Matematická analýza podporována wxMaxima

Summer School Open Source

Innovative Open Source courses for Computer Science

Rudolf Blaško

2021

Funded by
the European Union

Obsah

Úvod do wxMaxima

wxMaxima je dialogové rozhraní pro systém počítačové algebry Maxima. wxMaxima nabízí menu a dialogová okna pro běžné příkazy, automatické dokončování, vložené grafy a jednoduché animace. wxMaxima je distribuován pod licencí GPL. Maxima patří mezi Open Source programy s otevřeným zdrojovým kódem. Program je možné kompilovat v různých OS, včetně Windows, GNU/Linuxu a MacOS X. Předkompilovanými program pro GNU/-Linux a Windows lze bezplatně získat na stránce SourceForge `https://sourceforge.net/projects/maxima/files/`. Po spuštění prostředí wxMaxima se na obrazovce objeví okno s menu v horní části. Pod menu se nachází prostor, kde můžeme zadávat příkazy a kde se objevují výstupy.

(%i1) `First input line.`
(%o1) *First output line.*
(%i2) `Second input line.`
(%o2) *Second output line.*

Příkazy zadáváme na samostatné řádky (vstupní řádky), jejich provedení se zajistí současným stiskem kláves `Shift` a `Enter` nebo kliknutím v menu na ikonu (Send the current cell to maxima). Vstupní řádky jsou uvedeny oznámením (%i1) a výstupní řádky jsou uvedeny oznámením (%o1). Čísla pro vstupní a k němu odpovídající výstupní řádek jsou identické a na základě tohoto čísla se můžeme na obsah těchto řádků odvolávat.

(%i1) `solve(0=x+2,x);`
(%o1) $[x = -2]$
(%i2) `%i1;`
(%o2) $solve(0 = x + 2, x)$
(%i3) `%o1;`
(%o3) $[x = -2]$

Příkazy se provedou na nové samostatmé řádky (výstupní řádky). Příkazy na vstupních řádcích můžeme ukončit symbolem `;` (který systém automaticky doplní) nebo symbolem `$`, který potlačí zobrazení příslušného výstupu. Na vstupní řádek můžeme zadat i více příkazů, ale musíme je oddělit symboly `;` nebo `$`. Příkaz můžeme také strukturovat na více vstupních řádků.

(%i1) `a:2;b:3;solve(a*x+b*x^2=0,x)`
(a) 2
(b) 3
(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$
(%i2) `a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);`
(%o2) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$
(%i3) `a:2$`
`b:3$`
`solve(a*x+b*x^2=0,x);`
(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup můžeme uložit v různých tvarech a následně použít v jiných programech (LaTeX, editor rovnic MSWord, ...). Výstup (%o3) z předchozího okna můžeme:

- kopírovat (`CRL C` a `CRL V`), resp. kopírovat jako text (lze použít např. pro editor rovnic MSWord): `x=-2/3, x=0`,
- kopírovat jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- kopírovat jako MathML, obrázek, RTF, SVG...

Prostředí wxMaxima má dobře propracovaný help pro uživatele, který najdeme v menu `Help`. Help otevřeme také stisknutím klávesy `F1`. Manuál najdeme také na webové stránce `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základní příkazy

Příkazem `apropos` můžeme zjistit přesný název příkazu pomocí části jeho názvu.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

Příkaz `describe` vypíše popis zadaného příkazu.

```
(%i1) describe(plot2d);
      --Function: plot2d
        plot2d (<expr><, <range_x><, <options><)
        plot2d (<expr_<>=<expr_<>, <range_x><, <range_y><, <options><)
        ...
(%o1) true
```

Výrazy se zadávají pomocí obvyklých znaků operací, relací a funkcí. Argumenty funkcí a příkazů jsou v kulatých závorkách, symbol násobení `*` se musí zadat! Umocnění se zadává znakem `^` nebo dvojicí `**`.

Symbol `:` slouží k přiřazení hodnoty napravo výrazu na nalevo.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```
(%o1) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

V menu `View` a podmenu `Display Equations` můžeme změnit zobrazení výstupních řádků na tvary `in 2D`, `as 1D ASCII` nebo `as ASCII Art`. Implicitně je nastaveno `in 2D`. Nastavení výstupu můžeme změnit i příkazem `set_display`. Nastavení na tvar `in 2D` má argument `none`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$
```
(%o1) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ `/* in 2D */`

Pomocí argumentu `ascii` v příkazu `set_display` změníme výstup na tvar `as 1D ASCII` a pomocí argumentu `xml` na tvar `as ASCII Art`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
(%o1) x/sqrt(x^2 + 1)        /* as 1D ASCII */
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
          x
(%o2) ------------          /* as ASCII Art */
            2
      sqrt(x  +1)
```

Příkazem `kill` můžeme odstranit proměnné se všemi jejich parametry a vlastnostmi z paměti.

```
(%i1) kill(a,b)          /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all)          /* removes all items on all infolists */
```

Práce s čísly a základní konstanty

Maxima může pracovat s reálnými čísly zapsanými v numerickém nebo symbolickém tvaru. Způsob zápisu reálných čísel můžeme nastavit v menu `Numeric` pomocí přepínače `Numeric Output` mezi numerickým a symbolickým zobrazováním. Také zde můžeme zvolit způsob a presnosnosť numerického zobrazování. O způsobu zobrazování rozhoduje nastavení proměnné `numer`.

Standardně se zobrazuje 16 číslic (včetně desetinné tečky). Přesnost zobrazení definuje proměnná `fpproc` a ovlivňuje zobrazení pomocí `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje vždy stejně. Přesnost můžeme prakticky neomezeně zvýšit nebo snížit. Můžeme ji změnit globálně a také lokálně pouze pro jednu přeměnu nebo příkaz.

```
(%i1) log(2);
(%o1) log(2)
(%i2) log(2),numer;
(%o2) 0.6931471805599453
(%i3) float(log(2));
(%o3) 0.6931471805599453
(%i4) bfloat(log(2));
(%o4) 6.931471805599453b-1
(%i5) log(2),bfloat;
(%o5) 6.931471805599453b-1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=34;
(%o6) 6.931471805599453094172321214581766b-1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=134;
(%o6) 6.931471805599453094172321214[78digits]102057068573368552023575813b-1
```

Číselné konstanty e, π, i (imaginární jednotka) mají prefix `%`, t.j. `%e`, `%pi`,`%i`. To platí i pro konstanty, které jsou součástí nebo výsledkem výpočtů. Také mají prefix `%`.

Maxima má předdefinované konstanty `inf`, `minf` pro reálné nekonečná ∞, $-\infty$ a `infinity` pro komplexní nekonečno.

Logické konstanty `true` a `false` představují pravdu a nepravdu.

```
(%i1) %pi; %i; %e;
(%o1) π %i %e
(%i2) minf; inf;
(%o2) −∞ ∞
(%i3) infinity;
(%o3) infinity
```

Komplexním číslům se v tomto kurzu nevěnujeme, proto pouze zmíníme jak se zobrazují. Komplexní čísla se implicitně zadávají algebraickém tvaru (`rectform`). Do goniometrického (exponenciálního) tvaru je můžeme převést pomocí příkazu `polarform`.

```
(%i1) z:1+%i;
(z)   i+1
(%i2) polarform(z)+rectform(z);
(%o2) √2 e^(iπ/4) +i+1
```

Přiřazení a funkce

Operátor `:` používáme na přiřazení hodnot nebo výrazů proměnným. Funkce definujeme pomocí přiřazení `:=`.

```
(%i1) f(x):=x^2+2*x+3;
(%o1) f(x) := x^2 + 2 * x + 3
(%i6) f(x);f(y);f(x+1);f(-2);f(1);
(%o2) x^2 + 2 * x + 3
(%o3) y^2 + 2 * y + 3
(%o4) (x + 1)^2 + 2 * (x + 1) + 3
(%o5) 3
(%o6) 6
```

Maxima obsahuje mnohem více funkcí než standardní programovací jazyky. Jsou to nejen samotné reálné funkce, ale také různé funkce pro jejich podporu. Mezi základní funkce patří `sign(x)`, `abs(x)`, `floor(x)` (dolní celá část čísla x), `round(x)` (zaokrouhlí x na nejbližší celé číslo), `truncate(x)` (odstraní všechny číslice za desetinnou tečkou), `ceiling(x)` (horní celá část čísla x).

```
(%i2) f(x):=sign(x)$ print(f(-3.2),f(0),f(3.2))$
      neg zero pos
(%i4) f(x):=abs(x)$ print(f(-3.2),f(0),f(3.2))$
      3.2 0 3.2
(%i6) f(x):=floor(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
```

```
         −4 −4 −1 0 1 3 3
(%i8)  f(x):=round(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
         −4 −3 −1 0 1 3 4
(%i10) f(x):=truncate(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
         −3 −3 −1 0 1 3 3
(%i12) f(x):=ceiling(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
         −3 −3 −1 0 1 4 4
```

Pro formátování výpisu jsme použili příkaz `print`.

```
(%i3)  a:2$ b:log(2),numer$ print("Logarithm of a number",a," is ",log(a),"=",b)$
         Logarithm of a number 2 is log(2) = 0.6931471805599453
```

Maxima obsahuje mnoho elementárních funkcí. Jsou to například `exp(x)=%e^x`, `log(x)`, goniometrické funkce a k nim inverzní funkce `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`, `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`, hyperbolické a k nim inverzní funkce `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)` atd.

Maxima obsahuje také mnoho funkcí pro jejich podporu. Některé z nich nejsou implementovány přímo v prostředí wxMaxima, ale v externích knihovnách nazývaných balíčky (packages). Tyto balíčky se do systému načítají pomocí příkazu `load`. Na ukázku uvedeme balíček `spangle` pro podporu práce s goniometrická funkce.

```
(%i2)  print(tan(%pi/8),ratsimp(tan(%pi/8)),trigsimp(tan(%pi/8)))$
```

$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

```
(%i3)  load(spangl);
```

(%o3) *../share/trigonometry/spangl.mac*

```
(%i4)  tan(%pi/8);
```

(%o4) $\sqrt{2}-1$

Práce s výrazy

Operace a výpočty programu Maxima probíhají v nějakém prostředí, ve kterém systém předpokládá platnost určitých podmínek. Tyto podmínky můžeme měnit. Mnohokrát potřebujeme změnit podmínky pouze lokálně pro nějaký konkrétní výpočet aniž abychom měnili globální nastavení. K tomuto účelu posytuje Maxima velmi účinný příkaz `ev`, který umožňuje definovat specifické prostředí v rámci jednoho příkazu.

Po zadání příkazu `ev(a,b1,b2,...,bn)` se vyhodnotí výraz `a` při splnění podmínek `b1`, `b2`, . . . , `bn`. Tyto podmínky mohou být rovnice, přiřazení, funkce, přepínače (logické nastavení). Na ukázku uvádíme příklad řešení kvadratické rovnice pomocí příkazu `solve`. Proměnné `a`, `b`, `c` po provedení příkazu `ev` nemají přiřazené hodnoty.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x = \frac{3}{2}, x = -1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $\left[x = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, \ x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\right]$

Na zjednodušení a úpravy různých výrazů nabízí Maxima několik příkazů. Základní funkce najdeme v menu `Simplify`. S příkazy `ratsimp` a `trigsimp` jsme se již setkali a při úpravě hodnoty `tan(%pi/8)` neměli žádoucí efekt.

Maxima nabízí pomocí příkazu `example` příklady k jednotlivým příkazům. Podívejme se na některé ukázky, které nabízí `example(ratsimp)`.

(%i2) `f(x):=b*(a/b-x)+b*x+a$ print(f(x),"?",ratsimp(f(x)))$`

$bx + b(\frac{a}{b} - x) + a \ \ ? \ \ 2a$

(%i3) `ratsimp(a+1/a);`

(%o3) $\frac{a^2+1}{a}$

(%i4) `ev(x^(a+1/a),ratsimp);`

(%o4) $x^{a+\frac{1}{a}}$

(%i5) `ev(x^(a+1/a),ratsimpexpons);`

(%o5) $x^{\frac{a^2+1}{a}}$

Funkce `expand` roznásobí příslušné členy ve výrazu. Funkce `factor` daný výraz naopak rozloží. Funkce `gfactor` tak činí nad polem komplexních čísel.

(%i1) `f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$`
(%i3) `ratsimp(f(x));expand(f(x));`
(%o2) $x^5 + x^4 - 16x - 16$
(%o3) $x^5 + x^4 - 16x - 16$
(%i6) `factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);`
(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$
(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%\mathrm{i})(x+2\%\mathrm{i})$
(%o6) $2^2 5^2$

Racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky pomocí příkazu `partfrac`.

(%i1) `partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);`

(%o1) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

Substituovat výrazy můžeme pomocí příkazů `subst(a,b,c)` a `ratsubst(a,b,c)`. Výraz `a` bude nahrazen za výraz `b` a následně dosazen do výrazu `c`. Při použití příkazu `subst` musí být `b` nejjednodušší částí (atomem) nebo kompletním podvýrazom výrazu `c`. V příkladu není podvýraz `x+y` kompletní (chybí `z`). Příkaz `ratsubst` výsledný výraz i upraví.

```
(%i2) subst(x+y,a,a^2+b^2);ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);
```
(%o1) $(y+x)^2+b^2$

(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$

```
(%i4) subst(a,x+y,x+y+z);ratsubst(a,x+y,x+y+z);
```
(%o3) $z+y+x$

(%o4) $z+a$

Limity a derivování

V menu `Calulus` najdeme funkce na řešení základních úloh matematické analýzy (limity, derivování, integrování, součty řad, rozklad funkce do Taylorova polynomu...).

Limity počítáme pomocí příkazu `limit`. Poslední parametr určuje směr jednostranných limit, má hodnoty `plus`, resp. `minus` a je nepovinný. Pokud není určen, Maxima počítá limitu jako komplexní. Příkazy `limit(f(x),x,a)`, `limit(f(x),x,a,plus)` vypočítáme limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

```
(%i4) limit(1/x,x,0);limit(1/x,x,0,plus);limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,t,0);
```
(%o1) $infinity$

(%o2) ∞

(%o3) $-\infty$

(%o4) $\frac{1}{x}$

Pokud použijeme před příkazem apostrof `'`, příkaz se neprovede, pouze zobrazí.

```
(%i2) limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);'limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
```
(%o1) 0

(%o2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-n}{3n+1}\right)^{4n+1}$

Derivace počítáme pomocí příkazu `diff`. Parametr, který určuje rád derivace je nepovinný.

```
(%i4) f(x):=2*x^4-3*x+sin(x);
      print("f'=",diff(f(x),x),"=",diff(f(x),x,1))$
      print("f''=",diff(diff(f(x),x),x),"=",diff(f(x),x,2),"=",diff(f(x),x,1,x,1))$
      print("f^(10)=",diff(f(x),x,10),"=",diff(f(x),x,1,x,9))$
```
(%o1) $f(x):=2x^4-3x+\sin(x)$

$f' = \cos(x)+8x^3-3 = \cos(x)+8x^3-3$

$f'' = 24x^2-\sin(x) = 24x^2-\sin(x) = 24x^2-\sin(x)$

$f\_(10) = -\sin(x) = -\sin(x)$

Parciální derivace počítáme pomocí stejného příkazu.

```
(%i3) g(x,y):=x^3*y^2-1;
      print("g'_x=",diff(g(x,y),x),", resp. g'_y=",diff(g(x,y),y,1))$
      print("g''_(xx)=",diff(g(x,y),x,2),", resp. g''_(yx)=",diff(g(x,y),y,1,x,1))$
(%o1) g(x,y):=x^3*y^2-1
```
$g'\_x = 3x^2y^2, resp.\ g'\_y = 2x^3y$

$g''\_(xx) = 6xy^2, resp.\ g''\_(yx) = 6x^2y$

Taylorův polynom n-tého stupně vypočítáme pomocí příkazu `taylor`. Tento příkaz najdeme v menu `Calculus` a podmenu`Get Series...`. Taylorova řada funkce f stupně n v středu c vypočítáme příkazem `taylor(f(x),x,c,n)`. Jeho koeficienty dostaneme použitím příkazu `coeff`. Použití tohoto příkazu je závislé na příkazu `taylor`.

```
(%i1) t1:taylor(sin(x),x,0,5); t2:taylor(sin(x),x,-1,5);
```
(t1) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$

(t2) $-\sin(1) + \cos(1)(x+1) + \frac{\sin(1)(x+1)^2}{2} - \frac{\cos(1)(x+1)^3}{6} - \frac{\sin(1)(x+1)^4}{24} + \frac{\cos(1)(x+1)^5}{120} + \cdots$

```
(%i3) print(coeff(sin(x),x,5)," and ",coeff(t1,x,5)," and ",coeff(t2,x,5))$
```
$0\ and\ \frac{1}{120}\ and\ \frac{\cos(1)}{120}$

Taylorův polynom polynomu je opět polynom, pouze je vyjádřen v jiném tvaru. Prakticky se změní pouze souřadnicový systém, ve kterém polynom vyjadřujeme. Začátek systému se posune z bodu 0 do bodu -1. V následujícím příkladu je Taylorův polynom daného polynomu vypočítaný i jiným způsobem. Příkaz `taylor` dává na konec tři tečky, i když je rozvoj uzavřen.

```
(%i1) f(x):=2*x^5-x^4-3*x^3-x+1;
```
(%o1) $f(x) := 2x^5 - x^4 + (-3)x^3 - x + 1$
```
(%i2) tp1:taylor(f(x),x,-1,5);
```
(tp1) $2 + 4(x+1) - 17(x+1)^2 + 21(x+1)^3 - 11(x+1)^4 + 2(x+1)^5 + \cdots$
```
(%i4) ratsimp(tp1);expand(tp1);
```
(%o3) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

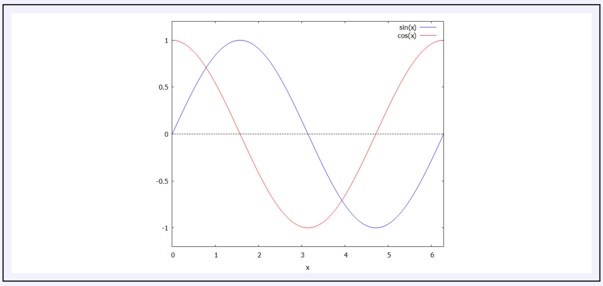
(%o4) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$
```
(%i6) tpx:ratsubst(t,x+1,f(x));subst(x+1,t,tpx);
```
(tpx) $2t^5 - 11t^4 + 21t^3 - 17t^2 + 4t + 2$

(tp2) $2(x+1)^5 - 11(x+1)^4 + 21(x+1)^3 - 17(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$
```
(%i7) tp1-tp2;
```
(%o7) $0 + \cdots$

Grafy funkcí

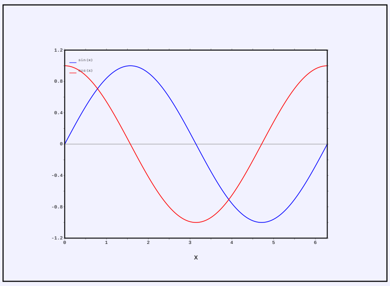
Graf funkce můžeme vykreslit několika způsoby. Nejjednodušší je zvolit v menu `Plot` podmenu `Plot 2d...`. Pokud zvolíme `Format=gnuplot`, funkci vykreslí příkaz `plot2d` pomocí Open Source programu `gnuplot` do nového okna. `gnuplot` se automaticky instaluje spolu s programem Maxima.

(%i1) `plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],[plot_format, gnuplot])$`



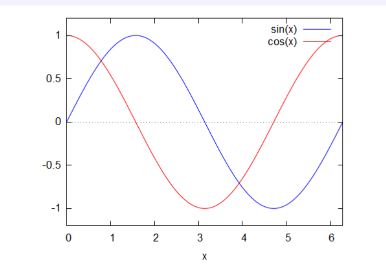
Pokud zvolíme `Format=wxmaxima`, Maxima vykreslí graf pomocí příkazu `plot2d` do nového okna. Obrázek můžeme uložit pouze do postscriptu.

(%i1) `plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],[plot_format, xmaxima])$`



Pokud zvolíme `Format=inline`, Maxima vykreslí graf pomocí příkazu `wxplot2d` do svého prostředí.

(%i1) `wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2])$`



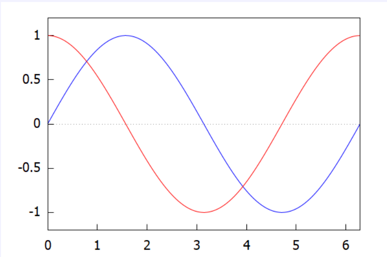
(%o1)

Příkazy `plot2d` a `wxplot2d` mají stejnou syntaxi a mají mnohem více parametrů. Parametry můžeme zjistit například příkazem `describe(plot2d)`.

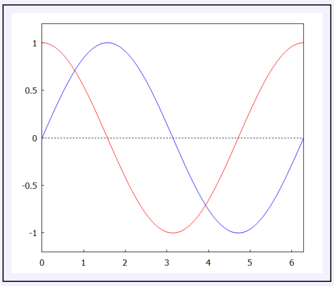
Na tisk grafu funkcí je výhodnější použít příkaz `wxdraw2d` nebo `draw2d`, který je vhodné směřovat na výstup programu `gnuplot`. Tyto příkazy mají trochu jinou syntaxi jako příkazy `wxplot2d`, resp. `plot2d`. Parametry tisku jsou v nich jednodušší a přehlednější. Vykreslována funkce musí být umístěna v příkazu `explicit`, `parametric` nebo `implicit`.

(%i1)
```
wxdraw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

(%o1)

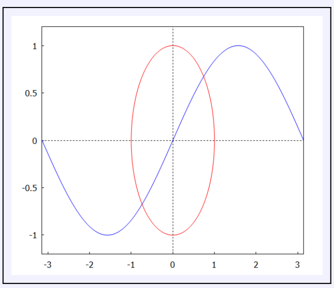


(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```



Parametrickou křivku nebo funkci vykreslíme podobným způsobem.

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
color=red,nticks=300,parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))$
```



Posloupnosti a rady

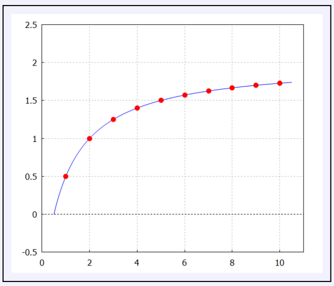
Posloupnosti můžeme v programu Maxima vytvořit například pomocí příkazu `makelist` nebo příkazy cyklu `for - do`.

Příkaz `makelist` vytvoří seznam, který můžeme zobrazit i jako celek i po členech.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 199
```

Uspořádané dvojice se dávají do hranatých závorek a můžeme je zobrazovat jako body v rovině. V následujícím příkladu je vygenerována posloupnost i se svými vzory a následně vykreslena příkazem `draw2d`.

```
(%i1) S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);
(S1)  [[1, 1/2], [2, 1], [3, 5/4], [4, 7/5], [5, 3/2], [6, 11/7], [7, 13/8], [8, 5/3], [9, 17/10], [10, 19/11]]
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
      color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
      point_type=7,color=red,points(S1))$
```



Pomocí příkazů `for` – `do` vypíšeme několik členů posloupnosti $\left\{2n^2-1\right\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 12 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
1
7
17
31
49
71
97
127
161
199
241
287
```

Pěkným příkladem použití příkazů `for – do` je Fibonacciho posloupnost.

```
(%i3) a0:0$ a1:1$ (for i:1 thru 12 do (an:a1+a0, print(an), a1:a0, a0:an))$
1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89
144
```

Konečný i nekonečný součet vypočítáme pomocí příkazu `sum`.

```
(%i1) sum(2*n^2-1,n,1,8);
(%o1) 400
```

Pomocí tohoto příkazu dokáže Maxima vypočítat přesný součet některých nekonečných řad. Součet řady můžeme zadat v menu `Calculus` a podmenu `Vypočítat Sum...`.

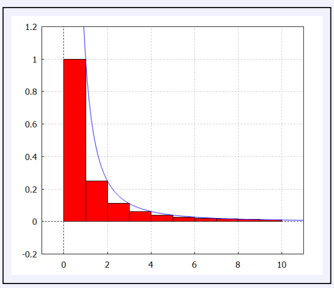
```
(%i2) sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum; sum(1/k^2,k,1,inf);
```

(%o1) $\frac{\pi^2}{6}$

(%o2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Číselná řada z předchozího příkladu může být graficky znázorněna následovně.

```
(%i1) a(n):=1/n^2$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,10)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1,11],yrange=[-0.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec,
color=blue,explicit(a(n),n,0,11))$
```



Posloupnosti

Posloupnost (reálných čísel) je každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy jsou reálná čísla $a_n \in R$ (t.j. zobrazení $N \to R$).

- **Explicitní zadání** (obecné vyjádření) člena a_n jako funkce proměnné n.
- **Rekurentní zadání** prvního člena a zadání a_n pomocí předchozích členy.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

- Explicitní zadání $a_n = 2n-1,\ n \in N$.
- Rekurentní zadání $a_1 = 1,\ A_{n+1} = a_n + 2,\ n \in N$.

```
(%i3) a(n):=2*n-1$ S:makelist(a(n),n,1,7);
(S)   [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i4) an:1$ (for n:1 thru 7 do (print(an),an:an+2))$
      1
      3
      5
      7
      9
      11
      13
```

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- **Ohraničená zdola**, pokud existuje $a \in R$ takové, že pro všechny $n \in N$ platí $a \leq a_n$.
- **Ohraničená shora**, pokud existuje $a \in R$ takové, že pro všechny $n \in N$ platí $a_n \leq a$.
- **Ohraničená**, pokud je ohraničená zdola a shora.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- **Neohraničená zdola**, pokud není ohraničená zdola.
- **Neohraničená shora**, pokud není ohraničená shora.
- **Neohraničená**, pokud není ohraničená,
  t.j. není ohraničená zdola nebo není ohraničena shora.

α A	alfa	a	η H	éta	é	ν N	ný	n	τ T	tau	t
β B	beta	b	ϑ Θ	théta	th	ξ Ξ	ksí (xí)	x	υ Υ	ypsilon	y
γ Γ	gama	g	ι I	ióta	i	o O	omikron	o	φ Φ	fí	f
δ Δ	delta	d	κ K	kappa	k	π Π	pí	p	χ X	chí	ch
ε E	epsilon	e	λ Λ	lambda	l	ρ P	ró	r	ψ Ψ	psí	ps
ζ Z	dzéta	dz	μ M	mí	m	σ Σ	sigma	s	ω Ω	omega	ó

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **monotónní**:

- **Rostoucí**, jestliže pro všechny $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- **Klesající**, jestliže pro všechny $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

$\Big\}$ **Ostře monotónní.**

- **Neklesající** jestliže pro všechny $n \in N$ platí $a_n \leq A_{n+1}$.
- **Nerostoucí** jestliže pro všechny $n \in N$ platí $a_n \geq A_{n+1}$.
- **Stacionární (konstantní)**, jestliže pro všechny $n \in N$ platí $a_n = a$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.
$\Rightarrow$ $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **podposloupnost (vybraná posloupnost)** z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$.

Podposloupnosti jsou např.

- $\{A_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

$A \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ se nazývá **hromadná hodnota posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
jestliže pro každé okolí $O(a)$ existuje nekonečně mnoho členů $a_n \in O(a)$.

Každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má alespoň jednu hromadnou hodnotu.

Označme symbolem E množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ se nazývá **limes superior (horní limita)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ se nazývá **limes inferior (dolní limita)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\inf E = \sup E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (E má jediný prvek) se nazývá **limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ existují vždy.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nemusí existovat. Pokud limita existuje, pak je jediná.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$ (existuje konečná).
  $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje k číslu** a,
  označení $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

  $\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje**, označení $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (existuje nekonečná).
  $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje do** $\pm\infty$,
  označení $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje. $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **osciluje**.

  $\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje**, označení $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

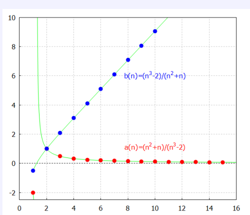
- **Konečný počet členů** nemá vliv na konvergenci, resp. divergenci posloupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$ Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$ Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      print("limit  a(n)=",limit(a(n),n,inf),"  limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,16],yrange=[-2.5,10],
      color=green,explicit(a(n),n,1,16),point_type=7,color=red,points(Sa),
        label(["a(n)=(n^2+n)/(n^3-2)",10,a(10)+1]),
      color=green,explicit(b(n),n,1,16),point_type=7,color=blue,points(Sb),
        label(["b(n)=(n^3-2)/(n^2+n)",10,6]))$
```

(%o1) $limita(n) = 0 \quad limitb(n) = \infty$



- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n^3}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4(1-n^{-1})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}} = \infty \cdot \frac{1-0}{1+0} = \infty \cdot 1 = \infty.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(1+n^{-1})}{n^2(1-2n^{-2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^{-1}}{1-2n^{-2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$

- $$\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \text{ pre } q>0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ 1 \text{ pre } q=0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ 0 \text{ pre } q<0\ (-q>0). \end{cases}$$

Geometrická posloupnost

- $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \text{ pre } q>1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ 1 \text{ pre } q=1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ 0 \text{ pre } q\in(0;1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q=-1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q<-1. \end{cases}$$

- Číslo e se nazývá **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je přibližně $2{,}718\,281\,827$.

$a_n > 0,\ n\in N.\ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokud limity existují).

$a_n \geq 0,\ n\in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a\in R^*.\ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a<1, \\ \infty & \text{pre } a>1. \end{cases}$

$a_n > 0,\ n\in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a\in R^*.\ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a<1, \\ \infty & \text{pre } a>1. \end{cases}$

Důležité limity.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a>0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{b}{n}\right)^n = \mathrm{e}^b$ pro $b\in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a$ pro $a>0$.

Číselné řady

Číselné řady úzce souvisejí s posloupnostmi a zobecňují pojem sčítání na nekonečný počet sčítanců. Jednoduchým příkladem jsou zlomky a periodické čísla.

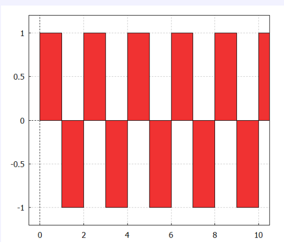
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \text{ se nazývá } \textbf{(nekonečný číselný) řada}.$$

Pro nekonečné řady neplatí některá pravidla platná pro konečné počty sčítanců. Neplatí např. asociativní zákon:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0, \\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \quad = 1+0+0+\cdots = 1. \end{cases}$$

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada.

- $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $k \in N$ se nazývá **k-tý částečný součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $r_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots$ se nazývá **k-tý zbytek řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **posloupnost částečných součtů řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Vztah mezi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájemně jednoznačný.

Pro $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

- $s_1 = a_1$.
- $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

  $\ldots$
- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.

- $a_1 = s_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
- $a_2 = s_2 - s_1$.
- $a_3 = s_3 - s_2$.
- $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (pokud existuje), označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$ (existuje konečná).

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje k součtu** s,

  označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

  $\Big\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ (existuje nekonečná).

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje do** $\pm\infty$,

  označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

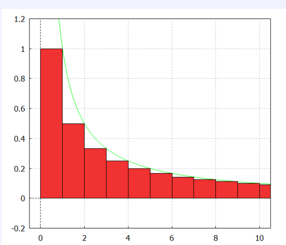
  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **osciluje (nemá součet)**.

  $\Big\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

(%i1)
```
a(n):=1/n$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.2,1.2],
color=green,explicit(a(n),n,.5,11),
border=true,color=black,fill_color=light_red,rec)$
```

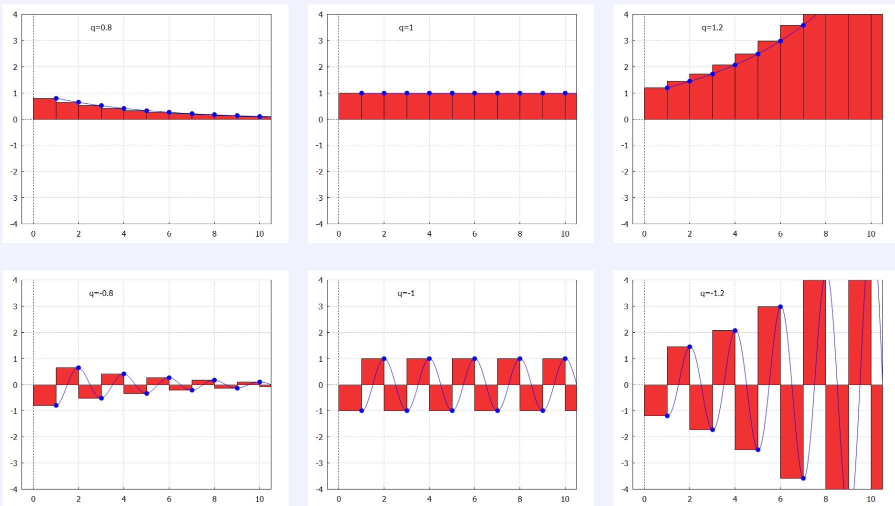


Geometrická řada

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$ pro všechny $q \in (-1; 1)$.

V následujícím příkladu stačí měnit na začátku hodnotu q.

(%i1)
```
q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
label([concat("q=",string(q)),3,3.5]), color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
point_type=7,color=blue,points(peca))$
```



$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1},\ s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = (q^{n-1} + \cdots + q + 1)\frac{q-1}{q-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{q^{n-1} - \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q}}.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{\infty-1}{q-1} = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \quad \text{pro } q > 1. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \quad \text{pro } q = 1. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}. & \Rightarrow \bullet\ \frac{1}{1-q} \quad \text{pre } q \in (-1;1). \\ -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{pro } q = -1. \\ \left.\begin{array}{l} \frac{q^{2k-1} - \frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{-\infty - \frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = -\infty \text{ pro } n = 2k. \\ \frac{q^{2k+1-1} - \frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{\infty - \frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \infty \text{ pro } n = 2k+1. \end{array}\right\} & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{pro } q < -1. \end{cases}$$

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$
      sq(1/2),simpsum; sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
(%i1) 1
(%i2) 1/2
(%i3) -1/3
(%i4) sum: sum is divergent.
```

Nutná podmínka konvergence řady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Neplatí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (osciluje nebo diverguje do $\pm\infty$).

- **Konečný počet členů** nemá vliv na konvergenci, resp. divergenci řady.
- **Konečný počet členů** má vliv na součet řady.

Číselné řady s nezápornými členy

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy ($a_n \geq 0$, $n \in N$) má vždy součet.

$0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$. $\Rightarrow$ • $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty$.

Srovnávací kritérium

$0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

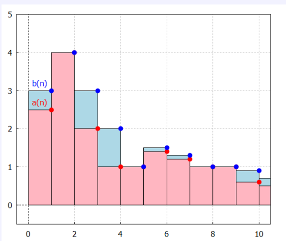
• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty$.

Limitní tvar

$0 < a_n \leq b_n,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;\infty).\ \Rightarrow\ \bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow. \quad \Leftrightarrow\ \bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

$\bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.\ \Leftrightarrow\ \bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

(%i1)
```
a:[2.5,4,2,1,1,1.4,1.2,1,1,0.6,0.5]$ pa:makelist([i,a[i]],i,1,11)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a[i]]),i,1,11)$
b:[3.0,4,3,2,1,1.5,1.3,1,1,0.9,0.7]$ pb:makelist([i,b[i]],i,1,11)$
rb:makelist(rectangle([i-1,0],[i,b[i]]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.5,5],
border=true,color=black,fill_color=light_blue,
rb,color=black,fill_color=light_pink,ra,
point_type=7,color=red,points(pa),point_type=7,color=blue,points(pb),
color=red,label(["a(n)",.5,2.7]),color=blue,label(["b(n)",.5,3.2]))$
```



Podílové d'Alembertovo kritérium

$a_n > 0,\ n \in N.\ \Rightarrow\ \bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ q \in (0;1),\ n \in N.\ \Rightarrow\ \bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

$\bullet\ 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.\ \Rightarrow\ \bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar

$a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.\ \Rightarrow\ \bullet\ p < 1.\ \Rightarrow\ \bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

$\bullet\ p > 1.\ \Rightarrow\ \bullet \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout o konvergenci nebo divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Odmocninové Cauchyovo kritérium

$a_n \geq 0,\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ q \in (0;1),\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$

• $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar

$a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p. \ \Rightarrow$ • $p < 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$

• $p > 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout o konvergenci nebo divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

• $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longmapsto \infty.$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longmapsto \text{pre } a > 0.$$

```
(%i4) an(n):=n^n/n!$ limit(an(n),n,inf,plus);
      limit(an(n+1)/an(n),n,inf,plus);
      limit((an(n))^(1/n),n,inf,plus);
(%o2) ∞
(%o3) e
(%o8) e
(%i9) an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
      limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
      limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%i7) 0
(%o8) 0
(%o9) 0
```

Absolutní, relativní konvergence a alternující rady

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselnou řadu.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow . \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{A}}.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow, \; \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty.$

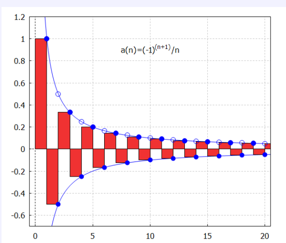
  $\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje relativně (neabsolútne)**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{R}}.$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{A}}$ (absolutně). $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (konverguje).

Leibnizovo kritérium

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerostoucí.} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow .$$

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)/n$ pa:makelist([i,a(i)],i,1,21)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,21)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,20.5],yrange=[-.7,1.2],
color=blue,explicit(abs(a(n)),n,.5,21),explicit(-abs(a(n)),n,.5,21),
border=true,color=black,fill_color=light_red,ra,
label(["a(n)=(-1)^{(n+1)}/n",10,.9]),
point_type=6,color=blue,points(abs(pa)),point_type=7,color=blue,points(pa))$
```



Anharmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{\text{R}} \ln 2.$

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t.j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- Množina $\{[x; y] \in R^2; x \in D(f),\ y = f(x)\}$ se nazývá **graf funkce** f.
- **Funkce reálné proměnné**, jestliže definiční obor $D(f) \subset R$.
- **Reálná funkce**, pokud obor hodnot $H(f) \subset R$.

$y = f(x)$, $x \in A$ se nazývá:

- **Injektívna (injekce, prostá)**, jestliže pro všechny $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$,

  t.j. z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne rovnost $x_1 = x_2$.
- **Surjektívna (surjekce, na množinu)**, pokud $f(A) = B$,

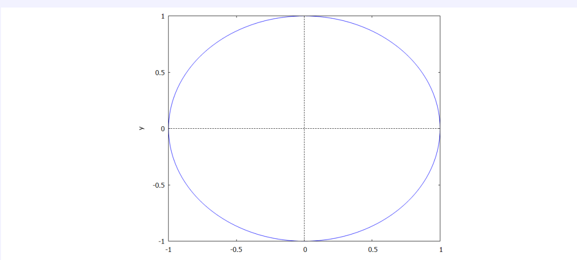
  t.j. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $y = f(x)$.
- **Bijektívna (bijekce)**, pokud je injektívna a surjektívna.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ se vyjadřuje:

- **Explicitně**, t.j. analyticky vzorcem $y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- **Parametricky** rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$, kde $\varphi, \psi\colon J \to R$. Parametr t má pomocný význam.
- **Implicitně** rovnicí $f(x, y) = 0$, kde $f\colon R^2 \to R$ a podmínkami pro $[x; y]$.

Pokud chceme v programu Maxima zobrazit funkci zadanou implicitně, musíme načíst knihovnu `implicit_plot`.

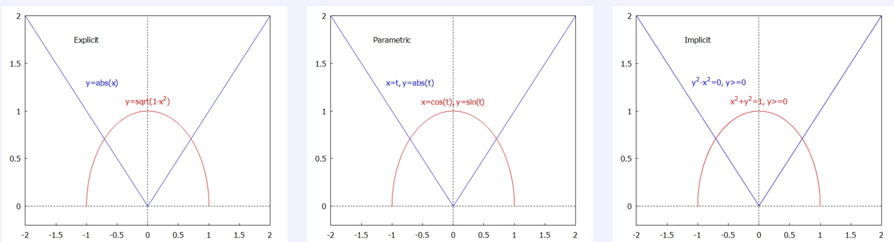
```
(%i1) load(implicit_plot);
(%o1) ../share/contrib/implicit_plot.lisp
(%i2) implicit_plot(x^2+y^2-1,[x,-1,1],[y,-1,1])$
      implicit_plot is now obsolete. Using plot2d instead:
         plot2d (y^2+x^2-1=0,[x,-1,1],[y,-1,1])
(%i2) plot2d(x^2+y^2-1=0,[x,-1,1],[y,-1,1])$     /* is correct */
```



Funkci f: $y = |x|$, $x \in R$ můžeme zadat např.:

- Explicitně: $y = \sqrt{x^2}$ resp. $y = \max\{-x, x\}$.
- Parametricky: $x = t,\ y = |t|\ t \in R,$ resp. $x = t,\ y = \sqrt{t^2},\ t \in R.$
- Implicitně: $y^2 - x^2 = 0,\ y \geq 0,$ resp. $y - |x| = 0.$

```
(%i1) load(implicit_plot)$
(%i2) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,explicit(abs(x),x,-2,2),label(["y=abs(x)",-.75,1.3]),
      color=red,explicit(sqrt(1-x^2),x,-1,1),label(["y=sqrt(1-x^2)",0,1.1]),
      color=black,label(["Explicit",-1,1.75]))$
(%i3) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,parametric(t,abs(t),t,-2,2),label(["x=t, y=abs(t)",-.7,1.3]),
      color=red,nticks=100,parametric(cos(t),sin(t),t,0,%pi),
      label(["x=cos(t), y=sin(t)",0,1.1]),
      color=black,label(["Parametric",-1,1.75]))$
(%i4) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,implicit(y^2-x^2,x,-2,2,y,0,2),label(["y^2-x^2=0, y>=0",-.65,1.3]),
      color=red,implicit(x^2+y^2-1,x,-1,1,y,0,1),label(["x^2+y^2=1, y>=0",0,1.1]),
      color=black,label(["Implicit",-1,1.75]))$
```



$y = f(x)$, $x \in D(f)$ se nazývá **na množině** $A \subset D(f)$:

- **Ohraničená zdola**, pokud existuje $a \in R$ takové, že pro všechny $x \in A$ platí $a \leq f(x)$.
- **Ohraničená shora**, pokud existuje $a \in R$ takové, že pro všechny $x \in A$ platí $f(x) \leq a$.
- **Ohraničená**, pokud je ohraničená zdola a shora na množině A,
  t.j. pokud existují $a_1, a_2 \in R$ takové, že pro všechny $x \in A$ platí $a_1 \leq f(x) \leq a_2$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ se nazývá **na množině** $A \subset D(f)$:

- **Neohraničená zdola**, pokud není ohraničená zdola na množině A,
- **Neohraničená shora**, pokud není ohraničena shora na množině A,
- **Neohraničená**, pokud není ohraničena na množině A,
  t.j. je neohraničená zdola nebo je neohraničená shora.

- $A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$. $\Rightarrow$ **Lokální vlastnost.**
- $A = D(f)$. $\Rightarrow$ **Globální vlastnost** na celém $D(f)$.

Slova na množině $D(f)$ většinou vynecháváme.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$:

- $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf\{f(x); x\in A\} = \inf f(A)$ se nazývá **infimum f na množině A**.
- $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup\{f(x); x\in A\} = \sup f(A)$ se nazývá **supremum f na A**.
- $\inf f(x) = \inf\{f(x); x\in D(f)\}$ se nazývá **infimum f**.
- $\sup f(x) = \sup\{f(x); x\in D(f)\}$ se nazývá **supremum f**.

f: $y = x^2 + 1$, $x \in R$.

- f je ohraničená zdola, není ohraničená shora, není ohraničená.
  Minimum (globální) funkce f je 1, funkce f ho nabývá v bodě $x = 0$, maximum neexistuje.
- Na intervalu $\langle -1; 2)$ je f ohraničená.
  Lokální minimum funkce f na intervalu $\langle -1; 2)$ je 1 a nabývá ho v bodě $x = 0$, lokální maximum neexistuje, lokálne supremum je 5.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$, $x_0 \in A$:

- $f(x_0) = \min f(A) = \min\{f(x); x\in A\}$ se nazývá **minimum f na množině A**.

$$f(x_0) \begin{cases} \textbf{minimum}, & \text{jestliže pro všechny } x\in A \text{ platí } f(x_0) \leq f(x). \\ \textbf{ostré minimum}, & \text{jestliže pro všechny } x\in A,\ x \neq x_0 \text{ platí } f(x_0) < f(x). \end{cases}$$

- $f(x_0) = \max f(A) = \max\{f(x); x\in A\}$ se nazývá **maximum f na množině A**.

$$f(x_0) \begin{cases} \textbf{maximum}, & \text{jestliže pro všechny } x\in A \text{ platí } f(x_0) \geq f(x). \\ \textbf{ostré maximum}, & \text{jestliže pro všechny } x\in A,\ x \neq x_0 \text{ platí } f(x_0) > f(x). \end{cases}$$

- Minimum a maximum se nazývají **extrémy**.
- Ostré minimum a ostré maximum se nazývají **ostré extrémy**.

- $A = D(f)$. $\Rightarrow$ Extrémy se nazývají **globální (absolutní)**.
- $A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$. $\Rightarrow$ Extrémy se nazývají **lokální (na množině A)**.

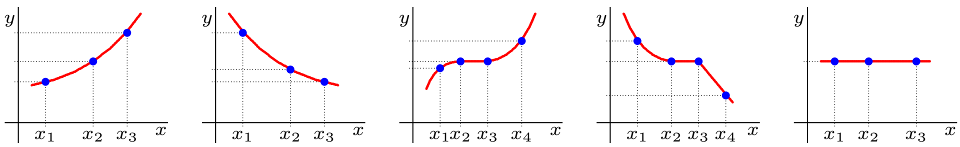
Lokální extrémy postačí vyšetřovat v nějakém okolí $O(x_0) \subset D(f)$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ se nazývá **na množině $A \subset D(f)$ monotónní**:

- **Rostoucí**, jestliže pro všechny $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Klesající**, jestliže pro všechny $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

} **Ostře monotónní.**

- **neklesající**, jestliže pro všechny $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **nerostoucí**, jestliže pro všechny $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **Konstantní**, jestliže pro všechny $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$, t.j. $f(x_1) = c$, $c \in R$.



Grafy rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí a konstantní funkce

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ se nazývá:

- **Sudá**, jestliže pro všechny $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$, $f(x) = f(-x)$.
- **Lichá**, jestliže pro všechny $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$, $f(x) = -f(-x)$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ se nazývá:

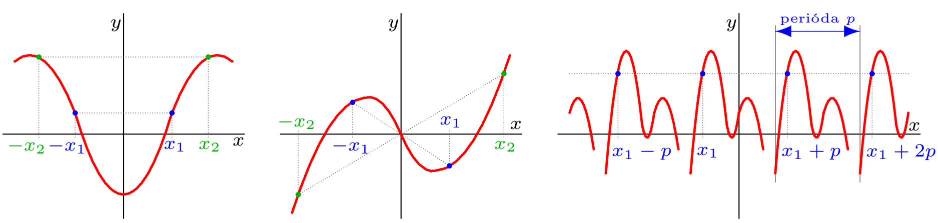
- **Periodická**, pokud existuje $p \in R$, $p \neq 0$ takové, že pro všechny $x \in D(f)$ platí $x + p \in D(f)$, $x - p \in D(f)$, $f(x) = f(x+p) = f(x-p)$.

  Číslo p se nazývá **perioda**.

  Nejmenší $p > 0$ (pokud existuje) se nazývá **primitivní (základní) perioda**.

  Každý celočíselný násobek periody je také perioda.

> Funkci stačí vyšetřovat na intervalu s délkou p (**interval periodicity**).



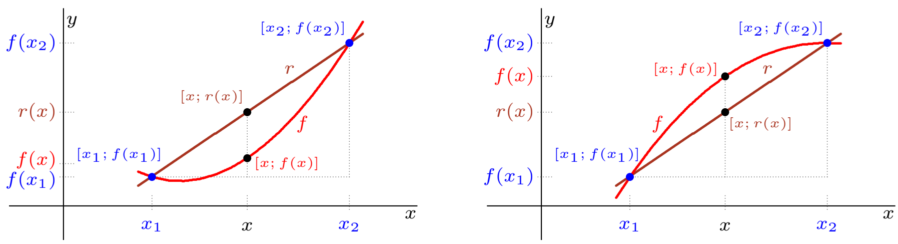
Graf sudé, liché a periodické funkce

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, $I\subset D(f)$ je interval, f se nazývá **na intervalu** I:

- **Konvexní**, jestliže pro všechny $x, x_1, x_2\in I$, $x_1<x<x_2$ platí $f(x)\leq r(x)$.
- **Ostře konvexní**, jestliže pro všechny $x, x_1, x_2\in I$, $x_1<x<x_2$ platí $f(x)<r(x)$.
- **Konkávní**, jestliže pro všechny $x, x_1, x_2\in I$, $x_1<x<x_2$ platí $f(x)\geq r(x)$.
- **Ostře konkávní**, jestliže pro všechny $x, x_1, x_2\in I$, $x_1<x<x_2$ platí $f(x)>r(x)$.

Přímka $y=r(x)$ spojuje body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$,

- f je konvexní na intervalu $I\subset D(f)$.
  $\Leftrightarrow$ • $f(px_1+qx_2)\leq pf(x_1)+qf(x_2)$ pro všechny $x_1, x_2\in I$, $p\in(0;1)$,$q=1-p$.
- f je konkávní na intervalu $I\subset D(f)$.
  $\Leftrightarrow$ • $f(px_1+qx_2)\geq pf(x_1)+qf(x_2)$ pro všechny $x_1, x_2\in I$, $p\in(0;1)$, $q=1-p$.



Konvexní a konkávní funkce

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, bod $x_0\in D(f)$ se nazývá:

- **Inflexní bod** f, pokud existuje okolí $O(x_0)$ takové, že

  v $O^-(x_0)$ je f ostře konvexní, v $O^+(x_0)$ je f ostře konkávní,

  resp. v $O^-(x_0)$ je f ostře konkávní, v $O^+(x_0)$ je f ostře konvexní.
- **Nulový bod (kořen)** f, pokud platí $f(x_0)=0$.

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, $A\subset D(f)$.

- $y=h(x)$, $x\in A$ se nazývá **zúžení (restrikce)** f **na množinu** A, označení $h=f|_A$.

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, $y=g(x)$, $x\in D(g)$, $H(f)\subset D(g)$.

- $y=f(x)=g[f(x)]$, $x\in D(f)$ se nazývá **složená funkce** f **a** g.
  f se nazývá **vnitřní složka**, g se nazývá **vnější složka**.

$y=f(x)$, $x\in D(f)\to H(f)$, t.j. $y=f(x)$: $D(f)\to H(f)$.

- $x=g(y)$: $H(f)\to D(f)$ taková, že $[y;x]\in g \;\Leftrightarrow\; [x;y]\in f$, t.j. $x=g(y) \;\Leftrightarrow\; y=f(x)$,
  se nazývá **inverzní funkce k** f, označení $g=f^{-1}$.

$f\colon D(f) \to H(f)$ je bijekce. $\Rightarrow$ • Existuje $f^{-1}\colon H(f) \to D(f)$ a platí:

- f^{-1} je bijekce.
- $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $f[f^{-1}(y)] = y$ pro všechny $y \in H(f) = D(f^{-1})$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ pro všechny $x \in D(f) = H(f^{-1})$.

Elementární funkce

Elementární funkce mají velký praktický význam. Dají se pomocí nich popsat (alespoň přibližně) mnohé přírodní a společenské zákonitosti a jevy.

Elementární funkce se nazývá každá funkce vytvořená pomocí operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání z funkcí:

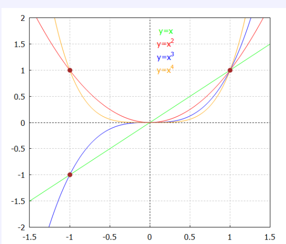
- $y = \text{konst.}$, • $y = x$, • $y = e^x$, • $y = \ln x$, • $y = \sin x$, • $y = \arcsin x$, • $y = \operatorname{arctg} x$.

polynom (racionální celistvá funkce) stupně n se nazývá

$$f_n\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R,\ n \in N \cup \{0\},\ a_n \neq 0.$$

- Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty**. Přirozený $D(f_n) = R$.
- $f_0\colon y = a_0,\ a_0 \neq 0$ se nazývá **konstantní funkce**.
- $f_1\colon y = a_0 + a_1x,\ a_1 \neq 0$ se nazývá **lineární funkce**.
- $f_2\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2,\ a_2 \neq 0$ se nazývá **kvadratická funkce**.

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(x,x,-1.5,1.5),label(["y=x",.2,1.75]),
color=red,explicit(x^2,x,-1.5,1.5),label(["y=x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(x^3,x,-1.5,1.5),label(["y=x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(x^4,x,-1.5,1.5),label(["y=x^4",.2,1]),
color=brown,point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```

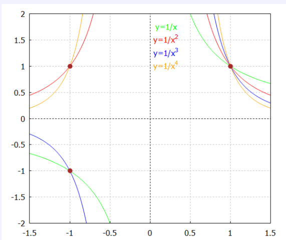


Racionální lomená funkce se nazývá

$$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+b_mx^m},\ n,m\in N-\{0\}.$$

- f_n, f_m jsou polynomy stupňů n a m, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$.

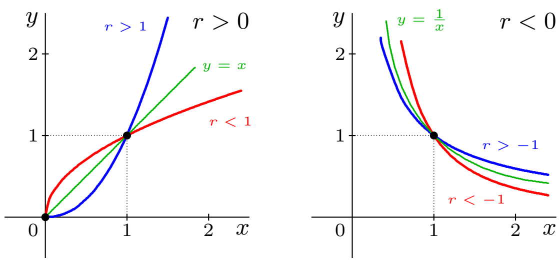
(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(1/x,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x",.2,1.75]),
color=red,explicit(1/x^2,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(1/x^3,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(1/x^4,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^4",.2,1]),
color=brown,point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



mocninná funkce se nazývá

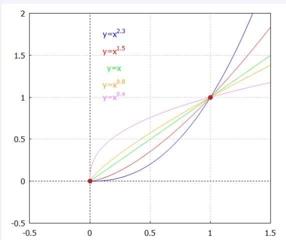
$$f\colon y = x^r,\ r\in R,\ r\neq 0.$$

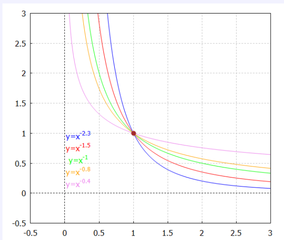
- Pro $r = n\in N$ je $f\colon y = x^n$ polynom.
- Pro $r = -n\in Z^-$ je $f\colon y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ racionální lomená funkce.
- Pro $r \neq 0$ je $f^{-1}\colon y = x^{1/r}$.
- Pro $r > 0$ je f rostoucí, přirozený $D(f) = \langle 0; \infty)$.
- Pro $r < 0$ je f klesající, přirozený $D(f) = (0; \infty)$.



Funkce $f\colon y = x^r$ pro $r > 0$ a $r < 0$

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,1.5],yrange=[-.5,2],
      color=blue,explicit(x^2.3,x,0,1.5),label(["y=x^{2.3}",.2,1.75]),
      color=red,explicit(x^1.5,x,0,1.5),label(["y=x^{1.5}",.2,1.55]),
      color=green,explicit(x,x,-0,1.5),label(["y=x",.2,1.35]),
      color=orange,explicit(x^.8,x,0,1.5),label(["y=x^{0.8}",.2,1.15]),
      color=violet,explicit(x^.4,x,0,1.5),label(["y=x^{0.4}",.2,1]),
      color=brown,point_type=7,points([[0,0],[1,1]]))$
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,3],yrange=[-.5,3],
      color=blue,explicit(x^-2.3,x,0,3),label(["y=x^{-2.3}",.2,.95]),
      color=red,explicit(x^-1.5,x,0,3),label(["y=x^{-1.5}",.2,.75]),
      color=green,explicit(x^-1,x,-0,3),label(["y=x^{-1}",.2,.55]),
      color=orange,explicit(x^-.8,x,0,3),label(["y=x^{-0.8}",.2,.35]),
      color=violet,explicit(x^-.4,x,0,3),label(["y=x^{-0.4}",.2,.15]),
      color=brown,point_type=7,points([[1,1]]))$
```

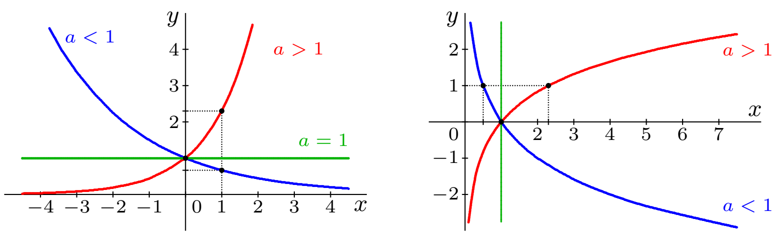




Exponenciální funkce se základem $a > 0$ se nazývá

$f\colon y = a^x,\ x \in R.$

- Nejdůležitější je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ se základem e (Eulerovo číslo).
- Pro $a = 1$ je $f\colon y = 1^x = 1$ konstantní (polynom).
- Pro $a \in (0; 1)$ je f klesající, pro $a \in (1; \infty)$ je f rostoucí.
- Graf se nazývá **exponenciální křivka** a prochází body $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcí $y = a^x$, $y = a^{-x}$ jsou symetrické podle osy y.



Funkce $f\colon y = a^x$, $a > 0$ (vľavo) a $f\colon y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (vpravo)

Exponenciální funkce `exp(x)=%e^x` a logaritmická funkce`log(x)` (přirozený logaritmus) mají základ e. Pokud chceme vypočítat jiný logaritmus, např. $\log_2 x$, musíme použít konstrukci $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

```
(%i1) exp(x)+%e^x;exp(1);
(%o1) 2*%e^x
(%o2) %e
(%i5) log(x);log(2);log(%e);
(%o3) log(x)
(%o4) log(2)
(%o5) 1
(%i7) log_2(x):=log(x)/log(2);log_2(2);
(%o6) log_2(x) := log(x)/log(2)
(%o7) 1
```

Logaritmická funkce se základem $a > 0$, $a \neq 1$ se nazývá

$f\colon y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$.

- f je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, $x \in R$ se stejným základem $a > 0$, $a \neq 1$.
- Pro $x \in \langle 0; \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí $f\colon y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; x = a^y$.
- $a > 0,\ a \neq 1. \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = a^{\log_a x} & \text{pro } x > 0, \\ x = \log_a a^x & \text{pro } x \in R. \end{cases}$
- Pro $a \in (0; 1)$ je f klesající, pro $a \in (1; \infty)$ je f rostoucí.
- Graf se nazývá **logaritmická křivka** a prochází body $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcí $y = \log_a x$, $y = \log_{a^{-1}} x$ jsou symetrické podle osy x.

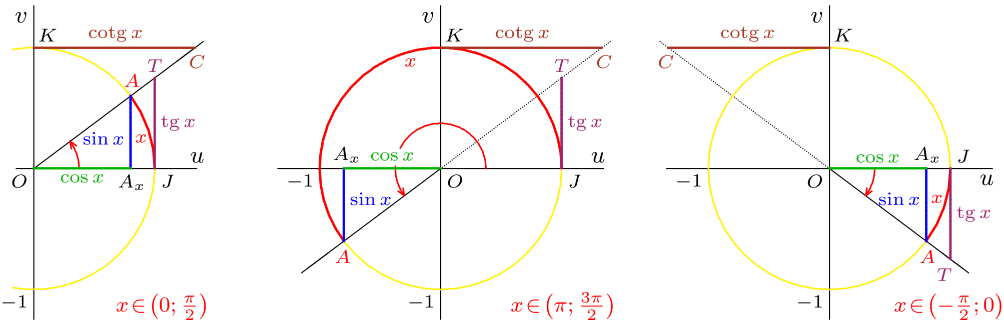
Číslo $\log_a x$ se nazývá **logaritmus čísla x se základem a**.

- $a = 10. \;\Rightarrow\;$ **Logaritmus** čísla x, označení $\log x$.
- $a = \mathrm{e}. \;\Rightarrow\;$ **Přirozený logaritmus** čísla x, označení $\ln x$.

Goniometrické (trigonometrické) funkce jsou:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$ $x \in R$.
- **Kosinus** $y = \cos x = |OA_x|$ $x \in R$.
- **Tangens** $y = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$ $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right\}$.
- **Kotangens** $y = \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$, $x \in R - \{k\pi;\ k \in Z\}$.

Goniometrické funkce se definují na kružnici se středem v počátku souřadnicového systému



Definování funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

s poloměrem 1.

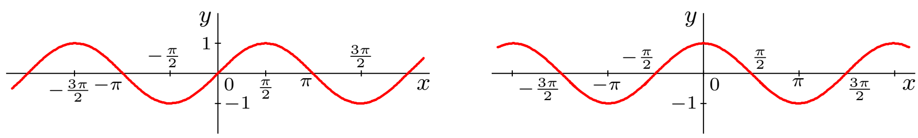
- Číslo π se nazývá **Ludolfovo**. Jeho hodnota je přibližně $3,141592654$.
- Kružnice s poloměrem $r = 1$ má obvod 2π.

$f\colon y = \sin x$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1; 1\rangle$.

- f je lichá, f je periodická s primitivní periodou 2π.
- Graf f se nazývá **sinusoida**, nulové body jsou $k\pi$, $k \in Z$.

$f\colon y = \cos x$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1; 1\rangle$.

- f je sudá, f je periodická s primitivní periodou 2π.
- Graf f se nazývá **kosínusoida**, nulové body jsou $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.



Funkce $f\colon y = \sin x$ (vlevo) a $f\colon y = \cos x$ (vpravo)

V programu Maxima mají goniometrické funkce tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`. Argumenty goniometrických funkcí musíme zadávat v radiánech. Pokud chceme použít stupně, musíme nejprve udělat převod na radiány.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi);tangrad(22.5);ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\operatorname{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

$rat:$ *replaced* 0.125 *by* $1/8 = 0.125$

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Pro zjednodušení práce s goniometrickými funkcemi můžeme použít příkazy `trigexpand`, `trigreduce`, `trigsimp`, `trigrat` a balíčky (packages) `atrig1`, `ntrig` a `spangl`, které obsahují další podporu pro práci s goniometrickými funkcemi. Balíčky musíme do systému načíst pomocí příkazu `load`.

```
(%i1) tan(%pi/4);tan(%pi/6);tan(%pi/8);
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

```
(%i4) ratsimp(tan(%pi/8));
```

(%o4) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

```
(%i5) trigsimp(tan(%pi/8));
```

(%o5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

```
(%i6) load(spangl);
```

(%o6) "../share/trigonometry/spangl.mac"

```
(%i7) tan(%pi/8);
```

(%o7) $\sqrt{2}-1$

Součtové vzorce pro sinus a kosinus

$x, y \in R. \Rightarrow$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y.$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y.$

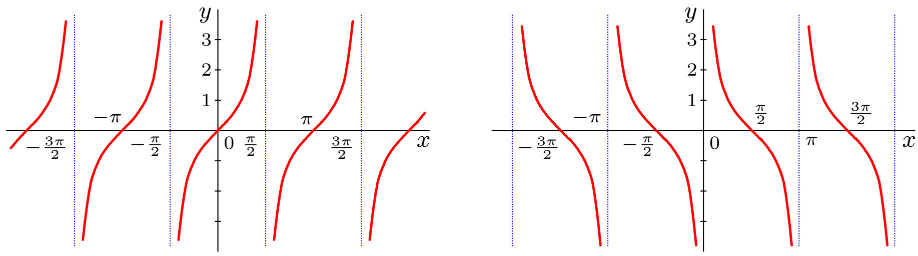
$x \in R. \Rightarrow$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$

$f\colon y = \operatorname{tg} x,\ D(f) = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right\},\ H(f) = R.$

- f je lichá, f je periodická s primitivní periodou π.
- Graf f se nazývá **tangenta**, nulové body jsou $k\pi$, $k \in Z$.

$f\colon y = \operatorname{cotg} x,\ D(f) = R - \{k\pi; k \in Z\},\ H(f) = R.$

- f je lichá, f je periodická s primitivní periodou π.
- Graf f se nazývá **kotangenta**, nulové body jsou $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.



Funkce $f\colon\, y = \operatorname{tg} x$ (vlevo) a $f\colon\, y = \operatorname{cotg} x$ (vpravo)

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

- **Arkussinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1\rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.
- **Arkuskosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle$.
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$: $R \to (0; \pi)$.

Ke goniometrická funkce neexistují inverzní funkce, protože nejsou prosté. Je třeba je vhodně zúžit.

$y = \arcsin x$, $D(f) = \langle -1; 1\rangle$, $H(f) = \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

- f je rostoucí, f je lichá.

$y = \arccos x$, $D(f) = \langle -1; 1\rangle$, $H(f) = \langle 0; \pi\rangle$.

- f je klesající.

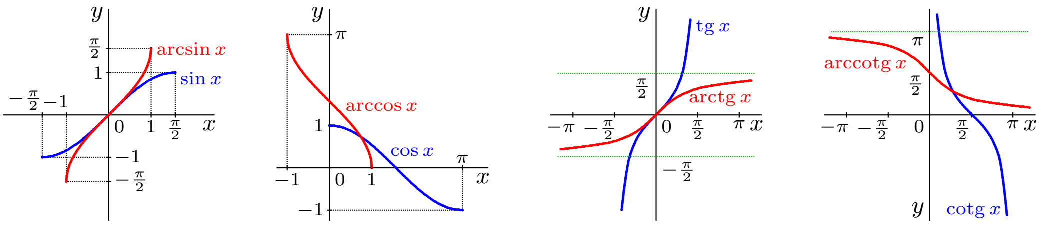
Inverzní funkce ke goniometrickým funkcím mají v programu Maxima tvar `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`. Na tomto místě můžeme zmínit funkci`atan2(x,y)` definovanou vztahem $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

```
(%i2) asin(1);acos(1);
(%o1) π/2
(%o2) 0
(%i4) atan2(2,4);atan(1/2);
(%o3) atan(1/2)
(%o4) atan(1/2)
```

Součtové vzorce pro cyklometrické funkce

$x \in \langle -1; 1\rangle$. $\Rightarrow$ • $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

$x \in R$. $\Rightarrow$ • $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.



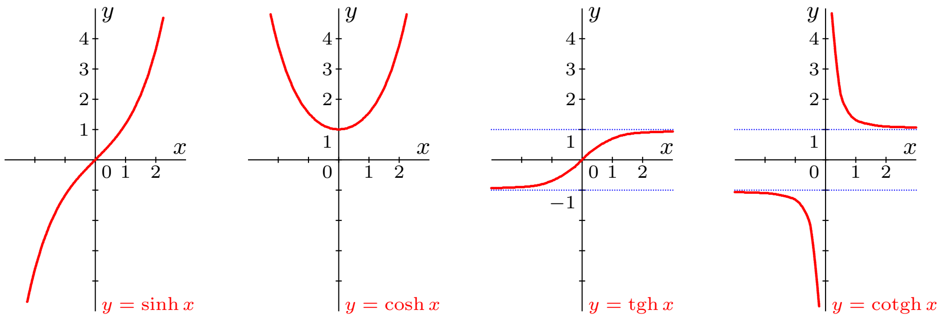
Funkce $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

$y = \operatorname{arctg} x$, $D(f) = R$, $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- f je rostoucí, f je lichá.

$y = \operatorname{arccotg} x$, $D(f) = R$, $H(f) = (0; \pi)$.

- f je klesající.



Hyperbolické funkce $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$

Hyperbolické funkce jsou:

- **Sinus hyperbolický** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $R \to R$.
- **Kosinus hyperbolický** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Tangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\colon\ R \to (-1; 1).$$
- **Kotangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\colon\ (R - \{0\}) \to (R - \langle -1; 1\rangle).$$

Hyperbolické funkce mají podobné vlastnosti jako goniometrické funkce, proto mají podobné názvy.

$f\colon y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $D(f) = R$, $H(f) = R$.

- f je lichá, f je rostoucí.

$f\colon y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle 1; \infty)$.

- f je sudá, f je klesající na $(-\infty; 0)$, f je rostoucí na $(0; \infty)$.

Součtové vzorce pro sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický

$x, y \in R. \Rightarrow$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$.

$x \in R. \Rightarrow$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$,
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$,
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \pm e^{\pm x}$,
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Moivreov vzorec

$x \in R$, $n \in N$. $\Rightarrow$
- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$.

$f\colon y = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $D(f) = R$, $H(f) = (-1; 1)$.

- f je lichá, f je rostoucí.

$f\colon y = \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

- f je lichá, f je klesající na $(-\infty; 0)$, f je klesající na $(0; \infty)$.

Hyperbolometrické funkce jsou inverzní ke hyperbolickým funkcím:

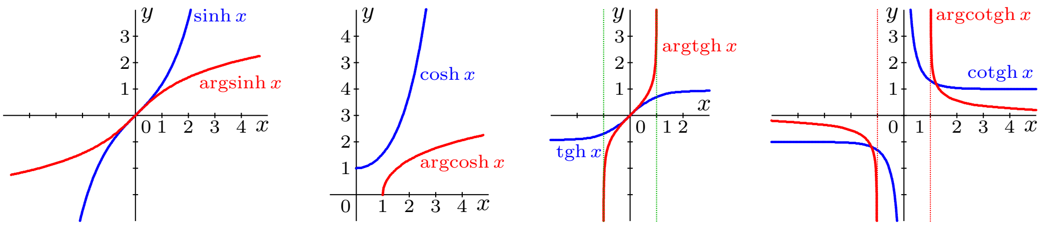
- **Argument sinus hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\colon\ R \to R.$$
- **Argument kosinus hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\colon\ \langle 1; \infty) \to \langle 0; \infty).$$
- **Argument tangens hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\colon\quad (-1; 1) \to R.$$
- **Argument kotangens hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\colon\ (R - \langle -1; 1\rangle) \to (R - \{0\}).$$

$f\colon y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $D(f) = R$, $H(f) = R$.

- f je lichá, f je rostoucí.

$f\colon\, y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ D(f) = \langle 1; \infty),\ H(f) = \langle 0; \infty).$

- f je rostoucí.



Funkce $y = \operatorname{argsinh} x$, $y = \operatorname{argcosh} x$, $y = \operatorname{argtgh} x$, $y = \operatorname{argcotgh} x$

$f\colon\, y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},\ D(f) = (-1; 1),\ H(f) = R.$

- f je lichá, f je rostoucí.

$f\colon\, y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},\ D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; \infty),\ H(f) = R - \{0\}.$

- f je lichá, f je klesající na $(-\infty; -1)$, f je klesající na $(1; \infty)$.

Hyperbolické funkce jsou `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` a k nim inverzní hyperbolometrické funkce jsou `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

```
(%i4)  sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1)  sinh(x)
(%o2)  1
(%o3)  0
(%o4)  1.313035285499331
(%i8)  asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5)  asinh(x)
(%o6)  0
(%o7)  0
(%o8)  1.01844096363052
```

Limita funkce

Při vyšetřování funkce je třeba charakterizovat její lokální vlastnosti na různých intervalech a v okolí různých významných bodů. Funkce f nemusí být definována v bodě, v okolí kterého ji vyšetřujeme.

$a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ se nazývá **hromadný bod množiny** $A \subset R$,
jestliže pro každé okolí $O(a)$ existuje bod $x \in O(a)$ takový, že $x \in A$, $x \neq a$.

f **má v bodě** $a\in R^*$ **limitu** $b\in R^*$, označení $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, pokud:

- a je hromadným bodem množiny $D(f)$.
- Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)$, $x_n\neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow b$.

Druhou podmínku můžeme psát ve tvaru:

- $x_n\in D(f)$, $x_n\neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a. \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b.$

Tato definice se nazývá **Heineho**.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b.$ $\begin{cases} \bullet\ a\in R^*. \begin{cases} a\in R. & \Rightarrow \textbf{Limita ve vlastním bodě } a. \\ a=\pm\infty. & \Rightarrow \textbf{Limita v nevlastním bodě } a. \end{cases} \\ \bullet\ b\in R^*. \begin{cases} b\in R. & \Rightarrow \textbf{Vlastní limita.} \\ b=\pm\infty. & \Rightarrow \textbf{Nevlastní limita.} \end{cases} \end{cases}$

Limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ můžeme charakterizovat pomocí okolí $O(a)$ a $O(b)$.

$a,b\in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b. \;\Leftrightarrow$

- a je hromadným bodem množiny $D(f)$.
- Pro každé okolí $O(b)$ existuje okolí $O(a)$ tak, že pro všechny $x\in O(a)$, $x\neq a$ platí $f(x)\in O(b)$.

Druhou podmínku můžeme psát ve tvaru:

- Pro každé okolí $O(b)$ existuje okolí $O(a)$ tak, že $f\big(O(a)-\{a\}\big)\subset O(b)$.

Pokud použijeme poloměry okolí, můžeme druhou podmínku psát ve tvaru:

- Pro každé $O_\varepsilon(b)$ existuje $O_\delta(a)$ tak, že pro všechny $x\in O_\delta(a)$, $x\neq a$ platí $f(x)\in O_\varepsilon(b)$.

Speciální platí:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $a,b\in R$.
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f)\colon 0<|x-a|<\delta. \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$, $b\in R$.
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in R\ \forall x\in D(f)\colon \delta<x$, resp. $x<\delta. \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, $a\in R$.
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f)\colon 0<|x-a|<\delta. \Rightarrow \varepsilon<f(x)$, resp. $f(x)<\varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty.$
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta\in R\ \forall x\in D(f)\colon \delta<x$, resp. $x<\delta. \Rightarrow \varepsilon<f(x)$, resp. $f(x)<\varepsilon.$

$a\in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\in R$. $\Rightarrow$ • Existuje okolí $O(a)$, ve kterém je f ohraničená.

Následující tvrzení reprezentují základní vlastnosti limit funkcí.

$\left.\begin{array}{l} a\in R^* \text{ je hromadný bod } D(f) \text{ a } D(g). \\ f(x) = g(x) \text{ pro všechny } x\in O(a),\ x\neq a. \end{array}\right\} \Rightarrow$

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. $\Leftrightarrow$ Existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, pokud limity existují.

$\left.\begin{array}{l} a\in R^* \text{ je hromadný bod } D(f) \text{ a } D(g). \\ f(x) \leq g(x) \text{ pro všechny } x\in O(a),\ x\neq a. \end{array}\right\} \Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, pokud limity existují.

- Pokud změníme předpoklad na $f(x) < g(x)$ pro všechny $x\in O(a)$, $x\neq a$.

$\Rightarrow$ Tvrzení $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ se nezmění.

$\left.\begin{array}{l} a\in R^* \text{ je hromadný bod } D(f),\ D(g) \text{ a } D(h). \\ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ pro všechny } x\in O(a),\ x\neq a. \\ \text{Existují } \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b\in R^*. \end{array}\right\} \Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o1) 0
```

∞ je hromadný bod definičního oboru funkce $y = \frac{\sin x}{x}$.

Pro $x\in R$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$. $\Rightarrow$ Pro $x > 0$ platí $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow\ 0 = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

```
(%i1) f(x):=sin(x)/x$ for i:1 thru 10 do (x:100^i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

100 -0.005063656411097588
10000 $-3.056143888882521 \cdot 10^{-5}$
1000000 $-3.499935021712929 \cdot 10^{-7}$
100000000 $9.31639027109726 \cdot 10^{-9}$
10000000000 $-4.875060250875107 \cdot 10^{-11}$
1000000000000 $-6.112387023768895 \cdot 10^{-13}$
100000000000000 $-2.094083074964523 \cdot 10^{-15}$
10000000000000000 $7.796880066069787 \cdot 10^{-17}$
1000000000000000000 $-9.929693207404051 \cdot 10^{-19}$
100000000000000000000 $-6.452512852657808 \cdot 10^{-21}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,0);
(%o1) 1
```

Označme $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$, bod 0 je hromadný bod $D(f)$.
Pro všechny $x \in D(f)$ platí:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x. \;\Rightarrow\; 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \;\Rightarrow\; \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}. \\ x < 0. \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0. \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x}. \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Rightarrow\; 1 = \lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

```
(%i1) f(x):=sin(x)/x$
      for i:-1 thru-10  step-1 do (x:1/i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
      print("Limit")$
      for i:10 thru 1 step-1 do (x:1/i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

-1 0.8414709848078965
$-\frac{1}{2}$ 0.958851077208406
$-\frac{1}{3}$ 0.9815840903884566
$-\frac{1}{4}$ 0.9896158370180917
$-\frac{1}{5}$ 0.9933466539753061
$-\frac{1}{6}$ 0.9953767961604901
$-\frac{1}{7}$ 0.9966021085458455
$-\frac{1}{8}$ 0.9973978670818215
$-\frac{1}{9}$ 0.9979436565895768
$-\frac{1}{10}$ 0.9983341664682815
Limit
$\frac{1}{10}$ 0.9983341664682815
$\frac{1}{9}$ 0.9979436565895768
$\frac{1}{8}$ 0.9973978670818215
$\frac{1}{7}$ 0.9966021085458455
$\frac{1}{6}$ 0.9953767961604901

$\frac{1}{5}$	0.9933466539753061
$\frac{1}{4}$	0.9896158370180917
$\frac{1}{3}$	0.9815840903884566
$\frac{1}{2}$	0.958851077208406
1	0.8414709848078965

Limita složené funkce

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x),\ y=g(x),\ H(f)\subset D(g). \\ a,b,c\in R^*,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u)=c. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\neq b \text{ pro všechny } x\in O(a)-\{a\}, \\ \text{resp. } g(b)=c. \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c.$$

- Při výpočtu $\lim\limits_{x\to a} g(f)$ položíme $u=f(x)$. $\Rightarrow$ **Substituce** $u=f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $x\to a$, $x=h+a$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(h+a)$, $h\to 0$.

$a,b,c\in R^*$, $r\in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$. $\Rightarrow$ (Pokud mají výrazy smysl.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b\pm c$.
- $\lim\limits_{x\to a} rf(x) = r\lim\limits_{x\to a} f(x) = rb$.
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = bc$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}$.

Pokud některý z výrazů nemá smysl, nemusí to znamenat neexistenci limity. Limitu musíme vypočítat jiným způsobem.

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, bod $a\in R$, označme:

- $f^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, x<a\}}$ zúžení funkce nalevo.
- $f^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, a<x\}}$ zúžení funkce napravo.

Limita zleva a **limita zprava funkce** f **v bodě** $a\in R$ se nazývají limity:

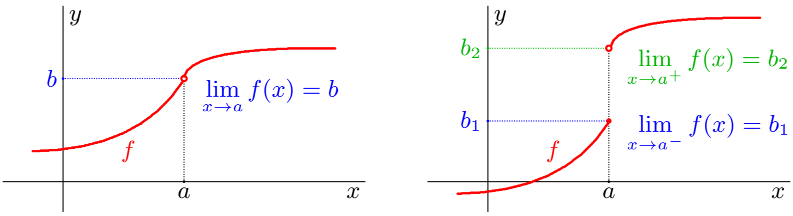
$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^-(x) = \lim\limits_{x\to a} \big[f|_{D(f)\cap(-\infty;a)}(x)\big]. \\ \bullet \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \big[f|_{D(f)\cap(a;\infty)}(x)\big]. \end{array}\right\} \textbf{Jednostranné limity}.$$

$a\in R$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ se nazývá **oboustranná limita**.

```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);
      limit(1/x,x,0);
      limit(1/x,x,0,plus);
(%o1) -∞
(%o2) infinity  /* Complex inf */
(%o3) ∞
```



Oboustranná limita a jednostranné limity

Důležité limity.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = \mathrm{e}^b$ pre $b \in R$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \ln \mathrm{e} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (0;1),\ q \in R, \\ 0 & \text{pre } a \in (1;\infty),\ q \in R. \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } a \in (0;1),\ q \in R, \\ \infty & \text{pre } a \in (1;\infty),\ q \in R. \end{cases}$

```
(%i2) limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0); limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1) und        /* undefined */
(%o2) 1
```

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} \cdot \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{x^2+4} = \frac{3\cdot 0+2}{0+4} = \frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$

```
(%i3) limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
      limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
      limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $\frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$
  $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} = \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}$
  $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+x\cdot\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}.$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$
  $= \sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}} = \sqrt{1-0}+\sqrt{1+0} = 1+1 = 2.$

```
(%i3) limit(x/(sqrt(1+x)-sqrt(1-x)),x,0);
      limit((1-sqrt(1-x))/x,x,0);
      limit((\sqrt(x^2-1)+sqrt(x^2+1))/x,x,inf);
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) 2

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \begin{bmatrix}\text{Subst.} & x=z^{12}\\ x\to 1, & z\to 1\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1} = \lim\limits_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^3-1}$
  $= \lim\limits_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim\limits_{z\to 1}\frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}} + \lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}} = \frac{5}{1-\infty^{-2}} + 2^0 = \frac{5}{1-0}+1 = 6.$

- $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{a}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x} = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a$ pre $a\in R$.

```
(%i3) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
      limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
```
(%o1) $\frac{4}{3}$
(%o2) 6
(%o3) e^a

Pokud použijeme substituci $x = z^{12}$, můžeme první limitu zjednodušit.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$ g(z):=subst(z^12,x,f(x))$

      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
```
(%o1) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^2\cdot|z|-1}$ /* z is positive, z=|z| */

(%o2) $\frac{4}{3}$

V posledním příkladu jsme počítali limitu výrazu 0^0 – tzv. neurčitý výraz.

Mezi **neurčité výrazy** (počítáme jich pomocí limit) patří:

• $\infty - \infty$, • $\pm\infty \cdot 0$, • $\frac{0}{0}$, • $\frac{1}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, • 0^0, • $0^{\pm\infty}$, • $1^{\pm\infty}$, • $(\pm\infty)^0$.

• $$\lim_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2) - \ln x\big) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+2}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\tfrac{2}{x}\right)^x = \ln e^2 = 2.$$

• $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } z = tx \\ x\to 0,\ z\to 0\end{bmatrix} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z}{t}}{\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\ln(1+z)}$$
$$= \frac{1}{t}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{t} \text{ pre } t\in R,\ t\neq 0.$$

• $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } z = 3x+1 \\ x\to\infty,\quad z\to\infty\end{bmatrix} = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}}$$
$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[e^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

```
(%i3) limit(x*(log(x+2)-log(x)),x,inf);
      limit(x/log(1+t*x),x,0);
      limit(((3*x-2)/(3*x+1))^x,x,inf);
```
(%o1) 2
(%o2) $\frac{1}{t}$
(%o3) e^{-1}

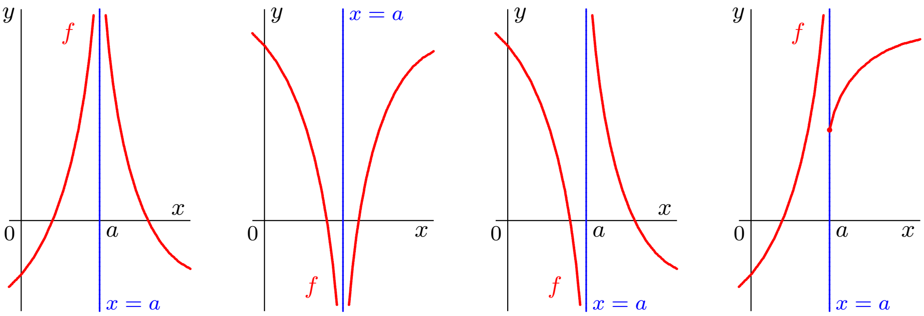
asymptotické vlastnosti

Při vyšetřování funkce f je důležité prozkoumat její vlastnosti v nevlastních bodech:

- Pro $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodu $a \in R$, pro který platí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $a \in R$.

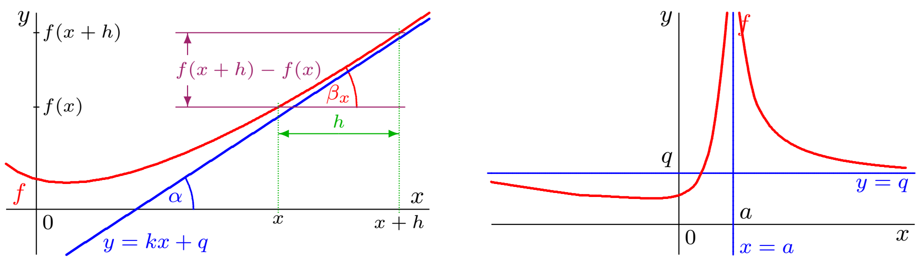
- Přímka $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice (vertikální) grafu f**, pokud $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (alespoň jedna z limit je nevlastní).



Příklady asymptoty bez směrnice

- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota se směrnicí grafu f**, pokud platí $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ nebo platí $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

  Pokud $k = 0$ (směrnice přímky), asymptota se nazývá **horizontální (vodorovná)**.



Asymptota se směrnicí α (vlevo), asymptoty $y = q$, $x = a$ (vpravo)

> Přímka $y = kx + q$ je asympta se směrnicí funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$.
>
> $\Leftrightarrow$ • Existují reálné limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q \in R$.

- $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right) = 0. \;\Rightarrow\; \bullet \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0 \;\Rightarrow\; \bullet \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R,\; \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q \in R.$

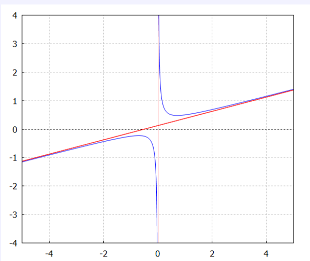
$$\Rightarrow \bullet \lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] - \lim_{x\to\infty} q = q - q = 0.$$

```
(%i10) f(x):=(2*x^2+x+1)/(8*x); km:limit(f(x)/x,x,minf)$ kp:limit(f(x)/x,x,inf)$
       qm:limit(f(x)-km*x,x,minf)$ qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf)$
       dm(x):=km*x+qm$ dp(x):=kp*x+qp$ dm(x);dp(x);
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],
       color=blue,explicit(f(x),x,-8,0),explicit(f(x),x,0,8),
       color=red,parametric(0,t,t,-5,5),
       explicit(dm(x),x,-8,8),explicit(dp(x),x,-8,8))$
```

(%o1) $f(x) := \frac{2x^2+x+1}{8x}$

(%o8) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$

(%o9) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$



Spojitost funkce

S pojmem limita funkce f v bodě a úzce souvisí pojem spojitosti f v bodě a. Spojitost je také lokální záležitost v nějakém okolí $O(a)$.

> ***f* je spojitá v bodě** $a \in D(f)$, jestliže:
> - Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

Podmínku můžeme psát ve tvaru:

- $x_n \in D(f),\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a. \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$

Tato definice se nazývá **Heineho**.

Bod $a \in D(f)$ může být pouze hromadný nebo izolovaný:

- $x \in D(f)$ je izolován bod. $\Rightarrow$ Existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.
  $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a) = f(a)$.

> $a \in D(f)$ je izolován bod. $\Rightarrow$ • f je spojitá v bodě a.

- $a \in D(f)$ je hromadný bod. $\Rightarrow$ Definice je shodná s definicí limity f v bodě a.

> $a \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. $\Rightarrow$
> • f je spojitá v bodě a. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce v bodě $a \in D(f)$ můžeme charakterizovat pomocí okolí $O(a)$ a $O(f(a))$.

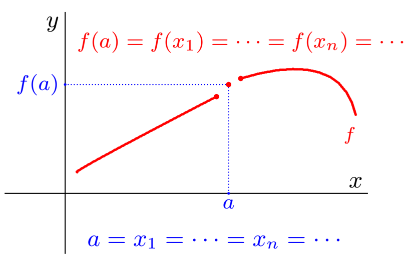
> f je spojitá v bodě $a \in D(f)$. $\Leftrightarrow$
> • Pro každé okolí $O(f(a))$ existuje okolí $O(a)$ tak,
> že pro všechny $x \in O(a)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

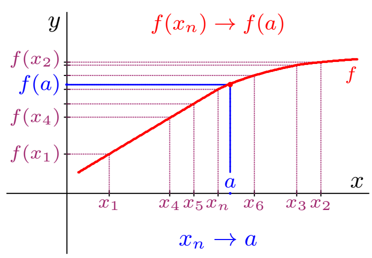
Podmínku můžeme psát ve tvaru:

- Pro každé okolí $O(f(a))$ existuje okolí $O(a)$ tak, že $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Pokud použijeme poloměry okolí, pak můžeme psát:

- Pro každé $O_{\varepsilon}(b)$ existuje $O_{\delta}(a)$ tak, že pro všechny $x \in O_{\delta}(a)$ platí $f(x) \in O_{\varepsilon}(b)$.
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)$: $|x-a| < \delta$. $\Rightarrow$ $|f(x)-f(x)| < \varepsilon$.





Spojitost funkce f v izolovaném bodě (vlevo) a v hromadném bodě (vpravo)

Funkce f se nazývá **nespojitá v bodě** $a\in D(f)$, pokud není spojitá v bodě a:

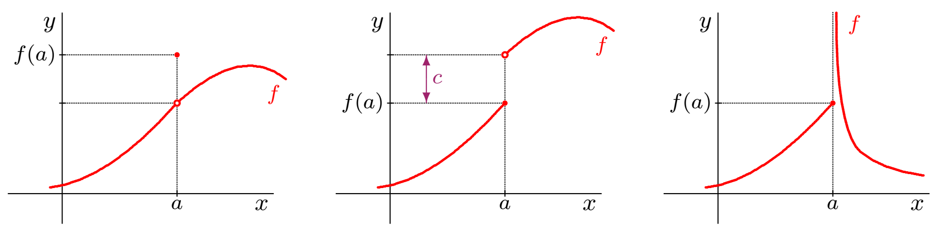
- Existuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ tak, že $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow f(a)$,
  t.j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq f(a)$ nebo neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

- f je spojitá v bodě $a\in D(f)$. $\Rightarrow$ • a se nazývá **bod spojitosti** f.
- f je nespojitá v bodě $a\in D(f)$. $\Rightarrow$ • a se nazývá **bod nespojitosti** f.

f může být nespojitá pouze v hromadném bodě $D(f)$.
$\Rightarrow$ Rozšíříme pojem bodu nespojitosti na všechny hromadné body $D(f)$.

$y = f(x)$, $x\in D(f)$, a je hromadný bod $D(f)$.

- a je bod **odstranitelné nespojitosti funkce** f,
  pokud existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)\in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.
  - Nespojitost v bodě a odstraníme, pokud definujeme $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- a je bod **neodstranitelné nespojitosti I. druhu funkce** f,
  pokud existují $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\in R$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\in R$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
  - Číslo $c = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ se nazývá **skok funkce f v bodě** a.
- a je bod **neodstranitelné nespojitosti II. druhu funkce** f,
  pokud alespoň jedna z limit $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ neexistuje nebo je nekonečná.
  - Pokud je některá z limit nekonečná, mluvíme o **asymtotickej nespojitosti**.



Nespojitost odstranitelná, neodstranitelná I. druhu a neodstranitelná II. druhu

f, g jsou spojité v bodě $a \in D(f) \cap D(g)$, $r \in R$. $\Rightarrow$

- $|f|$, $f \pm g$, rf, fg jsou spojité v bodě a.
- $g(a) \neq 0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$ jsou spojité v bodě a.

Spojitost složené funkce

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá v bodě } a \in D(f). \\ g \text{ spojitá v bodě } b = f(a) \in D(g). \\ H(f) \subset D(g). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ F = g(f) \text{ je spojitá v bodě } a.$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in D(f) \cap D(g) \cap D(h),\ O(a) \text{ je okolí.} \\ g, h \text{ jsou spojité v bodě } a. \\ h(a) = f(a) = g(a). \\ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ pro všechny } x \in O(a). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f \text{ je spojitá v bodě } a.$$

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$, označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a\rangle} = f(x)|_{\{x \in D(f),\, x \leq a\}}$ zúžení funkce nalevo.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap \langle a; \infty)} = f(x)|_{\{x \in D(f),\, a \leq x\}}$ zúžení funkce napravo.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ se nazývá **v bodě** $a \in D(f)$:

- **spojitá zleva**, pokud je v a spojitá funkce f_a^-.
- **spojitá zprava**, pokud je v a spojitá funkce f_a^+.

} **Jednostranná spojitost**.

f je spojitá v bodě $a \in D(f)$. $\Leftrightarrow$ • f je spojitá zleva a spojitá zprava v bodě a.

Lokální ohraničenost

f je spojitá v bodě $a \in D(f)$. $\Rightarrow$ • Existuje okolí $O(a)$, ve kterém je f ohraničená.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- f se nazývá **spojitá na množině** A, pokud je spojitá v každém bodě $a \in A$.

Ze spojitosti f na množině $A \subset D(f)$ nevyplývá ohraničenost f na A.

- $f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R$ je spojitá na intervalu $(0;1)$, ale není ohraničena na $(0;1)$.

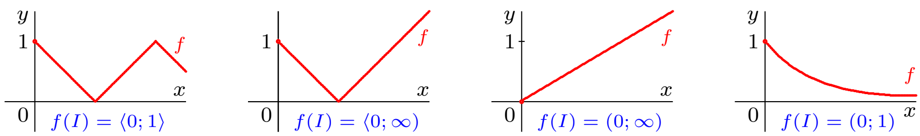
Cauchyova o nulovém bodě

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ f(a)\cdot f(b) < 0. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- Existuje $c \in (a;b)$ tak, že $f(c) = 0$.

f je spojitá na intervalu $I \subset R$. $\Rightarrow$
- $f(I)$ je interval.
- Inverzní funkce f^{-1} (pokud existuje) je spojitá na $f(I)$.

f je spojitá na intervalu $I \subset R$.
- I je uzavřen interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ je uzavřen interval.
- I není uzavřen interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ může být interval různého typu.



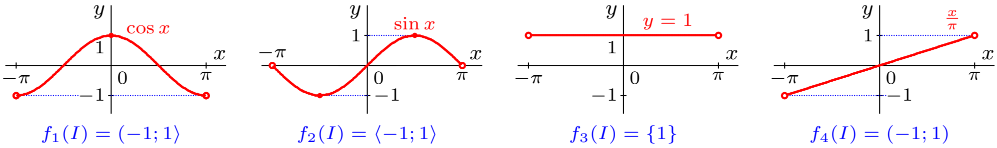
Zobrazení intervalu $I = (0;\infty)$ spojitou funkcí f

Spojitá funkce může zobrazit $I = (-\pi;\pi)$ na různé intervaly:

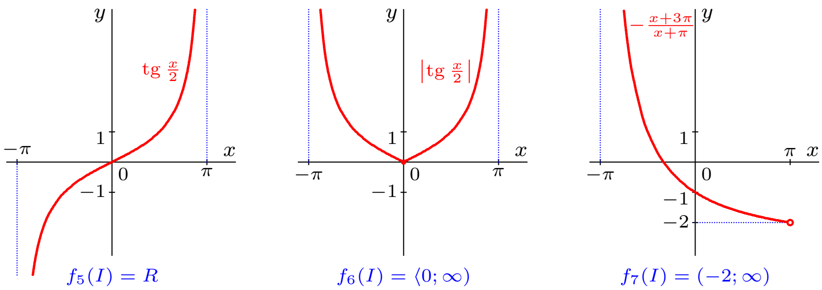
- $y = \cos x$: $(-\pi;\pi) \to (-1;1\rangle$.
- $y = \sin x$: $(-\pi;\pi) \to \langle -1;1\rangle$.
- $y = 1$: $(-\pi;\pi) \to \{1\}$.
- $y = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi;\pi) \to (-1;1)$.
- $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$: $(-\pi;\pi) \to R$.
- $y = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$: $(-\pi;\pi) \to \langle 0;\infty)$.
- $y = -\frac{2x}{x+\pi} - 1$: $(-\pi;\pi) \to (0;\infty)$.
- $y = -\frac{2x}{x+\pi}$: $(-\pi;\pi) \to (1;\infty)$.

Derivace reálné funkce

K zavedení derivace funkce vedly hlavně dva problémy (následující příklady).



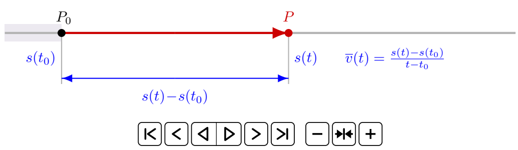
Zobrazení intervalu $I = (-\pi;\, \pi)$ spojitými funkcemi



Zobrazení intervalu $I = (-\pi;\, \pi)$ spojitými funkcemi

Bod se pohybuje po přímce, jeho pohyb v čase t popisuje funkce $y = s(t)$.

- V čase t_0 se nachází v bodě P_0, v čase t se nachází v bodě P.
- V časovém intervalu $\langle t_0; t\rangle$ projde dráhu $s(t) - s(t_0)$.
  - $\Rightarrow$ • Průměrná rychlost $\overline{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.
- Pro $t \to t_0$ dostaneme okamžitou rychlost bodu v čase t_0.
  - $\Rightarrow$ • Okamžitá rychlost $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \overline{v}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

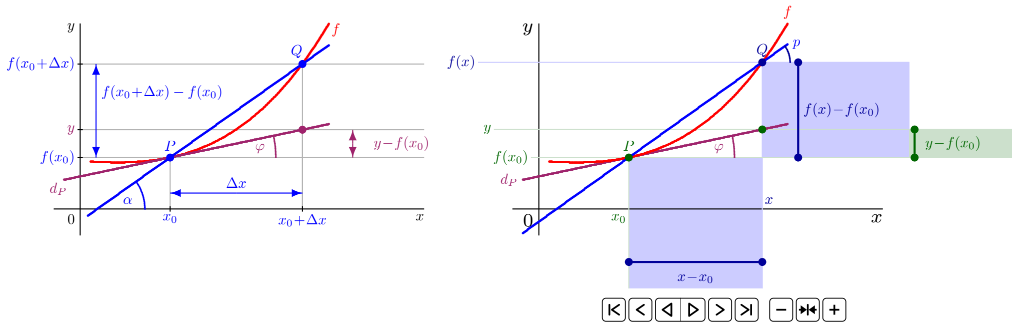


Úloha o rýchlosti

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafu f.
- Přímka PQ má směrnici $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Tečna k f v bodě P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$,
  kde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je její směrnice.
- $Q \to P$. $\Rightarrow$ $PQ \to d_P$, $\Delta x \to 0$, $\alpha \to \varphi$, $f(x_0+\Delta x) \to f(x_0)$. $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.

  $\Rightarrow$ • Směrnice tečny $\operatorname{tg} \varphi = \lim\limits_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.



Úloha o tečně

f má v bodě $x_0 \in D(f)$ **derivaci**, označení $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$, pokud:

- Existuje limita $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{array}{ll} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, & h \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

- $f'(x_0) \in R$. $\Rightarrow$ Derivace $f'(x_0)$ je **vlastní (konečná)**.
- $f'(x_0) \pm \infty$. $\Rightarrow$ Derivace $f'(x_0)$ je **nevlastní (nekonečná)**.

Často se používá označení, které zavedl G. W. Leibniz:

- $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$, resp. • $y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x_0)$.

$f'(x_0) \in R$ (je konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bodě x_0.

- Spojitost funkce f v bodě x_0 nezaručuje existenci $f'(x_0)$.

Funkce f: $y = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

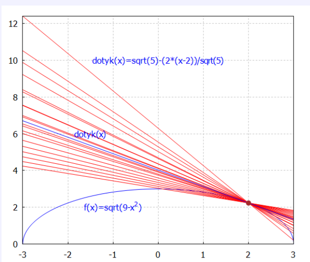
- Neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

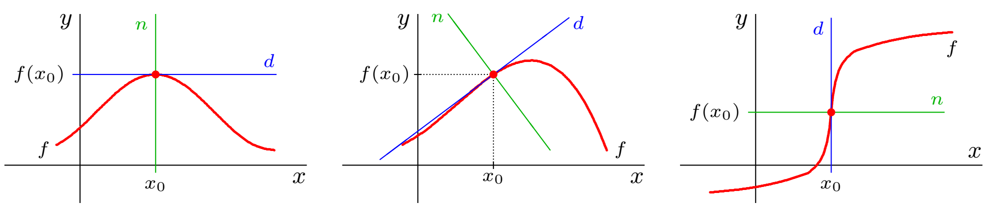
- $f'(x_0) \in R. \;\Rightarrow\; f'(x_0)$ je směrnice tečny ke grafu f v bodě x_0.
  Tečna má tvar $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$, f je spojitá v bodě x_0.
  $\Rightarrow\; x = x_0$ je tečna (bez směrnice) ke grafu f v bodě x_0.

Určíme tečnu ke půlkružnici $y = \sqrt{9 - x^2}$ v bodě 2.

(%i8)
```
f(x):=sqrt(9-x^2)$ pomer(a,b):=(f(b)-f(a))/(b-a)$
sek(x,a,b):=pomer(a,b)*(x-a)+f(a)$
Sek:makelist(explicit(sek(x,2,-.15+.25*i),x,-3,3),i,1,20)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$ dotyk(x):=f(2)+subst(2,x,f1(x))*(x-2)$
print("Secant y=dotyk(x)=",dotyk(x)," in point 2 have a blue color")$
draw2d(grid=true,xaxis=true,color=blue,explicit(f(x),x,-3,3),
color=red,Sek,color=blue,explicit(dotyk(x),x,-3,3),
point_type=7,color=brown,points([[2,f(2)]]),
color=blue,label(["f(x)=sqrt(9-x^2)",-1,2]),
label(["dotyk(x)",-1.5,6]),label([concat("dotyk(x)=",string(dotyk(x))),0,10]))$
```

Secant $y = dotyk(x) = \sqrt{5} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{5}}$ *in point 2 have a blue color*





$f'(x_0) = 0$ $\quad$ $f'(x_0) \in R,\ f'(x_0) \neq 0$ $\quad$ $f'(x_0) = \infty$

Tečna a normála k funkci f v bodě x_0

Vypočítáme a zjednodušíme derivaci funkce $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log(x + \sqrt{x^2+1})$

(%i3) `f1(x):=diff(f(x),x);f1(x);`

(%o2) $f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Derivaci $f'(x)$ jsme vypočítali, ale nepodařilo se nám ji vhodně zjednodušit. Použijeme příkaz `subst`.

(%i5) `fp:subst(a,sqrt(x^2+1),f1(x));`

(fp) $\frac{\frac{x}{a}+1}{x+a}$

(%i6) `ratsimp(fp);`

(%o6) $\frac{1}{a}$

(%i7) `subst(sqrt(x^2+1),a,ratsimp(fp));`

(%o7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f má v bodě $x_0 \in D(f)$ **derivaci zleva** $f'_-(x_0)$, jestliže:

- Existuje $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{matrix}\text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0\end{matrix}\right] = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f'_-(x_0) \in R$ (je konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá zleva v bodě x_0.

f má v bodě $x_0 \in D(f)$ **derivaci zprava** $f'_+(x_0)$, jestliže:

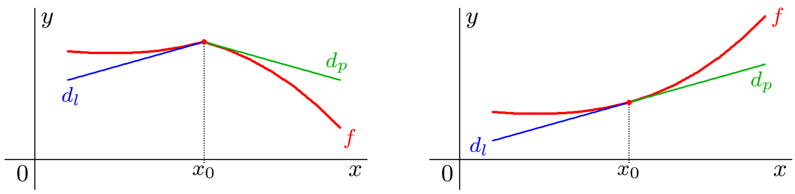
- Existuje $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{matrix}\text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0\end{matrix}\right] = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f'_+(x_0) \in R$ (je konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá zprava v bodě x_0.

Derivace $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ se nazývají **jednostranné** a graficky reprezentují směrnice **levé**, resp. **pravé poldotyčnice ke grafu f v bodě x_0**. Derivace $f'(x_0)$ se nazývá **obou-stranná**.

$f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in R$ (jsou konečné, nemusí se rovnat). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bodě x_0.

Existuje $f'(x_0)$. $\Leftrightarrow$ • Existují $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

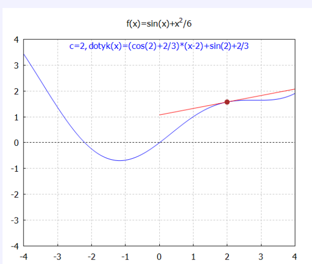


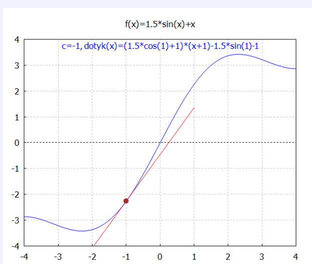
Jednostranné poldotyčnice

Následující konstrukce vypočítá a nakreslí tečnu ke grafu funkce f v bodě c.

(%i6)
```
c:2$ f(x):=x^2/6+sin(x)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$ dotyk(x):=f(c)+subst(c,x,f1(x))*(x-c)$
print("Secant y=dotyk(x)=",dotyk(x)," in point",c)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,xrange=[-4,4],yrange=[-4,4],
color=blue,explicit(f(x),x,-4,4),
color=red,explicit(dotyk(x),x,c-2,c+2),
point_type=7,color=brown,points([[c,f(c)]]),
color=blue,title=concat("f(x)=",string(f(x))),
label([concat("c=",string(c),", dotyk(x)=",string(dotyk(x))),0,3.75]))$
```

Secant $y = dotyk(x) = (\cos(2) + 2/3) * (x - 2) + \sin(2) + 2/3$ *in point* 2





$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset \{x_0 \in D(f);\ f'(x_0)$ je konečná$\}$, $A \neq \emptyset$.

- Funkce g: $y = f'(x)$, $x \in A$ se nazývá **derivace funkce f na množině A**,

označení f', y', resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

- Derivace f v bodě $x_0 \in D(f)$ je $f'(x_0)$, t.j. číslo nebo $\pm\infty$.
- Derivace f na množině $A \subset D(f)$ je funkce $y = f'(x)$, $x \in A$.

f má na množině $A \subset D(f)$ konečnou derivaci f'. $\Rightarrow$ • f je spojitá na A.

$f: y = x^n$, $x \in R$, $n \in N$, $x_0 \in D(f)$.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1})(x - x_0)}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$.

$f: y = \mathrm{e}^x$, $x \in R$.

- $[\mathrm{e}^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x$.

Při praktickém výpočtu derivací používáme různé vzorce a pravidla.

f', g' existují na $A \neq \emptyset$, $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ existují na A, $\left(\frac{f}{g}\right)'$ existuje na $A_1 = \{x \in A; g(x) \neq 0\}$.

Navíc platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$.
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Předcházející vzorce stručně zapisujeme:

- $(cf)' = cf'$. • $(f \pm g)' = f' \pm g'$. • $(fg)' = f'g + fg'$. • $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

f: $y = \frac{x}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$, přímka p: $y = 2 - x$.

- Tečny ke grafu f rovnoběžné s p jsou d_1: $y = -x$, d_2: $y = 4 - x$.

Tečna d: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ v bodě x_0 má směrnici $f'(x_0)$.

Přímka p má směrnici -1. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = -1$.

$f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{1\cdot(x-1)-x(1-0)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

- $f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$. $\Rightarrow$ $(x_0-1)^2 = 1$. $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ nebo $x_0 = 2$.

Dva dotykové body $D = \big[x_0; f_(x_0)\big]$ a dvě tečny d:

- $D_1 = [0; 0]$, d_1: $y = 0 - (x - 0) = -x$.
- $D_1 = [2; 2]$, d_2: $y = 2 - (x - 2) = 4 - x$.

Derivace inverzní funkce

f je spojitá a ostře monotónní na intervalu $I \subset R$.
$x_0 \in I$ je vnitřní bod.
$f'(x_0) \neq 0$ je konečná. $\Bigg\}\ \Rightarrow$

- Inverzní funkce f^{-1} má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\bigg|_{x_0=f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

- $[f^{-1}]'(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array}\right]$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Zjednodušeně můžeme psát:

- $[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, resp. • $\frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}}$.

f: $y = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ je spojitá a rostoucí, $f'(x) = \mathrm{e}^x \neq 0$ pro $x \in R$.

f^{-1}: $x = \ln y$ pro $y \in (0; \infty)$.

- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[\mathrm{e}^x]'} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ pro $y \in (0; \infty)$.

f: $y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá a rostoucí, $H(f) = (-1; 1)$.

$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1; 1)$.

Derivace složené funkce

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x),\ y = g(u),\ H(f) \subset D(g). \\ x_0 \in D(f),\ u_0 = f(x_0). \\ f'(x_0),\ g'(u_0) \text{ jsou konečné.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \begin{aligned}[t] [g(f(x_0))]' &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= g'(u_0) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Zjednodušeně můžeme psát:

- $F'(x) = [g(f)]'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$, resp. • $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{df(x)}{dx}$.

- $[\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x,\ x \in R.$

- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x,\ x \in R.$

- $[a^x]' = \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a,\ x \in R,\ a > 0,\ a \neq 1.$

- $[x^a]' = \left[e^{\ln x^a}\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1},\ x > 0,\ a \in R.$

- $[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]'$
  $= x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x],\ x > 0.$

- Výraz $[\ln f(x_0)]' = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ se nazývá **logaritmická derivace f v bodě x_0**.

Logaritmická derivace

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) > 0 \text{ pro } x_0 \in D(f). \\ f'(x_0) \text{ existuje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f'(x_0) = f(x_0) \cdot [\ln f(x_0)]'.$$

Derivace základních elementárních funkcí

Vzorec	Platnost	Vzorec	Platnost
$[c]' = 0,$	$x \in R,\ c \in R$	$[x]' = 1,$	$x \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1},$	$x \in R,\ n \in N$	$[x^a]' = ax^{a-1},$	$x > 0,\ a \in R$
$[e^x]' = e^x,$	$x \in R$	$[a^x]' = a^x \ln a,$	$x \in R,\ a > 0$

Vzorec	Platnost	Vzorec	Platnost
$[\ln x]' = \frac{1}{x},$	$x>0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x\ln a},$	$x>0,\ a>0,\ a\neq 1$
$[\ln\lvert x\rvert]' = \frac{1}{x},$	$x\neq 0$	$[\log_a \lvert x\rvert]' = \frac{1}{x\ln a},$	$x\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1$
$[\sin x]' = \cos x,$	$x\in R$	$[\cos x]' = -\sin x,$	$x\in R$
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x\neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k\in Z$	$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$x\neq k\pi,\ k\in Z$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x\in(-1;1)$	$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x\in(-1;1)$
$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2},$	$x\in R$	$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2},$	$x\in R$
$[\sinh x]' = \cosh x,$	$x\in R$	$[\cosh x]' = \sinh x,$	$x\in R$
$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x},$	$x\in R$	$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$	$x\neq 0$
$[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$	$x\in R$	$[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$x>1$
$[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x\in(-1;1)$	$[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x\in R-\langle -1;1\rangle$

Základem úspěšného derivování jsou derivace elementárních funkcí. Pro praktické potřeby je nutné si tyto vzorce zapamatovat.

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Často potřebujeme danou funkci f aproximovat (přibližně vyjádřit) jinou, jednodušší funkcí g tak, aby byl jejich rozdíl $|f(x)-g(x)|$ co nejmenší. Většinou nám postačí **lokálna aproximace** v nějakém okolí $O(x_0)$ bodu $x_0\in D(f)$.

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, bod $x_0\in D(f)$, existuje konečná $f'(x_0)$.

- **Diferenciál funkce** f v bodě x_0, označení $\mathrm{d}f(x_0,x-x_0)$, resp. $\mathrm{d}f(x_0,h)$

  je lineární funkce $\mathrm{d}f(x_0,x-x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, $x\in R$.

  Položíme $h=x-x_0$. $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0,x-x_0)=\mathrm{d}f(x_0,h)=f'(x_0)\cdot h$, $h\in R$.

f je **diferencovatelná**:

- **v bodě** $x_0\in D(f)$, pokud existuje $\mathrm{d}f(x_0,h)$, t.j. existuje konečná $f'(x_0)$.
- **na množině** $A\subset D(f)$, pokud existuje $\mathrm{d}f(x_0,h)$ pro všechny $x_0\in A$.

f: $y=x$, $x\in R$, bod $x_0\in R$, $f'(x_0)=1$.

- $\mathrm{d}f(x_0,h)=f'(x_0)\cdot h=1\cdot h=h$, $h\in R$, označení $\mathrm{d}x$. $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0,h)=\mathrm{d}x$.

f: $y = f(x)$, $x \in R$, bod $x_0 \in R$, $f'(x_0)$ je konečná.

- $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, $h \in R$, označení $\mathrm{d}f(x_0)$.

$\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0, h) = \mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, resp. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

O nejlepší lokální lineární aroximaci

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je diferencovatelná v bodě } x_0 \in D(f). \\ h\text{: } y = f(x_0) + c(x - x_0),\ c \in R,\ c \neq f'(x_0). \\ g\text{: } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- Existuje okolí $O(x_0)$ tak, že pro všechny $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - h(x)|$.

- aproximace f v okolí $O(x_0)$ pomocí tečny v bodě x_0

  g: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$

  je nejlepší ze všech aproximací f pomocí lineární funkce (přímky).

$\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$. Přesně $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Řešení.

Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$, $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.

Nechť $O(1)$ je takové, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1,06} = f(1,06) \approx \frac{1,06+5}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

```
(%i8) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$
      s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$ p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$ p(x);
      h(c):=print("c=",c,"          c^(1/6)=",'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ h(c)$
```

(%o6) $\frac{x-1}{6} + 1$

$c = 1.06 \quad c^{(1/6)} = f(1.06) = 1.009758794179192$ *approx* 1.01

Aproximace f má smysl pouze pro x v blízkosti bodu x_0.

```
(%i18) h(0.9)$ h(1.1)$ h(1.2)$ h(1.5)$ h(2.0)$ h(4.0)$ h(10)$ h(16)$ h(32)$ h(64)$
```

$c = 0.9 \quad c^{(1/6)} = f(0.9) = 0.9825931938526898$ *approx* 0.9833333333333334

$c = 1.1 \quad c^{(1/6)} = f(1.1) = 1.016011867773387$ *approx* 1.016666666666667

$c = 1.2 \quad c^{(1/6)} = f(1.2) = 1.030853320886445 \;\; approx \; 1.033333333333333$
$c = 1.5 \quad c^{(1/6)} = f(1.5) = 1.069913193933663 \;\; approx \; 1.083333333333333$
$c = 2.0 \quad c^{(1/6)} = f(2.0) = 1.122462048309373 \;\; approx \; 1.166666666666667$
$c = 4.0 \quad c^{(1/6)} = f(4.0) = 1.259921049894873 \;\; approx \; 1.5$
$c = 10 \quad c^{(1/6)} = f(10) = 1.46779926762207 \;\; approx \; 2.5$
$c = 16 \quad c^{(1/6)} = f(16) = 1.587401051968199 \;\; approx \; 3.5$
$c = 32 \quad c^{(1/6)} = f(32) = 1.781797436280679 \;\; approx \; 6.166666666666666$
$c = 64 \quad c^{(1/6)} = f(64) = 2.0 \;\; approx \; 11.5$

$\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01.$ Přesně $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Jiné řešení.

Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1}$, $x > -1$, $x_0 = 0$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > 0$, $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.

Nechť $O(0)$ je takové, že $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1,06} = f(0,06) \approx \frac{0,06+6}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

```
(%i8) c:0.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$
      s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$ p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$ p(x);
      h(c):=print("c=",c,"          c^(1/6)=",'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ h(c)$
```

(%o6) $\frac{x}{6} + 1$

$c = 0.06 \quad (c+1)^{(1/6)} = f(1.06) = 1.009758794179192 \;\; approx \; 1.01$

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ má derivaci f' na množině $A_1 \subset D(f)$, $A_1 \neq \emptyset$.

- $f' = f^{(1)}$ se nazývá **derivace prvního řádu (první derivace)** f na množině A_1.
- Derivace f' (pokud existuje), t.j. $[f']' = f'' = f^{(2)}$ na $A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ se nazývá **derivace druhého řádu (druhá derivace)** f na množině A_2.
- Derivace f'' (pokud existuje), t.j. $[f'']' = f''' = f^{(3)}$ na $A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ se nazývá **derivace třetího řádu (třetí derivace)** f na množině A_3.
- Derivace f''' (pokud existuje), t.j. $[f''']' = f^{(4)}$ na $A_4 \subset A_3$, $A_4 \neq \emptyset$ se nazývá **derivace čtvrtého řádu (čtvrtá derivace)** f na množině A_4.
- Takovým způsobem pokračujeme pro $n = 5, 6, 7, \ldots$.
- Derivace $f^{(n-1)}$, $n \in N$ (pokud existuje), t.j. $[f^{(n-1)}]' = f^{(n)}$ na $A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ se nazývá **derivace n-tého řádu (n-ta derivace)** f na množině A_n.
- Speciální definujeme $f = f^{(0)}$ **derivaci nultého řádu (nultou derivaci)** f.

$f^{(n)}(x_0)$ pro $x_0 \in A_n$ se nazývá **derivace n tého řádu (n-ta derivace) f v bodě x_0**.

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$

pro $x_0 \in A_n$, $A_n \subset A_{n-1}$, $n \in N$.

- To znamená, že funkce $f^{(n-1)}$ musí být definována v nějakém okolí $O(x_0)$.

Výpočet $f^{(n)}$, $n \in N$ může být obecně velmi pracný, protože musíme začít f'.

$y = x^k$, $x \in R$, $k \in N$.

$$[x^k]' = kx^{k-1}, \qquad [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}, \qquad [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}, \ \ldots,$$
$$[x^k]^{(k-1)} = k(k-1)\cdots 2x, \qquad [x^k]^{(k)} = k!, \qquad [x^k]^{(k+1)} = 0, \ \ldots$$

$\Rightarrow$ • $[x^k]^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},\ x \in R & \text{pro } n \in N,\ n \le k. \\ 0,\ x \in R & \text{pro } n \in N,\ n > k. \end{cases}$

$y = \mathrm{e}^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ pro $n \in N$.

$y = \sin x$, $x \in R$, $y = \cos x$, $x \in R$.

$$[\sin x]' = \cos x, \qquad [\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x, \qquad [\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x,$$
$$[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x, \qquad [\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ \ldots$$

$\Rightarrow$ • $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x,\ x \in R & \text{pro } n = 2k,\ k \in N. \\ (-1)^{k+1} \cos x,\ x \in R & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in N. \end{cases}$

$\Rightarrow$ • $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x,\ x \in R & \text{pro } n = 2k,\ k \in N. \\ (-1)^k \cos x,\ x \in R & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in N. \end{cases}$

Leibnizův vzorec

f, g mají na množině A derivace do řádu $n \in N$ (včetně). $\Rightarrow$

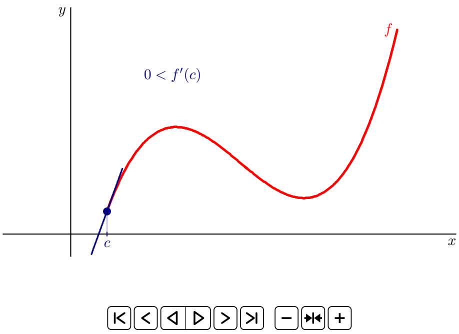
- $[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}.$

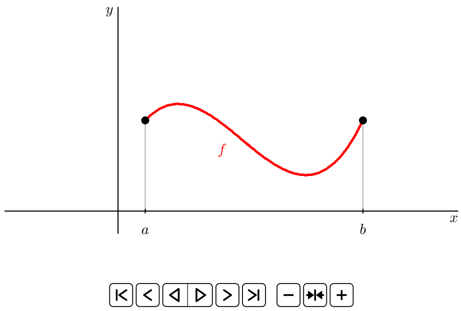
Aplikace derivace funkce

Věty o střední hodnotě funkce (Rolleho a Lagrangeova) a L'Hospitalovo pravidlo patří mezi nejčastější aplikace derivovaní v praxi.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

$$\left.\begin{array}{l} c\in D(f) \text{ je vnitřní bod.} \\ f \text{ má v bodě } c \text{ lokální extrém.} \\ f'(c) \text{ existuje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f'(c) = 0.$$





Nutná podmínka existence lokálního extrému (vlevo) a Rolleho věta (vpravo)

Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ f(a) = f(b). \\ \text{Existuje } f'(x)\in R^* \text{ pro všechny } x\in(a;b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Existuje } c\in(a;b) \text{ tak, že } f'(c) = 0.$$

- $c\in(a;b)$ leží na úsečke s koncovými bodmi a, b,

  proto se často vyjadřuje ve tvaru $c = a + \theta(b-a)$, $\theta\in(0;1)$.

Lagrange (věta o přírůstku funkce)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ \text{Existuje } f'(x)\in R^* \text{ pro všechny } x\in(a;b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Existuje } c\in(a;b) \text{ tak, že } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

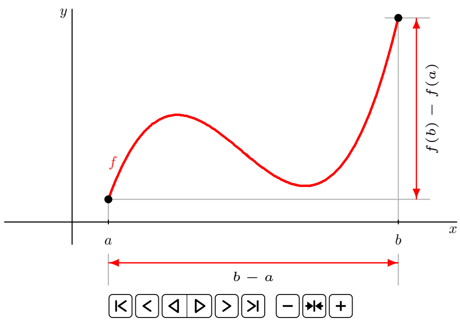
- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$ $\Rightarrow$ • $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a).$

Označme $b = a+h$, $h = b-a$, $h\in R$. $\Rightarrow$ $c = a + \theta(b-a) = a + \theta h$, $\theta\in(0;1)$.

- $f(b) - f(a) = f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)\cdot h$, $h\in R$, $\theta\in(0;1)$.

Pro dostatečně malé h můžeme předpokládat $f'(a+\theta h) \approx f'(a)$.

- $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)\cdot h \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a,h)$.



Lagrangeova věta

Rolleho a Lagrangeova věta zaručují existenci $c \in (a; b)$. Pomocí nich však takové body neumíme najít a ani nedokážeme určit jejich počet.

Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$ se často počítají pomocí l'Hospitalovho pravidla.

L'Hospitalovo pravidlo

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pro všechny } x\in O(a),\ x\neq a \text{ existují } f'(x),\ g'(x), \\ a\in R^*, \text{ existuje } \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b\in R^*. \\ \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty\ [L'H\tfrac{\infty}{\infty}], \\ \text{resp. } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\ [L'H\tfrac{0}{0}]. \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12.$

- $f(x) = x^3 - 8,\ x\in R,\ g(x) = x - 2,\ x\in R.$
- $O(2)$ můžeme zvolit libovolně, např. $O(2) = R$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2,\ g'(x) = 1 \text{ pro } x\in R - \{2\}. \\ \lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12. \\ \lim\limits_{x\to 2} (x^3-8) = \lim\limits_{x\to 2} (x-2) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1} = 12.$$

```
(%i9) f(x):=(x^3-8)/(x-2)$
      fc(x):=num(f(x))$ fc(x);
      fm(x):=denom(f(x))$ fm(x);
      'limit(f(x),x,2);'limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

```
limit(f(x),x,2); limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o4) $x^3 - 8$

(%o5) $x - 2$

(%o6) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

(%o7) $3 \lim_{x\to 2} x^2$

(%o8) 12

(%o9) 12

Bez l'Hospitalovho pravidla:

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x^2+2x+4) = 4+4+4 = 12.$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Předpoklady l'Hospitalovho pravidla jsou splněny:

- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $[x]' = 1$ pro $x \in (0; \infty)$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$
- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$

```
(%i4) f(x):=log(x)/x$ fc(x):=num(f(x))$ fm(x):=denom(f(x))$
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o4) $\frac{1}{2}$

- Je velmi důležité ověřit všechny předpoklady l'Hospitalovho pravidla.
- Platnost předpokladu $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$ se ověřuje průběžně během výpočtu limity.
- Obrácené tvrzení neplatí. Z existence $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nevyplývá existence $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i několikrát za sebou:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},\ k \in N.$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{6x}$
  $= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$

Předpoklady l'Hospitalovho pravidla jsou splněny:

- Pre $O(0) = (-1; 1)$, $x \in O(0)$, $x \neq 0$ existují příslušné derivace a limity.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \cdots$

L'Hospitalovo pravidlo nemůžeme použít.

L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i pro výpočet jiných neurčitých výrazů. Musíme je nejprve vhodnými úpravami převést na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov. Musíme ich najprv vhodnými úpravami previesť na typ $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Typ $\pm\infty\cdot 0$: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$ $[L'H\frac{0}{0}]$.
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$ $[L'H\frac{\infty}{\infty}]$.

Typ $\infty-\infty$: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$. $\Rightarrow$ Typ $\infty\cdot 0$.

Typ ∞^0: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.

Typ 0^0: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.

Typ $1^{\pm\infty}$: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} \ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}\cdot \ln x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{0+}\cdot(-\infty)}$
$= \mathrm{e}^{\infty\cdot(-\infty)} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$

L'Hospitalovo pravidlo jsme nepoužili.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, okolí $O(x_0) \subset D(f)$, $n \in N$.

Existují konečné derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) \in R$.

- **Taylorův polynom stupně n funkce f se středem v bodě x_0** je funkce

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x\in O(x_0).$$

Pokud označíme $h = x-x_0$, $x = x_0+h$, $h\in O(0)$, pak má tvar:

$$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h\in O(0).$$

- Taylorův polynom $T_n(x)$ se středem $x_0 = 0$ se nazývá **Maclaurin polynom**:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!},\ x\in O(0).$$

- **Zbytek Taylorova polynomu** (stupne n) se nazývá rozdíl

$$R_n(x) = f(x)-T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x\in O(x_0), & \text{Lagrangeov tvar,} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!},\ x\in O(x_0), & \text{Cauchyho tvar,} \end{cases}$$

přičemž $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta\in(0;1)$.

Zbytek $R_n(x)$ vyjadřuje chybu aproximace f pomocí Taylorova polynomu $T_n(x)$:

- Aproximace má lokální charakter v okolí $O(x_0)$.
- Aproximace je nejlepší ze všech aproximací pomocí polynomů stupně n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x\in\langle -1;\infty)$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ $f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3}\cdot(-\frac{2}{9})\cdot(x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x\in O(0)$.

- $\sqrt[3]{1+x} \approx \begin{cases} 1+\frac{x}{3}, & x \in O(0) \text{ s chybou } R_1(x). \\ 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}, & x \in O(0) \text{ s chybou } R_2(x). \\ 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}, & x \in O(0) \text{ s chybou } R_3(x). \end{cases}$

Vypočítáme Taylorův polynom funkce $\sqrt{x^2+1}$. Jak vidíme z řádku (%i2), ruční derivování je dosti pracné.

```
(%i1) f(x):=sqrt(x^2+1)$

(%i2) print("f(x)=",f(x),", f'(x)=",diff(f(x),x),",

         f''(x)=",ratsimp(diff(f(x),x,2)),", f'''(x)=",ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x)=-\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

Na příkladu vidíme, že příkaz `coeff` je závislý na příkazu `taylor`. Polynom `tp1` je devátého (prakticky osmého) stupně, proto výstupem příkazu `coeff(tp1,x,10))` je číslo 0. Polynom `tp2` je desátého stupně a výstup příkazu `coeff(tp2,x,10))` je skutečný koeficient $c_{10}=7/256$.

```
(%i3) tp1:taylor(f(x),x,0,9);
```

(tp1) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\cdots$

```
(%i4) print("c_3=",coeff(tp1,x,3),",c_4=",coeff(tp1,x,4),",c_10=",coeff(tp1,x,10))$
```

$c\_3=0$, $c\_4=-\frac{1}{8}$, $c\_10=0$

```
(%i5) tp2:taylor(f(x),x,0,10);
```

(tp2) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\frac{7x^10}{256}+\cdots$

```
(%i6) print("c_3=",coeff(tp2,x,3),",c_4=",coeff(tp2,x,4),",c_10=",coeff(tp2,x,10))$
```

$c\_3=0$, $c\_4=-\frac{1}{8}$, $c\_10=\frac{7}{256}$

$f(x)=\ln x$, $x \in (0;\infty)$, $x_0=1$. $\Rightarrow$ $f(1)=0$.

- $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $x>0$. $\Rightarrow$ $f'(1)=1=0!$.
- $f''(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$, $x>0$. $\Rightarrow$ $f''(1)=-1=-1!$.
- $f'''(x)=2\frac{1}{x^3}=2x^{-3}$, $x>0$. $\Rightarrow$ $f'''(1)=2\cdot 1=2!$.
- $f^{(4)}(x)=-3\cdot 2\frac{1}{x^3}=-3\cdot 2x^{-4}$, $x>0$. $\Rightarrow$ $f^{(4)}(1)=3\cdot 2\cdot 1=-3!$.

  ...
- $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{x^{k-1}}$, $x>0$, $k \in N$. $\Rightarrow$ $f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!$.

$\Rightarrow$ • $T_n(x)=0+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(x-1)^k}{k!}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot(x-1)^k}{k},\ x \in O(1).$$

(%i1) `taylor(log(x),x,1,10);`

(%o1) $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^7}{7}-\frac{(x-1)^8}{8}+\frac{(x-1)^9}{9}-\frac{(x-1)^{10}}{10}+\cdots$

Někdy je výhodnější $f(x)=\ln x$ vyjádřit ve tvaru Maclaurinovho polynomu.

- $x=t+1.\ \Rightarrow f(t)=\ln(t+1),\ t\in(-1;\infty)$,

$$T_n(t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k},\ t\in O(0).$$

(%i1) `taylor(log(x+1),x,0,10);`

(%o1) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$

$f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in R.\ \Rightarrow$ Maclaurinov polynom stupně $n\in N$ má tvar:

- $T_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!},\ x\in R.$

$f(x)=\sin x,\ x\in R.\ \Rightarrow$ Maclaurinov polynom stupně $n\in N$ má tvar:

- $T_{2k+1}(x)=0+\frac{x}{1!}+0+\frac{-x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!},\ x\in R.$

$f(x)=\cos x,\ x\in R.\ \Rightarrow$ Maclaurinov polynom stupně $n\in N$ má tvar:

- $T_{2k}(x)=1+0+\frac{-x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!},\ x\in R.$

(%i1) `taylor(exp(x),x,0,10);`

(%o1) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}+\cdots$

(%i2) `taylor(sin(x),x,0,10);`

(%o2) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}+\cdots$

(%i3) `taylor(cos(x),x,0,10);`

(%o3) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}-\frac{x^{10}}{3628800}+\cdots$

- Funkce $y=\mathrm{e}^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ můžeme aproximovat pro každé $x\in R$.
- Požadovanou přesnost dosáhneme dostatečným zvětšením stupně n.

$f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Označme $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$, $t = x^2$. $\Rightarrow$ $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} = g(x^2) = g(t) = \mathrm{e}^t$.

Pro Maclaurinov polynom $P_n(t)$ funkcie $g(t)$, $t \geq 0$

a Maclaurinov polynom $T_{2n}(x)$ funkcie $f(x)$, $x \in R$ platí:

- $P_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(x^2)^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = T_{2n}(x)$.

(%i1) `taylor(exp(x^2),x,0,10);`

(%o1) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \cdots$

(%i3) `subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,5)); subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,10));`

(%o2) $\frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

(%o3) $\frac{x^{20}}{3628800} + \frac{x^{18}}{362880} + \frac{x^{16}}{40320} + \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

Na závěr této části najdeme Maclaurinov polynom stupně 10 funkce $f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x+1}$.

(%i1) `taylor(log((x^2+1)/(x+1)),x,0,10);`

(%o1) $-x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9} + \frac{3x^{10}}{10} + \cdots$

(%i3) `tp1(x):=taylor(log(x^2+1),x,0,10)-taylor(log(x+1),x,0,10)$ tp1(x);`

(%o3) $-x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9} + \frac{3x^{10}}{10} + \cdots$

(%i6) `tp2(x):=ratsimp(subst(x^2,t,taylor(log(t+1),t,0,5))-taylor(log(x+1),x,0,10))$`

`tp2(x); tp1(x)-tp2(x);`

(%o5) $\frac{756x^{10} - 280x^9 - 315x^8 - 360x^7 + 1260x^6 - 504x^5 - 630x^4 - 840x^3 + 3780x^2 - 2520x}{2520}$

(%o6) $0 + \cdots$

Průběh funkce

Důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce je určení intervalů, na kterých je tato funkce monotónní.

$I \subset R$ je interval, f je spojitá na I, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f je na intervalu I $\left\{ \begin{array}{lcl} \text{konstantní.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) = 0 \\ \text{rostoucí.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) > 0 \\ \text{neklesající.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) \geq 0 \\ \text{klesající.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) < 0 \\ \text{nerostoucí.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) \leq 0 \end{array} \right\}$ provšechny $x \in I$.

Body, ve kterých má spojitá funkce f lokální extrémy, úzce souvisejí s intervaly, na kterých je tato funkce ostře monotónní.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in D(f),\ f(x_0) \text{ je lokální extrém.} \\ f'(x_0) \text{ existuje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f'(x_0) = 0.$$

- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje lokální extrém v bodě x_0.
- Lokální extrém může být i bodě, kde derivace neexistuje.

Při hledání lokálních extrémů funkce musíme:

- Vyšetřit všechny body $x_0 \in D(f)$, pro které platí $f'(x_0) = 0$.
- Vyšetřit všechny body $x_0 \in D(f)$, v nichž $f'(x_0)$ neexistuje.

Při hledání globálních extrémů funkce musíme navíc:

- Vyšetřit hraniční body $D(f)$.

Bod $x_0 \in D(f)$ se nazývá **stacionární bod funkce** f, pokud existuje $f'(x_0) = 0$.

Postačující podmínka existence lokálního extrému

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$. Pro všechny $x \in O(x_0)$ existuje $f'(x)$ a platí:

- $f'(x) > 0$ pro $x < x_0$, $f'(x) < 0$ pro $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.
- $f'(x) < 0$ pro $x < x_0$, $f'(x) > 0$ pro $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.
- $f'(x) < 0$ pro $x \neq x_0$, resp. $f'(x) > 0$ pro $x \neq x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ není lokální extrém.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná. $\Rightarrow$

- $f''(x_0) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.
- $f''(x_0) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.

Důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce je určení intervalů, na kterých je tato funkce konvexní nebo konkávní.

$I \subset R$ je interval, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f je na intervale I $\begin{cases} \text{konvexní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ neklesající.} \\ \text{ostře konvexní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ rostoucí.} \\ \text{konkávní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ nerostoucí.} \\ \text{ostře konkávní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ klesající.} \end{cases}$

$I \subset R$ je interval, pro všechny $x \in I$ exituje $f''(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f je na intervale I $\left\{ \begin{array}{ll} \text{ostře konvexní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f''(x) > 0 \\ \text{konvexní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f''(x) \geq 0 \\ \text{ostře konkávní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f''(x) < 0 \\ \text{konkávní.} & \Leftrightarrow \bullet\ f''(x) \leq 0 \end{array} \right\}$ pre všetky $x \in I$.

Při vyšetřování konvexnosti a konkávnosti funkce f musíme:

- Vyšetřit všechny body $x_0 \in D(f)$, pro které platí $f''(x_0) = 0$.
- Vyšetřit všechny body $x_0 \in D(f)$, ve kterých je f spojitá a $f'(x_0)$ neexistuje.

$\left. \begin{array}{l} x_0 \in D(f) \text{ je inflexní bod funkce } f. \\ f''(x_0) \text{ existuje.} \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet\ f''(x_0) = 0.$

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$. Pro všechny $x \in O(x_0)$ existuje $f''(x)$ a platí:

- $f''(x) > 0$ pro $x < x_0$, $f''(x) < 0$ pro $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 je inflexní bod funkce f.
- $f''(x) < 0$ pro $x < x_0$, $f''(x) > 0$ pro $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 je inflexní bod funkce f.
- $f''(x) < 0$ pro $x \neq x_0$, resp. $f''(x) > 0$ pro $x \neq x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 neníinflexní bod funkce f.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. $\Rightarrow$ • x_0 je inflexní bod funkce f.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \in N$.

$n = 2k-1$, $k \in N$ (liché). $\Rightarrow$
- $f(x_0)$ není lokální extrém.
- f je rostoucí v bodě x_0 pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- f je klesající v bodě x_0 pro $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$n = 2k$, $k \in N$ (sudé). $\Rightarrow$
- $f(x_0)$ je lokální extrém.
- $f(x_0)$ ostré minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- $f(x_0)$ ostré maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$.

$n = 2k+1$, $k \in N$ (liché). $\Rightarrow$
- x_0 je inflexní bod funkcie f.

$n = 2k$, $k \in N$ (sudé). $\Rightarrow$
- f je ostro konvexní v bod0e x_0 pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- f je ostro konkávní v bodě x_0 pro $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Vyšetření průběhu funkce

Vyšetřit průběh funkce f znamená určit:

- Definiční obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Sudost, lichost, periodicitu, resp. jiné speciální vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodech nespojitosti, v hraničních bodech a v bodech $\pm\infty$.
- Nulové body; intervaly, na kterých je f kladná a záporná.
- f', stacionární body, lokální a globální extrémy; intervaly, na kterých je f rostoucí, klesající a konstantní.
- f'', inflexní body; intervaly, na kterých je f konvexní a konkávní.
- Asymptoty bez směrnice a asymptoty se směrnicí.
- Obor hodnot $H(f)$ a nastínit graf funkce.

Nejnázorněji představu o průběhu funkce nám většinou poskytne graf. Při jeho konstrukci využíváme všechny zjištěné údaje. Mnohokrát jsou ale nedostatečné, proto je musíme doplnit vhodně zvolenými funkčními hodnotami.

Průběh funkce $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{8x-16}{x^2}$.

(%i1) `f(x):=(8*x-16)/x^2;`
(%o1) $f(x) := \frac{8x-16}{x^2}$

- $D(f) = R - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Pomocí příkazu **denom** (denominator) zjistíme, kdy je jmenovatel nulový.

(%i3) `fm:denom(f(x));solve(fm=0,x);`
(fmen) x^2
(%o3) $[x = 0]$

- f není periodická, f není sudá, f není lichá.
- f je spojitá na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, v bodě 0 je nespojitá.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right) = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0.$

(%i5) `limit(f(x),x,minf);limit(f(x),x,inf);`
(%o4) 0
(%o5) 0

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$.

(%i7) `limit(f(x),x,0,minus);limit(f(x),x,0,plus);`
(%o6) $-\infty$
(%o7) $-\infty$

- Bod $x = 0$ je neodstranitelný bod nespojitosti II. Druhu.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice.
- $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = 0. \Leftrightarrow 8x - 16 = 0. \Leftrightarrow x = 2.$

Pomocí příkazu **num** (numerator) zjistíme, kdy je čitatel nulový.

(%i9) `fcit:num(f(x));solve(fcit=0,x);`
(fcit) $8x - 16$
(%o9) $[x = 2]$

- $x = 2$ je nulový bod f. $\Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \text{ pro } x \in (-\infty; 0), \\ f(x) < 0 \text{ pro } x \in (0; 2), \\ f(x) > 0 \text{ pro } x \in (2; \infty). \end{cases}$

$f(2) = 0$, f není v bodě $x = 0$ definována.

$\Rightarrow$ Funkce f nemění znaménko na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$.

$\Rightarrow$ Stačí zvolit libovolný bod v daných intervalech a ověřit jeho hodnotu.

```
(%i13) f(2);f(-1);f(1);f(3);
```
(%o10) 0
(%o11) -24
(%o12) -8
(%o13) $\frac{8}{9}$

- $f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x-8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i15) f1(x):=diff(f(x),x,1)$ ratsimp(f1(x));
```
(%o15) $-\frac{8x-32}{x^3}$

- $f'(x) = \frac{32-8x}{x^3} = 0. \;\Leftrightarrow\; 32 - 8x = 0. \;\Leftrightarrow\; x = 4.$

```
(%i16) solve(f1(x)=0,x);
```
(%o16) $[x = 4]$

- f' je v bodě 0 nespojitá.

```
(%i18) f1men:denom(ratsimp(f1(x)));solve(f1men=0,x);
```
(f1men) x^3
(%o18) $[x = 0]$

- $x = 4$ je nulový bod f'. $\Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0, \; f \text{ je klesající pro } x \in (-\infty; 0), \\ f'(x) > 0, \; f \text{ je rostoucí pro } x \in (0; 4), \\ f'(x) < 0, \; f \text{ je klesající pro } x \in (4; \infty). \end{cases}$

$f'(4) = 0$, f' není v bodě $x = 0$ definována.

$\Rightarrow$ Funkce f' nemění znaménko na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$, $(4; \infty)$.

$\Rightarrow$ Stačí zvolit libovolný bod v daných intervalech a ověřit jeho hodnotu.

```
(%i22) subst(4,x,f1(x));subst(-1,x,f1(x));subst(1,x,f1(x));subst(5,x,f1(x));
```
(%o19) 0
(%o20) -40
(%o21) 24
(%o22) $-\frac{8}{125}$

- f má v bodě $x = 4$ lokální maximum a aj globální maximum $f(4) = 1$.

```
(%i23) f(4);
(%o23) 1
```

- f nemá lokální a ani globální minimum.
- $f''(x) = \left[\frac{32-8x}{x^3}\right]' = \frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6} = \frac{16x^3-96x^2}{x^6} = \frac{16x-96}{x^4}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i25) f2(x):=diff(f(x),x,2)$ ratsimp(f2(x));
(%o25) (16x-96)/x^4
```

- $f''(x) = \frac{16x-96}{x^4} = 0. \;\Leftrightarrow\; 16x - 96 = 0. \;\Leftrightarrow\; x = 6.$

```
(%i26) solve(f2(x)=0,x);
(%o26) [x = 6]
```

- f'' je v bode 0 nespojitá.

```
(%i28) f2men:denom(ratsimp(f2(x)));solve(f2men=0,x);
(f2men) x^4
(%o28) [x = 0]
```

- $x = 6$ je nulový bod f''. $\Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0, \ f \text{ je konkávní pro } x \in (-\infty; 0), \\ f''(x) < 0, \ f \text{ je konkávní pro } x \in (0; 6), \\ f''(x) > 0, \ f \text{ je konvexní pro } x \in (6; \infty). \end{cases}$

$f'(6) = 0$, f'' není v bode $x = 0$ definovína.

$\Rightarrow$ Funkce f'' nemění znaménko na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; \infty)$.

$\Rightarrow$ Stačí zvolit libovolný bod v daných intervalech a ověřit jeho hodnotu.

```
(%i32) subst(6,x,f2(x));subst(-1,x,f2(x));subst(1,x,f2(x));subst(7,x,f2(x));
(%o29) 0
(%o30) -112
(%o31) -80
(%o32) 16/2401
```

- Bod $x = 6$ je inflexní bod funkce f.

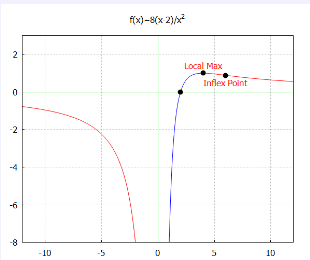
```
(%i33) f(6);
(%o33) 8/9
```

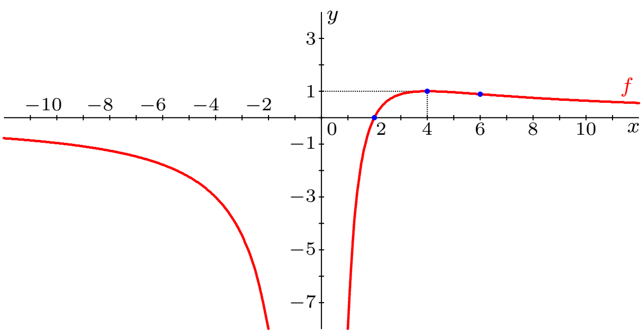
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = 0 - 0 = 0. \\ \bullet\ q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow y = kx + q = 0.$$

```
(%i35) km:limit(f(x)/x,x,minf);kp:limit(f(x)/x,x,inf);
(km)   0
(kp)   0
(%i37) qm:limit(f(x)-km*x,x,minf);qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf);
(km)   0
(kp)   0
```

- $y = 0$ je asymptota se směrnicí.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.

```
(%i38) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-12,12],yrange=[-8,3],
       title="f(x)=8(x-2)/x^2",color=blue,explicit(f(x),x,0,4),
       color=red,explicit(f(x),x,-12,0),explicit(f(x),x,4,12),
       label(["Inflex Point",6,f(6)-.4],["Local Max",4,f(4)+.4]),
       color=green,parametric(0,t,t,-8,3),parametric(t,0,t,-12,12),
       color=black,point_type=7,points([[4,f(4)],[6,f(6)],[2,f(2)]]))$
```





Graf funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$

Literatura

[1] Blaško R., Matematická analýza I, Žilina, EDIS 2009.

[2] Blaško R., Matematická analýza I, skriptum, `https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/sa1.pdf`.

[3] Blaško R., Nurčitý a určitý integrál reálnej funkcie, skriptum, `https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/sa2.pdf`.

[4] Blaško R., Základy lineárnej algebry a základy matematickej analýzy pre manažérov, skriptum, `https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/zla-zma.pdf`.

[5] Buša J., Maxima Open source systém počítačovej algebry, online, `https://people.tuke.sk/jan.busa/kega/maxima/maxima.pdf`, 2006.

[6] Bittinger M. L., Ellenbogen D. J., Surgent S. A., Calculus and its Applications, Addisok-Wesley, ISBN-10: 0-321-69433-3.

[7] Crowell B., Calculus, Light and Matter, www.lightandmatter.com, March 2010.

[8] Hannan Z., wxMaxima for Calculus I and II, Solano Community College, `https://wxmaximafor.wordpress.com/`.

[9] Mardsen J., Weinstein A., Calculus I — III, Springer.

[10] Strang G., Calculus, Wellesley-Cambridge Press, Box 82-279 Wellesley MA 02181.