(x_0)$. Táto aproximácia má zmysel iba v lokálne, t. j. pre body blízke bodu x_0. Pre vzdialenejšie body dostaneme nepresné až celkom nevyhovujúce výsledky. Väčšinou nepomôže ani zvýšenie stupňa a v mnohých prípadoch sa chyba dokonca ešte zväčší. Pre praktické použitie je dôležité odhadnúť veľkosť zvyšku $R_n(x)$.

Z nasledujúcej vety vyplýva, že aproximácia pomocou $T_n(x)$ je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou polynómov stupňa n.

Veta 4.3.6 (O najlepšej lokálnej aproximácii polynómom).
f má v bode $x_0 \in D(f)$ konečné derivácie až do rádu n vrátane,

$$Q_n(x) = f(x_0) + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n \neq T_n(x) \implies$$

existuje $O(x_0)$ tak, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí: $|f(x)-T_n(x)| < |f(x)-Q_n(x)|$.

Veta 4.3.7 (Taylor).
f má v okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ konečné derivácie až do rádu $n+1$ vrátane $\implies$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \quad x \in O(x_0).$$

Zvyšok $R_n(x)$ môže mať **Lagrangeov** $L_n(x)$ alebo **Cauchyho tvar**[9] $C_n(x)$:

$$L_n(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad C_n(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n,$$
$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad \theta \in (0;1).$$

Ak označíme $h = x-x_0$, $x = x_0+h$, $\xi = x_0+\theta h$, $x-\xi = h-\theta h = (1-\theta)h$, potom platí:

$$L_n(x_0+h) = \tfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad C_n(x_0+h) = \tfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{n!} h^{n+1}(1-\theta)^n, \quad \theta \in (0;1).$$

V prípade Maclaurinovho vzorca platí $h = x-0 = x$, $\xi = \theta h = \theta x$. Potom:

$$L_n(h) = L_n(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad C_n(h) = C_n(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} x^{n+1}(1-\theta)^n, \quad \theta \in (0;1).$$

Príklad 4.3.12.
Nájdite $T_2(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ so stredom v bode 0.

Riešenie.
$D(f) = x \in \langle -1; \infty)$. Pre všetky $x \in (-1; \infty)$ platí:

$$f'(x) = \tfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}, \quad f''(x) = \tfrac{-2}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}}, \quad f'''(x) = \tfrac{10}{27\sqrt[3]{(1+x)^8}}.$$

[9] Existuje omnoho viac tvarov zvyšku $R_n(x)$, ale tieto dva sú najvýznamnejšie.

$f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{3}$, $f''(0)=-\frac{2}{9}$, potom pre Maclaurinov vzorec platí:

$$f(x)=f(0)+\tfrac{f'(0)}{1!}x+\tfrac{f''(0)}{2!}x^2+R_2(x)=1+\tfrac{x}{3}-\tfrac{x^2}{9}+R_2(x),\ x\in O(0),$$

$$L_2(x)=\tfrac{f'''(\theta x)}{3!}\,x^3=\tfrac{5x^3}{81\sqrt[3]{1+\theta x}},\ C_2(x)=\tfrac{f'''(\theta x)}{2!}\,x^3(1-\theta)^2=\tfrac{5x^3(1-\theta)^2}{27\sqrt[3]{1+\theta x}},\ \text{kde } \theta\in(0;1).\ \blacksquare$$

Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že funkciu $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x\in O(0)$ môžeme aproximovať kvadratickou funkciou $1+x/3-x^2/9$ s chybou $L_2(x)$. Pre $x\in O^+(0)$ platí:

$$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\tfrac{x}{3}-\tfrac{x^2}{9},\ x\in O(0),\quad |L_2(x)|=L_2(x)=\tfrac{5x^3}{81\sqrt[3]{1+\theta x}}\leq\tfrac{5x^3}{81}<0{,}062x^3.$$

Aproximácia výrazu $\sqrt[3]{1{,}2}$ má chybu $|L_2(0{,}2)|<0{,}062\cdot 0{,}2^3=0{,}000\,496$, ale aproximácia výrazu $\sqrt[3]{8}$ má chybu $|L_2(7)|<0{,}062\cdot 7^3=21{,}266$, čo je neprijateľné. Naozaj, stačí porovnať presné hodnoty $\sqrt[3]{1{,}2}=1{,}062\,659$, $\sqrt[3]{8}=2$ s hodnotami

$$\sqrt[3]{1+0{,}2}\approx 1+\tfrac{0{,}2}{3}-\tfrac{0{,}2^2}{9}=1{,}062\,222,\quad \sqrt[3]{1+7}\approx 1+\tfrac{7}{3}-\tfrac{7^2}{9}=-2{,}111\,111.$$

Príklad 4.3.13.
Nájdite $T_n(x)$, $n\in N$ funkcie $f(x)=\ln x$ so stredom v bode $x_0=1$.

Riešenie.
$x>-1$, $k\in N \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=\frac{-1}{x^2}$, $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$, $f''''(x)=\frac{-3\cdot 2}{x^4},\ldots,$

$$f^{(k)}(x)=\tfrac{(-1)^{k-1}(n-1)!}{x^k}\;\Rightarrow\; f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!,\ k\in N\;\Rightarrow$$

$$T_n(x)=0+\tfrac{1}{1!}(x-1)+\tfrac{-1!}{2!}(x-1)^2+\tfrac{2!}{3!}(x-1)^3+\cdots+\tfrac{(-1)^{n-1}n!}{(n-1)!}(x-1)^n=$$

$$=\tfrac{(x-1)}{1}-\tfrac{(x-1)^2}{2}+\tfrac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\tfrac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k},\ x\in O(1),$$

$$L_n(x)=\tfrac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n+1}},\quad C_n(x)=\tfrac{(-1)^n(x-1)^{n+1}(1-\theta)^n}{[1+\theta(x-1)]^{n+1}},\ \theta\in(0;1).\ \blacksquare$$

Niekedy je výhodnejšie funkciu $f(x)=\ln x$ vyjadriť v tvare Maclaurinovho polynómu. Ak položíme $x=t+1$, potom Maclaurinov polynóm funkcie $f(t)=\ln(t+1)$ má tvar:

$$T_n(t)=t-\tfrac{t^2}{2}+\tfrac{t^3}{3}-\tfrac{t^4}{4}+\tfrac{t^5}{5}+\cdots+\tfrac{(-1)^{n-1}t^n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{(-1)^{k-1}t^k}{k},\quad t\in O(0).$$

Príklad 4.3.14.
Nájdite Maclaurinove polynómy stupňa $n\in N$ pre funkcie:

a) $f(x)=\mathrm{e}^x$, b) $f(x)=\sin x$, c) $f(x)=\cos x$.

Riešenie.
a) $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in R$, $k\in N \;\Rightarrow\; f^{(k)}(x)=[\mathrm{e}^x]^{(k)}=\mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; f^{(k)}(0)=\mathrm{e}^0=1 \;\Rightarrow$

$$T_n(x)=1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^4}{4!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\tfrac{x^k}{k!},\quad x\in R.$$

Derivácie funkcií $\sin x$ a $\cos x$ sme vypočítali v príklade 4.2.4.

b) $f(x)=\sin x,\ x\in R,\ l\in N \ \Rightarrow\ f(0)=f^{(4l)}(0)=\sin 0=0,\ f'(0)=f^{(4l+1)}(0)=\cos 0=1,$
$f''(0)=f^{(4l+2)}(0)=-\sin 0=0,\ f'''(0)=f^{(4l+3)}(0)=-\cos 0=-1 \ \Rightarrow$

$$T_{2k+1}(x) = 0+\tfrac{x}{1!}+0+\tfrac{-x^3}{3!}+0+\tfrac{x^5}{5!}+0+\cdots+\tfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \tfrac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad x\in R.$$

c) $f(x)=\cos x,\ x\in R,\ l\in N \ \Rightarrow\ f(0)=f^{(4l)}(0)=\cos 0=1,\ f'(0)=f^{(4l+1)}(0)=-\sin 0=0,$
$f''(0)=f^{(4l+2)}(0)=-\cos 0=-1,\ f'''(0)=f^{(4l+3)}(0)=\sin 0=0 \ \Rightarrow$

$$T_{2k}(x) = 1+0+\tfrac{-x^2}{2!}+0+\tfrac{x^4}{4!}+0+\cdots+\tfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{i=0}^{k} \tfrac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}, \quad x\in R. \ \blacksquare$$

Funkcie $y=\mathrm{e}^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ môžeme aproximovať Maclaurinovým polynómom pre ľubovoľné $x\in R$. Požadovanú presnosť dosiahneme dostatočným zväčšením stupňa n.

Príklad 4.3.15.
Nájdite Maclaurinov polynóm stupňa $n\in N$ pre $f(x)=\mathrm{e}^{(x^2)}$, $x\in R$.

Riešenie.
$f(x)=\mathrm{e}^{(x^2)},\ x\in R \ \Rightarrow\ f'(x)=2x\,\mathrm{e}^{(x^2)} \ \Rightarrow\ f''(x)=2\,\mathrm{e}^{(x^2)}+4x^2\,\mathrm{e}^{(x^2)} \ \Rightarrow$
$f'''(x)=12x\,\mathrm{e}^{(x^2)}+8x^3\,\mathrm{e}^{(x^2)} \ \Rightarrow\ f^{(4)}(x)=12\,\mathrm{e}^{(x^2)}+48x^2\,\mathrm{e}^{(x^2)}+16x^4\,\mathrm{e}^{(x^2)} \ \Rightarrow$
$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=2,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=12 \ \Rightarrow$

$$T_4(x)=1+\tfrac{0}{1!}x+\tfrac{2}{2!}x^2+\tfrac{0}{3!}x^3+\tfrac{12}{4!}x^4=1+x^2+\tfrac{x^4}{2}.$$

Ako vidíme, s výpočtom derivácií vyšších rádov funkcie f sú problémy.

Iné riešenie.
Ak označíme $g(t)=\mathrm{e}^t$, $t\in R$, $t=x^2$, potom $\mathrm{e}^{(x^2)}=f(x)=g(x^2)=g(t)=\mathrm{e}^t$.
Pre Maclaurinove polynómy $P_n(t)$, $T_{2n}(x)$ funkcií $g(t)$, $f(x)$ potom platí:

$$P_n(t)=1+\tfrac{t}{1!}+\tfrac{t^2}{2!}+\tfrac{t^3}{3!}+\cdots+\tfrac{t^n}{n!}=1+\tfrac{x^2}{1!}+\tfrac{(x^2)^2}{2!}+\tfrac{(x^2)^3}{3!}+\cdots+\tfrac{(x^2)^n}{n!}=$$
$$=1+\tfrac{x^2}{1!}+\tfrac{x^4}{2!}+\tfrac{x^6}{3!}+\cdots+\tfrac{x^{2n}}{n!}=\sum_{k=0}^{2n}\tfrac{x^{2k}}{k!}=T_{2n}(x). \ \blacksquare$$

4.3.4 Monotónnosť funkcie, lokálne a globálne extrémy funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna, t. j. rastúca (neklesajúca) alebo klesajúca (nerastúca).

Veta 4.3.8.
f je spojitá na intervale $I\subset R$, $f'(x)$ existuje na $I \implies f$ je na intervale I:

a) konštantná $\Leftrightarrow\ \forall x_0\in I\colon f'(x_0)=0.$

b) rastúca $\Leftrightarrow\ \forall x_0\in I\colon f'(x_0)\geq 0$ a neexistuje interval $J\subset I$, aby $\forall x\in J\colon f'(x)=0.$

c) neklesajúca $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in I\colon f'(x_0) \geq 0$.
d) klesajúca $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in I\colon f'(x_0) \leq 0$ a neexistuje interval $J \subset I$, aby $\forall x \in J\colon f'(x) = 0$.
e) nerastúca $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in I\colon f'(x_0) \leq 0$.

Interval J v častiach b), d) musí byť nedegenerovaný, t. j. musí mať rôzne koncové body.

Dôkaz.
a) $NP_{\Rightarrow}$: Vyplýva z príkladu 4.1.3. $PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z dôsledku 4.3.3.a.
b) $NP_{\Rightarrow}$: f je rastúca na $I \Rightarrow$ pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.

$x_0 \in I$, $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$

$x_0 \in I$, $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$

$$\Rightarrow\ f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0.$$

Nech $\forall x \in J\colon f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ f$ je na $J \subset I$ konštantná, t. j. nie je rastúca. Spor.
$PP_{\Leftarrow}$: $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \ \Rightarrow$ existuje $c \in (x_1; x_2)$: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$.
$f'(c) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f$ je neklesajúca na I.
Ak je f konštantná na $J \subset I \ \Rightarrow\ \forall x \in J\colon f'(x) = 0$ (spor) $\ \Rightarrow\ f$ je rastúca na I.
Tým sme v nadväznosti na a) zároveň dokázali aj časť c).
d), e) Dokážeme pomocou funkcie $g = -f$, ktorá spĺňa predpoklady časti b), resp. c). ■

Ak je f spojitá a rastúca, resp. klesajúca na intervale I, potom môže pre nejaké $x \in I$ platiť $f'(x) = 0$. Ale môžu to byť iba jednotlivé body, nie interval $J \subset I$.

Príklad 4.3.16.
a) Funkcia $f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$ je spojitá.

$x \neq -1 \ \Rightarrow\ f'(x) = \left[\frac{x^2}{4+4x}\right]' = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{1+x}\right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} = \frac{x(2+x)}{4(1+x)^2} \ \Rightarrow$

$f'(-2) = f'(0) = 0$, $f'(-1)$ neexistuje, $(1+x)^2 > 0$ pre $x \neq -1$ (obr. 4.3.11) $\ \Rightarrow$

$x \in (-\infty; -2\rangle$ alebo $x \in \langle 0; \infty) \ \Rightarrow\ f'(x) > 0 \ \Rightarrow\ f$ je rastúca na $(-\infty; -2\rangle$ a $\langle 0; \infty)$.
$x \in \langle -2; -1)$ alebo $x \in (-1; 0\rangle \ \Rightarrow\ f'(x) < 0 \ \Rightarrow\ f$ je klesajúca na $\langle -2; -1)$ a $(-1; 0\rangle$.

b) Funkcia $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$ je spojitá.

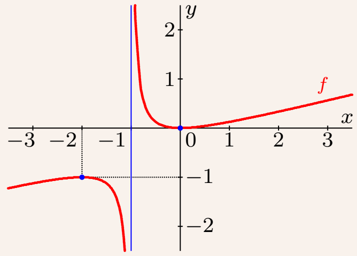
$x \in R \Rightarrow f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2}\right]' = \frac{4(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(-1) = f'(1) = 0 \Rightarrow$

$x \in (-\infty; -1\rangle$ alebo $x \in \langle 1; \infty) \ \Rightarrow\ f'(x) < 0 \ \Rightarrow\ f$ je klesajúca na $(-\infty; -1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.
$x \in (-1; 1) \ \Rightarrow\ f'(x) > 0 \ \Rightarrow\ f$ je rastúca na $(-1; 1)$ (obr. 4.3.12). ■

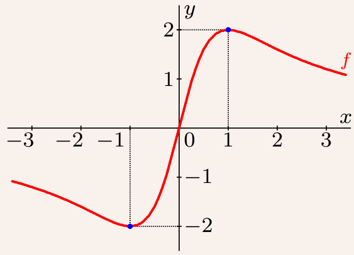
Veta 4.3.9.
$f'(x_0) > 0$ [resp. $f'(x_0) < 0$] (aj nevlastná) $\implies$
f je rastúca [resp. klesajúca] v bode $x_0 \in D(f)$.

Dôkaz.
$f'(x_0) > 0 \ \Rightarrow\ 0 < f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \infty \ \Rightarrow$

existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $0 < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ \Rightarrow$



Obr. 4.3.11: Funkcia $f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$



Obr. 4.3.12: Funkcia $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$

$$f(x) < f(x_0) \text{ pre } x < x_0, \;\; f(x) > f(x_0) \text{ pre } x > x_0 \;\; \Rightarrow \;\; f \text{ je rastúca v bode } x_0.$$

Pre $f'(x_0) < 0$ je dôkaz analogický. ■

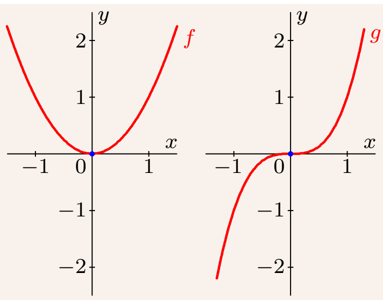
Body, v ktorých má spojitá funkcia f lokálne extrémy, úzko súvisia s intervalmi, na ktorých je táto funkcia monotónna (rýdzo monotónna). Z vety 4.3.1 priamo vyplýva nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie.

Veta 4.3.10 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému).
f má v bode $x_0 \in D(f)$ lokálny extrém, existuje $f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$.

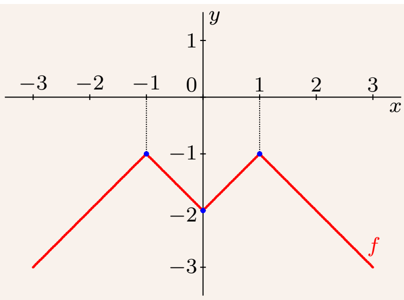
Opačné tvrdenie vo vete 4.3.10 neplatí, t. j. $f'(x_0) = 0$ nezaručuje lokálny extrém. Na druhej strane môže byť lokálny extrém aj bode, v ktorom derivácia neexistuje.

Príklad 4.3.17.
a) Funkcia $f(x) = x^2$ má v bode 0 (ostré) lokálne minimum. Funkcia $g(x) = x^3$ nemá v bode 0 extrém. V oboch prípadoch platí $f'(0) = g'(0) = 0$ (obr. 4.3.13).

b) Funkcia $f(x) = |x| - |x-1| - |x+1|$ má v bode 0 lokálne minimum, aj keď $f'(0)$ neexistuje (obr. 4.3.14). Platí totiž $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. ■



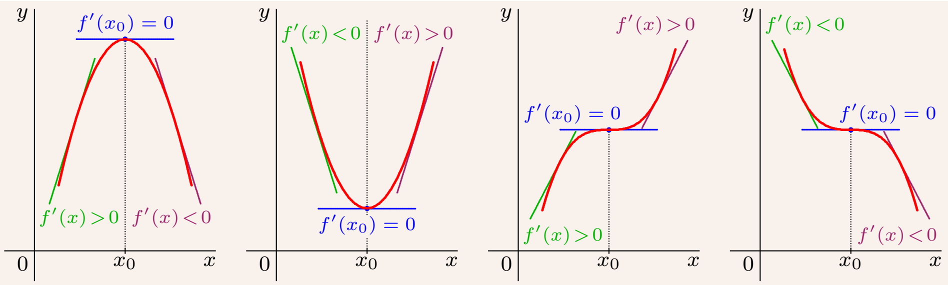
Obr. 4.3.13: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$



Obr. 4.3.14: $f(x) = |x| - |x-1| - |x+1|$

Z vety 4.3.10 vyplýva, že ak chceme nájsť lokálne extrémy funkcie f, musíme určiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(x_0) = 0$. Je zrejmé, že nie vo všetkých týchto bodoch musí mať funkcia f extrém.

Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu a platí $f'(x_0) = 0$, potom sa tento bod nazýva **stacionárnym bodom funkcie** f (obr. 4.3.15).



Obr. 4.3.15: Stacionárny bod x_0 funkcie f

Veta 4.3.11 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému).
$f'(x_0) = 0$, existuje $O(x_0)$ tak, že pre všetky $x \in O(x_0)$:

a) $f'(x) > 0$ pre $x < x_0$, $f'(x) < 0$ pre $x > x_0$ $\Rightarrow$ f má v x_0 ostré lokálne maximum.
b) $f'(x) < 0$ pre $x < x_0$, $f'(x) > 0$ pre $x > x_0$ $\Rightarrow$ f má v x_0 ostré lokálne minimum.
c) $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$ pre $x \neq x_0$ $\Rightarrow$ f nemá v bode x_0 lokálny extrém.

Dôkaz.
a) Z vety 4.3.8 vyplýva, že pre $x < x_0$ je funkcia f rastúca a pre $x > x_0$ je klesajúca, t. j. f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

b) Dôkaz je analogický ako v a). Pre $x < x_0$ je funkcia f klesajúca a pre $x > x_0$ je rastúca.

c) Funkcia f je buď klesajúca alebo rastúca a nemá lokálny extrém. ■

Ak má funkcia f v stacionárnom bode x_0 aj druhú deriváciu $f''(x_0)$, potom môžeme v niektorých prípadoch rozhodnúť o existencii lokálneho extrému pomocou nej.

Veta 4.3.12.
$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná $\Longrightarrow$

$$f \text{ má v bode } x_0 \text{ ostré lokálne } \begin{cases} \text{maximum pre } f''(x_0) < 0, \\ \text{minimum pre } f''(x_0) > 0. \end{cases}$$

Dôkaz.
a) $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \xRightarrow{\text{dôsledok 3.2.7.a}}$

existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \;\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ pre } x < x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ pre } x > x_0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{veta 4.3.11}} f \text{ má v bode } x_0 \text{ ostré lokálne maximum.}$$

b) Dôkaz je analogický ako pre $f''(x_0) < 0$ v časti a). ■

Príklad 4.3.18.
Nájdite lokálne extrémy funkcie f na množine R, ak platí:

a) $f(x) = -x^3 - x^2 + x$, b) $f(x) = \left|x^2 - 1\right| + \left|x^2 + 1\right|$, c) $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

Riešenie.
a) $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x - \frac{1}{3}) \Rightarrow$ dva stacionárne body -1, $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$

$$f''(x) = -6x - 2 \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = 4 > 0, \text{ t. j. v bode } -1 \text{ je lokálne minimum } f(-1) = -1, \\ f''(\frac{1}{3}) = -4 < 0, \text{ t. j. v bode } \frac{1}{3} \text{ je lokálne maximum } f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}. \end{cases}$$

Extrémy môžeme určiť aj pomocou f'. Body -1, $\frac{1}{3}$ sú stacionárne (obr. 4.3.16). $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} x \in (-\infty; -1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je klesajúca} \\ x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ je rastúca} \\ x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je klesajúca} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{v bode } -1 \text{ je lokálne minimum,} \\ \text{v bode } \frac{1}{3} \text{ je lokálne maximum.} \end{cases}$$

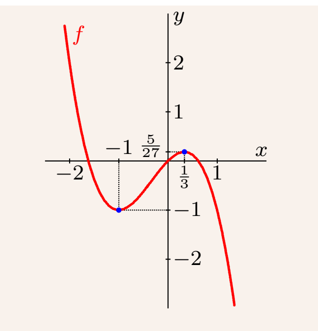
b) $$f(x) = \left|x^2 - 1\right| + x^2 + 1 = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 \Rightarrow f'(x) = 0, & \text{pre } x^2 \le 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x, & \text{pre } x^2 \ge 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x \in (-\infty; -1) \Rightarrow f'(x) = 4x < 0 \Rightarrow f \text{ je klesajúca na } (-\infty; -1) \\ x \in (-1; 1) \Rightarrow f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow f \text{ je konštantná na } (-1; 1) \\ x \in (1; \infty) \Rightarrow f'(x) = 4x > 0 \Rightarrow f \text{ je rastúca na } (1; \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

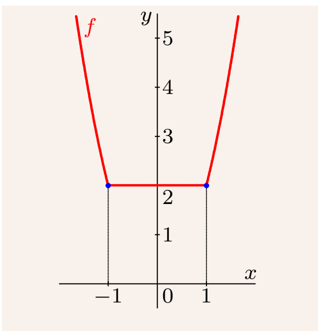
f nadobúda pre všetky $x_0 \in \langle -1; 1\rangle$ neostré lokálne minimum $f(x_0) = 2$ (obr. 4.3.17).

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - \frac{3}{9} = 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} \ge \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$

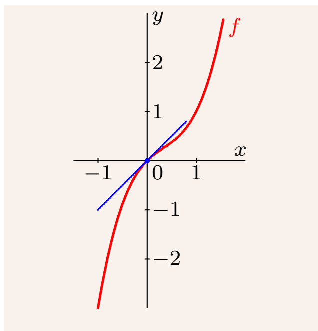
f nemá stacionárne body a ani lokálne extrémy (obr. 4.3.18). ■



Obr. 4.3.16: Graf $f(x) = -x^3 - x^2 + x$



Obr. 4.3.17: Graf $f(x) = \left|x^2 - 1\right| + \left|x^2 + 1\right|$



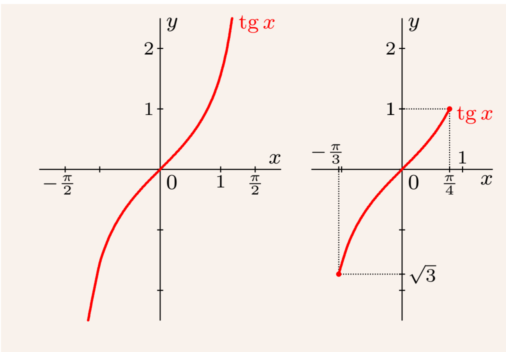
Obr. 4.3.18: Graf $f(x) = x^3 - x^2 + x$

Okrem lokálnych extrémov nás zaujímajú aj **globálne** (**absolútne**) **extrémy funkcie**. Globálne extrémy vo vnútorných bodoch intervalu sú zhodné s lokálnymi. Funkcia môže mať globálne extrémy aj v krajných bodoch intervalu a v bodoch, v ktorých neexistuje derivácia. To znamená, že ich musíme navzájom porovnať.

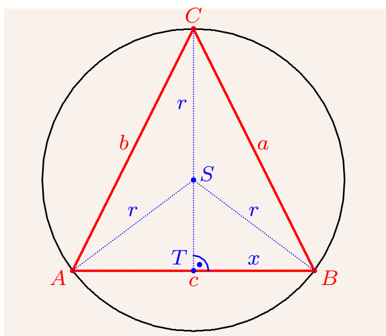
Príklad 4.3.19.
a) Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne ani globálne extrémy.
$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \;\Rightarrow\; f$ nemá stacionárne body (obr. 4.3.19 vľavo).

b) Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ nemá lokálne, ale má globálne extrémy.
$x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \;\Rightarrow\; f$ je rastúca $\Rightarrow$ v bode $-\frac{\pi}{3}$ má globálne minimum rovné $\sqrt{3}$, v bode $\frac{\pi}{4}$ má globálne maximum rovné 1 (obr. 4.3.19 vpravo).

c) Dirichletova funkcia χ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in R$. Takže extrémy nezistíme pomocou jej derivácie. Je zrejmé, že v každom bode $x \in I$ má lokálne a globálne minimum a v každom bode $x \in Q$ má lokálne a globálne maximum. ■



Obr. 4.3.19: Príklad 4.3.19



Obr. 4.3.20: Príklad 4.3.20

Príklad 4.3.20.
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom.

Riešenie.
Označme trojuholník ABC (obr. 4.3.20), stred základne T a stred kružnice S.
Označme $|AT| = |TB| = x$ a označme $P(x)$ obsah trojuholníka ABC. $\Rightarrow$
$c = |AB| = 2x$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$, výška $v_c = |TC| = |CS| + |TS| = r + \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow$
$P(x) = \frac{1}{2} c \cdot v_c = x[r + \sqrt{r^2 - x^2}] = xr + x\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (0; r) \Rightarrow$

$$P'(x) = r + \sqrt{r^2 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0,\ x \in (0; r) \;\Leftrightarrow$$

$$r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; r\sqrt{r^2 - x^2} = 2x^2 - r^2 \;\Leftrightarrow$$

$$r^2(r^2 - x^2) = 4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 \;\Leftrightarrow\; 0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(4x^2 - 3r^2) \;\Rightarrow$$

tri riešenia $x_1 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{r\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0 \;\Rightarrow\;$ vyhovuje iba $x_1 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866r > 0$.

Vypočítať $P''(x_1)$ nie je zložité, ale je dosť prácne, preto použijeme $P'(x)$.
Funkcia $P'(x)$, $x \in (0; r)$ je spojitá a má jeden nulový bod x_1, v ktorom môže meniť znamienko. Na určenie znamienka nám stačia dva ľubovoľné body $z_1 < x_1 < z_2$, napríklad:

$$z_1 = 0{,}6r \Rightarrow P'(z_1) = \frac{r\sqrt{r^2-0{,}36r^2}+r^2-2\cdot 0{,}36r^2}{\sqrt{r^2-0{,}36r^2}} = 1{,}35r > 0 \Rightarrow P' \text{ je rastúca na } (0; x_1).$$

$z_2=\sqrt{0,84}r \Rightarrow P'(z_2)=\frac{r\sqrt{r^2-0,84r^2}+r^2-2\cdot 0,84r^2}{\sqrt{r^2-0,84r^2}}=-0,7r<0 \Rightarrow P'$ je klesajúca na $(x_1;1)$.
Z toho vyplýva, že P má ostré lokálne maximum $P(x_1)=\frac{1}{2}cv_c=\frac{r^2 3\sqrt{3}}{4}$. Potom platí:

$$c=2x_1=2\frac{r\sqrt{3}}{2}=r\sqrt{3}, \quad v_c=r+\sqrt{r^2-x_1^2}=r+\sqrt{r^2-\frac{3r^2}{4}}=r+\sqrt{\frac{r^2}{4}}=\frac{3r}{2} \;\Rightarrow$$

$$a=b=\sqrt{v_c^2+(\tfrac{c}{2})^2}=\sqrt{\frac{9r^2}{4}+\frac{3r^2}{4}}=r\sqrt{3} \;\Rightarrow\; a=b=c \;\Rightarrow$$

Maximálny obsah $\frac{r^2 3\sqrt{3}}{4}$ má rovnostranný trojuholník so stranou $r\sqrt{3}$. ■

4.3.5 Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia konvexná alebo konkávna.

Veta 4.3.13.
f je na intervale I diferencovateľná $\Longrightarrow$ f je na intervale I:

a) konvexná $\Leftrightarrow$ f' je na I neklesajúca. b) rýdzo konvexná $\Leftrightarrow$ f' je na I rastúca.
c) konkávna $\Leftrightarrow$ f' je na I nerastúca. d) rýdzo konkávna $\Leftrightarrow$ f' je na I klesajúca.

Dôkaz.
a) $NP_{\Rightarrow}$: Nech f' nie je na I neklesajúca, t. j. nech pre nejaké $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ platí:

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > \lim_{x\to x_2}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=f'(x_2).$$

Potom existujú prstencové okolia $P(x_1)$, $P(x_2)$, že pre všetky $t_1 \in P(x_1)$, $t_2 \in P(x_2)$ platí:

$$\frac{f(t_1)-f(x_1)}{t_1-x_1} > \frac{f(t_2)-f(x_2)}{t_2-x_2}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{f(x_1)-f(t_1)}{x_1-t_1} > \frac{f(x_2)-f(t_2)}{x_2-t_2}.$$

Zvoľme t_1, t_2 tak, aby $x_1 < t_1 < t_2 < x_2$. Potom na základe lemy 4.3.14 platí:

$$\frac{f(x_1)-f(t_1)}{x_1-t_1} \leq \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2} \leq \frac{f(x_2)-f(t_2)}{x_2-t_2}.$$

Dostali sme spor, ktorý dokazuje, že funkcia f' je neklesajúca.
$PP_{\Leftarrow}$: Z existencie derivácie f' na I vyplýva, že je funkcia f spojitá na intervale I.
Nech $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ sú ľubovoľné. Definujme funkcie φ, ψ takto:

$$\varphi(t) = f(t)-f(x_1)-\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}(t-x_1), \quad t\in\langle x_1;x\rangle,$$

$$\psi(t) = f(t)-f(x)-\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}(t-x), \quad t\in\langle x;x_2\rangle.$$

Funkcia φ je spojitá na intervale $\langle x_1;x\rangle$, $\varphi(x_1)=\varphi(x)=0$ a platí:

$$\varphi'(t)=f'(t)-\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}, \quad t\in(x_1;x).$$

Funkcia ψ je spojitá na intervale $\langle x; x_2\rangle$, $\psi(x) = \psi(x_2) = 0$ a platí:

$$\psi'(t) = f'(t) - \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}, \quad t \in (x; x_2).$$

To znamená, že obe funkcie φ, ψ spĺňajú predpoklady Rolleho vety o strednej hodnote 4.3.2. Potom existujú $c_1 \in (x_1; x)$, $c_2 \in (x; x_2)$, t. j. $c_1 < c_2$ také, že platí:

$$\varphi'(c_1) = f'(c_1) - \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 0, \qquad \psi'(c_2) = f'(c_2) - \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = 0.$$

Keďže je funkcia f' neklesajúca, potom pre body $x_1 < x < x_2$ platí

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(c_1) \le f'(c_2) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Z toho na základe lemy 4.3.14 vyplýva, že je funkcia f konvexná.
Dôkaz častí b), c), d) je analogický ako v prípade a). ■

Lema 4.3.14.
f je na intervale I konvexná [resp. konkávna] $\iff$ pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad \left[\text{resp. } \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \ge \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\right]. \tag{4.6}$$

f je na intervale $I \subset D(f)$ rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna] $\iff$ pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad \left[\text{resp. } \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} > \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\right]. \tag{4.7}$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre konvexnú funkciu, dôkaz pre ostatné funkcie je analogický.
$NP_{\Rightarrow}$: Z definície konvexnosti vyplýva, že pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí:

$$0 \le \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) - f(x) = \\ = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f(x). \tag{4.8}$$

Po vynásobení výrazom $x_2 - x_1 > 0$ a roznásobení dostaneme nerovnosť:

$$0 \le (x - x_1) f(x_2) + (x_2 - x) f(x_1) - (x_2 - x_1) f(x) = \\ = x f(x_2) - x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1) - x f(x_1) - x_2 f(x) + x_1 f(x). \tag{4.9}$$

$PP_{\Leftarrow}$: Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí:

$$0 \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} - \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} - \frac{f(x) - f(x - 1)}{x - x_1}.$$

Po vynásobení výrazmi $x_2 - x > 0$, $x - x_1 > 0$ dostaneme tiež nerovnosť (4.9):

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)] - (x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] = \\ &= xf(x_2) - xf(x) - x_1f(x_2) + x_1f(x) - x_2f(x) + x_2f(x_1) + xf(x) - xf(x_1) = \\ &= xf(x_2) - x_1f(x_2) + x_1f(x) - x_2f(x) + x_2f(x_1) - xf(x_1). \end{aligned}$$

Všetky úpravy, ktoré sme použili v NP$_\Rightarrow$a PP$_\Leftarrow$sú ekvivalentné.
To znamená, že vzťahy (4.8) a (4.6) sú navzájom ekvivalentné a veta je dokázaná. ■

Ak má funkcia f na intervale I druhú deriváciu f'', potom môžeme jej konvexnosť a konkávnosť vyšetrovať pomocou monotónnosti funkcie f' na základe vety 4.3.8.

Veta 4.3.15.
f má na intervale I druhú deriváciu f'' $\implies$ f je na intervale I:

a) rýdzo konvexná $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$ a neexistuje interval $J \subset I$, aby $\forall x \in J : f''(x) = 0$.
b) konvexná $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I :\ f''(x) \geq 0$.
c) rýdzo konkávna $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I : f''(x) \leq 0$ a neexistuje interval $J \subset I$, aby $\forall x \in J : f''(x) = 0$.
d) konkávna $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I :\ f''(x) \leq 0$.

Interval J v častiach a), c) musí byť nedegenerovaný, t. j. musí mať rôzne koncové body.

Dôkaz.
Veta je priamym dôsledkom viet 4.3.8 a 4.3.13. ■

Dôsledok 4.3.15.a.
$f''(x) > 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$ $\implies$
f je na intervale I rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna].

Z vety 4.3.15 vyplýva praktický návod ako postupovať pri určovaní konvexnosti a konkávnosti funkcie f v prípade, že existuje f''. Vyriešime rovnicu $f''(x) = 0$ a nájdeme intervaly, na ktorých je funkcia f'' nezáporná a nekladná, resp. kladná a záporná.

Príklad 4.3.21.
Nájdite intervaly, na ktorých je konvexná a konkávna funkcia f, ak:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, b) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, c) $f(x) = \max\left\{x, x^2\right\}$.

Riešenie.
a) $x \in R \ \Rightarrow\ f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \ \Rightarrow\ f''(x) = 6x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{3}$.
Funkcia f'' je spojitá na R a má jeden nulový bod $x = \frac{1}{3}$ (obr. 4.3.21 vľavo).
$x < \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ f''(x) < 0 \ \Rightarrow\ f$ je rýdzo konkávna na $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle$.
$x > \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ f''(x) > 0 \ \Rightarrow\ f$ je rýdzo konvexná na $\left\langle\frac{1}{3}; \infty\right)$.

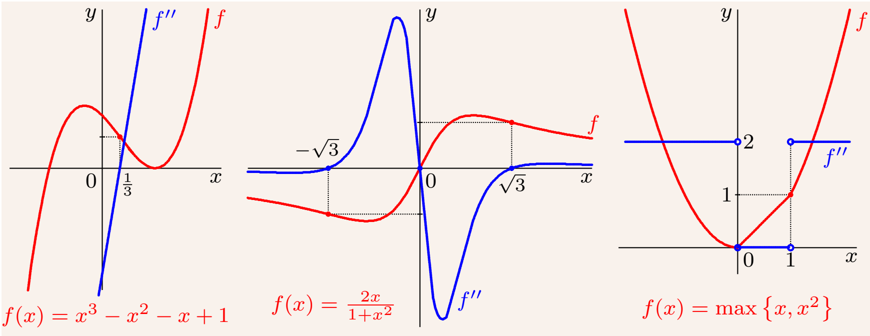
b) $x \in R \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \ \Rightarrow\ f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$.
$x < -\sqrt{3}$ alebo $x \in \left(0; \sqrt{3}\right) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je rýdzo konkávna na $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right\rangle$ a $\left\langle 0; \sqrt{3}\right\rangle$.
$x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right)$ alebo $x > \sqrt{3} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je rýdzo konvexná na $\left\langle -\sqrt{3}; 0\right\rangle$ a $\left\langle \sqrt{3}; \infty\right)$.

c) Funkcia f je spojitá na celej množine R (obr. 4.3.21 vpravo) a platí:

$$\left.\begin{array}{l} x\in(0;1) \ \Rightarrow\ f(x)=x \ \Rightarrow\ f'(x)=1 \ \Rightarrow\ f''(x)=0 \\ x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty) \ \Rightarrow\ f(x)=x^2 \ \Rightarrow\ f'(x)=2x \ \Rightarrow\ f''(x)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

neexistujú[10] $f''(0)$, $f''(1)$ a pre všetky $x\in R-\{0,1\}$ platí $f''(x)>0$.

Aj keď neexistujú $f''(0)$, $f''(1)$, je funkcia f konvexná (nie rýdzo) na celej množine R. Rýdzo konvexná je na intervaloch $(-\infty;0\rangle$ a $\langle 1;\infty)$. ■



Obr. 4.3.21: Grafy funkcií z príkladu 4.3.21

Z uvedeného a z definície inflexie vyplýva nasledujúca veta.

Veta 4.3.16.
f' existuje v okolí $O(x_0)$, potom: f má v bode $x_0\in D(f)$ inflexiu $\iff$
f' je rastúca [resp. klesajúca] pre $x<x_0$ a klesajúca [resp. rastúca] pre $x>x_0$.

Dôsledok 4.3.16.a.
f má v bode x_0 inflexiu, existuje $f''(x_0) \implies f''(x_0)=0$.

Veta 4.3.17.
$f'(x_0)$ je konečná, $f''(x)\neq 0$ existuje v $O(x_0)$, $x\neq x_0$:

a) $f''(x)>0$ pre $x<x_0$, $f''(x)<0$ pre $x>x_0 \implies f$ má v bode x_0 inflexiu.
b) $f''(x)<0$ pre $x<x_0$, $f''(x)>0$ pre $x>x_0 \implies f$ má v bode x_0 inflexiu.
c) $f''(x)>0$ [resp. $f''(x)<0$] pre $x\in O(x_0)$, $x\neq x_0 \implies f$ nemá v bode x_0 inflexiu.

Inflexné body budeme hľadať ako korene rovnice $f''(x)=0$. Avšak nie každý takýto bod musí byť inflexný (príklad 4.3.22). Na druhej strane môže mať f inflexiu aj v bode, v ktorom f'' neexistuje. To znamená, že musíme brať do úvahy aj tieto body.

Príklad 4.3.22.
Nájdite inflexné body funkcie $f_n(x)=x^n$, $x\in R$, $n\in N$.

Riešenie.
$n=1 \Rightarrow f_1(x)=x$, $f_1'(x)=1$, $f_1''(x)=0$, $x\in R$, f_1 nemá inflexné body.

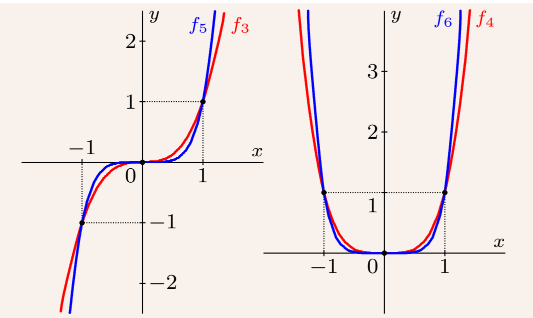
[10]Existujú iba jednostranné derivácie $f''_-(0)=2$, $f''_+(0)=0$, $f''_-(1)=0$, $f''_+(1)=2$.

$n=2 \Rightarrow f_2(x)=x^2,\ f_2'(x)=2x,\ f_2''(x)=2>0,\ x\in R \xRightarrow{\text{veta 4.3.15}} f_2$ je rýdzo konvexná na R.

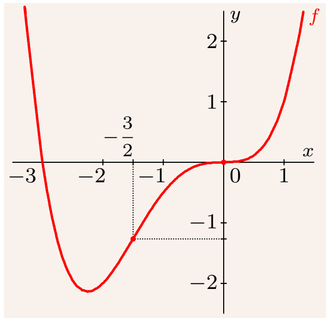
$n=3 \Rightarrow f_3(x)=x^3,\ f_3'(x)=3x^2,\ f_3''(x)=3x,\ x\in R \xRightarrow{\text{veta 4.3.17}}$ bod $x_0=0$ je inflexný
$(f_3''(x)<0$ pre $x<0,\ f_3''(x)>0$ pre $x>0)$.

$n=2k+1,\ k\in N \Rightarrow f_n'(x)=(2k+1)x^{2k},\ f_n''(x)=(2k+1)2kx^{2k-1},\ x\in R \Rightarrow$
$f_n''(x)<0$ pre $x<0,\ f_n''(x)>0$ pre $x>0 \xRightarrow{\text{veta 4.3.17}}$ bod $x_0=0$ je inflexný.

$n=2k,\ k\in N \Rightarrow f_n'(x)=2kx^{2k-1},\ f_n''(x)=2k(2k-1)x^{2k-2}>0,\ x\in R \xRightarrow{\text{veta 4.3.15}}$
f_2 je rýdzo konvexná na R (obr. 4.3.22). ■



Obr. 4.3.22: Grafy funkcií f_3, f_5 a f_4, f_6 z príkladu 4.3.22



Obr. 4.3.23: Graf funkcie f z príkladu 4.3.23

Príklad 4.3.23.
Vyšetrite konvexnosť a konkávnosť funkcie $f(x)=\frac{3x^3+x^4}{4}$, $x\in R$.

Riešenie.
$x\in R \Rightarrow f'(x)=\frac{9x^2+4x^3}{4}$, $f''(x)=\frac{18x+12x^2}{4}=\frac{3x(3+2x)}{2}=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{3}{2}$.
$f''(x)$, $x\in R$ spojitá $\Rightarrow$ znamienko funkcie f'' sa mení iba v nulových bodoch $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -2\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f''(-2)=3>0 \Rightarrow f \text{ je konvexná na } \left(-\infty;-\frac{3}{2}\right) \\ -1\,(-3/2;0) \Rightarrow f''(-1)=-\frac{3}{2}<0 \Rightarrow f \text{ je konkávna na } (-3/2;0) \\ 2\in(0;\infty) \Rightarrow f''(2)=21>0 \Rightarrow f \text{ je konvexná na } (0;\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

f má dva inflexné body $x_1=0,\ x_2=-\frac{3}{2}$ (obr. 4.3.23). ■

Ak existuje tretia derivácia $f'''(x_0)$, potom môžeme pomocou nej rozhodnúť, či x_0 je alebo nie inflexným bodom danej funkcie f. Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 4.3.18.
$f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\neq 0 \implies x_0$ je inflexným bodom funkcie f.

Dôkaz.
Dokážeme pre $f'''(x_0)>0$. Pre $f'''(x_0)<0$ je dôkaz analogický.

$f'''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f'''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{x-x_0} > 0 \xRightarrow{\text{dôsledok 3.2.7.a}}$

existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x\in O(x_0)$, $x\neq x_0$ platí $\frac{f''(x)}{x-x_0} > 0 \;\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ pre } x < x_0 \\ f''(x) > 0 \text{ pre } x > x_0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{veta 4.3.17}} x_0 \text{ je inflexný bod funkcie } f. \blacksquare$$

Príklad 4.3.24.

a) $f(x) = \sin x$, $x\in R$ je spojitá (obr. 4.3.24).

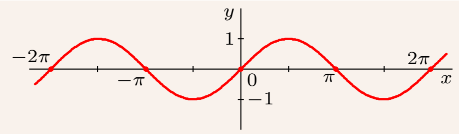
$x\in R \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos x \;\Rightarrow\; f''(x) = -\sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k\pi,\ k\in Z.$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(k\pi) = -\cos k\pi = -(-1)^k \neq 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k\in Z \text{ sú inflexné body.}$$

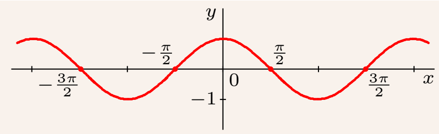
b) $f(x) = \cos x$, $x\in R$ je spojitá (obr. 4.3.25).

$x\in R \;\Rightarrow\; f'(x) = -\sin x \;\Rightarrow\; f''(x) = -\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$

$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k \neq 0 \Rightarrow x = \tfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \text{ sú inflexné body. } \blacksquare$$



Obr. 4.3.24: Funkcia $f(x) = \sin x$



Obr. 4.3.25: Funkcia $f(x) = \cos x$

Funkcia $f_5(x) = x^5$ v bode 0 má inflexiu, ale $f_4(x) = x^4$ v bode 0 inflexiu nemá (má tam extrém). Predchádzajúce vety použiť nemôžeme, pretože $f_4'(0) = f_4''(0) = f_4'''(0) = 0$, $f_5'(0) = f_5''(0) = f_5'''(0) = f_5''''(0) = 0$ (príklad 4.3.22). Tieto funkcie môžeme vyšetriť pomocou nasledujúcich funkcií, ktoré prezentujeme bez dôkazov.

Veta 4.3.19.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n\in N$:

a) $n = 2k-1$, $k\in N$ (nepárne) $\Longrightarrow$ f nemá v bode x_0 lokálny extrém:
   i) $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ je rastúca v x_0, ii) $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ je klesajúca v x_0.

b) $n = 2k$, $k\in N$ (párne) $\Longrightarrow$ f má v bode x_0 ostrý lokálny extrém $f(x_0)$:
   i) $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je minimum, ii) $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je maximum.

Veta 4.3.20.

$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n\in N$, $n \geq 2$:

a) $n = 2k+1$, $k\in N$ (nepárne) $\Longrightarrow$ f má v bode x_0 inflexiu.

b) $n = 2k$, $k\in N$ (párne): i) $f^{(n)}(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ je v bode x_0 rýdzo konvexná.
   ii) $f^{(n)}(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ je v bode x_0 rýdzo konkávna.

Na rozdiel od vety 4.3.19 nás vo vete 4.3.20 nezaujíma hodnota $f'(x_0)$.

Príklad 4.3.25.
Uvažujme funkciu $f_n(x) = x^n$, $x \in R$, $n \in N$ (príklad 4.3.9, obr. 4.3.22).

$$f_n'(x) = nx^{n-1}, \quad f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \ldots, \quad f_n^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 2x,$$
$$f_n^{(n)}(x) = n! \ \Rightarrow \ f_n'(0) = f_n''(0) = \cdots = f_n^{(n-1)}(0) = 0, \quad f_n^{(n)}(0) = n! > 0 \ \Rightarrow$$

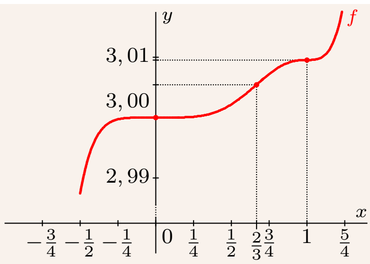
$n = 2k$, $k \in N \Rightarrow f_n$ je v bode 0 rýdzo konvexná, f_n má v bode 0 ostré lokálne minimum.

$n = 2k+1$, $k \in N \Rightarrow f_n$ je v bode 0 rastúca, f_n má v bode 0 inflexiu. ■

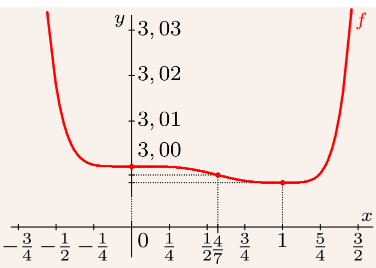
Príklad 4.3.26.
Nájdite extrémy a inflexné body funkcie $f(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^5}{5} + 3$.

Riešenie.
$x \in R \ \Rightarrow \ f'(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 = x^4(x-1)^2 \Leftrightarrow x_1 = 0$ alebo $x_2 = 1 \ \Rightarrow$
$f''(x) = 6x^5 - 10x^4 + 4x^3 = 2x^3(x-1)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$ alebo $x_3 = \frac{2}{3}$.
$f'''(x) = 30x^4 - 40x^3 + 12x^2 \ \Rightarrow \ f'''(0) = 0$, $f'''(1) = 2 > 0$, $f'''(\frac{2}{3}) = -\frac{16}{27} < 0 \ \Rightarrow$
f je v bode x_2 rastúca, x_2 je inflexný bod funkcie f.
x_3 je inflexný bod funkcie f, $f'(\frac{2}{3}) = \frac{16}{729} > 0 \xRightarrow{\text{veta 4.3.10}} f$ je v bode x_3 rastúca.

$f^{(4)}(x) = 120x^3 - 120x^2 + 24x \ \Rightarrow \ f^{(4)}(0) = 0$.
$f^{(5)}(x) = 360x^2 - 240x + 24 \ \Rightarrow \ f^{(5)}(0) = 24 > 0 \ \Rightarrow$
f je v bode x_1 rastúca, x_1 je inflexný bod funkcie f.
Funkcia f nemá žiadne extrémy a má tri inflexné body 0, 1, $\frac{2}{3}$ (obr. 4.3.26). ■



Obr. 4.3.26: Funkcia z príkladu 4.3.26 (os y je 40-krát zväčšená)



Obr. 4.3.27: Funkcia z príkladu 4.3.27 (os y je 30-krát zväčšená)

Príklad 4.3.27.
Nájdite extrémy a inflexné body funkcie $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{3x^7}{7} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^5}{5} + 3$.

Riešenie.
$x \in R \ \Rightarrow \ f'(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 = x^4(x-1)^3 \Leftrightarrow x_1 = 0$ alebo $x_2 = 1 \ \Rightarrow$
$f''(x) = 7x^6 - 18x^5 + 15x^4 - 4x^3 = x^3(x-1)^2(7x-4) \Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$ alebo $x_3 = \frac{4}{7}$.

$f'''(x) = 42x^5 - 90x^4 + 60x^3 - 12x^2 \;\Rightarrow\; f'''(0) = 0,\ f'''(1) = 0,\ f'''(\frac{4}{7}) = \frac{576}{2401} > 0 \;\Rightarrow$
x_3 je inflexný bod funkcie f, $f'(\frac{4}{7}) = -\frac{6912}{823543} < 0 \Rightarrow f$ je v bode x_3 klesajúca.

$f^{(4)}(x) = 210x^4 - 360x^3 + 180x^2 - 24x \;\Rightarrow\; f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(4)}(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow$
f je v bode x_2 rýdzo konvexná, f má v bode x_2 lokálne minimum.

$f^{(5)}(x) = 840x^3 - 1080x^2 + 360x - 24 \;\Rightarrow\; f^{(5)}(0) = -24 < 0 \;\Rightarrow$
x_3 je inflexný bod funkcie f, f je v bode x_1 klesajúca (obr. 4.3.27). ■

4.3.6 Vyšetrenie priebehu funkcie

V tejto časti uvedieme návod ako postupovať pri vyšetrovaní jednotlivých vlastností funkcie. Zhrnieme ho do nasledujúcich bodov:

- Určíme definičný obor funkcie (pokiaľ nie je zadaný).
- Určíme, či je funkcia párna, nepárna alebo periodická.
- Určíme nulové body funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- Určíme body spojitosti a nespojitosti funkcie. V bodoch nespojitosti a v hraničných bodoch definičného oboru (vrátane $\pm\infty$) určíme jednostranné limity danej funkcie.
- Určíme stacionárne body funkcie, určíme lokálne a globálne extrémy a intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca, resp. konštantná.
- Určíme inflexné body funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
- Určíme asymptoty grafu funkcie a načrtneme graf funkcie.

Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne graf. Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje. Mnohokrát sú ale nedostatočné, preto ich musíme vhodne doplniť. Sú to napríklad nulové body prvej a druhej derivácie funkcie, prípadne iba vhodne zvolené funkčné hodnoty.

Príklad 4.3.28.
Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{8x-16}{x^2}$.

Riešenie.
$D(f) = R - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.
f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna.

f je spojitá na $D(f)$, $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x \in (-\infty; 0) & \Rightarrow f(x) < 0, \\ x \in (0; 2) & \Rightarrow f(x) < 0, \\ x \in (2; \infty) & \Rightarrow f(x) > 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \;\Rightarrow$
$x_2 = 0$ je neodstániteľný bod nespojitosti 2. druhu, $x = 0$ je asymptota bez smernice.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right] = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0.$

$x \in R,\ x \neq 0 \;\Rightarrow\; f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2 - (8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x - 8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x_3 = 4.$

f' je spojitá na $R - \{0\} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 & \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je klesajúca na } (-\infty; 0), \\ 0 < x < 4 & \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ je rastúca na } (0; 4\rangle, \\ 4 < x & \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je klesajúca na } \langle 4; \infty). \end{cases}$
$\Rightarrow\; f$ má v bode $x_3 = 4$ lokálne maximum $f(4) = 1$.

$x\in R,\ x\neq 0\ \Rightarrow\ f''(x)=\left[\frac{32-8x}{x^3}\right]'=\frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6}=\frac{16x^3-96x^2}{x^6}=\frac{16x-96}{x^4}=0\Leftrightarrow x_4=6.$

$$f'' \text{ je spojitá na } R-\{0\}\Rightarrow\begin{cases} x<0 \Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f \text{ je konkávna na } (-\infty;0),\\ 0<x<6\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f \text{ je konkávna na } (0;6\rangle,\\ 6<x\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f \text{ je konvexná na } \langle 6;\infty).\end{cases}$$

$\Rightarrow\ x_4=6$ je inflexný bod funkcie f.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x-16}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{8}{x^2}-\frac{16}{x^3}\right]=0-0=0\ \Rightarrow$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-0\cdot x]=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0\ \Rightarrow\ y=kx+q=0.$$

$\Rightarrow\ y=0$ je asymptota so smernicou (obr. 4.3.28, tab. 4.3.4). ■

$(-\infty;0)$	$(0;2)$	$(2;4)$	$(4;6)$	$(6;\infty)$
0 . . . bod nespojitosti	2 . . . nulový bod			
$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$+$ kladná $+$ $f(x)>0$		
		4 . . . lokálne maximum		
$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$	$\nearrow$ rastie $\nearrow$ $f'(x)>0$		$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$	
			6 . . . inflexný bod	
$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x)<0$	$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x)<0$			$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x)>0$

Tabuľka 4.3.4: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x)=\frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.28

Príklad 4.3.29.
Vyšetrite priebeh funkcie: a) $f(x)=\frac{|x-1|}{x+2}$, b) $f(x)=\frac{|x-1|}{x-2}$.

Riešenie.
a) $D(f)=x\in R-\{-2\}=(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$.

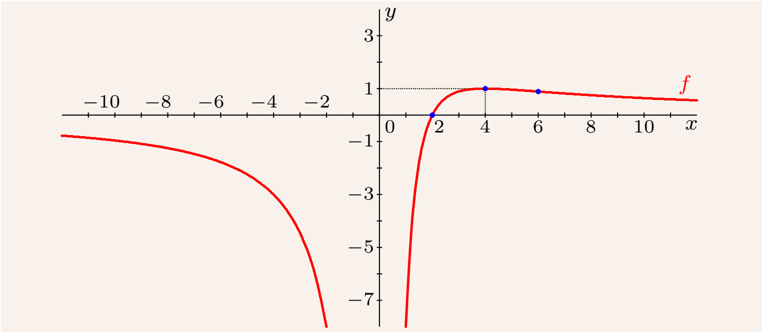
$$f(x)=\frac{|x-1|}{x+2}=\begin{cases}\frac{1-x}{x+2}=\frac{3-x-2}{x+2}=\frac{3}{x+2}-1, & x\leq 1,\ x\neq -2,\\ \frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2-3}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}, & x\geq 1.\end{cases}$$

f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna.

f je spojitá na $D(f)$, $f(x)=\frac{|x-1|}{x+2}=0\Leftrightarrow x_2=1\ \Rightarrow\ \begin{cases} x\in(-\infty;-2)\Rightarrow f(x)<0,\\ x\in(-2;1)\Rightarrow f(x)>0,\\ x\in(1;\infty)\Rightarrow f(x)>0.\end{cases}$

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{|x-1|}{x+2}=\frac{3}{0^-}=-\infty,\ \lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{|x-1|}{x+2}=\frac{3}{0^+}=\infty\ \Rightarrow$$

$x_1=-2$ je neodstániteľný bod nespojitosti 2. druhu, $x=-2$ je asymptota bez smernice.



Obr. 4.3.28: Graf funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.28

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\tfrac{3}{x+2} - 1\right] = -1,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left[1 - \tfrac{3}{x+2}\right] = 1.$$

$$x\in R-\{-2,1\} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} [\frac{3}{x+2} - 1]' = -3(x+2)^{-2} = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0,\ x<1,\ x\neq-2, \\ \qquad \Rightarrow f \text{ je klesajúca na intervaloch } (-\infty;-2),\ (-2;1\rangle, \\ [1 - \frac{3}{x+2}]' = 3(x+2)^{-2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0, \quad x>1, \\ \qquad \Rightarrow f \text{ je rastúca na intervale } \langle 1;\infty). \end{cases}$$

$\Rightarrow\ f'_-(1) = -\frac{1}{3}$, $f'_+(1) = \frac{1}{3}$, f' je spojitá na $R-\{-2,1\}$, f' nemá nulové body, f má v bode $x_2 = 1$ lokálne minimum $f(1) = 0$.

$$x\in R-\{-2,1\} \ \Rightarrow\ f''(x) = \begin{cases} [-3(x+2)^{-2}]' = 6(x+2)^{-3} = \frac{6}{(x+2)^3},\ x<1,\ x\neq-2, \\ [3(x+2)^{-2}]' = -6(x+2)^{-3} = \frac{-6}{(x+2)^3},\ x>1. \end{cases}$$

$f''_-(1) = \frac{2}{9}$, $f''_+(1) = -\frac{2}{9}$, f'' je spojitá na $R-\{-2,1\}$, f'' nemá nulové body $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} x < -2 \ \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je konkávna na } (-\infty;-2) \\ -2 < x < 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ je konvexná na } (-2;1\rangle \\ 1 < x \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je konkávna na } \langle 1;\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x_3 = 1$ je inflexný bod funkcie f.

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \pm1\cdot 0 = 0 \ \Rightarrow$$

$$q_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - k_{1,2}x] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm1 \Rightarrow y = kx+q = \pm1.$$

$\Rightarrow\ y = 1$, $y = -1$ sú asymptoty so smernicou (obr. 4.3.29, tab. 4.3.5).

b) $D(f) = x\in R-\{2\} = (-\infty;2)\cup(2;\infty)$.

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-2} = \begin{cases} \frac{1-x}{x-2} = \frac{2-x-1}{x-2} = \frac{-1}{x-2} - 1, & x\leq 1, \\ \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}, & x\geq 1,\ x\neq 2. \end{cases}$$

f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna.

f je spojitá na $D(f)$, $f(x) = \frac{|x-1|}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1 \ \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;1) \Rightarrow f(x) < 0, \\ x\in(1;2) \Rightarrow f(x) < 0, \\ x\in(2;\infty) \Rightarrow f(x) > 0. \end{cases}$

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
$-2 \dots$ bod nespojitosti		$1 \dots$ nulový bod
$-$ záporná $-$ $f(x) < 0$	$+$ kladná $+$ $f(x) > 0$	$-$ záporná $-$ $f(x) < 0$
	$1 \dots$ lokálne minimum	
$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x) < 0$	$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x) < 0$	$\nearrow$ rastie $\nearrow$ $f'(x) > 0$
	$1 \dots$ inflexný bod	
$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$	$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x) > 0$	$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$

Tabuľka 4.3.5: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ z príkladu 4.3.29 a)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-1|}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-1|}{x-2} = \frac{1}{0^+} = \infty \ \Rightarrow$$

$x_1 = 2$ je neodstániteľný bod nespojitosti 2. druhu, $x = 2$ je asymptota bez smernice.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{-1}{x-2} - 1\right] = -1, \ \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \left[1 + \frac{1}{x-2}\right] = 1.$$

$$x \in R - \{1, 2\} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} [\frac{-1}{x-2} - 1]' = (x-2)^{-2} = \frac{1}{(x-2)^2} > 0, \quad x < 1, \\ \qquad \Rightarrow f \text{ je rastúca na intervaloch } (-\infty; 1\rangle\,, \\ [1 + \frac{1}{x-2}]' = -(x-2)^{-2} = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0, \quad x > 1,\ x \neq 2, \\ \qquad \Rightarrow f \text{ je klesajúca na intervaloch } \langle 1; 2)\,, (2; \infty)\,. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = -1$, f' je spojitá na $R - \{1, 2\}$, f' nemá nulové body, f má v bode $x_2 = 1$ lokálne maximum $f(1) = 0$.

$$x \in R - \{1, 2\} \ \Rightarrow \ f''(x) = \begin{cases} [(x-2)^{-2}]' = -2(x-2)^{-3} = \frac{-2}{(x-2)^3}, \ x < 1, \\ [-(x-2)^{-2}]' = 2(x-2)^{-3} = \frac{2}{(x-2)^3}, \ x > 1, \ x \neq 2. \end{cases}$$

$f''_-(1) = 2$, $f''_+(1) = -2$, f'' je spojitá na $R - \{1, 2\}$, f'' nemá nulové body $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x < 1 \quad\ \ \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ je konvexná na } (-\infty; 1\rangle \\ 1 < x < 2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je konkávna na } \langle 1; 2) \\ \quad 2 < x \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ je konvexná na } (2; \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $x_3 = 1$ je inflexný bod funkcie f.

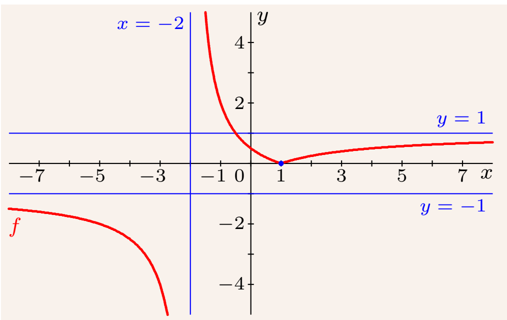
$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \pm 1 \cdot 0 = 0 \ \Rightarrow$$

$$q_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - k_{1,2}x] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1 \Rightarrow y = kx + q = \pm 1.$$

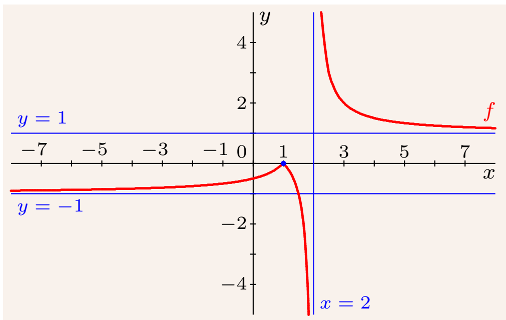
$\Rightarrow$ $y = 1$, $y = -1$ sú asymptoty so smernicou (obr. 4.3.30, tab. 4.3.6). ■

$(-\infty;1)$	$(1;2)$	$(2;\infty)$
1 … nulový bod	2 … bod nespojitosti	
$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$+$ kladná $+$ $f(x)>0$
	1 … lokálne maximum	
$\nearrow$ rastie $\nearrow$ $f'(x)>0$	$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$	$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$
1 … inflexný bod		
$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x)>0$	$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x)<0$	$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x)>0$

Tabuľka 4.3.6: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x)=\frac{|x-1|}{x-2}$ z príkladu 4.3.29 b)



Obr. 4.3.29: Príklad 4.3.29 a)



Obr. 4.3.30: Príklad 4.3.29 b)

4.3.7 Derivácia funkcie zadanej parametricky a implicitne

Najprv sa budeme zaoberať funkciou $y=f(x)$, $x\in\varphi(J)$ zadanou parametricky vzťahmi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$, kde $J\subset R$ je interval.

Veta 4.3.21.
$f\colon\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in J$, $\psi'(t)$ existuje na J, $\varphi'(t)\neq 0$ je spojitá na J $\implies$

$$\text{existuje } f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))},\ x\in\varphi(J),\ t=\varphi^{-1}(x).$$

Navyše ak je ψ' spojitá na J, potom je f' spojitá na $\varphi(J)$.

Dôkaz.
φ' existuje na J $\Rightarrow$ φ je spojitá na J, $\varphi(J)$ je interval.
φ' je spojitá a nenulová na J $\Rightarrow$ $\varphi'(t)>0$ alebo $\varphi'(t)<0$ na J $\Rightarrow$
φ je rastúca alebo klesajúca na J $\Rightarrow$ existuje inverzná $t=\varphi^{-1}(x)\colon\ \varphi(J)\to J$ $\Rightarrow$

φ^{-1} je spojitá a rýdzo monotónna na $\varphi(J)$ $\Rightarrow$ $f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, $x \in \varphi(J)$ $\Rightarrow$

$$f'(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left[\varphi^{-1}(x)\right]' = \frac{\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ t = \varphi^{-1}(x).$$

Ak je ψ' spojitá na J, potom $f' = \frac{\psi'}{\varphi'}$ je spojitá na $\varphi(J)$. ■

Teoreticky vieme deriváciu každej parametricky zadanej funkcie f vyjadriť v explicitnom tvare $f'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$, $x \in \varphi(J)$, prakticky to často býva problém.

Ak použijeme zápis pomocou diferenciálov, potom platí:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Derivácia f' má parametrický tvar $f'\colon\ x = \varphi(t),\ y = \chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ t \in J$.
Ak existujú φ'', ψ'' na J , potom na základe vety 4.3.21 platí:

$$f''(x) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t = \varphi^{-1}(x) \ \Rightarrow$$

$$f''\colon\ x = \varphi(t),\ \ y = \tau(t) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Príklad 4.3.30.
Určte f', f'', f''', ak $f\colon\ x = \sqrt{t^3}$, $y = t^2$, $t \in (0;\infty)$.

Riešenie.
$t \in (0;\infty)$ $\Rightarrow$ $\varphi'(t) = \left[t^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{t}}{2} > 0$, $\psi'(t) = 2t > 0$.

φ' je na $(0;\infty)$ spojitá $\xrightarrow{\text{veta 4.3.21}}$ $f'\colon\ x = \sqrt{t^3},\ y = \chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{2t}{\frac{3}{2}\sqrt{t}} = \frac{4\sqrt{t}}{3},\ t \in (0;\infty)$.

$t \in (0;\infty)$ $\Rightarrow$ $\chi'(t) = \left[\frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{t}}$ $\Rightarrow$

$$f''\colon\ x = \sqrt{t^3},\ y = \tau(t) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{2}{3\sqrt{t}}}{\frac{3\sqrt{t}}{2}} = \frac{4}{9t},\ t \in (0;\infty).$$

$t \in (0;\infty)$ $\Rightarrow$ $\tau'(t) = \left[\frac{4}{9}t^{-1}\right]' = -\frac{4}{9}t^{-2} = -\frac{4}{9t^2}$ $\Rightarrow$

$$f'''\colon\ x = \sqrt{t^3},\ y = \frac{\tau'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{-\frac{4}{9t^2}}{\frac{3\sqrt{t}}{2}} = -\frac{8}{27t^2\sqrt{t}} = -\frac{8}{27\sqrt{t^5}},\ t \in (0;\infty).\ ■$$

Z nutnej podmienky existencie lokálneho extrému vyplýva, že ak má $f\colon\ x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ lokálny extrém v bode $t_0 \in J$ a existuje $f'(x_0)$, potom pre $x_0 = \varphi(t_0)$ platí:

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = 0 \ \Rightarrow\ \psi'(t_0) = 0,\ \ \varphi'(t_0) \neq 0.$$

Z vety 4.3.12 vyplýva, že f má v x_0 lokálny extrém, ak $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, t. j. ak:

$$\psi'(t_0) = 0,\ \ \varphi'(t_0) \neq 0,\ \ f''(x_0) = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3} = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3} = \frac{\psi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^2} \neq 0.$$

Z nerovnosti $[\varphi'(t_0)]^2 > 0$ potom vyplýva, že funkcia $f\colon\ x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ má v bode $t_0 \in J$ **lokálne maximum** [resp. **lokálne minimum**], ak platí:

$$\psi'(t_0) = 0,\ \ \varphi'(t_0) \neq 0,\ \ \psi''(t_0) < 0 \quad [\text{resp.}\ \ \psi''(t_0) > 0]\,.$$

Príklad 4.3.31.
Nech $a > 0$, $b > 0$, I je interval.
Nájdite extrémy funkcie zadanej parametricky $f\colon\ x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t\in I$.

Riešenie.
Ak je dĺžka intervalu I väčšia ako 2π, potom f predstavuje elipsu (obr 4.3.31), t. j. uzavretú krivku, ktorá nie je funkciou.
$f\colon\ x = \varphi(t) = a\cos t,\ y = \psi(t) = b\sin t,\ t\in\langle 0; 2\pi\rangle \ \Rightarrow$
$\psi'(t) = [b\sin t]' = b\cos t = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{2},\ t_2 = \frac{3\pi}{2}.$
$\varphi'(t) = [a\cos t]' = -a\sin t,\ \psi''(t) = [b\cos t]' = -b\sin t \ \Rightarrow$
$\varphi'(t_1) = -a\sin\frac{\pi}{2} = -a\neq 0,\ \psi''(t_1) = -b\sin\frac{\pi}{2} = -b < 0 \Rightarrow$ lokálne maximum v $t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
f má lokálne maximum $\psi(t_1) = y_1 = b$ v bode $\varphi(t_1) = x_1 = 0$.
$\varphi'(t_2) = -a\sin\frac{3\pi}{2} = a\neq 0,\ \psi''(t_2) = -b\sin\frac{3\pi}{2} = b > 0 \Rightarrow$ lokálne minimum v $t_2 = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow$
f má lokálne minimum $\psi(t_2) = y_2 = -b$ v bode $\varphi(t_2) = x_2 = 0$.
Krivku f môžeme rozdeliť na dve funkcie $f_1\colon\ t\in\langle 0; \pi\rangle$, $f_2\colon\ t\in\langle \pi; 2\pi\rangle$, pre $t_0 = 0$ platí $\varphi(t_0) = x_0 = a$, $\psi(t_0) = y_0 = 0$, pre $t_3 = \pi$ platí $\varphi(t_3) = x_3 = -a$, $\psi(t_3) = y_3 = 0$.
Funkcia f_1 má globálne maximum $f_1(0) = b$ a dve globálne minimá $f_1(\pm a) = 0$. Funkcia f_2 má globálne mimimum $f_2(0) = -b$ a dve globálne maximá $f_2(\pm a) = 0$. ■

Uvedieme vzťah pre výpočet $f'(x)$ funkcie $y = f(x)$ implicitne definovanej rovnicou $F(x, y) = 0$. Tento vzťah vyplýva z vlastností funkcií s dvomi premennými a preto ho uvádzame bez dôkazu.[11]

Ak považujeme y za konštantu, potom sa F redukuje na funkciu premennej x, ktorú označíme $F_x(x, y)$. Analogicky označíme funkciu $F_y(x, y)$ premennej y pre x konštantné.

Ak existujú derivácie $F'_x(x,y) = \frac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}$, $F'_y(x,y) = \frac{\mathrm{d}F_y(x,y)}{\mathrm{d}y} \neq 0$, potom pre $f'(x)$ platí:

$$f'(x) = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}F_y(x,y)}{\mathrm{d}y}} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Výrazy $F'_x(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ a $F'_y(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ sa nazývajú **parciálne derivácie funkcie F podľa premennej x a y**. Funkcia $F(x, y)$ má dve nezávislé premenné x, y, pre ktoré platí vzťah $y = f(x)$. Z vlastností funkcií viac premenných vyplýva:

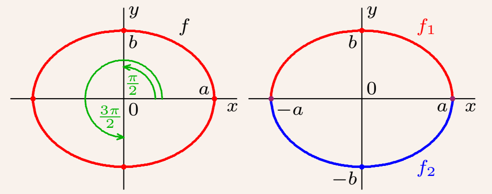
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}y'(x) = 0 \ \Rightarrow\ y' = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Funkciu $F(x, y) = F(x, f(x))$ môžeme považovať za zloženú funkciu s jednou premennou x. Jej druhú zložku $y = f(x)$ derivujeme tiež ako funkciu premennej x. Ak existuje $F'(x, f(x)) = F'(x, y)$, potom $y' = f'(x)$ vyjadríme z rovnice $F'(x, y) = 0$ (príklad 4.3.32) pomocou premenných x, $y = f(x)$.

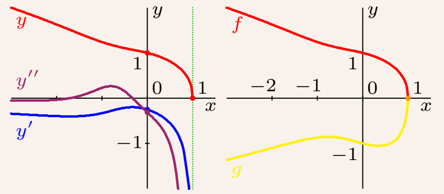
Druhú deriváciu y'' vyjadríme analogicky z implicitnej rovnice $F''(x, y) = 0$ pomocou y', y, x. Takto môžeme pokračovať aj pre ostatné derivácie vyšších rádov.

Ak chceme vyjadriť deriváciu $f'(x_0)$ v konkrétnom bode $x_0 \in D(f)$, musíme najprv určiť hodnotu $y_0 = f(x_0)$ ako riešenie implicitnej rovnice $F(x_0, y_0) = 0$.

[11] S reálnymi funkciami viac premenných sa v tejto časti zaoberať nebudeme.



Obr. 4.3.31: Parametricky definované funkcie z príkladu 4.3.31



Obr. 4.3.32: Implicitne definované funkcie z príkladu 4.3.32

Príklad 4.3.32.
Funkcia $y=f(x)$ je implicitne určená rovnicou $F(x,y)=x^3+x^2y^2+xy^3+y^4-1=0$, $y\geq 0$. Určte f', f'' a ich hodnoty v bodoch 0 a 1.

Riešenie.
$y\geq 0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{3x^2+2xy^2+y^3}{2x^2y+3xy^2+4y^3}.$
Ak derivujeme $F(x,y)=0$ podľa premennej x, dostaneme rovnaký vzťah:

$$F'(x,y)=3x^2+(2xy^2+2x^2yy')+(y^3+3xy^2y')+4y^3y'-0=$$
$$=3x^2+2xy^2+y^3+(2x^2y+3xy^2+4y^3)y'=0 \;\Rightarrow\; y'=-\tfrac{3x^2+2xy^2+y^3}{2x^2y+3xy^2+4y^3}.$$

Pre druhú deriváciu platí:

$$F''(x,y)=[3x^2+2xy^2+y^3+2x^2yy'+3xy^2y'+4y^3y']'=6x+(2y^2+4xyy')+3y^2y'+$$
$$+(4xyy'+2x^2y'y'+2x^2yy'')+(3y^2y'+6xyy'y'+3xy^2y'')+(12y^2y'y'+4y^3y'')=$$
$$=6x+2y^2+[8xy+6y^2]y'+[2x^2+6xy+12y^2](y')^2+[2x^2y+3xy^2+4y^3]y''=0.$$

Aby sme mohli vypočítať $y'=f'(x_0)$, $y''=f''(x_0)$, musíme najprv určiť $y=f(x_0)$.

$x_0=0$: $\;F(0,y)=0^3+0^2y^2+0y^3+y^4-1=y^4-1=0 \;\Rightarrow\; y=\pm 1 \xrightarrow{y\geq 0} y=f(0)=1 \;\Rightarrow$

$F'(0,y)=3\cdot 0^2+2\cdot 0\cdot 1^2+1^3[2\cdot 0^2\cdot 1+3\cdot 0\cdot 1^2+4\cdot 1^3]y'=1+4y'=0 \;\Rightarrow\; y'=f'(0)=-\frac{1}{4} \;\Rightarrow$
$F''(0,y)=0+2-[0+6]\frac{1}{4}+[0+0+12]\frac{1}{16}+[0+0+4]y''=\frac{5}{4}+4y''=0 \;\Rightarrow\; y''=f''(0)=-\frac{5}{16}.$

$x_0=1$: $\;F(1,y)=1+y^2+y^3+y^4-1=y^2(1+y+y^2)=0 \xrightarrow{1+y+y^2>0} y=f(1)=0 \;\Rightarrow$

$F'(1,y)=3+0+0+[0+0+0]y'=0 \;\Rightarrow\;$ spor $3=0 \;\Rightarrow\; f'(1)$, $f''(1)$ neexistujú.
Ak vynecháme podmienku $y\geq 0$, potom $F(x,y)=0$ nevyjadruje funkciu, ale krivku zloženú z funkcie f a z funkcie g: $x^3+x^2y^2+xy^3+y^4-1=0$, $y\leq 0$ (obr. 4.3.32). ■

Z nutnej podmienky lokálneho extrému (veta 4.3.10) vyplýva, že ak má funkcia f lokálny extrém v bode $x_0\in D(f)$ a existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0)=0$.
Ak je $y=f(x)$ zadaná implicitne rovnicou $F(x,y)=0$, potom platí:

$$F(x_0,y_0)=0,\;\; f'(x_0)=-\tfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=0,\;\text{kde } y_0=f(x_0) \;\Rightarrow\; F'_x(x_0,y_0)=0,\;\; F'_y(x_0,y_0)\neq 0.$$

Pomocou vlastností funkcií viac premenných sa dá odvodiť aj postačujúca podmienka lokálneho extrému. Implicitne zadaná funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 **lokálne maximum** [resp. **lokálne minimum**], ak $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ [resp. $f''(x_0)<0$], t. j. ak platí:

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_x(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)\neq 0,\quad \frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}>0\quad \left[\text{resp. } \frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}<0\right],$$

pričom $F''_{xx}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2F_x(x,y)}{\mathrm{d}x^2}$ (t. j. dvakrát derivované podľa x).

Príklad 4.3.33.
Nájdite extrémy funkcie $y=f(x)$ implicitne zadanej rovnicou $F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$.

Riešenie.
Krivka implicitne určená rovnicou $F(x,y) = x^3+y^3-3xy = 0$ sa nazýva Descartov list a nepredstavuje funkciu (obrázok 4.3.33). Napriek tomu nájdeme jej lokálne extrémy.
Extrém môže nastať iba v bode $[x;y]$, ktorý spĺňa podmienky:

$$F(x,y) = x^3+y^3-3xy = 0,\quad F'_x(x,y) = 3x^2-3y = 0,\quad F'_y(x,y) = 3y^2-3x\neq 0.$$

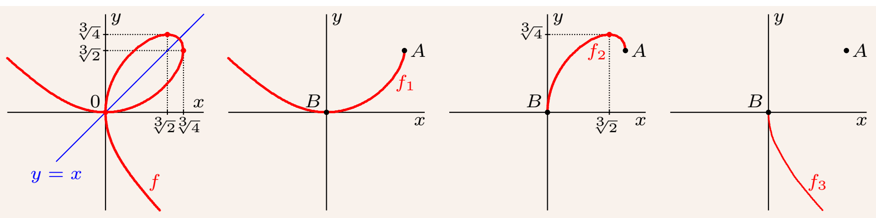
$$F'_x(x,y) = 3x^2-3y \;\Rightarrow\; F''_x(x,y) = 6x \;\Rightarrow\; \frac{F'_{xx}(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{6x}{3y^2-3x}.$$

$$F'_x(x,y)=0 \;\Rightarrow\; y=x^2 \;\Rightarrow\; F(x,y)=x^3+y^3-3xy=x^3+x^6-3x^3=x^3(x^3-2)=0 \;\Rightarrow$$
$$x=0 \text{ alebo } x=\sqrt[3]{2}.$$

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=x^2=0 \;\Rightarrow\; F'_y(0,0) = 3\cdot 0^2-3\cdot 0=0 \;\Rightarrow\; \text{nie je extrém (neplatí } F'_y(0,0)\neq 0\text{)}.$$

$$x=\sqrt[3]{2} \;\Rightarrow\; y=x^2=\sqrt[3]{4} \;\Rightarrow\; F'_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}) = 3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{2}\neq 0,\; F'_{xx}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}) = 6\sqrt[3]{2} \;\Rightarrow$$
$$\frac{F'_{xx}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})}{F'_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{2}} > 0 \;\Rightarrow\; \text{v bode } [x;y] = \left[\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}\right] \text{ nastáva lokálne maximum.}$$

Krivku f môžeme rozdeliť na tri funkcie f_1, f_2 a f_3, ktorých grafy sú od seba oddelené bodmi $A = \left[\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2}\right]$ a $B = [0;0]$. Funkcia f_1 má globálne minimum $f_1(0) = 0$ a lokálne maximum $f_1(\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{2}$. Funkcia f_2 má globálne minimum $f_2(0) = 0$ a globálne maximum $f_2(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$. Funkcia f_3 má globálne maximum $f_3(0) = 0$. ■



Obr. 4.3.33: Descartov list f a funkcie f_1, f_2, f_3 z príkladu 4.3.33

Cvičenia

4.3.1. Dokážte, že pre $0 < a < b$, $n \in N$ platí:

a) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < b - a$, b) $\sqrt{1+a^2} \leq 1 + a \ln\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)$,
c) $\frac{\operatorname{arctg} a}{1+a} < \ln(1+a) < a$, d) $1 + \frac{1}{1+\mathrm{e}} < \ln(1+\mathrm{e}) < 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$,
e) $\ln\left(1+a^2\right) \leq 2a \operatorname{arctg} a$, f) $na^{n-1}(b-a) \leq b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b-a)$.

4.3.2. Pomocou vety o strednej hodnote odhadnite nasledujúce výrazy:

a) $\operatorname{tg} 4,2$, b) $\operatorname{arctg} 1,5$, c) $\log_3 18$, d) $\arcsin 0,5$, e) $\arccos 0,5$.

4.3.3. Rozviňte do Taylorovho polynómu so stredom v bodoch $1, -1, 2, -2$ polynómy: ♣

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, b) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, c) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$,
d) $x^4 - 2x^3 + 2x + 1$, e) $x^4 + 2x^2 + 2x - 1$, f) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1$,
g) $x^5 - 2x^4 + 2x^2 + 1$, h) $x^5 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, i) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x$.

4.3.4. Určte Taylorov polynóm stupňa n so stredom v bode x_0 pre funkciu $y = f(x)$: ♣

a) $y = x^{\frac{2}{3}}$, $n = 3$, $x_0 = 1$, b) $y = x^x$, $n = 3$, $x_0 = 1$, c) $y = \frac{1}{x}$, $n = 4$, $x_0 = 2$,
d) $y = \ln x$, $n = 4$, $x_0 = 2$, e) $y = \ln x$, $n = 4$, $x_0 = 3$, f) $y = \frac{1}{x^3}$, $n = 3$, $x_0 = 1$.

4.3.5. Určte Maclaurinov polynóm stupňa n pre funkciu $y = f(x)$: ♣

a) $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n = 3$, b) $y = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$, $n = 4$, c) $y = \ln \cos x$, $n = 6$,
d) $y = \operatorname{tg} x$, $n = 5$, e) $y = \operatorname{tg}^2 x$, $n = 5$, f) $y = \sin^2 x$, $n = 5$,
g) $y = \sin^3 x$, $n = 5$, h) $y = \cos^2 x$, $n = 5$, i) $y = \cos^3 x$, $n = 5$.

4.3.6. Určte Maclaurinov polynóm stupňa n pre funkciu $y = f(x)$: ♣

a) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $y = \cosh x$, c) $y = \sinh x$, d) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

4.3.7. Pomocou Maclaurinovho vzorca vypočítajte s chybou menšou ako $0,0001$ hodnoty:

a) $\sqrt[10]{1010}$, b) $\operatorname{tg} 4,2$, c) $\sqrt{\pi}$, d) $(1,1)^{1,2}$, e) $\operatorname{arctg} 1,7$,
f) $\arcsin 0,5$, g) $\cos 1,6$, h) $\sin 0,9$, i) $\sqrt[4]{83}$, j) $\sqrt[3]{121}$.

4.3.8. Vypočítajte pre $m, n \in N$, $a > 0$, $b > 0$ nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - x}{x^n - 1}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m - x}{x^n - x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,
f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$, g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x}$, i) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln^x \frac{1}{x}$,
k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{tg} ax)}{\ln(\operatorname{tg} bx)}$, m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$, n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2 \operatorname{tg} 3x}$, p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg} x}$, q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 3x}$, r) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
s) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x}\right)$, t) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$, u) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$, v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$.

4.3.9. Zistite, či možno použiť L'Hospitalovo pravidlo a vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$.

4.3.10. Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia $y=f(x)$ monotónna: ♣

a) $y=x^2-x+12$, b) $y=x^5-15x^3+3$, c) $y=|x+1|+|x-1|$,

d) $y=\frac{x}{x^2-1}+x+2$, e) $y=\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}-1$, f) $y=x^2-1+\left|x^2-1\right|$,

g) $y=\ln\sqrt{1+x^2}-1$, h) $y=2x^2-\ln x+1$, i) $y=\sin x+\operatorname{tg} x-2x$,

j) $y=\sin x+\cos x+1$, k) $y=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}-1$, l) $y=x+\sin x-1$.

4.3.11. Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$: ♣

a) $y=x^2(x-6)$, b) $y=x-\frac{1}{x}$, c) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^3}$, d) $y=\ln\frac{x^2+4x+2}{x+2}$,

e) $y=x-\lfloor x\rfloor$, f) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, g) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1$, h) $y=1+\sqrt{|x|}$,

i) $y=\sqrt{6x-x^2}$, j) $y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$, k) $y=3-2x^{\frac{3}{2}}$, l) $y=4x-\operatorname{tg} x$,

m) $y=x^2-2x-1$, n) $y=x^4+2x^2-1$, o) $y=x+\frac{2x}{1+x^2}$, p) $y=\frac{1}{4x^3-9x^2+6x}$.

4.3.12. Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$: ♣

a) $y=\sin x+\cos x+1$, b) $y=4x^3-3x^2-36x-5$, c) $y=4x^3-18x^2+27x$,

d) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$, e) $y=x-\ln(1+x)-1$, f) $y=|x+4|-|x|+|x-1|$,

g) $y=-\ln\left(1+x-4x^2\right)$, h) $y=\ln^2 x-3\ln x+2$, i) $y=\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

j) $y=x^x$, $x\in(0;\infty)$, k) $y=x^2\ln x$, $x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle$, l) $y=x-2\ln x$, $x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle$.

4.3.13. Rozložte číslo $a>0$ na súčet dvoch kladných čísel x_1, x_2 tak, aby: ♣

a) x_1x_2 bolo maximálne, b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ bolo minimálne,

c) $x_1^n+x_2^n$ bolo minimálne pre $n\in N$, d) $x_1^nx_2^n$ bolo maximálne pre $n\in N$.

4.3.14. Nájdite $x>0$ tak, aby jeho súčet s jeho obrátenou hodnotou bol minimálny. ♣

4.3.15. Do trojuholníka s najdlhšou stranou $a>0$ a výškou $v>0$ vpíšte obdĺžnik tak, aby jedna jeho strana ležala na strane a a aby mal maximálny obsah. ♣

4.3.16. Určte rozmery trojuholníka, ktorý má jednu stranu $a>0$ a obvod $s>2a$ tak, aby mal maximálny obsah. ♣

4.3.17. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obsahu $P>0$, aby jeho obvod bol minimálny? ♣

4.3.18. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvod $s>0$, aby jeho obsah bol maximálny? ♣

4.3.19. Do elipsy s poloosami $0<a<b$ vpíšte pravouhlý rovnobežník so stranami rovnobežnými s osami elipsy tak, aby mal maximálny obsah. ♣

4.3.20. Do gule s polomerom $r > 0$ vpíšte valec tak, aby mal: ♣

a) maximálny objem, b) maximálny povrch, c) maximálny plášť.

4.3.21. Do gule s polomerom $r > 0$ vpíšte kolmý kužeľ tak, aby mal: ♣

a) maximálny objem, b) maximálny povrch, c) maximálny plášť.

4.3.22. Do kužeľa s výškou $h>0$, polomerom $r>0$ vpíšte valec s maximálnym objemom. ♣

4.3.23. Na priamke p nájdite bod tak, aby bol najbližšie k bodu $A=[1;2]$: ♣

a) $p\colon\ y=3x-1$, b) $p\colon\ y=3x+2$, c) $p\colon\ y=3x+1$, d) $p\colon\ y=3x-2$.

4.3.24. Na parabole p nájdite bod tak, aby bol je najbližšie k bodu $A=[1;2]$: ♣

a) $p\colon\ y=4x-x^2$, b) $p\colon\ y=x+x^2$, b) $p\colon\ y=-4x+2x^2$, d) $p\colon\ y=-3x-x^2$.

4.3.25. Silážna jama má mať tvar pravouhlého rovnobežnostena (bez hornej steny) s objemom $V = 1000$ m^3. Dĺžka podstavy má byť 4–krát väčšia ako jej šírka. Náklady na vybudovanie 1 m^2 podstavy sú 2–krát menšie ako náklady na vybudovanie 1 m^2 steny. Určte rozmery silážnej jamy, aby náklady na jej vybudovanie boli minimálne. ♣

4.3.26. Drôt s dĺžkou 10 m máme rozdeliť na dve časti, z ktorých prvá sa zohne do štvorca a druhá do kruhu. Kde má byť rez, aby súčet obsahov štvorca a kruhu bol minimálny. ♣

4.3.27. Kartón má tvar obdĺžnika s rozmermi 30×14 cm. V rohoch vystrihneme rovnaké štvorce a zvyšok ohneme do otvorenej škatule. Aká veľká má byť strana vystrihnutých štvorcov, aby mala škatuľa maximálny objem. ♣

4.3.28. Okno, ktoré má tvar rovinného obrazca zloženého z obdĺžnika a polkruhu zostrojeného nad jednou jeho stranou, má obvod $s > 0$. Aké majú byť rozmery obdĺžnika a polkruhu, aby malo okno maximálny obsah? ♣

4.3.29. Dva splavné, na seba kolmé kanály, sú široké 4 m a 6 m. Vypočítajte dĺžku najdlhšieho trámu, ktorý môže preplávať z jedného kanálu do druhého. ♣

4.3.30. Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia $y=f(x)$ konvexná alebo konkávna a nájdite všetky jej inflexné body: ♣

a) $y=5x^2+20x+7$, b) $y=3x^5-5x^4+4$, c) $y=2-\left|x^2-2\right|$, d) $y=x^2+x^{\frac{2}{3}}-1$,
e) $y=x(1-x)^2+1$, f) $y=x+x^{\frac{5}{3}}+1$, g) $y=3-(x+2)^{\frac{7}{5}}$, h) $y=x-\cos x$,
i) $y=x \operatorname{arctg} x$, j) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+1$, k) $y=x\ln x+1$, l) $y=x+\sin x$,
m) $y=x+\frac{1}{x^2}+1$, n) $y=x+\frac{2x}{1-x^2}$, o) $y=\frac{x}{1+x^2}+1$, p) $y=\frac{x^3}{x^2+27}+27$.

4.3.31. Pre aké $b\in R$ má funkcia $y=\mathrm{e}^x+bx^3$ inflexný bod? ♣

4.3.32. Určte asymptoty ku grafu funkcie $y=f(x)$: ♣

a) $y=\frac{x}{x-1}+1$, b) $y=\frac{1}{1-x^2}+1$, c) $y=\frac{x^2+2}{x^2-4}+1$, d) $y=\frac{x\sin x}{1+x^2}+1$,
e) $y=3x+\frac{3}{x-2}$, f) $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$, g) $y=2x-\frac{\cos x}{x}$, h) $y=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$,
i) $y=x+\frac{\ln x}{x}$, j) $y=x\operatorname{arctg} x$, k) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+1$, l) $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)$,
m) $y=\frac{\sin x}{x}+12$, n) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+12$, o) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+12$, p) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$.

4.3.33. Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=3x^5-5x^3$, b) $y=-x^4+6x^2-5$, c) $y=(\frac{x^2}{6}+x)^2$, d) $y=(\frac{x^3}{8}-1)^3$,
e) $y=(1-x^2)^2$, f) $y=(x^2-1)3x$, g) $y=x^6-x^3+1$, h) $y=x^6-x^4-1$,
i) $y=x^3+\frac{1}{x^2}$, j) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$, k) $y=x^3+\frac{1}{x^3}$, l) $y=x^2+\frac{1}{x^3}$,
m) $y=\frac{2x}{x^2-1}+x$, n) $y=\frac{\ln x}{x}+1$, o) $y=x-\ln x$, p) $y=x+2\operatorname{arctg} x$,
q) $y=x+\operatorname{arccotg} x$, r) $y=(2-x)\,\mathrm{e}^{x-1}$, s) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}+1$, t) $y=x^2\,\mathrm{e}^{x+2}-1$.

4.3.34. Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}$, b) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$, c) $y=(x-4)\sqrt[3]{x}$, d) $y=(x+4)\sqrt[3]{x^2}$,
e) $y=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$, f) $y=\operatorname{cotgh}\frac{1-x}{1+x}$, g) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$, h) $y=x+\frac{\sin x}{x}$,
i) $y=x^3+3x$, j) $y=16x(x-1)^3$, k) $y=\left|16-x^2\right|$, l) $y=x^2-2\,|x|$,
m) $y=\sqrt{|x-1|}$, n) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, o) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$, p) $y=\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$,
q) $y=x\ln x+1$, r) $y=x+\mathrm{e}^{-x}$, s) $y=\ln\left(4-x^2\right)$, t) $y=\sin x+\cos x$.

4.3.35. Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\frac{x-1}{x+1}$, b) $y=\frac{x^3+4}{x^6}$, c) $y=\frac{x^2+1}{x}$, d) $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$, e) $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$,
f) $y=\frac{x-1}{x-2}$, g) $y=\frac{x^2}{x-1}$, h) $y=\frac{x+1}{x^2}$, i) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, j) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$,
k) $y=\frac{x-3}{x-2}$, l) $y=\frac{2x^5-3}{x^2}$, m) $y=\frac{2-x}{(x-1)^2}$, n) $y=\frac{x^2+4}{x^2+3}$, o) $y=\frac{x^2+2}{x^2+3}$,
p) $y=\frac{x+1}{x-1}$, q) $y=\frac{x-2}{x^3}$, r) $y=\frac{x^2-3}{x^3}$, s) $y=\frac{1-x^4}{x^2}$, t) $y=\frac{1-x^3}{x^4}$,
u) $y=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, v) $y=\left|\frac{x^2}{x-1}\right|$, w) $y=\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$, x) $y=\left|\frac{(x-1)^2}{1-x^2}\right|$, y) $y=\left|\frac{1+x^2}{1-x}\right|$.

4.3.36. Nájdite explicitný tvar funkcie $y=f(x)$ definovanej parametricky: ♣

a) $x=t+1,\ y=1-2t-t^2,\ t\in(1;4)$, b) $x=3\cosh t,\ y=2\sinh t,\ t\in\langle 0;\infty)$,
c) $x=4\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in\langle 0;\pi\rangle$, d) $x=4\cos^2 t,\ y=9\sin^2 t,\ t\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

4.3.37. Určte množiny hodnôt pre parameter t tak, aby dané parametrické rovnice určovali spojitú funkciu $y=f(x)$. Elimináciou parametra t určte jej explicitný tvar: ♣

a) $x=2t^2-1,\ y=4t^2-1$, b) $x=2t-1,\ y=4t-1$, c) $x=4t^2+1,\ y=3t+2$,
d) $x=2\sin\frac{\pi t}{3},\ y=\cos\frac{\pi t}{3}$, e) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$, f) $x=3t+2,\ y=4t^2+1$.

4.3.38. Zistite, aké krivky sú dané parametrickými rovnicami pre $a\in R$, $a>0$: ♣

a) $x=\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in\langle 0;2\pi\rangle$, b) $x=\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in\langle 0;2\pi\rangle$,
c) $x=\cos^2 t,\ y=a\sin^2 t,\ t\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$, e) $x=\sin^3 t,\ y=a\cos^3 t,\ t\in\langle 0;2\pi\rangle$.

4.3.39. Určte deriváciu funkcie $y=f(x)$ definovanej parametricky: ♣

a) $x=\frac{4t^3}{3},\ y=\frac{t^2}{2},\ t\in(-\infty;\infty)$,
b) $x=\frac{1-t}{1+t},\ y=\frac{2t}{1+t},\ t\in R-\{-1\}$,
c) $x=\frac{2\sin t}{1+2\cos t},\ y=\frac{4\cos t}{1+2\cos t},\ t\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$,
d) $x=\arcsin\frac{1}{1+t^2},\ y=\arccos\frac{1}{1+t^2},\ t\in R$,
e) $x=t-\cos t,\ y=1+\sin t,\ t\in\langle 0;2\pi\rangle$,
f) $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t,\ t\in\langle 0;\pi\rangle$,
g) $x=\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t,\ y=\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t,\ t\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$,
h) $x=2\cosh t,\ y=4\sinh t,\ t\in(0;\infty)$.

4.3.40. Určte f', f'', f''' pre funkciu $y=f(x)$ určenú parametricky: ♣

a) $x=4t+t^2,\ y=t^3+t,\ t\in\langle 0;\infty)$,
b) $x=\ln t,\ y=\sin 2t,\ t\in(0;\infty)$,
c) $x=4\sin t,\ y=4\cos t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,
d) $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\ t\in\langle 0;\pi\rangle$,
e) $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t,\ y=\mathrm{e}^{-t}\sin t,\ t\in R$,
f) $x=\mathrm{e}^t,\ y=\arcsin t,\ t\in(-1;1)$.

Nemám nič proti gombíkom, v primeranom počte.
WILLIAM MAKEPEACE THACKERAY

Jeho svedomie bolo čisté, nikdy ho nepoužíval.
STANISŁAV JERZY LEC

„Keď zbadáš sukňu, zabudneš, že si ženatý." manželka MARKA TWAINA
„Naopak, to si na to vždy spomeniem."
MARK TWAIN

Lekársky výskum urobil také pokroky, že už napokon na svete niet zdravého človeka.
THOMAS HENRY HUXLEY

Existujú tri druhy klamstiev: lži, prekliate lži a štatistiky.
MARK TWAIN

Čo sa do suda dostane prvé, tým je cítiť stále.
ISLANDSKÉ PRÍSLOVIE

Pri stole a v posteli nesmie byť človek hlúpy.
NEMECKÉ PRÍSLOVIE

Chodí šťastie dokola, sem tam sadne na vola.
SLOVENSKÉ PRÍSLOVIE

Pivo sa podáva len odborovo organizovaným.
Automobilovými pretekmi proti zlým cestám a lajdáctvu!
úryvky z knihy ZLATÉ TEĽA (IĽJA IĽF — JEVGENIJ PETROV)

Rozum je pravdepodobne jediný dar, ktorý príroda rozdelila spravodlivo, lebo sa nikto nesťažuje, že ho má málo.
MICHEL de MONTAIGNE

Život je krátky. Samozrejme, ale v pomere k čomu?
ANDRÉ MAUROIS

Výsledky cvičení

1 Základné pojmy

1.1.1. a) $\exists x\in R$: $\sin x\geq 1$, b) $\forall x\in R$: $\sin x\geq 1$, c) $\exists! x\in R$: $\sin x\geq 1$, d) $\exists x\in R$: $\sin x<1$, e) $\exists x\in R$: $\sin x\leq 1$, f) $\forall x\in R$: $\sin x\leq 1$, g) $\exists! x\in R$: $\sin x\leq 1$, h) $\exists x\in R$: $\sin x>1$, i) $\exists x\in R$: $\sin x\neq 1$, j) $\forall x\in R$: $\sin x\neq 1$, k) $\exists! x\in$: $\sin x\neq 1$, l) $\exists x\in R$: $\sin x=1$. **1.1.2.** Ak $|p|$, $|q|$ sú postupne PP, PN, NP, NN, potom: a) $NNPN$, b) $PNPP$, c) $NNNP$, d) $NPPN$, e) $PPPN$, f) $PNNP$, g) $PPPN$, h) $NNPN$, i) $PPPP$, j) $PNPP$, k) $NNPP$, l) $PPNN$. **1.1.3.** a), b), c) V oboch prípadoch môže byť P alebo N, d) N, resp. P alebo N. **1.1.4.** Nie: c), i), áno: a), b), d), e), f), g), h), j). **1.1.5.** $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\overline{p\wedge\overline{q}}\Leftrightarrow(\overline{p}\vee q)$, resp. $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow[\overline{p\wedge\overline{q}}\wedge\overline{\overline{p}\wedge q}]\Leftrightarrow[(\overline{p}\vee q)\wedge(p\vee\overline{q})]\Leftrightarrow\overline{\overline{\overline{p}\vee q}\vee\overline{p\vee\overline{q}}}\Leftrightarrow\overline{(p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q)}$. **1.1.6.** Negácie: a) $(p\wedge q\wedge\overline{r})\vee(r\wedge\overline{p\wedge q})$, b) $(p\vee q)\wedge\overline{r}$, c) $\overline{p\vee q}\wedge(p\vee q)$, d) $p\wedge\overline{q}\wedge r$, e) $(\overline{p}\wedge q)\vee(p\wedge\overline{q})$, f) $(p\vee r)\wedge\overline{p}\wedge\overline{q}$. **1.1.7.** Nie: b), e), áno: a), c), d), f). **1.1.8.** Nie: a), b), d), e), f), áno: c). **1.1.9.** Tautológie: b), d), e), f), h), kontraindikácie: a), c), g), i), j). **1.1.10.** $\overline{\overline{p\wedge\overline{q}}\wedge\overline{\overline{\overline{r\wedge\overline{s}}\wedge\overline{\overline{r}\wedge s}}}}$. **1.1.12.** Nie: b), d), f), áno: a), c), e), g), h). Negácie: a) $\forall x\in R$: $\cos x\neq\sqrt{1-\sin^2 x}$, b) $\exists x\in R$: $\cos x\neq\sqrt{1-\sin^2 x}$, c) $\exists x\in R$: $\sin^2 x+\cos^2 x\neq 1$, d) $\exists x\in R$: $\sin^2 x-\cos^2 x\neq 1$, e) $\forall x\in R$: $x^4\geq x^3$, f) $\exists x\in R\,\exists y\in R$: $x^2+y^2\leq 0$, g) $\forall x\in R\,\exists n\in N$: $n+3\geq nx$, h) $\exists n\in N\,\forall x\in R$: $n+3\geq nx$.

1.3.2. 2^A obsahuje $\emptyset$ a množiny s prvkami 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, 1234, 2^B obsahuje $\emptyset$ a množiny s prvkami 1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45, 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345, 1234, 1235, 1245, 1345, 2345, 12345. **1.3.3.** m a 2^m, kde $m=n^k$. **1.3.4.** Nie: a), d), e), f), h), i), j), k), áno: b), c), g), l). **1.3.5.** $A\subset B\cap D$, $A'\cup C=X$, $B\cup(D-A)'=(D-B)'$, $D\triangle(A\cap C)=D-A$. **1.3.6.** $A\times B$ obsahuje $[1;a]$, $[1;b]$, $[2;a]$, $[2;b]$, $[3;a]$, $[3;b]$, $[4;a]$, $[4;b]$, $A\times C$ obsahuje $[a;x]$, $[a;y]$, $[a;z]$, $[b;x]$, $[b;y]$, $[b;z]$, $A\times B\times C$ obsahuje $[1;\,a;\,x]$, $[1;\,a;\,y]$, $[1;\,a;\,z]$, $[1;\,b;\,x]$, $[1;\,b;\,y]$, $[1;\,b;\,z]$, $[2;\,a;\,x]$, $[2;\,a;\,y]$, $[2;\,a;\,z]$, $[2;\,b;\,x]$, $[2;\,b;\,y]$, $[2;\,b;\,z]$, $[3;\,a;\,x]$, $[3;\,a;\,y]$, $[3;\,a;\,z]$, $[3;\,b;\,x]$, $[3;\,b;\,y]$, $[3;\,b;\,z]$, $[4;\,a;\,x]$, $[4;\,a;\,y]$, $[4;\,a;\,z]$, $[4;\,b;\,x]$, $[4;\,b;\,y]$, $[4;\,b;\,z]$. **1.3.7.** a) $\{2, 4, 8, 10\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$, b) $\{3, 9\}$, $\{5\}$, $\{5, 10\}$, c) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, $\{3, 5, 6, 9, 10\}$, d) $\{6\}$, $\{10\}$, $\emptyset$, e) $\emptyset$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, f) $\{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$, $\{2, 4, 5, 6, 8\}$, $\{3, 5, 6, 9, 10\}$, g) $\{5, 6, 10\}$, $\{10\}$, h) $\{3, 6, 9, 10\}$, $\{6\}$, i) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\{6, 10\}$, j) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $\{6\}$. **1.3.9.** Obidve. **1.3.10.** a) relácie $A\to B$, $B\to A$, b) nie, c) relácia $A\to B$, d) relácia $A\to B$, zobrazenie $B\to A$. **1.3.11.** a) $f=\{[a;a]$, $[a;b]$, $[a;c]$, $[a;d]$, $[a;e]$, $[b;a]$, $[b;b]$, $[b;c]$, $[b;d]$, $[b;e]$, $[c;a]$, $[c;b]$, $[c;c]$, $[c;d]$, $[c;e]$, $[d;a]$, $[d;b]$, $[d;c]$, $[d;d]$, $[d;e]$, $[e;a]$, $[e;b]$, $[e;c]$, $[e;d]$, $[e;e]\}$, b) $f=\{[a;a]$, $[a;b]$, $[a;e]$, $[b;a]$, $[b;b]$, $[b;c]$, $[c;b]$, $[c;c]$, $[c;d]$, $[d;c]$, $[d;d]$, $[d;e]$, $[e;a]$, $[e;d]$, $[e;e]\}$, c) $f=\{[a;a]$, $[a;c]$, $[a;e]$, $[b;b]$, $[c;c]$, $[c;e]$, $[d;d]$, $[e;e]\}$, d) $f=\{[a;a]$, $[a;c]$, $[a;e]$, $[c;a]$, $[c;c]$, $[c;e]$, $[e;a]$, $[e;c]$, $[e;e]\}$. **1.3.12.** spočítateľné a), nespočítateľné b), c), d).

2 Reálne čísla

2.1.5. a) 2 a 3, b) 0 a 3/2, c) 0 a 1, d) 0 a sin 1, e) 0 a 1/2, f) 1 a ∞. **2.1.6.** a) $-1/3$ a $1/2$, b) $(\sqrt{5}-1)/2$ a ∞. **2.1.9.** a) $\langle 3;4\rangle$, b) $(3;4)$, c) $(3;4)\cup(4;\infty)$. **2.1.10.** a) R, b) $(0;\infty)$, c) R, d) $\langle(-1-\sqrt{5})/2;0\rangle\cup\langle(-1+\sqrt{5})/2;\infty)$, e) $R-\{\pm\sqrt{3}\}$, f) $\langle 0;\infty)$, g) $\langle 0;1\rangle$, h) $(-\infty;0)$. **2.1.12.** a) $(-4;(-3-\sqrt{21})/2)\cup((-3+\sqrt{21})/2;1)$, b) $(-\infty;2-\sqrt{5}\rangle\cup\langle 2+\sqrt{5};\infty)$, c) $(-\infty;(-1-\sqrt{13})/2)\cup(-2;1)\cup((-1+\sqrt{13})/2;\infty)$.

2.2.3. a) $\{0\}\cup\{n^{-1};\,n\in N\}$, b) $\{0\}\cup\{n^{-1};\,n\in N\}\cup\{n^{-2};\,n\in N\}$, c) $\{0\}$, d) $N\cup\{\infty\}$, e) $\{n^2;\,n\in N\}\cup\{\infty\}$, f) $\{0\}$, g) R^*, h) R^*, i) R^*. **2.2.5.** V R vrcholy úsečky dlhej 1, v R^2 vrcholy rovnostranného trojuholníka so stranou 1, v R^3 vrcholy pravidelného štvorstena atď.

2.3.1. a) $\{0\}$, b) $\{1\}$, c) $\{1\}$, d) $\{1/2,\ 2\}$. **2.3.2.** $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$ (napr. $a_n = 0$, $b_n = n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$ (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$ pre n párne a $b_n = n^{-1}$ pre n nepárne), $\{b_n/a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$ (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = n^{-2}$, $b_n = n$). **2.3.3.** $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$ (napr. $a_n = n$, $b_n = \mp n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = n$, $b_n = \pm n$), $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$ (napr. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$ (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = n^2$, $b_n = n$), $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$ (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$). **2.3.4.** a) napr. $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$, b) napr. $a_n = n^{-1}$, $b_n = n^{-2}$, c) neexistujú, d) napr. $a_n = n + 4$, $b_n = n$. **2.3.5.** $a_n = -(n^2 - 3n + 4)/2$. **2.3.6.** a) $a_{n+1} = 2a_n - 3$, b) $a_{n+1} = 2 - a_n$, c) $a_{n+1} = a_n - 1$, d) $a_{n+1} = a_n/(a_n + 1)$. **2.3.7.** a) $a_n = n$, b) $a_n = (-1)^{n+1}$, c) $a_n = 2^{n-1} n!$. **2.3.8.** a) ± 1, b) 0, c) ± 1, d) 0, e) ∞, f) $\pm\infty$, g) 0. **2.3.9.** a) $a_n = a(\sqrt{2}/2)^{n-1}$, b) $8a/(2 - \sqrt{2})$, c) $2a^2$. **2.3.10.** a) áno, b) áno, c) nie, d) áno, e) áno, f) áno. **2.3.11.** a) 2, b) 4, c) 5, d) 1, e) 1, f) 2, g) 0, h) $(1 + \sqrt{5})/2$. **2.3.12.** a) 0, b) 0, c) 0, d) 0. **2.3.13.** a) 61/450, b) 8/15, c) 1, d) 50/99, e) 2/3, f) 4/33. **2.3.14.** a) $a \le 3$, b) $-1 < a \le 1$, c) $-4 < a \le 2$, d) $a > -1$. **2.3.15.** a) $a = 0$, $b = -1$, b) $a = -1$,$b = 2$, c) $a < 2$, $b = 0$, resp. $a = 3$, $b = -1$. **2.3.16.** a) 1, b) 1, c) -5, d) 0, e) 1/6, f) 1/3, g) 4/3. **2.3.17.** a) ∞, b) 1/2, c) 0, d) 1, e) -4, f) 5/3, g) 1, h) ∞, i) 4. **2.3.18.** a) -1, b) -1, c) 0, d) 1, e) ∞, f) 1, g) ∞, h) 0, i) 0, j) 1, k) 0, l) 0, m) 0, n) 1, o) e^{-2}, p) $\mathrm{e}^{-3/2}$, q) e^{-1}, r) e^{-5}, s) $\mathrm{e}^{-1/3}$, t) e. **2.3.19.** a) 1/3, b) ∞, c) 2, d) 1, e) 1, f) $1/\sqrt{2}$. **2.3.20.** a) $1/b$, b) $1/b$, c) $\sqrt{ab}$. **2.3.21.** a) a pre $-1 < a < 1$, 1/2 pre $a = 1$, 0 pre $a > 1$, resp. $a < -1$, $\nexists$ pre $a = -1$, b) 0 pre $-1 < a < 1$, 1/2 pre $a = 1$, 1 pre $a > 1$, resp. $a < -1$, $\nexists$ pre $a = -1$, c) 0 pre $a \neq 1$, 1/2 pre $a = 1$, $\nexists$ pre $a = -1$, d) 0 pre $-5 < a < 1$, 1 pre $a = -1$, ∞ pre $a > -1$, $\nexists$ pre $a \le -5$, e) 0 pre $-1 < a < 1$, e pre $a = 1$, ∞ pre $a > 1$, $\nexists$ pre $a \le -1$, f) a^2, g) e^{-2a}, h) 0 pre $-3 < a < 3$, -1 pre $a = 3$, $-\infty$ pre $a > 3$, $\nexists$ pre $a \le -3$. **2.3.22.** a) 0, b) 0, c) $a/2$, d) 0, e) 1/2, f) $-\infty$, g) 0, h) 0, i) 1/2, j) ∞ pre $a > b$, $-2a$ pre $a = b$, $-\infty$ pre $a < b$, k) $a - b$, l) ∞ pre $a < 1$, 3 pre $a = 1$, $-\infty$ pre $a > 1$. **2.3.23.** a) 1, b) 5/3, c) 0, d) 2/3, e) $(a + b)/2$, f) 1. **2.3.24.** a) ∞ pre $a > 1/4$, 1 pre $a = 1/4$, 0 pre $a < 1/4$, b) 1 pre $a \le 1$, a pre $a > 1$, c) a, d) 0 pre $a < 1$, ∞ pre $a \ge 1$, e) $\ln a$ pre $a > 0$, 0 pre $a = 0$, f) a/b pre $b > 0$, ∞ pre $b = 0$, g) $\ln a - \ln b$ pre $a \ge b > 0$, ∞ pre $a > b = 0$, 0 pre $a = b = 0$.

2.4.1. a) $\not\longmapsto$, b) $\longmapsto$, c) $\not\longmapsto$, d) $\not\longmapsto$, e) $\longmapsto$, f) $\longmapsto$, g) $\not\longmapsto$, h) $\not\longmapsto$, i) $\not\longmapsto$, j) $\not\longmapsto$, k) $\not\longmapsto$, l) $\longmapsto$, m) $\not\longmapsto$, n) $\longmapsto$, o) $\longmapsto$, p) $\longmapsto$, q) $\not\longmapsto$, r) $\not\longmapsto$, s) $\not\longmapsto$, t) $\longmapsto$. **2.4.2.** a) $\not\longmapsto$, b) $\longmapsto$, c) $\longmapsto$, d) $\not\longmapsto$, e) $\not\longmapsto$, f) $\longmapsto$, g) $\not\longmapsto$, h) $\longmapsto$, i) $\not\longmapsto$, j) $\longmapsto$, k) $\longmapsto$, l) $\not\longmapsto$. **2.4.3.** a) $\not\longmapsto$, b) $\longmapsto$, c) $\not\longmapsto$, d) $\longmapsto$, e) $\not\longmapsto$, f) $\not\longmapsto$, g) $\longmapsto$, h) $\longmapsto$, i) $\not\longmapsto$, j) $\not\longmapsto$, k) $\longmapsto$, l) $\longmapsto$, m) $\longmapsto$, n) $\longmapsto$, o) $\longmapsto$, p) $\longmapsto$, q) $\not\longmapsto$, r) $\longmapsto$. **2.4.4.** a) 1/2, b) 1/2, c) ∞, d) 319/1680, e) 1, f) 1/24, g) 3/2, h) 3, i) 1/4, j) 2/5, k) $-5/12$, l) 1/3. **2.4.5.** a) $\overset{\mathrm{r}}{\longmapsto}$, b) $\overset{\mathrm{r}}{\longmapsto}$, c) $\overset{\mathrm{r}}{\longmapsto}$, d) $\overset{\mathrm{a}}{\longmapsto}$, e) $\overset{\mathrm{r}}{\longmapsto}$, f) $\overset{\mathrm{r}}{\longmapsto}$, g) $\not\longmapsto$, h) $\not\longmapsto$, i) $\overset{\mathrm{a}}{\longmapsto}$, j) $\overset{\mathrm{a}}{\longmapsto}$, k) $\overset{\mathrm{a}}{\longmapsto}$, l) $\overset{\mathrm{r}}{\longmapsto}$. **2.4.6.** a) $\longmapsto$ (napr. $a_n = -b_n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = b_n = n$), b) $\longmapsto$ (napr. $a_n = b_n = 1/n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = b_n = 1$), c) $\longmapsto$ (napr. $a_n = 1$, $b_n = n^2$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = b_n$), d) $\longmapsto$ (napr. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, -1, 0, -1, \ldots\}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 0, -1, 0, \ldots\}$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = b_n = n$). **2.4.7.** a) $\not\longmapsto$, b) $\longmapsto$ (napr. $a_n = 0$, $b_n = 1$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = n$), c) $\longmapsto$ (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n$), d) $\longmapsto$ (napr. $a_n = 0$, $b_n = -1/n$), resp. $\not\longmapsto$ (napr. $a_n = 0$, $b_n = 1/n$). **2.4.9.** a) $s = 1$, $a_n = 1/2^n$, b) $s = 1$, $a_1 = 3/2$, $a_n = -1/2^n$, c) $s = 0$, $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n(2n - 1)/(n^2 - n)$ pre $n \ge 2$, d) $s = 1/2$, $a_1 = -1/2$, $a_n = 1/(n^2 - n)$ pre $n \ge 2$. **2.4.10.** $\longmapsto$, $a_n = a_1\sqrt{(1 - a_1^2)^{(n-1)}}$, $a = a_1/[1 - \sqrt{1 - a_1^2}]$, $P = \sqrt{1 - a_1^2}/(2a_1)$. **2.4.11.** $2\pi h^3 R^2/(12R^2 + 9h^2)$. **2.4.12.** a) $\sqrt{2}d$, b) $(\sqrt{2} + 1)d$, c) $\pi d/2$, d) $2d$. **2.4.13.** a) $\sqrt{2}o = 2\sqrt{2}\pi r$, b) $(\sqrt{2} + 1)o = (\sqrt{2} + 1)2\pi r$, c) $\pi o/2 = \pi^2 r$, d) $2o = 4\pi r$.

3 Reálne funkcie

3.1.1. a) nie, b) áno, c) áno, d) áno, e) áno, f) áno. **3.1.2.** a) $\langle \mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}\rangle$, b) $R - \{\pi/2 + 2k\pi;\ k \in Z\}$, c) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$, d) $\langle\sqrt{0 + 2k\pi}; \sqrt{\pi + 2k\pi}\rangle$, $k \in Z$, e) $R - \{\pm\sqrt{1/2}\}$, f) $(0; \infty) - N$, g) $(1; \infty) \cup ((-2k + 1)^{-1}; (-2k)^{-1}) \cup ((2k + 1)^{-1}; (2k)^{-1})$, $k \in N$, h) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$, i) $(-\infty; 0)$, j) $(-1; 1)$, k) $R - \langle 2; 3)$, l) $\langle 2; \infty) - \{4\}$. **3.1.3.** a) $(-\pi/4 + k\pi/2; \pi/8 + k\pi/2)$, $k \in Z$, b) $R - \langle -2; 2\rangle$, c) $(2; \infty)$, d) $\langle k\pi; \pi/2 + k\pi\rangle$, $k \in Z$, e) $\langle 0 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi\rangle$, $k \in Z$, f) $\emptyset$, g) $\langle -5\pi/6 + k\pi; 5\pi/6 + k\pi\rangle$, $k \in Z$, h) $\langle 0; 1) \cup (1; \infty)$, i) $R - \{1 \pm \sqrt{7}\}$. **3.1.6.** a) párna, b) párna, c) nepárna, d) ani párna ani nepárna, e) nepárna, f) nepárna, g) ani párna ani nepárna, h) párna a aj nepárna, i) nepárna, j) párna, k) nepárna, l) párna, m) nepárna, n) párna, o) párna, p) nepárna. **3.1.8.** a) áno, π, b) nie, c) áno, π, d) áno, 2, e) áno, 1, f) áno, nemá (všetky $p \in R$), g) áno, nemá (všetky $p \in R$), h) áno, 2. **3.1.9.** a) áno, 2π, b) áno, π, c) nie, d) áno, 2π, e) áno, 2π, f) áno, 2π, g) áno, π, h) áno, π, i) nie. **3.1.10.** a) na $(-\infty; -1)$, $\langle 1; \infty)$, $\langle 1/(k + 1); 1/k)$, $k \in Z - \{0, -1\}$ je konštantná, b) na $(-\infty; 1/2\rangle$ klesá, na $\langle 1/2; \infty)$ rastie, c) na $(-\infty; 3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2; \infty)$ rastie, d) na $(-\infty; -1\rangle$ klesá, na $\langle -1; 2\rangle$ je konštantná a na $\langle 2; \infty)$ rastie,

e) na $(-\infty; 3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2; \infty)$ rastie, f) na $(-\infty; -\sqrt{3/2}\rangle$ a $\langle 0; \sqrt{3/2}\rangle$ klesá a na $\langle -\sqrt{3/2}; 0\rangle$ a $\langle \sqrt{3/2}; \infty)$ rastie, g) na $(-\infty; 0\rangle$ rastie a na $\langle 0; \infty)$ je konštantná, h) na $(0; \sqrt{\mathrm{e}}\rangle$ klesá a na $\langle \sqrt{\mathrm{e}}; \infty)$ rastie, i) klesá na R, j) na $(-\infty; -\sqrt{1/3}\rangle$ a $\langle \sqrt{1/3}; \infty)$ rastie a na $\langle -\sqrt{1/3}; \sqrt{1/3}\rangle$ klesá, k) klesá na $(-\infty; 2/3\rangle$, l) na $(-\infty; -3\rangle$ a $\langle 0; \infty)$ je konštantná a na $\langle -3; 0\rangle$ rastie, m) rastie na $\langle k; k+1)$, $k \in Z$, n) na $(-\infty; -1\rangle$ klesá a na $\langle -1; \infty)$ rastie, o) na $(-\infty; 0\rangle$ je konštantná a na $\langle 0; \infty)$ rastie, p) rastie na $\langle 1; \infty)$. **3.1.11.** a) ohraničená zdola, $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = \infty$, b) ohraničená zdola, $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = \infty$, c) ohraničená, $\inf f(x) = \min f(x) = 1/2$, $\sup f(x) = \max f(x) = 1$, d) ohraničená, $\inf f(x) = -14$, $\sup f(x) = \max f(x) = 1$, e) ohraničená zdola, $\inf f(x) = \min f(x) = 1$, $\sup f(x) = \infty$, f) ohraničená, $\inf f(x) = \min f(x) = 2$, $\sup f(x) = 17$. **3.1.12.** a) $\min f(x) = 3/2$, $\sup f(x) = \infty$, b) $\inf f(x) = -\infty$, $\sup f(x) = \infty$, c) $\min f(x) = 0$, $\sup f(x) = \infty$, d) $\min f(x) = -1/4$, $\sup f(x) = \infty$, e) $\min f(x) = 0$, $\max f(x) = 1$, f) $\min f(x) = -1$, $\max f(x) = 1$, g) $\min f(x) = 1$, $\max f(x) = 3$, h) $\min f(x) = -1$, $\max f(x) = 1$. **3.1.13.** $f(g) = g(f)$: $y = 1 - x^2$, $f(h) = h(f)$: $y = \sin x$, $h(g) = f[h(g)] = h[f(g)] = h[g(f)]$: $y = \sin(1 - x^2)$, $g(h) = f[g(h)] = g[f(h)] = g[h(f)]$: $y = 1 - \sin^2 x$. **3.1.14.** $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$: a) $8-2x$, $4-2x$, $4x$, x, b) $1-x^2+x^4$, $2x+3x^2+2x^3+x^4$, $3+3x+4x^2+2x^3+x^4$, $-2x^2+x^4$, c) $\ln\sqrt{1-|x|}$, $\sqrt{1-|\ln x|}$, $\ln\ln x$, $\sqrt{1-|\sqrt{1-|x|}|}$, d) $\ln\sinh x$, $(-1+x^2)/(2x)$, $\ln\ln x$, $\sinh\sinh x$, e) $(\sqrt{x}+1)^2$, $x+1$, $4+8x+8x^2+4x^3+x^4$, $\sqrt[4]{x}$, f) $\lfloor x\rfloor^2$, $\lfloor x^2\rfloor$, x^4, $\lfloor x\rfloor$, g) $-x+x^2+\lfloor x^2-x\rfloor$, $-x+x^2-\lfloor x\rfloor+2x\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor^2$, $x+\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor$, $x-2x^3+x^4$, h) $\sqrt{(5+2x)/(2+x)}$, $1/(2+\sqrt{x+2})$, $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$, $(2+x)/(5+2x)$. **3.1.15.** a) $|g| = g$, $f+g$: $y = x+1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = 2x^2+1$, $x \in \langle 0; \infty)$, g^2: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = (x^2+1)^2$, $x \in \langle 0; \infty)$, fg: $y = x$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^4+x^2$, $x \in \langle 0; \infty)$, f/g: $y = x$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^2/(x^2+1)$, $x \in \langle 0; \infty)$, $f(g)$: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = (x^2+1)^2$, $x \in \langle 0; \infty)$, $g(f)$: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^4+1$, $x \in \langle 0; \infty)$, $f(f)$: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^4$, $x \in \langle 0; \infty)$, $g(g)$: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = (x^2+1)^2+1$, $x \in \langle 0; \infty)$, b) $|g| = g$, $f+g$: $y = x+x^2$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^2+x+1$, $x \in \langle 0; \infty)$, g^2: $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = (x+1)^2$, $x \in \langle 0; \infty)$, fg: $y = x^3$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^3+x$, $x \in \langle 0; \infty)$, f/g: $y = 1/x$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^2/(x+1)$, $x \in \langle 0; \infty)$, $f(g)$: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = (x+1)^2$, $x \in \langle 0; \infty)$, $g(f)$: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^2+1$, $x \in \langle 0; \infty)$, $f(f)$: $y = 1$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x^4$, $x \in \langle 0; \infty)$, $g(g)$: $y = x^4$, $x \in (-\infty; 0)$, $y = x+2$, $x \in \langle 0; \infty)$. **3.1.16.** a) $f_n(x) = x+n$, b) $f_{2n}(x) = x$, $f_{2n+1}(x) = f(x)$, c) $f_n(x) = (a_n + xa_{n+1})/(a_{n-1} + xa_n)$, kde a_n sú členy Fibonacciho postupnosti, d) $f_n(x) = x/(1+nx)$, e) $f_{4n}(x) = x$, $f_{4n+1}(x) = f(x)$, $f_{4n+2}(x) = -1/x$, $f_{4n+3}(x) = -1/f(x)$, f) $f_{2n}(x) = x$, $f_{2n+1}(x) = f(x)$, g) $f_n(x) = x/(1-nx)$, h) $f_{2n}(x) = x$, $f_{2n+1}(x) = f(x)$, i) $f_{4n}(x) = x$, $f_{4n+1}(x) = f(x)$, $f_{4n+2}(x) = -1/x$, $f_{4n+3}(x) = -1/f(x)$, j) $f_{2n}(x) = x$, $f_{2n+1}(x) = f(x)$, k) $f_n(x) = (a_n - xa_{n+1})/(-a_{n-1} + xa_n)$, kde a_n sú členy Fibonacciho postupnosti, l) $f_{2n}(x) = x$, $f_{2n+1}(x) = f(x)$. **3.1.17.** a) $y = \sqrt{x+1}$, $x \in \langle 3; 24\rangle$, b) $y = 3x/(1-x)$, $x \in R - \{1\}$, c) $y = 4 + \sqrt{x}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, d) $y = (\arcsin x + 1)/3$, $x \in (-1; 1)$, e) $y = \mathrm{e}^{2x} + 1$, $x \in R$, f) $y = 1 + 2\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$, $x \in R$. **3.1.18.** a) $D(f) = (-\pi/2; \pi/2)$, f^{-1}: $y = \operatorname{arctg}(x/2 - 1/2)$, b) $D(f) = (-\pi/2; \pi/2)$, f^{-1}: $y = x$, c) $D(f) = (-\pi/2; \pi/2)$, f^{-1}: $y = \arcsin(1 - x^2)$, d) $D(f) = (-\infty; 0\rangle$, f^{-1}: $y = \ln\cos x$, e) $D(f) = \langle 0; \pi/2)$, f^{-1}: $y = \arccos \mathrm{e}^x$, f) $D(f) = \langle 0; \infty)$, f^{-1}: $y = \sqrt{1 - \ln(1+x)}$, g) $D(f) = R$, f^{-1}: $y = \ln(\mathrm{e}^x - 1)$, h) $D(f) = R$, f^{-1}: $y = 1 + \ln(x+1)$, i) $D(f) = \langle -1; 1\rangle$, f^{-1}: $y = x$, j) $D(f) = \langle 1; \infty)$, f^{-1}: $y = 1 + \sqrt{2+x}$, k) $D(f) = \langle 0; \infty)$, f^{-1}: $y = \sqrt[4]{x+1}$, l) $D(f) = \langle -1; \infty)$, f^{-1}: $y = -1 + x^2$.

3.2.1. a) 0, b) 1, c) 1, d) e^{-1}, e) 9, f) -1, g) $\nexists$, h) $1/2$, i) 4, j) $10/9$, k) 1, l) -1, m) $\nexists$, n) $-\sqrt{2}/2$, o) $\sqrt{2}/2$, p) $\sqrt{2}/2$, q) $-\ln 3/3$, r) $\nexists$, s) $\nexists$, t) $-2/\sin 3$. **3.2.2.** a) n/m, b) m/n, c) a, d) $a-b$, e) $1/2$, f) $1/2$, g) $1/3$, h) $\ln 3/\ln 6$, i) e^a, j) 0, k) 1, l) 3, m) π, n) π, o) 1, p) $1/4$, q) 3, r) $\nexists$, s) $-\infty$, t) ∞. **3.2.3.** a) 1, b) $1/\sqrt{\mathrm{e}}$, c) 1, d) $1/\mathrm{e}$, e) e^3, f) 0, g) 1, h) 1, i) $\nexists$, j) 1, k) -1, l) -12, m) e^5, n) e^5, o) -1, p) 1, q) $1/12$, r) $1/3$, s) π, t) $3/5$. **3.2.4.** a) 1, b) 0, c) $(2a)^{-1}$, d) $\sqrt{2}/4$, e) $\sqrt{2}/4$, f) 0, g) $-2/5$, h) -1, i) $1/8$, j) $\nexists$, k) 4, l) $5/2$, m) ∞, n) 0, o) $\nexists$, p) 0, q) 0, r) $\nexists$. **3.2.5.** a) $1/8$, b) 4, c) -1, d) $15/2$, e) $1/4$, f) $-2/3$, g) $1/n$, h) $11/3$, i) $\sqrt[3]{2}/3$, j) 1, k) $-\sqrt{2}/2$, l) 2, m) -1, n) 2, o) $1/2$, p) $1/\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$, q) $\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$, r) 1, s) $2/\pi$, t) 1, u) $2/\sqrt{3}$. **3.2.6.** a) $3/2$, b) $3/2$, c) 0, d) 6, e) 1, f) $1/2$, g) $6\sqrt{2}$, h) ∞, i) $-1/2$, j) $3/2$, k) $(a-1)/(3a^2)$, l) 1, m) $-1/4$, n) $(n^2 - m^2)/2$, o) $\cos x$, p) $\nexists$, q) $-\pi/2$, r) $\pi/2$. **3.2.7.** a) 0, b) $1/6^{100}$, c) $1/4$, d) $-1/2$, e) -2, f) 3, g) $2a$, h) a, i) 6, j) 0, k) 2, l) 1, m) $2\cos a$, n) $2\cos x$.

3.3.1. Body nespojitosti: a) 0 odstrániteľný, b) $k\pi$, $k \in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, c) 1 neodstrániteľný 2. druhu, d) 0 neodstrániteľný 1. druhu, e) $k\pi$, $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, f) $2k\pi$, $\pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, g) $k\pi$, $k \in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, h) $\pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, i) 0 neodstrániteľný 2. druhu, j) 0 neodstrániteľný 2. druhu, k) nie sú, l) 0 odstrániteľný, m) 0 odstrániteľný, n) 0 neodstrániteľný 1. druhu, o) 0 odstrániteľný, resp. $k\pi$, $k \in Z - \{0\}$ neodstrániteľný 2. druhu, p) 0 neodstrániteľný 2. druhu. **3.3.2.** a) 2, b) $a \in R$, c) 1, d) 1. **3.3.3.** a) $a = 2$, $b = -2$, b) $a = 7/4$, $b = -3/2$. **3.3.4.** a) $1/2$, b) $1/4$, c) 4, d) e^2, e) -1, f) $3/2$. **3.3.5.** Spojitá (napr. $f(x) = 1$ pre

$x \geq a$, $f(x) = -1$ pre $x < a$), resp. nespojitá (napr. $f(x) = 2$ pre $x \geq a$, $f(x) = -1$ pre $x < a$). **3.3.6.** Napr. $1/[x(x-1)\cdots(x-n)]$, resp. $\lfloor x \rfloor$. **3.3.7.** a) spojitá (napr. $f = -g$), resp. nespojitá (napr. $g = f$), b) spojitá (napr. $f = g$), resp. nespojitá (napr. $f(x) = 1$ pre $x \geq a$, $f(x) = -1$ pre $x < a$, $g(x) = 2$ pre $x \geq a$, $f(x) = -1$ pre $x < a$), c) spojitá (napr. $f(x) = 1$ pre $x \geq a$, $f(x) = 0$ pre $x < a$, $g(x) = 0$ pre $x \geq a$, $f(x) = 1$ pre $x < a$), resp. nespojitá (napr. $f = g$, $f(x) = 1$ pre $x \geq a$, $f(x) = 0$ pre $x < a$), d) spojitá (napr. pre $a = 0$, $f(x) = 1$ pre $x \geq 0$, $f(x) = 0$ pre $x < 0$), resp. nespojitá (napr. pre $a = 0$, $f(x) = 1$ pre $x > 0$, $f(x) = 2$ pre $x \leq 0$), e) spojitá (napr. pre $a = 0$, $f = g$, $f(x) = 1$ pre $x \geq 0$, $f(x) = 0$ pre $x < 0$), resp. nespojitá (napr. pre $a = 0$, $f = g$, $f(x) = 1$ pre $x > 0$, $f(x) = 2$ pre $x \leq 0$), f) spojitá (napr. pre $a = 0$, $f = g$, $f(x) = 1$ pre $x \geq 0$, $f(x) = 0$ pre $x < 0$), resp. nespojitá (napr. pre $a = 0$, $f = g$, $f(x) = 1$ pre $x > 0$, $f(x) = 2$ pre $x \leq 0$). **3.3.8.** a) nespojitá, b) nespojitá, c) spojitá (napr. $f(x) = 0$), resp. nespojitá (napr. $f(x) = 1$), d) spojitá (napr. $f(x) =$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x) = x$), e) spojitá (napr. $f(x) =$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x) = x$), f) spojitá (napr. $f(x) =$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x) = x$, $g(x) = 0$ pre $x \geq 0$, $g(x) = 1$ pre $x < 0$). **3.3.9.** Funkcia $f(g)$: a) $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$, b) $(k; k+1)$, $k \in Z$ c) $(-\infty; 1)$, $(1; \infty)$, d) R, e) R, f) všade nespojitá. Funkcia $g(f)$: a) R, b) R, c) $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, d) R, e) $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, f) R. **3.3.11.** a) $1{,}92627032$, c) $-0{,}56714329$, b) $-0{,}73512111$, resp. $-0{,}21180469$, resp. $1{,}09808432$, resp. $5{,}84884147$, d) $2{,}20794003$, e) $-0{,}51859913$, resp. $1{,}36393887$, f) $1{,}41298437$, resp. $1{,}89713947$. **3.3.12.** a) $\langle 0; 1 \rangle$, b) $\langle 0; 18 \rangle$, c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle n^2; n^2+n) \cup \{0\}$, d) $(-\pi; -2\pi) \cup (-3\pi; -4\pi) \cup \{0;\ \pi/2;\ 3\pi/2\}$, e) $\{0, 1\}$, f) $(-\infty; -4\rangle$.

4 Diferenciálny počet reálnej funkcie

4.1.1. a) $4x$, b) $x/\sqrt{x^2+1}$, c) $1/(2\sqrt{x-1})$, d) $1-2x$, e) $-1/\sin^2 x$, f) -3, g) $-1/(x-1)^2$, h) $-\mathrm{e}^{-x}$. **4.1.2.** $1 \pm 1/\sqrt{2}$. **4.1.3.** a) $-2x \ln 2 2^{-x^2}$, b) $\sin x\, \mathrm{e}^{-\cos x}$, c) $\sqrt[x]{x}(1-\ln x)/x^2$, d) $x^{-2/3}/3$, e) $2^{\mathrm{tg}\, x} \ln 2/\cos^2 x$, f) $\mathrm{e}^x x^{\mathrm{e}^x - 1}(1 + x\ln x)$, g) $x^{\sin x - 1}(x \cos x \ln x + \sin x)$, h) $2x^{\ln x - 1} \ln x$, i) $\mathrm{e}^{\mathrm{tgh}\, x}/\cosh^2 x$, j) $[\ln x]^{x-1} + [\ln x]^x \ln\ln x$, k) $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$, l) $\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\, x}/(1+x^2)$, m) $x^x(1 + x + x\ln x)$, n) $x^{-1+x+x^x}(1 + x\ln x + x\ln^2 x)$, o) $(x^x)^x(x + x\ln x + \ln x^x)$, p) $2(2/5)/(25x(4/5))$, q) $-2\cot x/\sin^2 x$, r) $-2\sqrt[3]{4}/(3x^{7/3})$, s) $\mathrm{tg}\, x/\cos x$, t) $-\sin 2x/\cos x + 2x\cos^2 x\, \mathrm{tg}\, x^2/\cos x^2$. **4.1.4.** a) $\mathrm{cotg}\, x - x/\sin^2 x$, b) $\mathrm{cotg}\, \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x/\sin^2 \mathrm{e}^x$, c) $3^x(\ln x - \ln 2)/2^x$, d) $(\mathrm{e}^x(-3+x))/x^4$, e) $-1/(1+x^2)$, f) $\mathrm{e}^x x^4 \mathrm{e}^x(5+x)$, g) $5\,\mathrm{tg}^4 x/\cos^2 x$, h) $2x\cos x^2$, i) $5\,\mathrm{e}^{5x}/(2\sqrt{\mathrm{e}^{5x}})$, j) $\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$, k) $3x^2 \operatorname{sgn} x$, l) $2\,|x|$, m) 0, n) $23^{2x}\ln 3$, o) $-\sin x$ pre $x \in (-\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi)$, $\sin x$ pre $x \in (\pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi)$, p) $-3^{\mathrm{cotg}\, x}\ln 3/\sin^2 x$, q) $x^{\sqrt{x}-1/2}(2 + \ln x)/2$, r) $\cos x/x^{2\sin^2(x/2)} - x^{\cos x}\ln x \sin x$, s) $x^{(x^2)}(1 + x^2 + 2x^2 \ln x)$, t) $3/x$, u) $-1/\sin^2 x$, v) $x(2\ln x - 1)/\ln^2 x$, w) $-2/\mathrm{e}^{2x}$, x) $-2/(x\ln^3 x)$, y) $-1/((1+x^2)\,\mathrm{arctg}^2\, x)$. **4.1.5.** a) $2/(x-1)^2$, b) $\mathrm{tg}\,(x/2)/\cos^2(x/2)$, c) $2x^2[(1-x^3)/(1+x^3)]^{2/3}/(x^3-1)^2$, d) $2[(1-x)/(1+x)]^{2x/(1-x)}/(x^2-1) +\ 2[(1-x)/(1+x)]^{(1+x)/(1-x)}\ln[(1-x)/(1+x)]/(x-1)^2$, e) $\sin 2x/\mathrm{e}^{\cos^2 x}$, f) $-\mathrm{tg}\, x$, g) $-7/x^8 - 5/x^6$, h) $-4x^{1/3}/3 + 5x^4/(2\sqrt{x^5})$, i) $4/(x^2-4)$, j) $(1 + \ln x + \ln^2 x)/(1 + \ln x)^2$, k) $1/\sin x$, l) $-2/(1 - \sin 2x)$, m) $2x/(1+x^2)$, n) $6x(x^2-1)^2$, o) $-\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $x^4(-4 + 5\ln x)$, q) $-(1+2x)^{-3/2}$, r) $-1/(1+x^2)$, s) $-2\,\mathrm{e}^x/(\mathrm{e}^x - 1)^2$, t) $1/(1+x^2)$. **4.1.6.** a) $-2\cos x^{-2}/x^3$, b) $(-2-2x+x^2)/(-1+x)^2$, c) $4\,\mathrm{e}^{2x}/(1+\mathrm{e}^{2x})^2$, d) $(-1-\cos x+\sin x)/(1+\sin 2x)$, e) $\mathrm{e}^{\cos x+\sin x}(\cos x - \sin x)$, f) $-2x^3/\sqrt{1-x^4}$, g) $-1/(2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x})$, h) $40x(-1+x^2)^{19}$, i) $4x/(1+x^2)^2$, j) $1/(2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2)$, k) $-(1+3x^2)/(2x^{3/2})$, l) $(x^2(3+2x+x^2))/(1+x+x^2)^2$, m) $(1+2x)/\mathrm{e}^{1/x}$, n) $x\,\mathrm{e}^x(x\cos x + 2\sin x + x\sin x)$, o) $(1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $-1/(2\sqrt{x}(1+x))$. **4.1.7.** a) $-1/(x^2\cos^2(1+1/x))$, b) $-1/(2\sin^2(x/2))$, c) $-\mathrm{tg}\,(x/2)/(2\cos^2(x/2))$, d) $-1/[2\sqrt{x(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})^2]$, e) $8x\ln^3(1+x^2)/(1+x^2)$, f) $2\,\mathrm{cotg}\, 2x$, g) $x\cosh x + \sinh x$, h) $-2x/[(1+x^4)\,\mathrm{arccotg}\, x^2]$, i) $-2\,\mathrm{cotg}\, x/\sin^2 x$, j) $16x^7/(-1+x^16)$, k) $1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, l) $-\sqrt{3}/\sqrt{5+2x-3x^2}$, m) $-\ln\sin x[\sin x]^{2\cos^2(x/2)} +\ \cos^2 x/[\sin x]^{2\sin^2(x/2)}$, n) $[\cos x]^{1+\sin x}\ln\cos x - [\cos x]^{-1+\sin x}\sin^2 x$, o) $[\cosh x]^{-1+\ln x}(\cosh x\ln\cosh x + x\ln x\sinh x)/x$, p) $(1+x^2)^{-1+\mathrm{arctg}\, x}(2x\,\mathrm{arctg}\, x + \ln(1+x^2))$, q) $2[\mathrm{tg}\, x]^{-1+\mathrm{cotg}\, x}/\sin 2x - \ln\mathrm{tg}\, x\sin^2 x\ [\mathrm{tg}\, x]^{\mathrm{cotg}\, x}$, r) $3^{\ln[1+x+x^2]}(1+2x)\ln[3])/(1+x+x^2)$, s) $x(1-3x+2\ln x)$, t) $1 - 5\sin 2x$. **4.1.8.** a) $-1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, b) $2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{cotg}\,\mathrm{e}^{2x}$, c) $-2x$ pre $x\in(-1;1)$, $2x$ pre $x\in R - \langle -1; 1\rangle$, d) $1/[x\sqrt{1-\ln^2 x}]$, e) $x/\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, f) $\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$, g) $x\,\mathrm{e}^x$, h) $1/[x\ln x\ln\ln x\ln\ln\ln x]$, i) $2x/(-1+x^2)$, j) $2x/(-1+x^2)$, k) $-\mathrm{tgh}^2 x$, l) $5/[\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x]$, m) $\mathrm{cotg}\, x$, n) $1/[\sqrt{1-x^2}\arcsin x]$, o) $1/\cos 2x$, p) $-1/(x + x\ln^2 x)$, q) $1/(x\sqrt{1+x^2}) - \operatorname{argsinh} x/x^2$, r) $2x/\cosh x - x^2\,\mathrm{tgh}\, x/\cosh x$, s) $1/(-1+x^2) + x\arccos x/\sqrt{(1-x^2)^3}$, t) $1/(x - x\ln^2 x)$. **4.1.9.** a) $2\sin^2 x$, b) $(-5x(2/3))/3 + (5x(3/2))/2$, c) $\mathrm{e}^{-x}[-1 + 2x - x^2 + 4x^3 - x^4]$, d) $-2\arcsin[1/(-1+x)]/(\sqrt{1-(-1+x)^{-2}}(-1+x)^2)$, e) $2(1 - \cos x\cosh x)/(\cos x - \cosh x)^2$, f) $-1/2$, g) $2/(1-x^2)$, h) $2x/(2+2x^2+x^4)$, i) $3/[x(1+x^3)^2]$, j) $(1 + 2x\,\mathrm{argcotgh}\, x)/(-1+x^2)^2$, k) $-\mathrm{tg}\,[1-1/x]/x^2$, l) $2\cos x/(3[\sin x]^{1/3}) + 2\,\mathrm{tg}\, x/\cos^2 x$, m) $-[-2/x^2 + 3/(x\cos^2 x) - 3\,\mathrm{tg}\, x)/x^2]/[1 + (2 + 3\,\mathrm{tg}\, x)^2/x^2]$, n) $-\mathrm{cotg}^2 x/\sin x - 1/\sin^2 x - 1/\sin^3 x$, o) $(\arcsin x - \arccos x)(\arcsin x + \arccos x)^2/$

$(\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x \arcsin^2 x)$. **4.1.10.** a) -1, b) -1, c) $|\cos x|/\cos x$, d) $(13-11x+2x^2)/(-6+11x-6x^2+x^3)$, e) $3(-1+x^2)/(1-x-x^3+x^4)$, f) $-x\operatorname{tg}\sqrt{1+x^2}/\sqrt{1+x^2}$, g) $(4\sin x-3\sin 2x)/(6\cos^3 x)$, h) $1/(1+x^2)$, i) $3\sqrt{x^3}\ln x/x$, j) $-|\sin x|/\sin x$, k) $-1/(2\sqrt{\operatorname{cotg} x}\sin^2 x)-1/(2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos^2 x)$, l) $-\cos\ln x-\sin\ln x$, m) $-1/(2\sqrt{-x}\sqrt{1+x})$, n) $e^{\sqrt{1+x}}(\cos x-\sqrt{1+x}\sin x)/[2\sqrt{1+x}\sqrt{\cos x}]$, o) $1/(2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x})$. **4.1.11.** Poradie $f'_-(0)$, $f'_+(0)$: a) -1, 1, b) 0, 0, c) -1, 1, d) -1, 0, e) 0, 0 f) neexistujú, g) 1, 1, h) -1, -1. **4.1.13.** a) $y=4x-4$, b) $y=-4x/3$, c) $y=x/4+1$, d) $y=3x$, e) $y=x$, f) $y=1$, g) $y=2x$, h) $y=\mathrm{e}\,x-1$, i) $50y=14-3x$. **4.1.14.** a) $y=(3x-13)/4$, b) $y=x+3/4$, c) $y=2x(\sqrt{3}-1)$, resp. $y=-2x(\sqrt{3}+1)$, d) $y=2a-2a^2-2a\sqrt{a^2-2a-b+3}+b+2x(-1+a+\sqrt{a^2-2a-b+3})$, resp. $y=2a-2a^2+2a\sqrt{a^2-2a-b+3}+b+2x(-1+a-\sqrt{a^2-2a-b+3})$ kde $b\le a^2-2a+3$, e) $y=x+3/4$, resp. $y=-x+11/4$, f) $y=2+\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi/4-x\operatorname{tg}\varphi$, resp. $y=2-\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi/4+x\operatorname{tg}\varphi$. **4.1.15.** a) $y=3x-77/36$, b) $y=x+7/4$, c) $y=3+(1-x)/\sqrt{2}$, resp. $y=3-(1-x)/\sqrt{2}$, d) $y=x+7/4$. **4.1.16.** a) $y=1$ v bodoch $[\pi/2+2k\pi;1]$, $k\in Z$, resp. $y=-1$ v bodoch $[-\pi/2+2k\pi;1]$, $k\in Z$, b) $y=1$ v bodoch $[k\pi;1]$, $k\in Z$, resp. $y=-1$ v bodoch $[\pi/2+k\pi;1]$, $k\in Z$, c) neexistuje, d) $y=2\sqrt{3}/9$ v bode $\left[-1/\sqrt{3};2\sqrt{3}/9\right]$, resp. $y=-2\sqrt{3}/9$ v bode $\left[1/\sqrt{3};-2\sqrt{3}/9\right]$, e) $y=1/\mathrm{e}$ v bode $[\mathrm{e};1/\mathrm{e}]$, f) $y=1$ v bode $[0;1]$, g) $y=-1/\mathrm{e}$ v bode $[1/\mathrm{e};-1/\mathrm{e}]$ h) $y=\mathrm{e}$ v bode $[1;\mathrm{e}]$.

4.2.1. a) $\mathrm{e}^x(1+x)h$, b) $x^2 2^x(3+x\ln 2)h$, c) $-h/x^2$, d) $h/\sqrt{1-x^2}$, e) $2^{-\ln x/x}\ln 2(\ln x-1)h-x^2$, $x>0$, f) $(2-\ln x)h/(2\sqrt{x^3})$, $x>0$, g) $h/(x-1)^2$, h) $2h/(x^2-1)$, i) $-2xh\,\mathrm{e}^{-x^2}$, j) $h(1+\ln x)$. k) $h/\cos^2 x$, l) $h/(1+x^2)$. **4.2.2.** a) $\Delta S\approx r\alpha\delta r=10\pi$ cm^2, b) $\Delta S\approx r\alpha\delta r=10\pi$ cm^2, c) $\Delta S\approx r^2\Delta\alpha/2=2{,}5\pi$ cm^2. **4.2.3.** $\Delta S=2\pi r\Delta r$, $\delta S=2\delta r$. **4.2.4.** Presné hodnoty: a) $0{,}4848096$, b) $0{,}9656887$, c) $-0{,}1053605$, d) $1{,}9956925$, e) $0{,}5704371$, f) $2{,}0305432$, g) $4{,}0422932$, h) $9{,}0553851$, i) $5{,}981424$, j) $0{,}7701709$, k) $1{,}2166529$, l) $2{,}0027745$, m) $2{,}9957323$, n) $3{,}0004341$, o) $0{,}8097835$. **4.2.5.** a) $y^{(3)}=18x\cos x-x^3\cos x+6\sin x-9x^2\sin x$, $y^{(5)}=-60x\cos x+x^3\cos x-60\sin x+15x^2\sin x$, b) $y^{(3)}=6\cos x-9x^2\cos x-18x\sin x+x^3\sin x$, $y^{(5)}=-60\cos x+15x^2\cos x+60x\sin x-x^3\sin x$, c) $y^{(3)}=36x\cos 2x-8x^3\cos 2x+6\sin 2x-36x^2\sin 2x$, $y^{(5)}=-480x\cos 2x+32x^3\cos 2x-240\sin 2x+240x^2\sin 2x$, d) $y^{(3)}=6\cos 2x-36x^2\cos 2x-36x\sin 2x+8x^3\sin 2x$, $y^{(5)}=-240\cos 2x+240x^2\cos 2x+480x\sin 2x-32x^3\sin 2x$, e) $y^{(3)}=2\,\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$, $y^{(5)}=-4\,\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)$, f) $y^{(3)}=-2\,\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)$, $y^{(5)}=-4\,\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$, g) $y^{(3)}=x^2(47+60\ln x)$, $y^{(5)}=274+120\ln x$, h) $y^{(3)}=2\,\mathrm{e}^x(3\cos x+x\cos x-x\sin x)$, $y^{(5)}=-4\,\mathrm{e}^x(x\cos x+5\sin x+x\sin x)$. **4.2.6.** a) $-2^{n-1}\cos(2x+n\pi/2)$, b) $[3\cos(x+n\pi/2)+3^n\cos(3x+n\pi/2)]/4$, c) $x\sin(x+n\pi/2)-n\cos(x+n\pi/2)$, d) $(n-1)!/x$, e) $2(-1)^n n!/(x-1)^{n+1}$, f) $2(-1)^{n+1}n!/(x+1)^{n+1}$, g) $(-1)^n n![\ln x-(1+1/2+1/3+\cdots+1/n)]/x^{n+1}$, h) $(-1)^n n![(x+1)^{-n-1}+(x-1)^{-n-1}]/2$, i) $\mathrm{e}^x(x+n)$, j) $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n\ge 2$, k) $(-1)^{n+1}(n-1)!/x^n$ pre $n\ge 2$, l) $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n\ge 2$.

4.3.3. Koeficienty pre 1, -1, 2, -2: a) 1, 5, 10, 10, 5, resp. 1, -3, 4, -2, 1, resp. 1, 9, 31, 49, 31, resp. 1, -7, 19, -23, 11, b) 1, 5, 8, 6, 1, resp. 1, -3, 2, 2, -3, resp. 1, 9, 29, 41, 21, resp. 1, -7, 17, -15, 1, c) 1, 3, 4, 2, 1, resp. 1, -5, 10, -10, 5, resp. 1, 7, 19, 23, 11, resp. 1, -9, 31, -49, 31, d) 1, 2, 0, 0, 2, resp. 1, -6, 12, -8, 2, resp. 1, 6, 12, 10, 5, resp. 1, -10, 36, -54, 29, e) 1, 4, 8, 10, 4, resp. 1, -4, 8, -6, 0, resp. 1, 8, 26, 42, 27, resp. 1, -8, 26, -38, 19, f) 1, 2, 2, 2, 0, resp. 1, -6, 14, -14, 4, resp. 1, 6, 14, 16, 7, resp. 1, -10, 38, -64, 39, g) 1, 3, 2, 0, 1, 2, resp. 1, -7, 18, -20, 9, 0, resp. 1, 8, 24, 34, 24, 9, resp. 1, -12, 56, -126, 136, -55, h) 1, 5, 12, 18, 15, 4, resp. 1, -5, 12, -14, 7, -2, resp. 1, 10, 42, 94, 112, 55, resp. 1, -10, 42, -90, 96, -41, i) 1, 3, 4, 4, 2, 0, resp. 1, -7, 20, -28, 18, -4, resp. 1, 8, 26, 44, 39, 14, resp. 1, -12, 58, -140, 167, -78. **4.3.4.** a) $1+2(x-1)/3-(x-1)^2/9+4(x-1)^3/81$, b) $1+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3/2$, c) $1/2-(x-2)/4+(x-2)^2/8-(x-2)^3/16+(x-2)^4/32$, d) $\ln 2+(x-2)/2-(x-2)^2/8+(x-2)^3/24-(x-2)^4/64$, e) $\ln 3+(x-3)/3-(x-3)^2/18+(x-3)^3/81-(x-3)^4/324$, f) $1-3(x-1)+6(x-1)^2-10(x-1)^3$. **4.3.5.** a) $1+2x+2x^2$, b) $1/2+x/4-x^3/48$, c) $-x^2/2-x^4/12-x^6/45$, d) $x+x^3/3+2x^5/15$, e) $x^2+2x^4/3$, f) $x^2-x^4/3$, g) $x^3-x^5/2$, h) $1-x^2+x^4/3$, i) $1-3x^2/2+7x^4/8$. **4.3.6.** a) $a_{2n}=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n}/2^n/n!$, $n\in N\cup\{0\}$, b) $a_{2n}=x^{2n}/(2n)!$, $n\in N\cup\{0\}$, c) $a_{2n+1}=x^{2n+1}/(2n+1)!$, $n\in N\cup\{0\}$, d) $a_{2n+1}=2x^{2n+1}/(2n+1)$, $n\in N\cup\{0\}$. **4.3.8.** a) $(n-1)/n$, b) $(m-1)/(n-1)$, c) $1/6$, d) 1, e) $\ln a-\ln b$, f) 0, g) ∞, h) 0 pre $a>1$, ∞ pre $a\le 1$, i) $1/\mathrm{e}$, j) 1, k) a^2/b^2, l) 1, m) $1/3$, n) $-\infty$, o) $3/10$, p) 0, q) $2/9$, r) ∞, s) $-\infty$, t) 0, u) $1/2$, v) 1. **4.3.9.** a) nie, 1, b) nie, $\nexists$, c) áno, $-1/2$, d) áno, 1, e) áno, 1. **4.3.10.** a) rastúca na $\langle 1/2;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;1/2\rangle$, b) rastúca na $(-\infty;-3\rangle$, $\langle 3;\infty)$, klesajúca na $\langle -3;3\rangle$, c) rastúca na $\langle 1;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, konštantná na $\langle -1;1\rangle$, d) rastúca na $(-\infty;-\sqrt{3}\rangle$, $\langle\sqrt{3};\infty)$, klesajúca na $\langle -\sqrt{3};-1)$, $(-1;1)$, $(1;\sqrt{3}\rangle$, e) rastúca na $(2/3;1)$, $(1;2\rangle$, klesajúca na $(-\infty;0)$, $(0;2/3)$, $\langle 2;\infty)$, f) rastúca na $\langle 1;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, konštantná na $\langle -1;1\rangle$, g) rastúca na $\langle 0;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;0\rangle$, h) rastúca na $\langle 1/2;\infty)$, klesajúca na $(0;1/2\rangle$, i) rastúca na $(\pi/2+k\pi;3\pi/2+k\pi)$, $k\in Z$, j) rastúca na $\langle -3\pi/4+2k\pi;\pi/4+2k\pi\rangle$, klesajúca na $\langle \pi/4+2k\pi;5\pi/4+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, k) rastúca na $\langle 2\pi/3+2k\pi;\pi+2k\pi\rangle$, $\langle 4\pi/3+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle$, klesajúca na $\langle 0+2k\pi;2\pi/3+2k\pi\rangle$, $\langle \pi+2k\pi;4\pi/3+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, l) rastúca na

R. **4.3.11.** a) l min $f(4)=-32$, l max $f(0)=0$, b) $\nexists$, c) l min $f(\sqrt[5]{24})=5\sqrt[5]{2/27}$, d) $\nexists$, e) lg min $f(k)=0$, $k\in Z$, f) l min $f(0)=0$, l max $f(2)=4/\mathrm{e}^2$, g) l min $f(1)=1+\mathrm{e}$, h) lg min $f(0)=1$, i) g min $f(0)=f(6)=0$, lg max $f(3)=3$, j) g min $f(-1)=f(1)=0$, k) g max $f(0)=3$, l) l min $f(-\pi/3+k\pi)=\sqrt{3}-4\pi/3+4k\pi$, l max $f(\pi/3+k\pi)=4\pi/3-\sqrt{3}+4k\pi$, $k\in Z$, m) lg min $f(1)=-2$, n) lg min $f(0)=-1$, o) $\nexists$, p) l min $f(1/2)=4/5$, l max $f(1)=1$ (lokálny=l, globálny=g). **4.3.12.** a) lg min $f(-3\pi/4+2k\pi)=1-\sqrt{2}$, lg max $f(\pi/4+2k\pi)=1+\sqrt{2}$, b) l min $f(2)=-57$, l max $f(-3/2)=115/4$, c) $\nexists$, d) l min $f((5-\sqrt{13})/6)=-(587+143\sqrt{13})/1458$, $f((5+\sqrt{13})/6)=(143\sqrt{13}-587)/1458$, l max $f(1)=0$, e) lg min $f(0)=-1$, f) lg min $f(-4)=1$, l min $f(1)=4$, l max $f(0)=5$, g) lg min $f(1/8)=\ln 16-\ln 17$, h) lg min $f(\mathrm{e}^{3/2})=-1/4$, i) lg max $f(1)=\pi/4-\ln 2/2$, j) lg min $f(1/\mathrm{e})=1/\sqrt[\mathrm{e}]{\mathrm{e}}$, k) g min $f(1)=0$, g max $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2$, l) lg min $f(2)=2-\ln 4$, g max $f(1)=1$ (lokálny=l, globálny=g). **4.3.13.** a) $x_1=x_2=a/2$, b) $x_1=x_2=a/2$, c) $x_1=x_2=a/2$, d) $x_1=x_2=a/2$. **4.3.14.** $x=1$. **4.3.15.** Strany $a/2$, $h/2$. **4.3.16.** Rovnoramenný trojuholník s ramenami $(s-a)/2$. **4.3.17.** Štvorec so stranou $\sqrt{P}$. **4.3.18.** Štvorec so stranou $s/4$. **4.3.19.** Strany $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **4.3.20.** a) polomer podstavy $x=\sqrt{2}r/\sqrt{3}$, výška $v=2r/\sqrt{3}$, b) polomer podstavy $x=r\sqrt{(5+\sqrt{5})/10}\approx 0,850651r$, výška $v=r\sqrt{2(5-Sqrt5)/5}\approx 1,051462$, c) polomer podstavy $x=2r/\sqrt{2}$, výška $v=\sqrt{2}r$. **4.3.21.** a) polomer podstavy $x=4\sqrt{2}r/3$, výška $v=4r/3$, b) polomer podstavy $x=4\sqrt{2}r/3$, výška $v=4r/3$, c) polomer podstavy $x=\sqrt{95+7\sqrt{17}}r/\sqrt{128}\approx 0,983702r$, výška $v=(23-\sqrt{17})r/16\approx 1,179806$. **4.3.22.** Polomer podstavy $x=r/2$, výška $v=h/2$. **4.3.23.** a) $[1;2]$, b) $[1/10;23/10]$, c) $[2/5;11/5]$, d) $[13/10;19/10]$. **4.3.24.** a) $\left[(3-\sqrt{3})/2;(6-\sqrt{3})/2\right]$, b) $[1;2]$, b) $\left[1-\sqrt{30}/4;7/4\right]$, d) $[-1/2;5/4]$. **4.3.25.** Dĺžka $20\sqrt[3]{5}$ m, šírka $5\sqrt[3]{5}$ m, výška $2\sqrt[3]{5}$ m. **4.3.26.** Na kruh treba $10\pi/(4+\pi)\approx 4,399010$ m. **4.3.27.** 6 cm. **4.3.28.** Strany obdĺžnika $4s/(8+3\pi)$, $(4+\pi)s/(8+3\pi)$, polomer kruhu $2s/(8+3\pi)$. **4.3.29.** $\sqrt{52+36\sqrt[3]{12}+24\sqrt[3]{18}}$ m. **4.3.30.** a) nemá inflexné body, konvexná na R, b) inflexný bod 1, konvexná na $\langle 1;\infty)$, konkávna na $(-\infty;1\rangle$, c) inflexné body $\pm\sqrt{2}$, konvexná na $\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$, konkávna na $(-\infty;-\sqrt{2}\rangle$, $\langle\sqrt{2};\infty)$, d) inflexný bod $\sqrt{3}/9$, konvexná na $\langle\sqrt{3}/9;\infty)$, konkávna na $\langle 0;\sqrt{3}/9\rangle$, e) inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty;0\rangle$, konkávna na $\langle 0;\infty)$, f) nemá inflexné body, konvexná na $\langle 0;\infty)$, g) nemá inflexné body, konkávna na $\langle -2;\infty)$, h) inflexné body $\pi/2+k\pi$, konvexná na $\langle -\pi/2+2k\pi;\pi/2+2k\pi\rangle$, konkávna na $\langle \pi/2+2k\pi;3\pi/2+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, i) nemá inflexné body, konvexná na R, j) nemá inflexné body, konvexná na $(0;\infty)$, konkávna na $(-\infty;0)$, k) nemá inflexné body, konvexná na $(0;\infty)$, l) inflexné body $k\pi$, konvexná na $\langle 2k\pi;\pi+2k\pi\rangle$, konkávna na $\langle\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, m) nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$, n) inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty;-1)$, $\langle 0;1)$, konkávna na $(-1;0\rangle$, $(1;\infty)$, o) inflexné body 0, $\pm\sqrt{3}$, konvexná na $(-\infty;-\sqrt{3}\rangle$, $\langle 0;\sqrt{3}\rangle$, konkávna na $\langle -\sqrt{3};0\rangle$, $\langle\sqrt{3};\infty)$, p) inflexné body 0, ± 9, konvexná na $(-\infty;-9\rangle$, $\langle 0;9\rangle$, konkávna na $\langle -9;0\rangle$ a na $\langle 9;\infty)$. **4.3.31.** Pre všetky b okrem $b\in\langle -\mathrm{e}/6;0\rangle$. **4.3.32.** a) $x=1$, $y=2$, b) $x=\pm 1$, $y=1$, c) $x=\pm 2$, $y=2$, d) $y=1$, e) $y=3x$, f) $x=\pm 1$, $y=x$, g) $x=0$, $y=2x$, h) $y=\pm 1/2$, i) $y=x$, j) $y=\pm\pi x/2-1$, k) $x=0$, $y=1$, l) $y=x+1/\mathrm{e}$, m) $y=12$, n) $x=0$, $y=13$, o) $x=0$, $yx+=13$, p) $x=\pm 1$, $y=0$. **4.3.36.** a) $y=2-x^2$, $x\in(2;5)$, b) $y=\sqrt{4x^2/9-4}$, $x\in\langle 3;\infty)$, c) $y=\sqrt{9-9x^2/16}$, $x\in\langle -4;4\rangle$, d) $y=9-9x/4$, $x\in\langle 0;4\rangle$. **4.3.37.** a) $t\in\langle 0;\infty)$, $y=2x+1$, $x\in\langle -1;\infty)$, b) $t\in R$, $y=2x+1$, $x\in R$, c) $t\in\langle 0;\infty)$, $y=2+3\sqrt{x-1}/2$, $x\in\langle 0;\infty)$, resp. $t\in(-\infty;0\rangle$, $y=2-3\sqrt{x-1}/2$, $x\in\langle 0;\infty)$, d) $t\in\langle -3/2+6k;3/2+6k\rangle$, $y=\sqrt{1-x^2/4}$, $x\in\langle -2;2\rangle$, resp. $t\in\langle 3/2+6k;9/2+6k\rangle$, $y=-\sqrt{1-x^2/4}$, $x\in\langle -2;2\rangle$, $k\in Z$, e) $t\in\langle 0+2k\pi;\pi+2k\pi\rangle$, $y=(1-\sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x\in\langle -1;1\rangle$, resp. $t\in\langle\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle$, $y=-(1-\sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x\in\langle -1;1\rangle$, $k\in Z$, f) $t\in R$, $y=4(x-2)^2/9+1$, $x\in R$. **4.3.38.** a) elipsa $x^2+y^2/a^2=1$, $x\in\langle -1;1\rangle$, t. j. $y=\pm a\sqrt{1-x^2}$, $x\in\langle -1;1\rangle$, b) hviezdica $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2/a^2}=1$, $x\in\langle -1;1\rangle$, t. j. $y=\pm a(1-\sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x\in\langle -1;1\rangle$, c) úsečka $y=a-ax$, $x\in\langle 0;1\rangle$, e) hviezdica $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2/a^2}=1$, $x\in\langle -1;1\rangle$, t. j. $y=\pm a(1-\sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x\in\langle -1;1\rangle$. **4.3.39.** a) $x=4t^3/3$, $y'=1/(4t)$, $t\in R-\{0\}$, b) $x=(1-t)/(1+t)$, $y'=-1$, $t\in R-\{-1\}$, c) $x=2\sin t/(1+2\cos t)$, $y'=-2\sin t/(2+\cos t)$, $t\in(-\pi/3;\pi/3)$, d) $x=\arcsin(1+t^2)^{-1}$, $y'=-1$, $t\in R$, e) $x=t-\cos t$, $y'=\cos t/(1+\sin t)$, $t\in\langle 0;2\pi\rangle-\{3\pi/2\}$, f) $x=4\cos^3 t$, $y'=-\operatorname{tg} t$, $t\in\langle 0;\pi\rangle-\{\pi/2\}$, g) $x=\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t$, $y'=(1-\cos 2t+\sin 2t)/(1+\cos 2t-\sin 2t)$, $t\in\langle 0;\pi/2)-\{\pi/4\}$, h) $x=2\cosh t$, $y'=2\operatorname{cotgh} t$, $t\in(0;\infty)$. **4.3.40.** a) $x=4t+t^2$, $y'=(1+3t^2)/2/(2+t)$, $y''=(-1+12t+3t^2)/4/(2+t)^3$, $y'''=3(9-4t-t^2)/8/(2+t)^5$, $t\in\langle 0;\infty)$, b) $x=\ln t$, $y'=2t\cos 2t$, $y''=t(2\cos 2t-4t\sin 2t)$, $y'''=2t(\cos 2t-4t^2\cos 2t-6t\sin 2t)$, $t\in(0;\infty)$, c) $x=4\sin t$, $y'=-\operatorname{tg} t$, $y''=-1/(4\cos^3 t)$, $y'''=-3\sin t/(16\cos^5 t)$, $t\in(-\pi/2;\pi/2)$, d) $x=2\cos^3 t$, $y'=-\operatorname{tg} t$, $y''=1/(6\sin t\cos^4 t)$, $y'''=(5\cos 2t-3)/(72\sin^3 t\cos^7 t)$, $t\in(0;\pi)-\{\pi/2\}$, e) $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y'=(\sin t-\cos t)/(\sin t+\cos t)$, $y''=-2\,\mathrm{e}^t/(\sin t+\cos t)^3$, $y'''=-4\,\mathrm{e}^{2t}(\cos t-2\sin t)/(\sin t+\cos t)^5$, $t\in R-\{3\pi/4+k\pi, k\in Z\}$, f) $x=\mathrm{e}^t$, $y'=\mathrm{e}^{-t}/\sqrt{1-t^2}$, $y''=\mathrm{e}^{-2t}(-1+t+t^2)/\sqrt{(1-t^2)^3}$, $y'''=\mathrm{e}^{-3t}(3-3t-2t^2+3t^3+2t^4)/\sqrt{(1-t^2)^5}$, $t\in(-1;1)$.

Register

$\exists$, 8
$\forall$, 8
$\nexists$, 8

a, 6
abeceda
  grécka, 5
Abel, N. H., 63
alebo, 6
d'Alembert, J. B., 59
amplitúda, 74
aproximácia funkcie
  lokálna, 130
  pomocou diferenciálu, 132
argument
  kosínusu hyperbolického, 90
  kotangensu hyperbolického, 91
  sínusu hyperbolického, 90
  tangensu hyperbolického, 91
arkuskosínus, 88
arkuskotangens, 88
arkussínus, 88
arkustangens, 88
asymptota
  grafu funkcie
    bez smernice, 100
    horizontálna, 101
    so smernicou, 101
    vertikálna, 100
axióma, 10
axiómy
  Hausdorffove, 32
axiómy reálnych čísel, 23
  o najmenšom hornom ohraničení, 25
  o supréme, 25
  sčítania a násobenia, 24

bijekcia, 17, 72
bod
  hraničný množiny, 34
  hromadný množiny, 34, 35
  inflexný funkcie, 79
  izolovaný množiny, 35
  jednotkový, 27
  nespojitosti funkcie, 108
    asymptotickej, 109
    neodstrániteľnej 1. druhu, 109
    neodstrániteľnej 2. druhu, 109
    odstrániteľnej, 109
  nulový, 27
    funkcie, 80
  spojitosti funkcie, 108
  stacionárny funkcie, 151
  vnútorný množiny, 34
  vonkajší množiny, 34

celá časť čísla, 28
  dolná, 28
  horná, 28
chyba veličiny
  absolútna, 133
  pomerná, 133
  relatívna, 133

definícia, 10
delenie
  čísel, 24
derivácia funkcie
  druhého rádu, 134
  logaritmická, 126
  na množine, 122
  n-tého rádu, 134

nultého rádu, 134
prvého rádu, 134
v bode
jednostranná, 122
konečná, 120
nevlastná, 120
obojstranná, 122
sprava, 121
vlastná, 120
zľava, 121
vyššieho rádu, 134
diferenciál funkcie, 130
na množine, 131
n-tého rádu, 135
v bode, 130
disjunkcia výrokov, 6
doplnok množiny, 15
dotyčnica ku grafu funkcie, 121
bez smernice, 121
so smernicou, 121
dôkaz, 10
existenčný, 12
konštruktívny, 12
matematická indukcia, 11
nepriamy, 11
obrátená implikácia, 11
sporom, 11
priamy, 10
sporom, 8
dĺžka
intervalu, 27
vektora, 37

ekvivalencia
množín, 20
výrokov, 6
eliminácia parametra, 73
exponenciála, 85
extrémy
funkcie
absolútne, 76, 152
absolútne ostré, 76
globálne, 76, 152
globálne ostré, 76
lokálne, 76, 150
lokálne ostré, 76
funkcie na množine, 76
ostré, 76

faktoriál čísla, 13
forma, 6
výroková, 6
funkcia, 17, 71
argument
kosínusu hyperbolického, 90
kotangensu hyperbolického, 91
sínusu hyperbolického, 90
tangensu hyperbolického, 91
arkuskosínus, 88
arkuskotangens, 88
arkussínus, 88
arkustangens, 88
bijektívna, 72
cyklometrická, 88
definovaná
explicitne, 72
graficky, 74
implicitne, 73
parametricky, 72
tabuľkou, 73
diferencovateľná, 130
na množine, 131
rádu n, 135
v bode, 130
Dirichletova, 72
elementárna, 83
exponenciálna, 85
goniometrická, 86
hyperbolická, 89
hyperbolometrická, 90
injektívna, 72
inverzná, 82
jednojednoznačná, 72
klesajúca, 76
na množine, 76, 148
v bode, 77
konkávna
na intervale, 78, 154
konkávna rýdzo
na intervale, 79
v bode, 79
konvexná

na intervale, 78, 154
konvexná rýdzo
na intervale, 79
v bode, 79
konštantná, 76, 84
na množine, 76
kosínus, 86
kosínus hyperbolický, 89
kotangens, 86
kotangens hyperbolický, 89
kvadratická, 84
lineárna, 75, 84
logaritmická, 85
mocninná, 85
monotónna, 76
na množine, 148
ostro, 76
rýdzo, 76
na množinu, 72
neklesajúca, 76
na množine, 76, 148
v bode, 77
neohraničená
na množine, 75
zdola, 75
zhora, 75
nepárna, 78
nerastúca, 76
na množine, 76, 148
v bode, 77
nespojitá v bode, 108
asymptoticky, 109
ohraničená
na množine, 75
zdola, 75
zhora, 75
periodická, 78
prostá, 72
prostá na množinu, 72
párna, 78
racionálna
celistvá, 84
lomená, 84
rastúca, 76
na množine, 76, 148
v bode, 77
reálnej premennej, 71
spojitá, 111
spojitá na množine, 111
po častiach, 111
spojitá v bode, 108
sprava, 111
v zmysle Heineho, 108
vzhľadom na množinu, 110
zľava, 111
surjektívna, 72
sínus, 86
sínus hyperbolický, 89
tangens, 86
tangens hyperbolický, 89
trigonometrická, 86
vnútorná, 81
vonkajšia, 81
zložená, 81

graf funkcie, 71

hodnota
absolútna, 29
funkcie, 81
funkčná, 17, 71
hromadná postupnosti, 40
nevlastná, 40
vlastná, 40
maximálna funkcie, 76
minimálna funkcie, 76
najmenšia funkcie, 76
najväčšia funkcie, 76
zobrazenia, 17
hodnota výroku
logická, 6
pravdivostná, 6
hranica
množiny, 34
hyperbola, 84

identita, 19
implikácia výrokov, 6
index
násobiaci súčinu, 13
sčítací sumačný, 12
infimum

funkcie, 75
na množine, 75
množiny, 25
inflexia funkcie v bode, 79
injekcia, 17, 72
interval, 26
degenerovaný, 27
nedegenerovaný, 27
neohraničený, 27
ohraničený, 26
otvorený, 27
periodicity, 78
polootvorený, 26
polouzavretý, 26
uzavretý, 26

jednotka
imaginárna, 23

koeficienty
polynómu, 84
komplement množiny, 15
kompozícia
zobrazení, 18
konjunkcia výrokov, 6
kontraindikácia, 7
kontrapríklad, 12
konštanta, 5
koreň
funkcie, 80
kosínus, 86
kosínus hyperbolický, 89
kosínusoida, 86
kotangens, 86
kotangens hyperbolický, 89
kotangenta, 86
kritérium
konvergencie radov
Abelovo, 63
d'Alembertovo limitné, 59
d'Alembertovo podielové, 59, 61
Cauchyho limitné, 60
Cauchyho odmocninové, 59
Dirichletovo, 63
Leibnizovo, 62
porovnávacie, 57
Raabeho limitné, 61
krivka
exponenciálna, 85
logaritmická, 85
kvantifikátor, 8
existenčný, 8
všeobecný, 8

lema, 10
limes inferior
postupnosti, 41
limes superior
postupnosti, 41
limita
funkcie, 94
ekvivalentná definícia, 95
jednostranná, 99
nevlastná, 94
obojstranná, 99
sprava, 99
v nevlastnom bode, 94
v zmysle Heineho, 94
vlastná, 94
vo vlastnom bode, 94
vzhľadom na množinu, 99
zľava, 99
postupnosti, 41
dolná, 41
horná, 41
nevlastná, 41
vlastná, 41
logaritmus, 86
dekadický, 86
prirodzený, 86
logika, 5
lomená časť čísla, 28

Maclaurin, C., 145
Maclaurinov polynóm, 145
matematická indukcia, 11
maximum
funkcie, 76
absolútne, 76
globálne, 76
lokálne, 76, 166, 169
lokálne ostré, 76

na množine, 76
funkcie na množine
ostré, 76
množiny, 25
metrika
euklidovská, 38
metóda
bisekcie, 29, 113
deduktívna, 7
delenia, 113
tabuľková, 7
minimum
funkcie, 76
absolútne, 76
globálne, 76
lokálne, 76, 166, 169
lokálne ostré, 76
na množine, 76
funkcie na množine
ostré, 76
množiny, 25
množina
celých čísel, 25
doplnková, 15
hodnôt postupnosti, 20
hromadných hodnôt postupnosti, 41
husto usporiadaná, 27
iracionálnych čísel, 25
izolovaná, 35
komplementárna, 15
komplexných čísel, 23
konečná, 14
nekonečne spočítateľná, 20
nekonečná, 14
neohraničená, 24
neohraničená zdola, 24
neohraničená zhora, 24
nespočítateľná, 20
ohraničená, 24
zhora, 24
otvorená, 35
potenčná, 14
prirodzených čísel, 25
prázdna, 14
racionálnych čísel, 25
reálnych čísel, 23
rozšírená, 26
spočítateľná, 20
usporiadaná, 24
uzavretá, 35
množiny
disjunktné, 15
doplnkové, 15
ekvivalentné, 20
komplementárne, 15
totožné, 14
mocnina
množiny, 32
čísla
n-tá, $n \in N$, 30
r-tá, $r \in R$, 31
s-tá, $s \in Q$, 31
mohutnosť
množín, 20
monotónnosť
funkcie, 76
na množine, 76

negácia
implikácie, 8
negácia výroku, 6
nekonečno, 26
nepravda, 6
nerovnosť
Cauchyho, 37
trojuholníková, 29, 38
čísel, 24
norma
euklidovská, 37
normála ku grafu funkcie, 121
násobenie
čísel, 23
násobok
radu číslom, 56

obor
definičný funkcie, 71
maximálny, 72
prirodzený, 72
definičný zobrazenia, 17
hodnôt funkcie, 71
hodnôt zobrazenia, 17

kvantifikácie, 8
obraz
množiny v zobrazení, 17
zobrazenia, 17
odmocnina čísla
n-tá, 31
odčítanie
čísel, 24
ohraničenie
množiny
dolné, 24
horné, 24
najväčšie dolné, 25
najväčšie horné, 25
okolie
bodu, 32
pravé, 33
pravé prstencové, 33
ľavé, 33
ľavé prstencové, 33
bodu $-\infty$, 33
bodu ∞, 33
jednostranné, 33
čísla, 33
prstencové, 33
o.k.p., 43, 57
okrem konečného počtu členov, 43, 57
operácia
binárna, 23
logická, 6
n-nárna, 23
unárna, 23
os, 71
polárna, 74
reálna, 27
súradnicová, 71
polárna, 74
x-ová, 71
y-ová, 71
x-ová, 71
y-ová, 71
číselná, 27

parabola, 84
parameter, 72
parametrizácia
funkcie, 72
perióda funkcie, 78
primitívna, 78
základná, 78
podiel
funkcií, 81
postupností, 40
čísel, 24
podmienka
Cauchy–Bolzanova
konvergencie radu, 55
kovergencie postupnosti, 42
existencie lokálneho extrému funkcie
nutná, 150
postačujúca, 151
konvergencie radu
nutná, 55
nutná, 6
postačujúca, 6
podmnožina, 14
podpostupnosť, 39
poldotyčnica ku grafu funkcie
pravá, 122
ľavá, 122
polomer
okolia, 33
polynóm, 84
Maclaurinov, 145
Taylorov, 145
postupnosť, 20
divergentná, 41
do $\pm\infty$, 41
geometrická, 46
klesajúca, 39
konvergentná, 41
konverguje, 41
konštantná, 39
monotónna, 39
rýdzo, 39
neklesajúca, 39
neohraničená, 39
zdola, 39
zhora, 39
nerastúca, 39
ohraničená, 39
zdola, 39

zhora, 39
oscilujúca, 41
rastúca, 39
reálna, 39
reálnych čísel, 39
stacionárna, 39
vybraná, 39
zadaná explicitne, 39
zadaná rekurentne, 39
zadaná všeobecným vzorcom, 39
čiastočných súčtov radu, 53
poučka, 10
počiatok
súradnicovej sústavy, 71
súradnicového systému, 71, 74
pravda, 6
pravidlo, 10
l'Hospitalovo, 140
odlúčenia, 7
modus ponens, 7
modus tollens, 7
substitúcie, 7
premenná, 5
nezávislá, 17, 71
závislá, 17, 71
prerovnanie
radu, 64
prienik množín, 15
priestor
euklidovský, 36
princíp
Cantorov, 28
Cauchy–Bolzanov
konvergencie radu, 55
kovergencie postupnosti, 42
súvislosti, 27
produkt, 13
prvok
jednotkový, 24
maximálny, 25
minimálny, 25
množiny, 14
najmenší, 25
najväčší, 25
nulový, 24
pól súradnicového systému, 74
Raabe, W., 61
rad
alternujúci, 62
anharmonický, 63
divergentný, 53
do $\pm\infty$, 53
geometrický, 54
harmonický, 54
konvergentný, 53
absolútne, 61
neabsolútne, 61
relatívne, 61
nekonečný číselný, 52
oscilujúci, 53
prerovnaný, 64
Riemannov, 57
s nezápornými členmi, 57
so striedavými znamienkami, 62
zadaný explicitne, 52
zadaný rekurentne, 52
zadaný všeobecným vzorcom, 52
číselný, 52
radián, 86
relácia
binárna, 16
ekvivalencie, 16
usporiadanie, 24
reštrikcia
funkcie, 81
Rolle, M., 137
rovnosť
funkcií, 18, 80
asymptotická, 100
na množine, 18
množín, 14
postupností, 39
usporiadaných dvojíc, 15
zobrazení, 18
na množine, 18
čísel, 23
rozdiel
funkcií, 81
množín, 15
postupností, 40
radov, 56
symetrický množín, 15

čísel, 24
rádiusvektor, 74

signum čísla, 30
skladanie funkcií, 81
skok funkcie, 109
smernica
priamky, 75, 121
spojitosť
funkcie
jednostranná, 111
sprievodič bodu, 74
stred
Taylorovho polynómu, 145
stupeň
polynómu, 84
uhlový, 86
substitúcia, 81, 98
suma, 12
suprémum
funkcie, 75
na množine, 75
množiny, 25
surjekcia, 17, 72
systém
množín, 14
polárnych súradníc, 74
súradnicový, 71
karteziánsky, 71
polárny, 74
pravouhlý, 71
sínus, 86
sínus hyperbolický, 89
sínusoida, 86
súradnica, 71
x-ová, 71
y-ová, 71
súčet
funkcií, 81
množín, 15, 32
postupností, 40
radov, 56
radu, 53
čiastočný, 53
čísel, 23
súčin
funkcií, 81
karteziánsky množín, 15
množín, 32
postupností, 40
skalárny, 37
čísel, 24
sčítanie
čísel, 23

tabuľka
pravdivostných hodnôt, 7
zadania funkcie, 73
tangens, 86
tangens hyperbolický, 89
tangenta, 86
tautológia, 7
Taylor, B., 145
Taylorov polynóm, 145
Taylorov vzorec, 145
tvrdenie, 10

uhol
orientovaný, 86
polárny bodu, 74
usporiadanie
funkcií, 80
čísel menší, 24
čísel väčší, 24
usporiadaná
dvojica, 15
n-tica, 15
uzáver množiny, 35

vektor, 37
jednotkový, 37
normovaný, 37
n-rozmerný, 37
veta, 10
Bolzano–Weierstrasseho, 44
Cauchyho, 139
Cauchyho o nulovom bode, 113
Lagrangeova, 137
matematická, 5
o derivácii inverznej funkcie, 124
o derivácii zloženej funkcie, 125
o existencii a jednoznačnosti diferenciálu, 131

o limite zloženej funkcie, 98
o logaritmickej derivácii, 126
o lokálnej ohraničenosti spojitej funkcie, 111
o medzihodnote, 115
o najlepšej lokálnej aproximácii funkcie polynómom stupňa n, 146
o najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii funkcie, 132
o prírastku funkcie, 138
o spojitosti inverznej funkcie, 117
o spojitosti zloženej funkcie, 110
o strednej hodnote, 137
Cauchyho, 139
Lagrangeova, 137
Rolleho, 137
o zovretí, 45, 96, 110
Riemannova o prerovnaní radu, 65
Rolleho, 137
Weierstrasseho, 112
vlastnosť
Archimedova, 28
vnútro
množiny, 34
vonkajšok
množiny, 34
vzdialenosť
vektorov, 38
vzor
zobrazenia, 17
vzorec
Leibnizov, 135
Moivreov, 90
súčtový
pre cyklometrické funkcie, 88
pre sin a cos, 87
pre sinh a cosh, 90
pre tg a cotg, 87
pre tgh a cotgh, 90
Taylorov, 145
výraz, 5
jednoduchý, 5
neurčitý, 105
zložený, 5
výrok, 5
kvantifikovaný, 8
nepravdivý, 5, 6
pravdivý, 5, 6
zložený, 6

zjednotenie množín, 15
zlomok, 24
zloženie
zobrazení, 18
zložka
vnútorná
zloženej funkcie, 81
zloženého zobrazenia, 18
vonkajšia
zloženej funkcie, 81
zloženého zobrazenia, 18
zobrazenie
bijektívne, 17
do množiny, 17
identické, 19
injektívne, 17
inverzné, 19
jednojednoznačné, 17
množín, 17
na množinu, 17
prosté, 17
surjektívne, 17
zložené, 18
zvyšok
Cauchyho, 146
Lagrangeov, 146
radu, 53
Taylorovho vzorca, 145
Cauchyho tvar, 146
Lagrangeov tvar, 146
zákon
asociatívny, 8, 24
distributívny, 8, 24
dvojitej negácie, 7
hypotetického sylogizmu, 8
komutatívny, 8, 24
sporu, 7
transpozície, 8
vylúčenia tretieho, 7
zákony
de Morganove, 8, 16
zúženie

funkcie, 81

člen
postupnosti, 20, 39
explicitný tvar, 39
všeobecný tvar, 39
radu, 52
číslo, 23
celé, 25
Eulerovo, 47
inverzné, 24
iracionálne, 25
jednotka, 24
kladné, 24
Ludolfovo, 86
nekladné, 24
nezáporné, 24
nula, 24
obrátené, 24
opačné, 24
prirodzené, 25
racionálne, 25
reálne, 23
záporné, 24

štruktúra
topologická, 32

Literatúra

[1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2000.

[2] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej analýzy,* Bratislava, ŠNTL 1955.

[3] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I,* Praha, SNTL ALFA 1985.

[4] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов,* издание пятое, Москва, НАУКА 1966.

[5] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* издание девятое, Москва, Издательство НАУКА 1977.

[6] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1., 2., 3. a 4. časť,* Bratislava, ALFA 1970–72.

[7] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky,* Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.

[8] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. a II. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[9] Holenda J., *Řady,* Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.

[10] Horský Z., *Diferenciální počet,* Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.

[11] Hruša K., Kraemer E., Sedláček J., Vyšín J., Zelinka R., *Přehled elementární matematiky,* Praha, SNTL 1957.

[12] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1982.

[13] Kluvánek I., *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet, I. časť,* skriptá VŠDS, Žilina 1991.

[14] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel,* Bratislava, SVTL 1965.

[15] Kolář J., Štěpánková O., Chytil M., *Logika, algebry a grafy,* Praha, SNTL 1989.

[16] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I (A—L) a II (M—Ž),* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.

[17] Míka S., *Numerické metody algebry,* Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.

[18] Mikola M., *Algebra,* 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina 1998.

[19] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky,* Praha, SNTL 1976.

[20] Prágerová A., *Cvičení z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1987.

[21] Přikryl P., *Numerické metody matematické analýzy,* Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.

[22] Šilov G. J., *Matematická analýza,* Bratislava, ALFA 1974.

[23] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej,* Bratislava, ALFA SNTL 1987.

[24] Výborný R., *Matematická indukce,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1963.

[25] Blaško, R., *Matematická analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb`, 2004.

[26] Drexel University, Math Forum, `http://mathforum.org/`.

[27] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, `http://members.aol.com/jeff570/mathword.html`.

[28] Elsevier Mathematics, `http://www.elseviermathematics.com/mathematicsweb/show/Index.htt`.

[29] EMIS, The European Mathematical Information Service, `http://www.emis.de/`.

[30] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, `http://www.mathcurve.com/`.

[31] Excellent Matematika, `http://matematika.host.sk/index2.htm`.

[32] Geometry the online learning center, `http://www.geometry.net/`.

[33] On-line Mathematics Dictionary, `http://pax.st.usm.edu/cmi/inform_html/glossary.html`.

[34] The Math Forum, Internet Mathematics Library, `http://mathforum.org/library/`.

[35] Turnbull WWW Server, `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/`.

[36] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`.

[37] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/`.

RNDr. Rudolf Blaško, PhD.

MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

Vydala Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
v edičnom rade VYSOKOŠKOLSKÉ UČEBNICE

Vedecký redaktor prof. RNDr. Josef Diblík, DrSc.
Zodp. red. PhDr. Katarína Šimánková
Tech. redaktor a návrh obálky autor
Grafická úprava obálky Juraj Zbýňovec

Vytlačilo EDIS–vydavateľstvo ŽU, J. M. Hurbana 15, Žilina
v decembri 2009 ako svoju 2751. publikáciu
192 strán, 112 obrázkov, 14 tabuliek, AH 13,80, VH 14,26
prvé vydanie, náklad 300 výtlačkov
ISBN 978-80-554-0119-5