Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Summer School Open Source

Innovative Open Source courses for Computer Science

Rudolf Blaško

2021

Funded by
the European Union

Spis treści

Wprowadzenie do wxMaxima

wxMaxima to interfejs dialogowy dla systemu algebry komputerowej Maxima. wxMaxima oferuje menu i okna dialogowe dla typowych komend, autouzupełniania, osadzone wykresy i proste animacje. wxMaxima jest rozpowszechniany na licencji GPL. Maxima jest jednym z programów Open Source z otwartym kodem źródłowym. Program można skompilować w różnych systemach operacyjnych, w tym Windows, GNU/Linux i MacOS X. Wstępnie skompilowany program dla Linux i Windows jest dostępny bezpłatnie na stronie SourceForge `https://sourceforge.net/projects/maxima/files/`. Po uruchomieniu środowiska wxMaxima na górze ekranu pojawi się okno menu. Poniżej menu znajduje się miejsce, w którym możemy wpisywać komendy i gdzie pojawiają się wyjścia.

```
(%i1)  First input line.
(%o1)  First output line.
(%i2)  Second input line.
(%o2)  Second output line.
```

Komendy wpisujemy w osobnych liniach (liniach wejściowych), zapewnione jest ich wykonanie naciskając jednocześnie `Shift` a `Enter` lub klikając w menu ikona (Send the current cell to maxima). Linie wejściowe są oznaczone jako (%i1), a linie wyjściowe jako (%o1). Numery linii wejściowej i odpowiadającej linii wyjściowej są identyczne i na podstawie tej liczby możemy odwołać się do treści tych wierszy.

```
(%i1)  solve(0=x+2,x);
(%o1)  [x = -2]
(%i2)  %i1;
(%o2)  solve(0 = x + 2, x)
(%i3)  %o1;
(%o3)  [x = -2]
```

Komendy są wykonywane w nowych oddzielnych liniach (liniach wyjściowych). Komendy w liniach wejściowych mogą być zakończone symbolem `;` (które system uzupełni automatycznie) lub symbol `$`, który blokuje wyświetlanie odpowiedniego wyjścia. Możemy wpisać więcej komend w linii wejściowej, ale musimy je rozdzielić symbole `;` lub `$`. Możemy również ustrukturyzować komenda w wielu liniach wejściowych.

```
(%i1)  a:2;b:3;solve(a*x+b*x^2=0,x)
(a)    2
(b)    3
(%o1)  [x = -2/3, x = 0]
(%i2)  a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
(%o2)  [x = -2/3, x = 0]
(%i3)  a:2$
       b:3$
       solve(a*x+b*x^2=0,x);
(%o3)  [x = -2/3, x = 0]
```

Wyjście możemy zapisać w różnych kształtach, a następnie wykorzystać go w innych programach (LaTeX, edytor równań MSWord, ...). Wyjście (%o3) z poprzedniego okna możemy:

- kopia (`Crl C` a `Crl V`), ewent. kopiuj jako tekst (może być używany np. w edytorze równań MSWord): `x=-2/3, x=0`,
- skopiuj jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- kopiuj jako MathML, obraz, RTF, SVG...

Środowisko wxMaxima posiada dobrze zaprojektowaną pomoc użytkownika, którą można znaleźć w menu `Help` Pomoc można również otworzyć, naciskając klawisz `F1`. Możesz również znaleźć instrukcję na stronie internetowej `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Komendy podstawowe

Komenda `apropos` możemy znaleźć dokładną nazwę komendy, używając części jego nazwy.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

Komenda `describe` drukuje opis wprowadzonego komendy.

```
(%i1) describe(plot2d);
      -- Function: plot2d
         plot2d (<expr><, <range_x><, <options><)
         plot2d (<expr_<>=<expr_<>, <range_x><, <range_y><, <options><)
         ...
(%o1) true
```

Wyrażenia są wprowadzane przy użyciu zwykłych znaków operacji, sesji i funkcji. Argumenty funkcji i komend znajdują się w nawiasach, symbol mnożenia`*` należy wpisać! Potęgowanie wpisuje się znakiem `^` lub parę `**`.

Symbol `:` służy do przypisania wartości po prawej stronie wyrażenia po lewej stronie.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```
(%o1) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

W menu `View` a podmenu `Display equations` możemy zmienić wyświetl linie wyjściowe do kształtów `in 2D`,`as 1D ASCII` lub`as ASCII Art`. Domyślny ekran to `in 2D`. Możesz także zmienić ustawienia wyjściowe za pomocą komendy `set_display`. Ustawienie kształtu `in 2D` ma argument `none`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$
```

```
(%o1) x/sqrt(x^2+1)          /* in 2D */
```

Użyj argumentu `ascii` w poleceniu `set_display`, aby zmienić dane wyjściowe na formę `as 1D ASCII` i użyj argumentu xml, aby zmienić formę na `as ASCII Art`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
(%o1) x/sqrt(x^2 + 1)        /* as 1D ASCII */
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
            x
(%o2) ------------           /* as ASCII Art */
              2
      sqrt(x   + 1)
```

Komenda `kill` możemy usunąć z pamięci zmienne ze wszystkimi ich przypisaniami i właściwości.

```
(%i1) kill(a,b)          /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all)          /* removes all items on all infolists */
```

Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

Maxima może pracować z liczbami rzeczywistymi zapisanymi w formie numerycznej lub symbolicznej. Sposób zapisu liczb rzeczywistych można ustawić w menu `Numeric` za pomocą przełącznika `Numeric Output` między wyświetlaczem numerycznym a symbolicznym. Tutaj możemy również wybrać metodę i dokładność wyświetlania numerycznego. Ustawienie zmiennej `numer` określa sposób wyświetlania. Domyślnie wyświetlanych jest 16 cyfr (w tym kropka dziesiętna). Dokładność wyświetlania jest określona przez zmienną `fpproc` i wpływa na wyświetlacz za pomocą `bfloat`. Wyjście `float` zawsze wyświetla to samo. Możemy zwiększać lub zmniejszać dokładność praktycznie w nieskończoność. Możemy to zmienić globalnie i lokalnie tylko dla jednej zmiennej lub komendy.

```
(%i1) log(2);
(%o1) log(2)
(%i2) log(2),numer;
(%o2) 0.6931471805599453
(%i3) float(log(2));
(%o3) 0.6931471805599453
(%i4) bfloat(log(2));
(%o4) 6.931471805599453b-1
(%i5) log(2),bfloat;
(%o5) 6.931471805599453b-1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=34;
(%o6) 6.931471805599453094172321214581766b-1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=134;
(%o6) 6.931471805599453094172321214[78digits]102057068573368552023575813b-1
```

Stałe numeryczne e, π, i (jednostka urojona) mają przedrostek `%`, czyli `%e`, `%pi`, `%i`. Dotyczy to również stałych, które są częścią lub wynikiem obliczeń. Mają też przedrostek `%`.

Maxima ma predefiniowane stałe `inf`, `minf` dla rzeczywistej nieskończonej ∞, $-\infty$ a stałą `infinity` dla zespolonej nieskończoności.

Stałe logiczne `true` a `false` reprezentują prawdę i nieprawdę.

```
(%i1) %pi; %i; %e;
(%o1) π %i %e
(%i2) minf; inf;
(%o2) -∞ ∞
(%i3) infinity;
(%o3) infinity
```

W tym kursie nie zajmujemy się liczbami zespolonymi, więc wspomnimy tylko o tym, jak są wyświetlane. Domyślnie liczby zespolone są wprowadzane w formie algebraicznej (`rectform`). Można je przekonwertować do postaci trygonometrycznej (wykładniczej) za pomocą komendy `polarform`.

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Przypisania i funkcje

Operator `:` używamy do przypisywania wartości lub wyrażeń do zmiennych. Definiujemy funkcje za pomocą przypisania `:=`.

(%i1) `f(x):=x^2+2*x+3;`

(%o1) $f(x) := x^2 + 2 * x + 3$

(%i6) `f(x);f(y);f(x+1);f(-2);f(1);`

(%o2) $x^2 + 2 * x + 3$

(%o3) $y^2 + 2 * y + 3$

(%o4) $(x + 1)^2 + 2 * (x + 1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

Maxima zawiera znacznie więcej funkcji niż standardowe języki programowania. Są to nie tylko same rzeczywiste funkcje, ale także różne funkcje ich obsługi. Podstawowe funkcje obejmują `sign(x)`, `abs(x)`, `floor(x)` (dolna część całkowita x) `round(x)` (zaokrąglone x do najbliższej liczby całkowitej), `truncate(x)` (usuwa wszystkie cyfry po przecinku), `ceiling(x)` (górna część całkowita x).

```
(%i2) f(x):=sign(x)$ print(f(-3.2),f(0),f(3.2))$
```

```
         neg zero pos
(%i4)    f(x):=abs(x)$ print(f(-3.2),f(0),f(3.2))$
         3.2 0 3.2
(%i6)    f(x):=floor(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
         −4 −4 −1 0 1 3 3
(%i8)    f(x):=round(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
         −4 −3 −1 0 1 3 4
(%i10)   f(x):=truncate(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
         −3 −3 −1 0 1 3 3
(%i12)   f(x):=ceiling(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
         −3 −3 −1 0 1 4 4
```

Do sformatowania raportu użyliśmy komendą `print`.

```
(%i3)    a:2$ b:log(2),numer$ print("Logarithm of a number",a," is ",log(a),"=",b)$
         Logarithm of a number 2 is log(2) = 0.6931471805599453
```

Maxima zawiera wiele funkcji elementarnych. Są na przykład `exp(x)=%e^x`, `log(x)`, funkcje trygonometryczne `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)` i ich funkcje odwrotne `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`, funkcje hiperboliczne `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` i ich funkcje odwrotne `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)` itd.

Maxima zawiera również wiele funkcji, które je wspierają. Część z nich nie jest zaimplementowana bezpośrednio w środowisku wxMaxima, ale w zewnętrznych bibliotekach zwane pakietami. Pakiety te są ładowane do systemu za pomocą komendą `load`. Jako przykład pokażemy pakiet`spangl` do wspomagania pracy z funkcjami trygonometrycznymi.

```
(%i2)    print(tan(%pi/8),ratsimp(tan(%pi/8)),trigsimp(tan(%pi/8)))$
```

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

```
(%i3)    load(spangl);
(%o3)    ../share/trigonometry/spangl.mac
(%i4)    tan(%pi/8);
```

(%o4) $\sqrt{2}-1$

Praca z wyrażeniami

Operacje i obliczenia Maxima odbywają się w środowisku, w którym system zakłada ważność określonych warunków. Możemy zmienić te warunki. Wiele razy musimy zmienić warunki tylko lokalnie dla konkretnego obliczenia bez aby zmienić ustawienia globalne. W tym celu Maxima ma bardzo wydajną komenda `ev`, która pozwala zdefiniować określone środowisko w ramach jednej komendy.

Po wpisaniu komendy `ev(a,b1,b2,...,bn)` wyrażenie `a` jest obliczane jeśli spełnione są warunki `b1`,`b2`, ...,`bn`. Warunkami tymi mogą być równania, przypisania, funkcje, przełączniki (ustawienia logiczne). Poniżej znajduje się przykład rozwiązania równania kwadratowego za pomocą komendy `solve`. Zmienne `a`, `b`, `c` po wykonaniu komendy `ev` nie mają przypisanych wartości.

```
(%i1) ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);
```

(%o1) $[x = \frac{3}{2}, x = -1]$

```
(%i2) solve(a*x^2+b*x+c=0,x);
```

(%o2) $\left[x = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, \ x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\right]$

Maxima oferuje kilka komend do uproszczenia i edycji różnych wyrażeń. Podstawowe funkcje znajdziesz w menu `Simplify`. Za pomocą komendy `ratsimp` a `trigsimp` już się spotkaliśmy i podczas dostosowywania wartości`tan(%pi/8)` nie przyniosły pożądanego efektu.

Maxima oferuje z poleceniem komenfy `example` przykłady poszczególnych komend. Rzućmy okiem na kilka przykładów oferowanych przez `example(ratsimp)`.

```
(%i2) f(x):=b*(a/b-x)+b*x+a$ print(f(x),"?",ratsimp(f(x)))$
```

$bx + b(\frac{a}{b} - x) + a \ ? \ 2a$

```
(%i3) ratsimp(a+1/a);
```

(%o3) $\frac{a^2+1}{a}$

```
(%i4) ev(x^(a+1/a),ratsimp);
```

(%o4) $x^{a+\frac{1}{a}}$

```
(%i5) ev(x^(a+1/a),ratsimpexpons);
```

(%o5) $x^{\frac{a^2+1}{a}}$

Funkcja `expand` mnoży odpowiednie elementy w wyrażeniu. Funkcja `factor` przeciwnie, rozkłada wyrażenie. Funkcja `gfactor` robi to na polu liczb zespolonych.

```
(%i1) f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$
(%i3) ratsimp(f(x));expand(f(x));
```

(%o2) $x^5 + x^4 - 16x - 16$
(%o3) $x^5 + x^4 - 16x - 16$

```
(%i6) factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);
```

(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$
(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%i)(x+2\%i)$
(%o6) $2^2 5^2$

Rozkładamy wymierną funkcję wielomianową na częściowe ułamki za pomocą komendy `partfrac`.

```
(%i1) partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);
```

(%o1) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$

Możemy podstawić wyrażenia używając komend `subst(a,b,c)` a `ratsubst(a,b,c)`. Wyrażenie `a` zostanie zastąpione przez `b` i następnie podstawione w wyrażeniu `c`.

Używając komendy `subst` musi być `b` najprostsza część (atom) lub pełne podwyrażenie wyrażenia `c`. W tym przykładzie nie ma podwyrażenia `x+y` kompletne (brak `z`). Komenda `ratsubst` modyfikuje również wynikowe wyrażenie.

(%i2) `subst(x+y,a,a^2+b^2);ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);`
(%o1) $(y+x)^2+b^2$
(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$
(%i4) `subst(a,x+y,x+y+z);ratsubst(a,x+y,x+y+z);`
(%o3) $z+y+x$
(%o4) $z+a$

Granice i pochodzenie

W menu `Calulus` znajdujemy funkcje do rozwiązywania podstawowych problemów analizy matematycznej (granice, pochodna, całkowanie, sumy szeregów, rozkład funkcji na wielomian Taylora...).

Limity obliczamy za pomocą komendy `limit`. Ostatni parametr określa kierunek granic jednostronnych, ma wartości `plus` lub `minus` i jest opcjonalny. Jeśli nie zostanie określony, Maxima oblicza limit jako złożony. Komendy `limit(f(x),x,a)`, `limit(f(x),x,a,plus)` obliczamy granice $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

(%i4)
```
limit(1/x,x,0);
limit(1/x,x,0,plus);
limit(1/x,x,0,minus);
limit(1/x,t,0);
```
(%o1) $infinity$
(%o2) ∞
(%o3) $-\infty$
(%o4) $\frac{1}{x}$

Jeśli przed komendą użyjemy apostrofu `'`, komenda nie zostanie wykonana, tylko zostanie wyświetlona.

(%i2)
```
limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);

'limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
```
(%o1) 0

(%o2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{3n+1}\right)^{4n+1}$

Pochodne oblicza się za pomocą komendy `diff`. Parametr określający kolejność wyprowadzania jest opcjonalny.

```
(%i4) f(x):=2*x^4-3*x+sin(x);
      print("f'=",diff(f(x),x),"=",diff(f(x),x,1))$
      print("f''=",diff(diff(f(x),x),x),"=",diff(f(x),x,2),"=",diff(f(x),x,1,x,1))$
      print("f^(10)=",diff(f(x),x,10),"=",diff(f(x),x,1,x,9))$
```

(%o1) $f(x) := 2x^4 - 3x + \sin(x)$

$f' = \cos(x) + 8x^3 - 3 = \cos(x) + 8x^3 - 3$

$f'' = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x)$

$f\_(10) = -\sin(x) = -\sin(x)$

Pochodne cząstkowe obliczamy za pomocą tego samego komendy.

```
(%i3) g(x,y):=x^3*y^2-1;
      print("g'_x=",diff(g(x,y),x),", resp. g'_y=",diff(g(x,y),y,1))$
      print("g''_(xx)=",diff(g(x,y),x,2),", resp. g''_(yx)=",diff(g(x,y),y,1,x,1))$
(%o1) g(x,y):=x^3*y^2-1
```

$g'\_x = 3x^2y^2$, *resp.* $g'\_y = 2x^3y$

$g''\_(xx) = 6xy^2$, *resp.* $g''\_(yx) = 6x^2y$

Obliczamy wielomian Taylora n-tego stopnia za pomocą komendy `taylor`. Możesz znaleźć to komenda `Calculus` menu a podmenu `Pobierz serię...`. Wielomian Taylora funkcji f stopień n w środku c obliczamy za pomocą komendy `taylor(f(x),x,c,n)`. Jego współczynniki uzyskuje się za pomocą komendy `coeff`. Użycie tego komendy zależy od komendy `taylor`.

```
(%i1) t1:taylor(sin(x),x,0,5); t2:taylor(sin(x),x,-1,5);
```

(t1) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$

(t2) $-\sin(1) + \cos(1)(x+1) + \frac{\sin(1)(x+1)^2}{2} - \frac{\cos(1)(x+1)^3}{6} - \frac{\sin(1)(x+1)^4}{24} + \frac{\cos(1)(x+1)^5}{120} + \cdots$

```
(%i3) print(coeff(sin(x),x,5)," and ",coeff(t1,x,5)," and ",coeff(t2,x,5))$
```

0 *and* $\frac{1}{120}$ *and* $\frac{\cos(1)}{120}$

Wielomian Taylora jest znowu wielomianem, tylko że jest wyrażony w innej postaci. Praktycznie tylko układ współrzędnych, w którym wyrażamy wielomian, zmienia się. Początek systemu przesuwa się z punktu 0 do punktu -1.

W poniższym przykładzie obliczany jest wielomian Taylora danego wielomianu innym sposobem. Komenda `taylor` daje trzy punkty na koniec, nawet jeśli rozwój jest zamknięty.

```
(%i1) f(x):=2*x^5-x^4-3*x^3-x+1;
```

(%o1) $f(x) := 2x^5 - x^4 + (-3)x^3 - x + 1$

```
(%i2) tp1:taylor(f(x),x,-1,5);
```

(tp1) $2 + 4(x+1) - 17(x+1)^2 + 21(x+1)^3 - 11(x+1)^4 + 2(x+1)^5 + \cdots$

```
(%i4) ratsimp(tp1);expand(tp1);
```

(%o3) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%o4) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%i6) `tpx:ratsubst(t,x+1,f(x));subst(x+1,t,tpx);`

(tpx) $2t^5 - 11t^4 + 21t^3 - 17t^2 + 4t + 2$

(tp2) $2(x+1)^5 - 11(x+1)^4 + 21(x+1)^3 - 17(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$

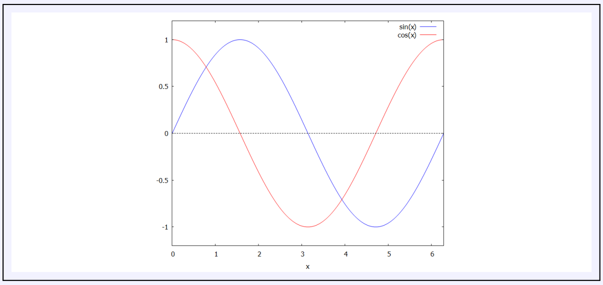
(%i7) `tp1-tp2;`

(%o7) $0 + \cdots$

Wykresy funkcji

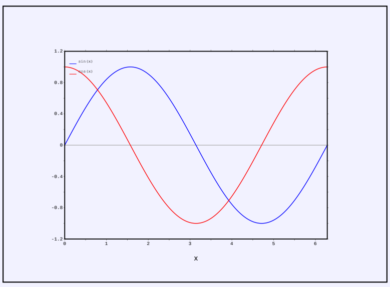
Wykres funkcji można wykreślić na kilka sposobów. Najprościej jest wybrać w menu `Plot` podmenu `Plot 2d...`. Jeśli wybierzemy `Format=gnuplot`, funkcja jest wykonywana przez komenda `plot2d` za pomocą programu Open Source `Gnuplot` do nowego okna. `Gnuplot` jest automatycznie instalowany razem z Maximą.

(%i1) `plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],[plot_format, gnuplot])$`



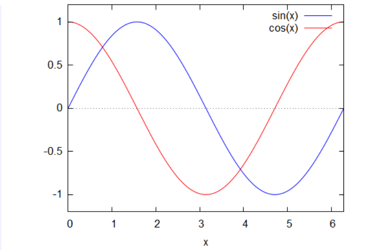
Jeśli wybierzemy `Format=wxmaxima`, Maxima wykreśli wykres za pomocą komendy `plot2d` do nowego okna. Obraz możemy zapisać tylko w postskrypcie.

(%i1) `plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],[plot_format, xmaxima])$`



Jeśli wybierzemy `Format=inline`, Maxima rysuje wykres za pomocą komendy `wxplot2d` do swojego środowiska.

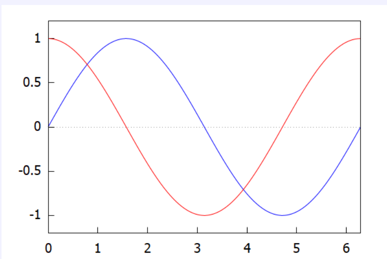
(%i1) `wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2])$`

(%o1) 

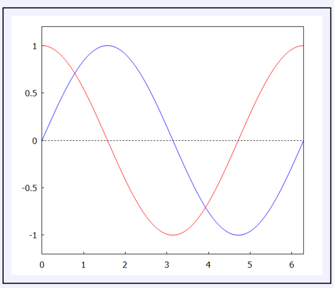
Komendy `plot2d` a `wxplot2d` mają tę samą składnię, a mają znacznie więcej parametrów. Parametry można znaleźć np. za pomocą komendy `describe(plot2d)`.

Do drukowania wykresów funkcji lepiej jest użyć komendą `wxdraw2d` lub `draw2d`, które należy skierować na wyjście `Gnuplot`. Te komendy mają nieco inną składnię niż `wxplot2d`, `plot2d`. Parametry drukowania są prostsze i bardziej przejrzyste. Wykreślana funkcja musi znajdować się w poleceniu `explicit`, `parametric` lub `implicit`.

(%i1)
```
wxdraw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

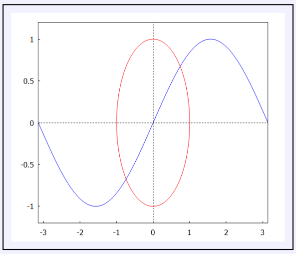
(%o1) 

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```



W podobny sposób wykreślamy parametryczną krzywą lub funkcję.

```
(%i1) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
      color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
      color=red,nticks=300,parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))$
```



Ciągi i szeregi

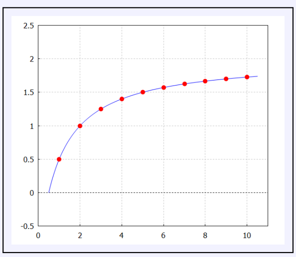
Na przykład możesz tworzyć ciągi w Maximie za pomocą komendy `makelist` lub z wyrażeniami cyklu`for - do`.

Komenda `makelist` tworzy listę, którą możemy wyświetlić jako całość i według wyrazów.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 199
```

Ułożone pary są ujęte w nawiasy kwadratowe i mogą być wyświetlane jako punkty na płaszczyźnie. W poniższym przykładzie sekwencja jest również generowana z jej wzorcami, a następnie wykreślana za pomocą komendy `draw2d`.

```
(%i1) S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);
(S1)  [[1, 1/2], [2, 1], [3, 5/4], [4, 7/5], [5, 3/2], [6, 11/7], [7, 13/8], [8, 5/3], [9, 17/10], [10, 19/11]]
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
      color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
      point_type=7,color=red,points(S1))$
```



Za pomocą komendy `for - do` wymienimy kilka wyrazów ciągu $\{2n^2-1\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 12 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
      1
      7
      17
      31
      49
      71
      97
      127
      161
      199
      241
      287
```

Ładny przykład użycia `for - do` jest ciągiem Fibonacciego.

```
(%i3) a0:0$ a1:1$ (for i:1 thru 12 do (an:a1+a0, print(an), a1:a0, a0:an))$
      1
      1
      2
      3
      5
      8
      13
      21
      34
      55
      89
      144
```

Sumę skończoną i nieskończoną obliczamy za pomocą komendy `sum`.

```
(%i1) sum(2*n^2-1,n,1,8);
(%o1) 400
```

Za pomocą tego komendy Maxima może obliczyć dokładną sumę pewnej nieskończonej serii. Sumę szeregu można wprowadzić w menu `Calculus` a podmenu `Calculate Sum...`.

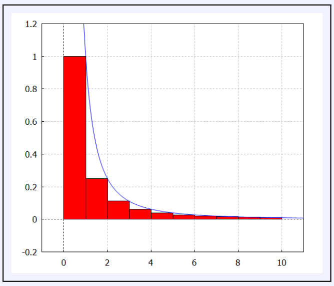
```
(%i2) sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum; sum(1/k^2,k,1,inf);
```

(%o1) $\frac{\pi^2}{6}$

(%o2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Szeregi liczbowe z poprzedniego przykładu można przedstawić graficznie w następujący sposób.

(%i1)
```
a(n):=1/n^2$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,10)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1,11],yrange=[-0.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec,
color=blue,explicit(a(n),n,0,11))$
```



Ciągi

Ciąg (liczb rzeczywistych) to każdy ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, których wyrazami są liczby rzeczywiste $a_n \in R$ (tzn. funkcją $N \to R$).

- **Przypisanie jawne** (wyrażenie ogólne) wyraza a_n jako funkcja zmiennej n.
- **Wpis cykliczny** pierwszego wyraza i wpis a_n przy użyciu poprzednich wyrazów.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

- Wpis wyraźny $a_n = 2n - 1$, $n \in N$.
- Wejście rekurencyjne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \in N$.

(%i3)
```
a(n):=2*n-1$ S:makelist(a(n),n,1,7);
```
(S) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]

(%i4)
```
an:1$ (for n:1 thru 7 do (print(an),an:an+2))$
```
1
3
5
7
9
11
13

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się:

- **Ograniczony od dołu**, jeśli $a \in R$ istnieje tak, że $a \le a_n$ dotyczy wszystkich $n \in N$.

- **Ograniczony od góry**, jeśli $a \in R$ istnieje tak, że $a_n \leq a$ dotyczy wszystkich $n \in N$.
- **Ograniczony**, jeśli jest ograniczony od dołu i od góry.

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się:

- **Nieograniczony od dołu**, jeśli nie jest ograniczony od dołu.
- **Nieograniczony z góry**, jeśli nie jest ograniczony z góry.
- **Nieograniczony**, jeśli nie jest ograniczony,
  czyli nie jest ograniczony od dołu ani nie jest ograniczony od góry.

α	A	alfa	a	η	H	éta	é	ν	N	ný	n	τ	T	tau	t
β	B	beta	b	ϑ	Θ	théta	th	ξ	Ξ	ksí (xí)	x	υ	Υ	ypsilon	y
γ	Γ	gama	g	ι	I	ióta	i	o	O	omikron	o	φ	Φ	fí	f
δ	Δ	delta	d	κ	K	kappa	k	π	Π	pí	p	χ	X	chí	ch
ε	E	epsilon	e	λ	Λ	lambda	l	ρ	P	ró	r	ψ	Ψ	psí	ps
ζ	Z	dzéta	dz	μ	M	mí	m	σ	Σ	sigma	s	ω	Ω	omega	ó

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się **monotoniczny**:

- **Rosnący**, jeśli $a_n < a_{n+1}$ dotyczy wszystkich $n \in N$.
- **Malejący**, jeśli $a_n > a_{n+1}$ dotyczy wszystkich $n \in N$.

} **Silnie monotoniczny**.

- **Niemalejący** jeśli $a_n \leq a_{n+1}$ dotyczy wszystkich $n \in N$.
- **Nierosnący** jeśli $a_n \geq a_{n+1}$ dotyczy wszystkich $n \in N$.
- **Stacjonarny (stały)**, jeśli $a_n = a$ dotyczy wszystkich $n \in N$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ to rosnący ciąg liczb naturalnych.
$\Rightarrow$ $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się **podciąg** z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$.

Podciągi to m.in.

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
```

```
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

$a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ nazywa się **wartość (punkt) skupienia ciągu** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeśli dla każdego otoczenia $O(a)$ istnieje nieskończona liczba wyrazów $a_n \in O(a)$.

Każdy ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma co najmniej jedną wartość skupienia.

Niech symbol E oznacza zbiór wszystkich wartości skupienia ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nazywa się **limes superior (górna granica)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nazywa się **limes inferior (dolna granica)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\inf E = \sup E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (E má jediný prvok) nazywa się **granica** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ zawsze istnieją.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ może nie istnieć. Jeśli istnieje granica, to jest jedyna.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$ (istnieje skończona).
  $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **zbiega się do liczby** a,
  oznaczenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

  } $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **zbiega się**, oznaczenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (istnieje nieskończona).
  $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **rozbiega się do** $\pm\infty$,
  oznaczenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje. $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **oscyluje**.

  } $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **rozbiega się**, oznaczenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczona.

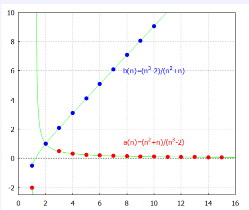
- **Ostateczna liczba wyrazów** nie wpływa na zbieżność, ew. rozbieżność ciągu.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

(%i1)
```
a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$ Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$ Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
print("limit  a(n)=",limit(a(n),n,inf),"  limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,16],yrange=[-2.5,10],
color=green,explicit(a(n),n,1,16),point_type=7,color=red,points(Sa),
  label(["a(n)=(n^2+n)/(n^3-2)",10,a(10)+1]),
color=green,explicit(b(n),n,1,16),point_type=7,color=blue,points(Sb),
  label(["b(n)=(n^3-2)/(n^2+n)",10,6]))$
```

(%o1) $limita(n) = 0 \quad limitb(n) = \infty$



- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n^3}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4(1-n^{-1})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}} = \infty \cdot \frac{1-0}{1+0} = \infty \cdot 1 = \infty.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(1+n^{-1})}{n^2(1-2n^{-2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^{-1}}{1-2n^{-2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$

- $$\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \text{ przed } q>0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ 1 \text{ przed } q=0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ 0 \text{ przed } q<0\ (-q>0). \end{cases}$$

Ciąg geometryczny

- $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \text{ przed } q>1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ 1 \text{ przed } q=1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ 0 \text{ przed } q\in(0;1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ przed } q=-1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ przed } q<-1. \end{cases}$$

- Liczba e nazywa się **liczba Eulera**. Jego wartość wynosi około $2,718\,281\,827$.

$a_n > 0,\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (jeśli istnieją granice).

$a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*. \ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{przed } a < 1, \\ \infty & \text{przed } a > 1. \end{cases}$

$a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*. \ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{przed } a < 1, \\ \infty & \text{przed } a > 1. \end{cases}$

Ważne granice.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \mathrm{e}^b$ przed $b \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ przed $a > 0$.

Szereg liczbowy

Szeregi liczbowe są ściśle powiązane z ciągami i uogólniają pojęcie dodatki do nieskończonej liczby dodatków. Proste przykłady to ułamki i liczby okresowe.

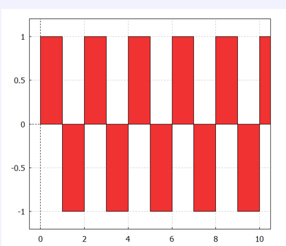
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ to ciąg.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ nazywa się } \textbf{(nieskończony liczbowy) szereg}.$$

Niektóre zasady odnoszące się do zliczania skończonego nie dotyczą serii nieskończonych. Nie dotyczy m.in. łączność:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0, \\ 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \quad = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1. \end{cases}$$

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ to szereg liczbowy.

- $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,\ k \in N$ nazywa się **k-ta częściowa suma szeregu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots$ nazywa się **k-ta reszta** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się **ciąg sum częściowych szeregu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

> Relacja między $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ciągu $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest wzajemnie unikalna.

Dla $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dotyczy:

- $s_1 = a_1$.
- $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

  $\dots$
- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.

- $a_1 = s_1 = s_1 - s_0$, gdzie $s_0 = 0$.
- $a_2 = s_2 - s_1$.
- $a_3 = s_3 - s_2$.
- $a_n = s_n - s_{n-1},\ n \in N$.

Suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywa się $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (jeśli istnieje), oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$ (istnieje skończona).

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **zbiega się do sumy** s,

  oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, ew. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

  $\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **zbiega się**, oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ (istnieje nieskończona).

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **rozbiega się do** $\pm\infty$,

  oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, ew. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nie istnieje.

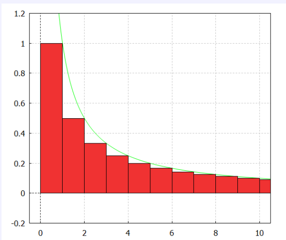
  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **oscyluje (nie ma sumy)**.

  $\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **rozbiega się**, oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Szereg harmoniczny

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$

```
(%i1)  a(n):=1/n$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.2,1.2],
       color=green,explicit(a(n),n,.5,11),
       border=true,color=black,fill_color=light_red,rec)$
```



Szereg geometryczny

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$ dla wszystkich $q \in (-1;1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1},\ s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = (q^{n-1} + \cdots + q + 1)\frac{q-1}{q-1} = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^{n-1}-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}}.$$

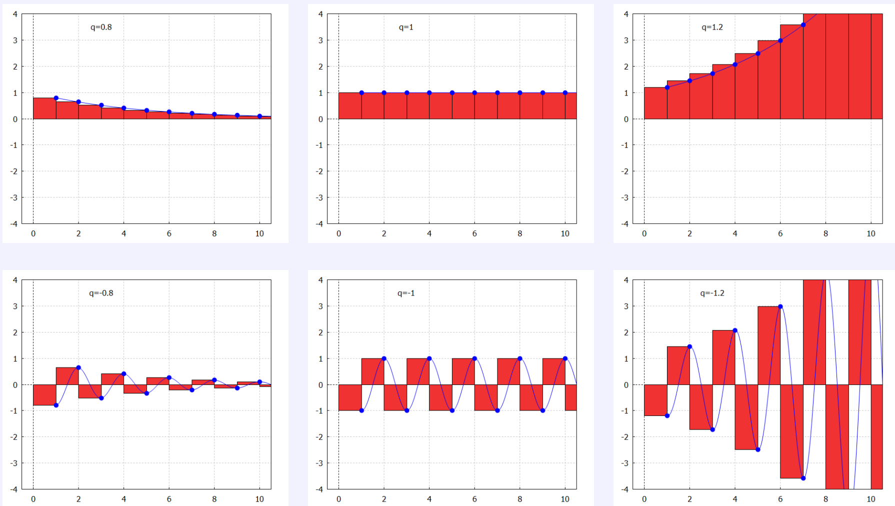
$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{\infty-1}{q-1} = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \quad \text{przed } q > 1. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \quad \text{przed } q = 1. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}. & \Rightarrow \bullet\ \frac{1}{1-q} \quad \text{przed } q \in (-1;1). \\ -1+1-1+1-1+\cdots. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{przed } q = -1. \\ \left.\begin{matrix} \frac{q^{2k-1}-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{-\infty-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = -\infty \text{ przed } n = 2k. \\ \frac{q^{2k+1-1}-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{\infty-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \infty \text{ przed } n = 2k+1. \end{matrix}\right\} & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{przed } q < -1. \end{cases}$$

```
(%i4)  sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$
       sq(1/2),simpsum; sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%i1) 1
(%i2) $\frac{1}{2}$
(%i3) $-\frac{1}{3}$
(%i4) *sum: sum is divergent.*

W poniższym przykładzie po prostu zmień wartość q na początku.

(%i1)
```
q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
label([concat("q=",string(q)),3,3.5]), color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
point_type=7,color=blue,points(peca))$
```



Warunek konieczny zbieżności szeregów

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Nieważny $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (oscyluje lub rozchodzi się do $\pm\infty$).

- **Ostateczna liczba wyrazów** nie wpływa na zbieżność, ew. rozbieżność szeregów.
- **Ostateczna liczba wyrazów** wpływa na sumę szeregu.

Szeregi o wyrazach dodatnich

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ z wyrazami nieujemnymi ($a_n \geq 0,\ n \in N$) zawsze ma sumę.

$0 \leq a_n \leq b_n,\ n \in N. \quad \Rightarrow \quad \bullet\ 0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty.$

Kryterium Porównawcze

$0 \leq a_n \leq b_n,\ n \in N. \quad \Rightarrow \quad \bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow. \quad \Rightarrow \quad \bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

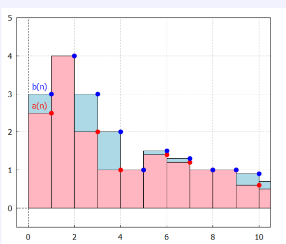
$\bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty. \quad \Rightarrow \quad \bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

Forma graniczna

$0 < a_n \leq b_n,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;\infty). \quad \Rightarrow \quad \bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow. \quad \Leftrightarrow \quad \bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

$\bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty. \quad \Leftrightarrow \quad \bullet\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

(%i1)
```
a:[2.5,4,2,1,1,1.4,1.2,1,1,0.6,0.5]$ pa:makelist([i,a[i]],i,1,11)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a[i]]),i,1,11)$
b:[3.0,4,3,2,1,1.5,1.3,1,1,0.9,0.7]$ pb:makelist([i,b[i]],i,1,11)$
rb:makelist(rectangle([i-1,0],[i,b[i]]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.5,5],
border=true,color=black,fill_color=light_blue,
rb,color=black,fill_color=light_pink,ra,
point_type=7,color=red,points(pa),point_type=7,color=blue,points(pb),
color=red,label(["a(n)",.5,2.7]),color=blue,label(["b(n)",.5,3.2]))$
```



Kryterium udziału d'Alemberta

$a_n > 0,\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1,\ q \in (0;1),\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

• $1 \le \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Forma graniczna

$a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p. \ \Rightarrow$ • $p < 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

• $p > 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Dla $p = 1$ nie możemy zdecydować o zbieżności lub rozbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kryterium Root Cauchy'ego

$a_n \ge 0,\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1,\ q \in (0;1),\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

• $1 \le \sqrt[n]{a_n},\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Forma graniczna

$a_n \ge 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p. \ \Rightarrow$ • $p < 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

• $p > 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Dla $p = 1$ nie możemy zdecydować o zbieżności lub rozbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longmapsto \text{pre } a > 0.$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longmapsto \infty.$

```
(%i4)  an(n):=n^n/n!$ limit(an(n),n,inf,plus);
       limit(an(n+1)/an(n),n,inf,plus);
       limit((an(n))^(1/n),n,inf,plus);
(%o2)  ∞
(%o3)  e
(%o8)  e
(%i9)  an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
       limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
       limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%i7)  0
(%o8)  0
(%o9)  0
```

Zbieżność bezwzględna, względna i szereg naprzemienny

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ to ciąg liczbowy.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow.$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **jest zbieżny bezwzględnie (absolutnie)**, oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\mathrm{A}}.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow,$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty.$

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**jest zbieżny względnie (nieabsolutnie)**, oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\mathrm{R}}.$

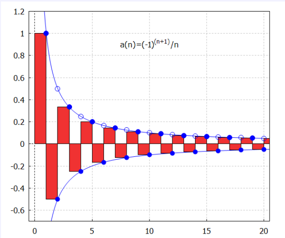
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\mathrm{A}}$ (zbiega się absolutnie). $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (zbiega się).

kryterium Leibniza

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0,\ n\in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerastúca.} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$

```
(%i1)  a(n):=(-1)^(n+1)/n$ pa:makelist([i,a(i)],i,1,21)$
       ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,21)$
```

```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,20.5],yrange=[-.7,1.2],
color=blue,explicit(abs(a(n)),n,.5,21),explicit(-abs(a(n)),n,.5,21),
border=true,color=black,fill_color=light_red,ra,
label(["a(n)=(-1)^{(n+1)}/n",10,.9]),
point_type=6,color=blue,points(abs(pa)),point_type=7,color=blue,points(pa))$
```



Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R} \ln 2.$

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, czyli $f\colon\ D(f) \to H(f)$.

- Zbiór $\{[x;y] \in R^2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\}$ nazywa się **wykres funkcji** f.
- **Funkcja zmiennej rzeczywistej**, jeśli dziedzina $D(f) \subset R$.
- **Funkcja rzeczywista**, jeżeli zbiór wartości przeciwdziedziną $H(f) \subset R$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in A$ nazywa się:

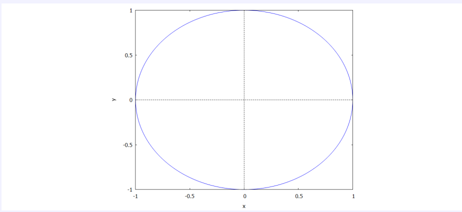
- **Iniekcją (różnowartościowa)**, jeśli $f(x_1) \neq f(x_2)$ dotyczy wszystkich $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, czyli równość $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje równość $x_1 = x_2$.
- **Suriekcją (funkcją „na”)**, jeśli $f(A) = B$,
  czyli dla każdego $y \in B$ istnieje $x \in A$, że $y = f(x)$.
- **Bijekcją (wzajemnie jednoznaczną)**, jeśli jest iniektywna i suriektywna.

Sposoby określania funkcji $y = f(x)$, $x \in D(f)$:

- **Explicytnie za pomocą wzorów**, czyli analitycznie $y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- **Parametrycznie** równania $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$, gdzie $\varphi, \psi\colon\ J \to R$. Parametr t ma znaczenie pomocnicze.
- **Implicytnie** równanie $F(x, y) = 0$, gdzie $F\colon\ R^2 \to R$ oraz warunki dla $[x; y]$.

Jeśli chcemy wyświetlić funkcję określoną domyślnie w Maximie, musimy załadować biblioteka `implicit_plot`.

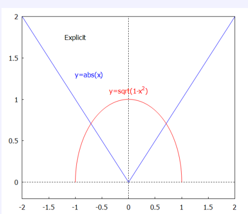
```
(%i1) load(implicit_plot);
(%o1) ../share/contrib/implicit_plot.lisp
(%i2) implicit_plot(x^2+y^2-1, [x,-1,1], [y,-1,1])$
      implicit_plot is now obsolete. Using plot2d instead:
          plot2d (y^2+x^2-1 = 0, [x,-1,1], [y,-1,1])
(%i2) plot2d(x^2+y^2-1=0, [x,-1,1], [y,-1,1])$  /* is correct */
```

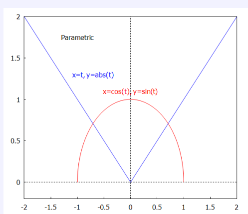


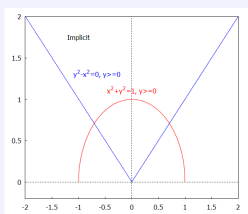
Funkcja f: $y = |x|$, $x \in R$ można wpisać np:

- Explicytnie: $y = \sqrt{x^2}$, ew. $y = \max\{-x, x\}$.
- Parametrycznie: $x = t$, $y = |t|$ $t \in R$, ew. $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
- Implicytnie: $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, ew. $y - |x| = 0$.

```
(%i1) load(implicit_plot)$
(%i2) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,explicit(abs(x),x,-2,2),label(["y=abs(x)",-.75,1.3]),
      color=red,explicit(sqrt(1-x^2),x,-1,1),label(["y=sqrt(1-x^2)",0,1.1]),
      color=black,label(["Explicit",-1,1.75]))$
(%i3) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,parametric(t,abs(t),t,-2,2),label(["x=t, y=abs(t)",-.7,1.3]),
      color=red,nticks=100,parametric(cos(t),sin(t),t,0,%pi),
      label(["x=cos(t), y=sin(t)",0,1.1]),
      color=black,label(["Parametric",-1,1.75]))$
(%i4) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,implicit(y^2-x^2,x,-2,2,y,0,2),label(["y^2-x^2=0, y>=0",-.65,1.3]),
      color=red,implicit(x^2+y^2-1,x,-1,1,y,0,1),label(["x^2+y^2=1, y>=0",0,1.1]),
      color=black,label(["Implicit",-1,1.75]))$
```







$y = f(x)$, $x \in D(f)$ nazywa się **na zbiorze** $A \subset D(f)$:

- **Ograniczona od dołu**, jeśli $a \in R$ również istnieje, że $a \leq f(x)$ dotyczy wszystkich $x \in A$.
- **Ograniczona od góry**, jeśli $a \in R$ również istnieje, że $f(x) \leq a$ dotyczy wszystkich $x \in A$.

jeśli $a \in R$ również istnieje,

- **Ograniczona**, jeśli są ograniczone na dole i na górze zbioru A,
  czyli jeśli istnieją $a_1, a_2 \in R$ takie, że $a_1 \leq f(x) \leq a_2$ dotyczy wszystkich $x \in A$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ nazywa się **na zbiorze** $A \subset D(f)$:

- **Nieograniczona od dołu**, jeśli nie jest ograniczona od dołu na zbiorze A.
- **Nieograniczona od góry**, jeśli nie jest ograniczona od góry na zbiorze A.
- **Nieograniczona**, jeśli nie jest ograniczona na zbiorze A,
  czyli jest nieograniczona od dołu lub nie jest ograniczona od góry.

- $A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$. $\Rightarrow$ **Właściwość lokalna.**
- $A = D(f)$. $\Rightarrow$ Właściwość globalna w całości $D(f)$.
  Słowa w zbióre $D(f)$ są zwykle pomijane.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$:

- $\inf\limits_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x); x \in A\} = \inf f(A)$ nazywa się **infimum f na zbiorze A**.
- $\sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x); x \in A\} = \sup f(A)$ nazywa się **supremum f na A**.
- $\inf f(x) = \inf\{f(x); x \in D(f)\}$ nazywa się **infimum f**.
- $\sup f(x) = \sup\{f(x); x \in D(f)\}$ nazywa się **supremum f**.

$f\colon\ y = x^2 + 1$, $x \in R$.

- f jest ograniczona od dołu, nie ograniczona od góry, nie ograniczona.
  Minimum (globalne) f to 1, ma ją w punkcie $x = 0$, maksimum nie istnieje.
- f jest ograniczona na przedziale $\langle -1; 2)$.
  Lokalne minimum funkcji f w przedziale $\langle -1; 2)$ wynosi 1 i ma ją w punkcie $x = 0$, lokalne maksimum nie istnieje, lokalne supremum to 5.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$, $x_0 \in A$:

- $f(x_0) = \min f(A) = \min\{f(x); x \in A\}$ nazywa się **minimum f na zbiorze A**.

$$f(x_0) \begin{cases} \textbf{minimum}, & \text{jeśli } f(x_0) \leq f(x) \text{ dotyczy wszystkich } x \in A. \\ \textbf{właściwe minimum}, & \text{jeśli } f(x_0) < f(x) \text{ dotyczy wszystkich } x \in A,\ x \neq x_0. \end{cases}$$

- $f(x_0) = \max f(A) = \max\{f(x); x\in A\}$ nazywa się **maksimum f na zbiorze A**.

$$f(x_0)\begin{cases}\textbf{maksimum}, & \text{jeśli } f(x_0)\geq f(x) \text{ dotyczy wszystkich } x\in A.\\ \textbf{właściwe maksimum}, & \text{jeśli } f(x_0)> f(x) \text{ dotyczy wszystkich } x\in A,\ x\neq x_0.\end{cases}$$

- Minimum i maksimum to **ekstrema**.
- Właściwe minimum i właściwe maksimum to **właściwe ekstrema**.

- $A = D(f)$. $\Rightarrow$ $A = D(f)$. $\Rightarrow$ Ekstrema nazywają się **globalna (absolutna)**.
- $A\subset D(f)$, $A\neq D(f)$. $\Rightarrow$ Ekstrema nazywa się **lokalna (na zbiorze A)**.

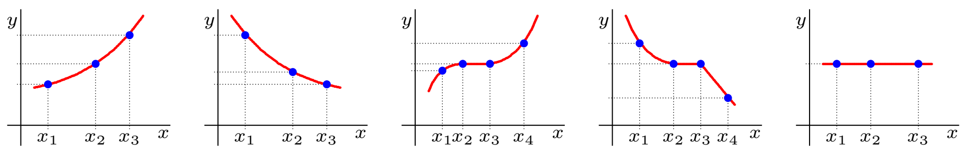
Wystarczy zbadać ekstrema lokalne w pewnym otoczeniu $O(x_0)\subset D(f)$.

$y = f(x)$, $x\in D(f)$ nazywa się **na zbiorze $A\subset D(f)$ monotoniczna**:

- **Rosnąca**, jeśli $f(x_1) < f(x_2)$ dotyczy wszystkich $x_1, x_2\in A$, $x_1 < x_2$.
- **Malejąca**, jeśli $f(x_1) > f(x_2)$ dotyczy wszystkich $x_1, x_2\in A$, $x_1 < x_2$.

(Rosnąca i Malejąca:) **Właściwe monotoniczna**.

- **Niemalejąca**, jeśli $f(x_1)\leq f(x_2)$ dotyczy wszystkich $x_1, x_2\in A$, $x_1 < x_2$.
- **Nierosnąca**, jeśli $f(x_1)\geq f(x_2)$ dotyczy wszystkich $x_1, x_2\in A$, $x_1 < x_2$.
- **Stacjonarna (stała)**, jeśli $f(x_1) = f(x_2)$ dotyczy wszystkich $x_1, x_2\in A$, $x_1 < x_2$, czyli $f(x_1) = c$, gdzie $c\in R$.



Wykresy funkcji rosnącej, malejącej, nie malejącej, nierosnącej i stałej

$y = f(x)$, $x\in D(f)$ nazywa się:

- **Parzysta**, if $-x\in D(f)$, $f(x) = f(-x)$ dotyczy wszystkich $x\in D(f)$.
- **Nieparzysta**, if $-x\in D(f)$, $f(x) = -f(-x)$ dotyczy wszystkich $x\in D(f)$.

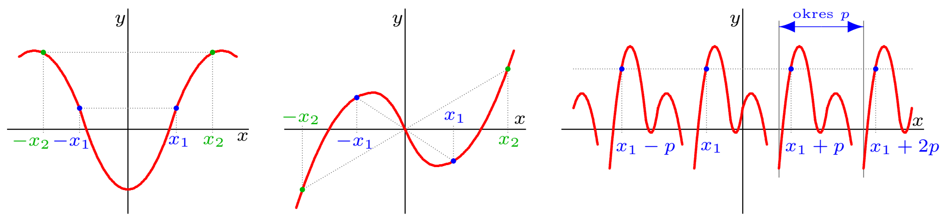
$y = f(x)$, $x\in D(f)$ nazywa się:

- **Okresowa**, jeśli istnieje $p\in R$, $p\neq 0$, że $x+p\in D(f)$, $x-p\in D(f)$, $f(x) = f(x+p) = f(x-p)$ dotyczy wszystkich $x\in D(f)$.

  Liczba p nazywa się **okres**.

Najmniejszy $p > 0$ (jeśli istnieje) nazywa się **okres podstawowy (zasadniczy)**.
Każda całkowita wielokrotność okresu jest również okresem.

Wystarczy zbadać funkcję na przedziale długości p (**przedział okresowości**).



Wykresy funkcji parzystej, nieparzystej i okresowej

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ to przedział, f nazywa się **na przedziale** I:

- **Wypukła**, jeśli $f(x) \leq r(x)$ dotyczy wszystkich $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$.
- **Ściśle wypukła**, jeśli $f(x) < r(x)$ dotyczy wszystkich $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$.
- **Wklęsła**, jeśli $f(x) \geq r(x)$ dotyczy wszystkich $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$.
- **Ściśle wklęsła**, jeśli $f(x) > r(x)$ dotyczy wszystkich $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$.

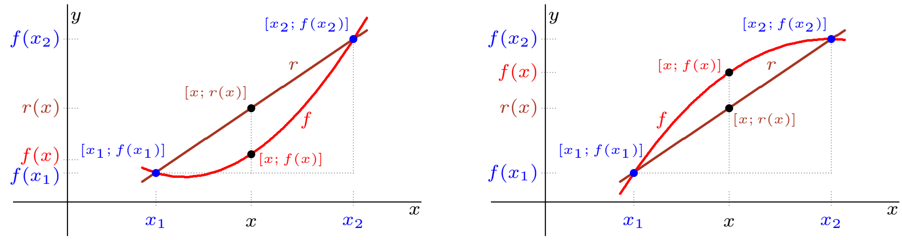
Linia prosta $y = r(x)$ łączy punkty $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$.

- f jest wypukła na przedziale $I \subset D(f)$.

$\Leftrightarrow$ • $f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.

- f jest wklęsła na przedziale $I \subset D(f)$.

$\Leftrightarrow$ • $f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.



Funkcja wypukła i wklęsła

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$ nazywa się:

- **Punkt przegięcia** f, jeśli istnieje otoczenie $O(x_0)$ takie, że w $O^-(x_0)$ to f ostro wypukła, w $O^+(x_0)$ to f ostro wklęsła,

ew. w $O^-(x_0)$ to f ostro wklęsła, w $O^+(x_0)$ to f ostro wypukła.

- **Miejsce zerowe funkcji f**, jeśli $f(x_0) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$.

- $y = h(x)$, $x \in A$ nazywa się **restrykcja (zawężenie) funkcji f do zbioru A**, oznaczenie $h = f|_A$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(x)$, $x \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

- $y = F(x) = g[f(x)]$, $x \in D(f)$ nazywa się **funkcja złożona f a g**.
  f nazywa się **funkcja wewnętrzna**, g nazywa się **funkcja zewnętrzna**.

$y = f(x)$, $x \in D(f) \to H(f)$, czyli $y = f(x)\colon D(f) \to H(f)$.

- $x = g(y)\colon H(f) \to D(f)$ takie, że $[y;x] \in g \Leftrightarrow [x;y] \in f$, czyli $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, nazywa się **funkcja odwrotna do f**, oznaczenie $g = f^{-1}$.

$f\colon D(f) \to H(f)$ jest bijekcją. $\Rightarrow$ • Istnieje $f^{-1}\colon H(f) \to D(f)$ i ma zastosowanie:

- f^{-1} je bijekcia.
- $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $f[f^{-1}(y)] = y$ dla wszystkich $y \in H(f) = D(f^{-1})$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ dla wszystkich $x \in D(f) = H(f^{-1})$.

Funkcje elementarne

Funkcje elementarne mają duże znaczenie praktyczne. Mogą być użyte do opisu (przynajmniej w przybliżeniu) wielu praw i zjawisk naturalnych i społecznych.

Funkcja elementarna nazywa się każdą utworzoną funkcją za pomocą operacji dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i składania funkcji:

- $y = c$ (stała), • $y = x$, • $y = e^x$, • $y = \ln x$, • $y = \sin x$, • $y = \arcsin x$, • $y = \operatorname{arctg} x$.

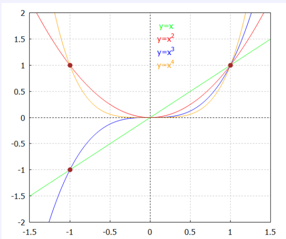
Wielomian (suma algebraiczna) stopnia n nazywa się

$$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R,\ n \in N \cup \{0\},\ a_n \neq 0.$$

- Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są nazywane **współczynniki**. Dziedzina $D(f_n) = R$.
- $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ nazywa się **funkcja stała**.
- $f_1\colon\ y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ nazywa się **funkcja liniowa**.
- $f_2\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ nazywa się **funkcja kwadratowa**.

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
      color=green,explicit(x,x,-1.5,1.5),label(["y=x",.2,1.75]),
```

```
color=red,explicit(x^2,x,-1.5,1.5),label(["y=x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(x^3,x,-1.5,1.5),label(["y=x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(x^4,x,-1.5,1.5),label(["y=x^4",.2,1]),
color=brown,point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```

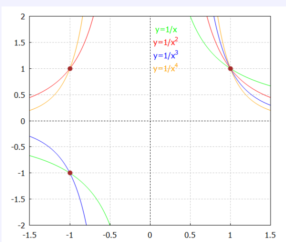


Funkcja wymierna nazywa się

$$f\colon\ y=\frac{f_n(x)}{f_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+b_mx^m},\ n,m\in N-\{0\}.$$

- f_n, f_m są wielomianami stopni n i m, $a_0,a_1,\ldots,a_n\in R$, $b_0,b_1,\ldots,b_m\in R$.

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(1/x,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x",.2,1.75]),
color=red,explicit(1/x^2,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(1/x^3,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(1/x^4,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^4",.2,1]),
color=brown,point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```

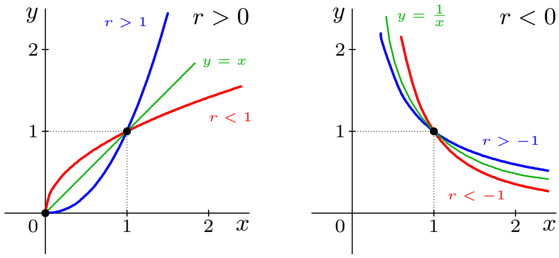


Funkcja potęgowa nazywa się

$$f\colon\ y=x^r,\ r\in R,\ r\neq 0.$$

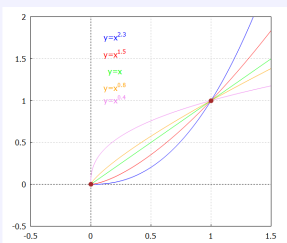
- Dla $r=n\in N$ to $f\colon\ y=x^n$ wielomian.
- Dla $r=-n\in Z^-$ to $f\colon\ y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ funkcja wymierna.
- Dla $r\neq 0$ to $f^{-1}\colon\ y=x^{1/r}$.

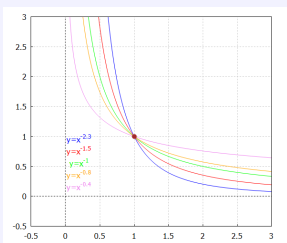
- Dla $r > 0$, f jest rosnąca, $D(f) = \langle 0; \infty)$.
- Dla $r < 0$, f jest malejąca, $D(f) = (0; \infty)$.



Funkcja $f\colon\ y = x^r$ przed $r > 0$ a $r < 0$

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,1.5],yrange=[-.5,2],
      color=blue,explicit(x^2.3,x,0,1.5),label(["y=x^{2.3}",.2,1.75]),
      color=red,explicit(x^1.5,x,0,1.5),label(["y=x^{1.5}",.2,1.55]),
      color=green,explicit(x,x,-0,1.5),label(["y=x",.2,1.35]),
      color=orange,explicit(x^.8,x,0,1.5),label(["y=x^{0.8}",.2,1.15]),
      color=violet,explicit(x^.4,x,0,1.5),label(["y=x^{0.4}",.2,1]),
      color=brown,point_type=7,points([[0,0],[1,1]]))$
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,3],yrange=[-.5,3],
      color=blue,explicit(x^-2.3,x,0,3),label(["y=x^{-2.3}",.2,.95]),
      color=red,explicit(x^-1.5,x,0,3),label(["y=x^{-1.5}",.2,.75]),
      color=green,explicit(x^-1,x,-0,3),label(["y=x^{-1}",.2,.55]),
      color=orange,explicit(x^-.8,x,0,3),label(["y=x^{-0.8}",.2,.35]),
      color=violet,explicit(x^-.4,x,0,3),label(["y=x^{-0.4}",.2,.15]),
      color=brown,point_type=7,points([[1,1]]))$
```



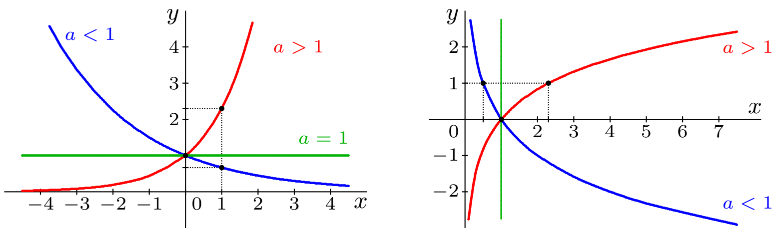


Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$ nazywa się

$f\colon\ y = a^x,\ x \in R.$

- Najważniejsze to $f\colon\ y = \exp x = \mathrm{e}^x$ (funkcja eksponencjalna) na podstawie e (liczba Eulera).
- Dla $a = 1$, $f\colon\ y = 1^x = 1$ jest stała (wielomian).

- Dla $a \in (0;1)$, f jest maleja, dla $a \in (1;\infty)$, f jest rosnąca.
- Wykres przechodzi przez punkty $[0;1]$ i $[1;a]$.
- Wykresy funkcji $y = a^x$, $y = a^{-x}$ są symetryczne wzdłuż osi y.



Funkcie $f\colon\ y = a^x$, $a > 0$ (po lewej) a $f\colon\ y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (po prawej)

Funkcja wykładnicza `exp(x)=%e^x` oraz funkcja logarytmiczna`log(x)` (logarytm naturalny) są o podstawie e. Jeśli chcemy obliczyć inny logarytm, np. $\log_2 x$, musimy użyć budowa $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

(%i1) `exp(x)+%e^x;exp(1);`

(%o1) $2 * \% e^x$

(%o2) $\% e$

(%i5) `log(x);log(2);log(%e);`

(%o3) $\log(x)$

(%o4) $\log(2)$

(%o5) 1

(%i7) `log_2(x):=log(x)/log(2);log_2(2);`

(%o6) $\mathrm{log\_2}(x) := \frac{\log(x)}{\log(2)}$

(%o7) 1

funkcja logarytmiczna o podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ nazywa się
$f\colon\ y = \log_a x$, $x \in \langle 0;\infty)$.

- f jest odwrotnością funkcji wykładniczej $y = a^x$, $x \in R$ o tej samej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$.
- Dla $x \in \langle 0;\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$ ma zastosowanie $f\colon\ y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.
- $a > 0$, $a \neq 1$. $\Rightarrow \begin{cases} x = a^{\log_a x} & \text{przed } x > 0, \\ x = \log_a a^x & \text{przed } x \in R. \end{cases}$
- Dla $a \in (0;1)$, f jest maleja, dla $a \in (1;\infty)$, f jest rosnąca.
- Wykres przechodzi przez punkty $[1;0]$ i $[a;1]$.

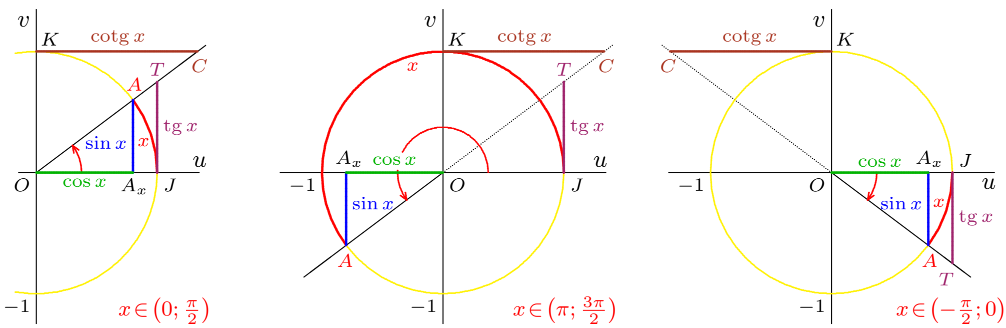
- Wykresy funkcji $y = \log_a x$, $y = \log_{a^{-1}} x$ są symetryczne wzdłuż osi x.

Liczbę $\log_a x$ nazywamy **logarytm liczby x na podstawie a**.

- $a = 10$. $\Rightarrow$ **Logarytm dziesiętny** liczby x, oznaczenie $\log x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ **Logarytm naturalny** liczby x, oznaczenie $\ln x$.

Funkcje trygonometryczne są nazywane:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$, $x \in R$.
- **Kosinus** $y = \cos x = |OA_x|$, $x \in R$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$, $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z\right\}$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$, $x \in R - \{k\pi;\ k \in Z\}$.



Definiowanie funkcji $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

Funkcje trygonometryczne są definiowane na okręgu wyśrodkowanym na początku układu współrzędnych o promieniu 1.

- Liczba π nazywa się **liczba Ludolfa**. Jego wartość wynosi około $3,141592654$.
- Okrąg o promieniu $r = 1$ ma obwód 2π.

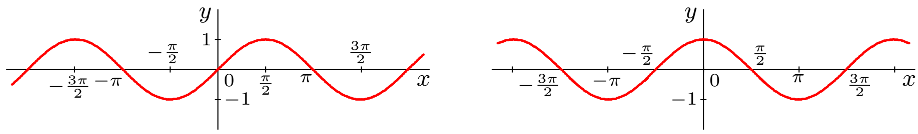
$f\colon\ y = \sin x$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

- f jest nieparzysta, f jest okresowa z okresem podstawowym 2π.
- Miejsca zerowe funkcji f są $k\pi$, $k \in Z$.

$f\colon\ y = \cos x$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

- f jest parzysta, f jest okresowa z okresem podstawowym 2π.
- Miejsca zerowe funkcji f są $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

W programie Maxima funkcje trygonometryczne mają postać `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`. Argumenty funkcji trygonometrycznych należy wprowadzać w radianach. Jeśli chcemy użyć stopnie, musimy najpierw dokonać konwersji na radiany.



Funkcje f: $y = \sin x$ (po lewej) a f: $y = \cos x$ (po prawej)

(%i3) `tangrad(x):=tan(x/180*%pi);tangrad(22.5);ratsimp(tangrad(22.5));`
(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$
(%o2) $\tan(0.125\pi)$
$\quad$ *rat : replaced* 0.125 *by* 1/8 = 0.125
(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Możemy używać komend, aby uprościć pracę z funkcjami trygonometrycznymi `trigsimp`, `trigexpand`, `trigreduce`, `trigrat` i pakiety `atrig1`, `ntrig` a `spangl`, które zawierają dodatkowe wsparcie dla pracy z funkcjami trygonometrycznymi. Musimy załadować pakiety do systemu za pomocą komendy `load`.

(%i1) `tan(%pi/4);tan(%pi/6);tan(%pi/8);`

(%o3) $1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i4) `ratsimp(tan(%pi/8));`

(%o4) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i5) `trigsimp(tan(%pi/8));`

(%o5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

(%i6) `load(spangl);`

(%o6) `"../share/trigonometry/spangl.mac"`

(%i7) `tan(%pi/8);`

(%o7) $\sqrt{2} - 1$

Wzory redukcyjne dla sinusa i kosinusa

$x, y \in R. \quad \Rightarrow$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y.$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y.$

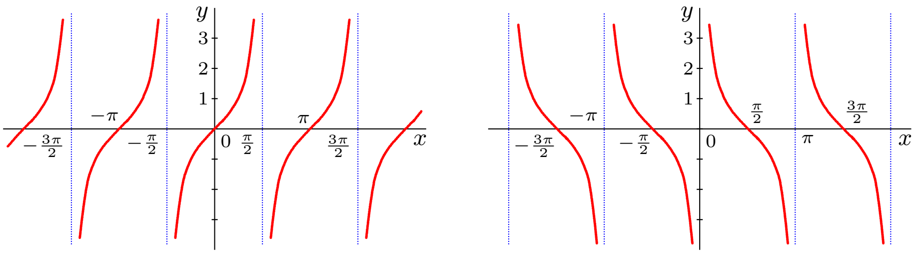
$x \in R. \quad \Rightarrow$
- $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x.$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$

$f\colon\ y = \operatorname{tg} x,\ D(f) = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z\right\},\ H(f) = R.$

- f jest nieparzysta, f jest okresowa z okresem podstawowym π.
- Miejsca zerowe funkcji f są $k\pi$, $k \in Z$.

$f\colon\ y = \operatorname{cotg} x,\ D(f) = R - \{k\pi;\ k \in Z\},\ H(f) = R.$

- f jest nieparzysta, f jest okresowa z okresem podstawowym π.
- Miejsca zerowe funkcji f są $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.



Funkcje $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$ (po lewej) a $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$ (po prawej)

Funkcje cyklometryczne (arkfunkcje) są odwrotne do funkcji trygonometrycznych:

- **Arcus sinus** $y = \arcsin x\colon\ \langle -1; 1\rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle.$
- **Arcus kosinus** $y = \arccos x\colon\ \langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle.$
- **Arcus tangens** $y = \operatorname{arctg} x\colon\ R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$
- **Arcus kotangens** $y = \operatorname{arccotg} x\colon\ R \to (0; \pi).$

Nie ma funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych, ponieważ nie są one iniektywne. Należy je odpowiednio zawęzić.

$y = \arcsin x,\ D(f) = \langle -1; 1\rangle,\ H(f) = \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle.$

- f rośnie, f jest nieparzysta.

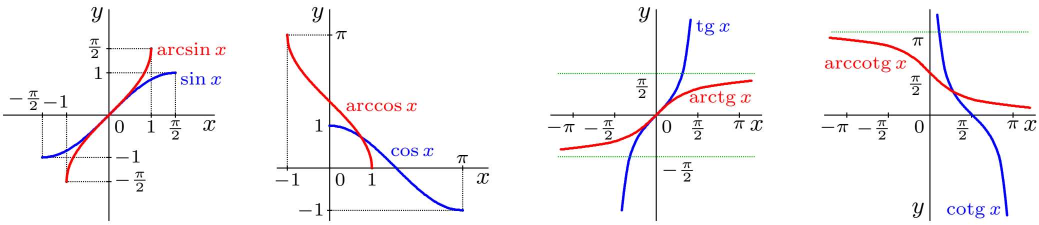
$y = \arccos x,\ D(f) = \langle -1; 1\rangle,\ H(f) = \langle 0; \pi\rangle.$

- f maleja.

Te funkcje mają w programie Maxima postać `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`.

W tym miejscu możemy wspomnieć o funkcji `atan2(x,y)` zdefiniowane przez $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

(%i2) `asin(1);acos(1);`
(%o2) $\frac{\pi}{2}$ 0
(%i4) `atan2(2,4);atan(1/2);`
(%o4) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$ $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$



Funkcje $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

Wzory redukcyjne dla funkcji cyklometrycznych

$x \in \langle -1; 1 \rangle$. $\Rightarrow$ • $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

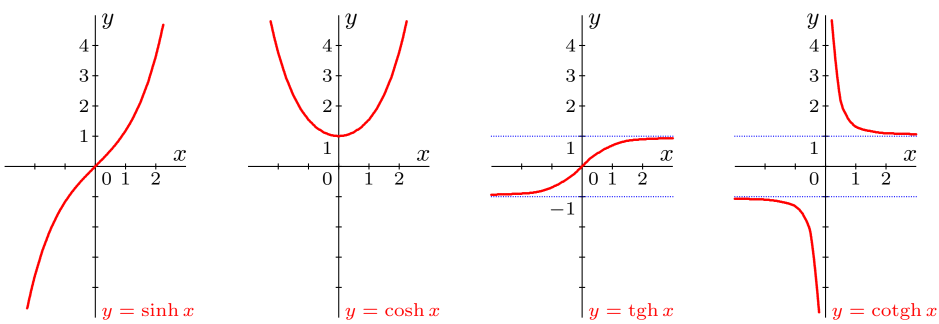
$x \in R$. $\Rightarrow$ • $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

$y = \operatorname{arctg} x$, $D(f) = R$, $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- f rośnie, f jest nieparzysta.

$y = \operatorname{arccotg} x$, $D(f) = R$, $H(f) = (0; \pi)$.

- f spada.



Funkcje hiperboliczne $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$A$\operatorname{cotgh} x$

Funkcje hiperboliczne są nazywane:

- **Sinus hiperboliczny** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}\colon \;\; R \to R.$
- **Kosinus hiperboliczny** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}\colon \;\; R \to \langle 1; \infty).$
- **Tangens hiperboliczny**
$$y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\colon\; R \to (-1; 1).$$
- **Kotangens hiperboliczny**
$$y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\colon\; (R - \{0\}) \to (R - \langle -1; 1\rangle).$$

Funkcje hiperboliczne mają podobne właściwości jak funkcje trygonometryczne, dlatego mają podobne nazwy.

$f\colon\; y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $D(f) = R$, $H(f) = R$.

- f jest nieparzysta, f rośnie.

$f\colon\; y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle 1; \infty)$.

- f jest parzysta, f malejąca do $(-\infty; 0)$, f rosnąca do $(0; \infty)$.

Wzory redukcyjne dla sinusa hiperbolicznego i kosinusa hiperbolicznego

$x, y \in R. \;\Rightarrow$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y.$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$

$x \in R. \;\Rightarrow$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2},$
- $\sinh x \pm \cosh x = \pm\, e^{\pm x},$
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}.$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

Wzór Moivre'a

$x \in R,\; n \in N. \;\Rightarrow$
- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$

$f\colon\; y = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $D(f) = R$, $H(f) = (-1; 1)$.

- f jest nieparzysta, f rośnie.

$f\colon\; y = \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

- f jest nieparzysta, f malejąca do $(-\infty; 0)$, f malejąca do $(0; \infty)$.

Funkcje hiperboliczne to `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` a ich odwrotne funkcje polowe to `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

Funkcje polowe (area) są odwrotne do funkcji hiperbolicznych:

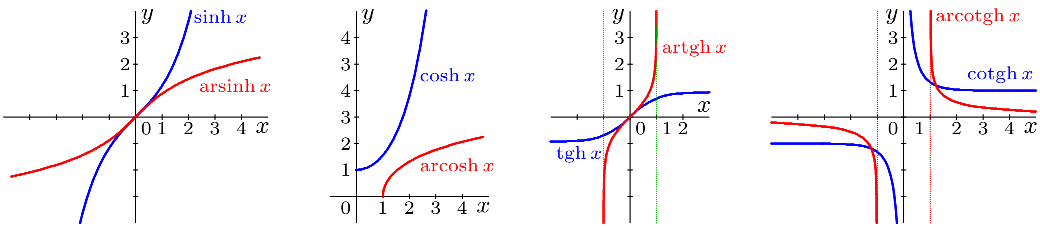
- **Area sinus hiperboliczny**
  $$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right): \quad R \to R.$$
- **Area kosinus hiperboliczny**
  $$y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right): \quad \langle 1;\infty) \to \langle 0;\infty).$$
- **Area tangens hiperboliczny**
  $$y = \operatorname{artgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x}: \qquad (-1;1) \to R.$$
- **Area kotangens hiperboliczny**
  $$y = \operatorname{arcotgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x+1}{x-1}: \quad (R-\langle -1;1\rangle) \to (R-\{0\}).$$

$f\colon\ y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $D(f) = R$, $H(f) = R$.

- f jest nieparzysta, f rośnie.

$f\colon\ y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $D(f) = \langle 1;\infty)$, $H(f) = \langle 0;\infty)$.

- f rośnie.



Funkcje $y = \operatorname{arsinh} x$, $y = \operatorname{arcosh} x$, $y = \operatorname{artgh} x$, $y = \operatorname{arcotgh} x$

$f\colon\ y = \operatorname{artgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $D(f) = (-1;1)$, $H(f) = R$.

- f jest nieparzysta, f rośnie.

$f\colon\ y = \operatorname{arcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $D(f) = (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$, $H(f) = R-\{0\}$.

- f jest nieparzysta, f malejąca do $(-\infty;-1)$, f malejąca do $(1;\infty)$.

```
(%i4)  sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1)  sinh(x)
(%o2)  1
(%o3)  0
(%o4)  1.313035285499331
(%i8)  asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5)  asinh(x)
(%o6)  0
(%o7)  0
(%o8)  1.01844096363052
```

Granica funkcji

Podczas badania funkcji konieczne jest scharakteryzowanie jej lokalnych właściwości w różnych odstępach czasu i w pobliżu różnych ważnych punktów. Funkcja f nie musi być definiowana w punkcie, wokół którego ją badamy.

$a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ nazywa się **punkt skupienia zbioru** $A \subset R$,
jeśli dla każdego otoczenia $O(a)$ istnieje punkt $x \in O(a)$ taki, że $x \in A$, $x \neq a$.

---

f **ma granicę równą** $b \in R^*$ w punkcie $a \in R^*$, oznaczenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.
- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$
dotyczy $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Drugi warunek można zapisać w postaci:

- $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Ta definicja nazywa się **Heineho**.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \quad \begin{cases} \bullet\ a \in R^*. & \begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \textbf{Granica w skończoności } a. \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \textbf{Granica w nieskończoności } a. \end{cases} \\ \bullet\ b \in R^*. & \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \textbf{Właściwą granica.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \textbf{Niewłaściwą granica.} \end{cases} \end{cases}$$

Granica $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ może być scharakteryzowana przez otoczenia $O(a)$ i $O(b)$.

$a, b \in R^*$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Dla każdego otoczenia $O(b)$ istnieje otoczenie $O(a)$,
że dla wszystkich $x \in O(a)$, $x \neq a$ dotyczy $f(x) \in O(b)$.

Drugi warunek można zapisać w postaci:

- Dla każdego otoczenia $O(b)$ istnieje otoczenie $O(a)$ takie, że $f\big(O(a) - \{a\}\big) \subset O(b)$.

Jeśli korzystamy z promieni otoczenia, drugi warunek możemy zapisać w postaci:

- Dla każdego otoczenia $O_\varepsilon(b)$ istnieje otoczenie $O_\delta(a)$, że dla wszystkich $x \in O_\delta(a), x \neq a$ dotyczy $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.

Szczególnie dotyczy:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $a, b \in R$.

$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\in D(f)\colon\ 0 < |x-a| < \delta.\ \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b,\ b\in R.$

  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\in R\ \forall x\in D(f)\colon\ \delta < x,$ ew. $x < \delta.\ \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ a\in R.$

  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta > 0\ \forall x\in D(f)\colon\ 0 < |x-a| < \delta.\ \Rightarrow \varepsilon < f(x),$ ew. $f(x) < \varepsilon.$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$

  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta\in R\ \forall x\in D(f)\colon\ \delta < x,$ ew. $x < \delta.\ \Rightarrow \varepsilon < f(x),$ ew. $f(x) < \varepsilon.$

$a\in R^*,\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b\in R.\ \Rightarrow$

- Istnieje otoczenie $O(a)$, w którym f jest ograniczona.

Poniższe stwierdzenia przedstawiają podstawowe właściwości granic funkcji.

$\left.\begin{array}{l} a\in R^* \text{ jest punktem skupienia zbioru } D(f) \text{ a } D(g).\\ f(x) = g(x) \text{ dla wszystkich } x\in O(a),\ x\neq a.\end{array}\right\}\ \Rightarrow$

- Istnieje $\lim\limits_{x\to a} f(x).\ \Leftrightarrow$ Istnieje $\lim\limits_{x\to a} g(x).$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, jeśli istnieją.

$\left.\begin{array}{l} a\in R^* \text{ jest punktem skupienia zbioru } D(f)\text{A}D(g).\\ f(x) \leq g(x) \text{ dla wszystkich } x\in O(a),\ x\neq a.\end{array}\right\}\ \Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, jeśli istnieją.

- Jeśli zmienimy założenie na $f(x) < g(x)$ dla wszystkich $x\in O(a),\ x\neq a.$

  $\Rightarrow$ Wyrażenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ nie ulega zmianie.

$\left.\begin{array}{l} a\in R^* \text{ jest punktem skupienia zbioru } D(f),\ D(g)\text{A}D(h).\\ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ dla wszystkich } x\in O(a),\ x\neq a.\\ \text{Istnieją } \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b\in R^*.\end{array}\right\}\ \Rightarrow$

- Istnieje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o1) 0
```

∞ to punkt zbiorczy dziedziny funkcji $y = \frac{\sin x}{x}$.

Dla $x \in R$ dotyczy $-1 \leq \sin x \leq 1$. $\Rightarrow$ Dla $x > 0$ dotyczy $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow\ 0 = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

```
(%i1) f(x):=sin(x)/x$ for i:1 thru 10 do (x:100^i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

100 -0.005063656411097588
10000 $-3.056143888882521 \cdot 10^{-5}$
1000000 $-3.499935021712929 \cdot 10^{-7}$
100000000 $9.31639027109726 \cdot 10^{-9}$
10000000000 $-4.875060250875107 \cdot 10^{-11}$
1000000000000 $-6.112387023768895 \cdot 10^{-13}$
100000000000000 $-2.094083074964523 \cdot 10^{-15}$
10000000000000000 $7.796880066069787 \cdot 10^{-17}$
1000000000000000000 $-9.929693207404051 \cdot 10^{-19}$
100000000000000000000 $-6.452512852657808 \cdot 10^{-21}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,0);
(%o1) 1
```

Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$, punkt 0 jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.

Dla wszystkich $x \in D(f)$:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x. \ \Rightarrow \ 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \ \Rightarrow \ \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}. \\ x < 0. \ \Rightarrow \ \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0. \ \Rightarrow \ \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x}. \end{array}\right\} \Rightarrow \ 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Rightarrow\ 1 = \lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

```
(%i1) f(x):=sin(x)/x$
      for i:-1 thru -10  step -1 do (x:1/i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
      print("Limit")$
      for i:10 thru 1 step -1 do (x:1/i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

-1 0.8414709848078965

$-\frac{1}{2}$ 0.958851077208406
$-\frac{1}{3}$ 0.9815840903884566
$-\frac{1}{4}$ 0.9896158370180917
$-\frac{1}{5}$ 0.9933466539753061
$-\frac{1}{6}$ 0.9953767961604901
$-\frac{1}{7}$ 0.9966021085458455
$-\frac{1}{8}$ 0.9973978670818215
$-\frac{1}{9}$ 0.9979436565895768
$-\frac{1}{10}$ 0.9983341664682815
Limit
$\frac{1}{10}$ 0.9983341664682815
$\frac{1}{9}$ 0.9979436565895768
$\frac{1}{8}$ 0.9973978670818215
$\frac{1}{7}$ 0.9966021085458455
$\frac{1}{6}$ 0.9953767961604901
$\frac{1}{5}$ 0.9933466539753061
$\frac{1}{4}$ 0.9896158370180917
$\frac{1}{3}$ 0.9815840903884566
$\frac{1}{2}$ 0.958851077208406
1 0.8414709848078965

Granica funkcji złożonej

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x),\ y=g(x),\ H(f)\subset D(g).\\ a,b,c\in R^*,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u)=c.\\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\neq b \text{ dla wszystkich } x\in O(a)-\{a\},\\ \text{ew. } g(b)=c.\end{array}\right.\end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{u\to b} g(u)=c.$$

- Przy obliczaniu $\lim\limits_{x\to a} g(f)$ wpisujemy $u=f(x)$. $\Rightarrow$ **Substytucja** $u=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $x\to a$, $x=h+a$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(h+a)$, $h\to 0$.

$a,b,c\in R^*$, $r\in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$. $\Rightarrow$ (Jeśli terminy mają sens.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=b\pm c$.
- $\lim\limits_{x\to a} rf(x)=r\lim\limits_{x\to a} f(x)=rb$.
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=bc$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{1}{c}$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b}{c}$.

Jeśli jedno z pojęć nie ma sensu, niekoniecznie oznacza to brak limitu. Musimy obliczyć limit w inny sposób.

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, bod $a\in R$, oznaczają:

- $f^{-}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, x<a\}}$ zwężenie funkcja w lewo.
- $f^{+}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, a<x\}}$ zwężenie funkcja w prawo.

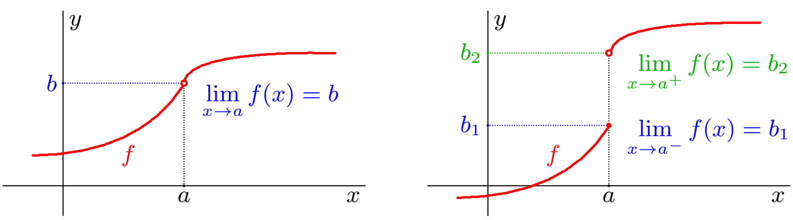
Granicą lewostronną i **granicą prawostronną funkcji f w punkcie $a\in R$** są nazywane:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^{-}(x) = \lim\limits_{x\to a} \big[f|_{D(f)\cap(-\infty;a)}(x)\big]. \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \big[f|_{D(f)\cap(a;\infty)}(x)\big]. \end{array}\right\}\ \textbf{Granice jednostronne.}$$

$a\in R$, $b\in R^{*}$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b.$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nazywa się **granica obustronna**.

```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);
      limit(1/x,x,0);
      limit(1/x,x,0,plus);
(%o1) -∞
(%o2) infinity /* Complex inf */
(%o3) ∞
```



Granice obustronne i jednostronne

Ważne granice.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$ przed $a>0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = \mathrm{e}^b$ przed $b\in R$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ przed $a>0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right) = \ln a$ przed $a>0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty \text{ przed } a\in(0;1),\ q\in R, \\ 0 \text{ przed } a\in(1;\infty),\ q\in R. \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \ln \mathrm{e} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 \text{ przed } a\in(0;1),\ q\in R, \\ \infty \text{ przed } a\in(1;\infty),\ q\in R. \end{cases}$

```
(%i2)  limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0); limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1)  und          /* undefined */
(%o2)  1
```

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1.$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}\cdot\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2}{x^2+4}=\frac{3\cdot 0+2}{0+4}=\frac{1}{2}.$

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$

```
(%i3)  limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
       limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
       limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
(%o3)  1 1/2 1/2
```

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$

  $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}$

  $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+x\cdot\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}.$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

  $=\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}=\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}=1+1=2.$

```
(%i3)  limit(x/(sqrt(1+x)-sqrt(1-x)),x,0);
       limit((1-sqrt(1-x))/x,x,0);
       limit((\sqrt(x^2-1)+sqrt(x^2+1))/x,x,inf);
(%o3)  1 1/2 2
```

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \begin{bmatrix} \text{Subst.} & x = z^{12} \\ x\to 1, & z\to 1 \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^3-1}$
$= \lim\limits_{z\to 1} \frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2-1} + 2^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{1-x^{-2}} + \lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} = \frac{5}{1-\infty^{-2}} + 2^0 = \frac{5}{1-0} + 1 = 6.$

- $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{a}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\cdot \ln x} = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a$ przed $a \in R$.

```
(%i3) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
      limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
```
(%o3) $\frac{4}{3}$ 6 e^a

Jeśli użyjemy substytucje $x = z^{12}$, możemy uprościć pierwszą granicę.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$ g(z):=subst(z^12,x,f(x))$

      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
```
(%o1) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^2\cdot|z|-1}$ `/* z is positive, z=|z| */`

(%o2) $\frac{4}{3}$

W ostatnim przykładzie obliczyliśmy granicę wyrażenia 0^0 – tzw niejasne wyrażenie.

Wyrażenia nieokreślone (obliczane przez granicę) obejmują:

- $\infty - \infty$, - $\pm\infty \cdot 0$, - $\frac{0}{0}$, - $\frac{1}{0}$, - $\frac{\pm\infty}{0}$, - $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, - 0^0, - $0^{\pm\infty}$, - $1^{\pm\infty}$, - $(\pm\infty)^0$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2) - \ln x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \ln\frac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln(1+\frac{2}{x})^x = \ln \mathrm{e}^2 = 2.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix} \text{Subst.} & z = tx \\ x\to 0, & z\to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\frac{z}{t}}{\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\cdot \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\cdot \ln(1+z)}$
$= \frac{1}{t}\cdot \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{t}$ pre $t\in R$, $t\neq 0$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix} \text{Subst.} \ z = 3x+1 \\ x\to\infty, \quad z\to\infty \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty} \left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}}$
$= \lim\limits_{z\to\infty} \left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[\mathrm{e}^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

```
(%i3) limit(x*(log(x+2)-log(x)),x,inf);
      limit(x/log(1+t*x),x,0);
      limit(((3*x-2)/(3*x+1))^x,x,inf);
(%o1) 2 1/t e^-1
```

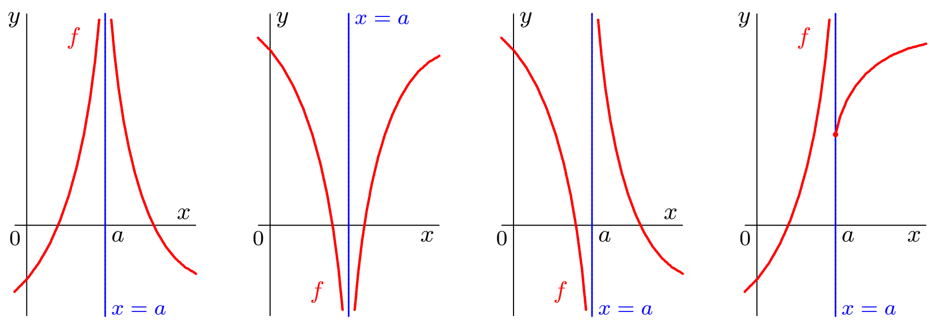
Właściwości asymptotyczne

Podczas badania funkcji f ważne jest, aby zbadać jej właściwości w niewłaściwych punktach:

- Dla $x \to \pm\infty$.
- V otoczeniu $O(a)$, $a \in R$, którego dotyczy $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $a \in R$.

- Linia prosta $x = a$ nazywa się **asymptota pionowa wykresu** f, jeśli $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (przynajmniej jedna z granic jest niewłaściwa).



Przykłady asymptoty pionowej

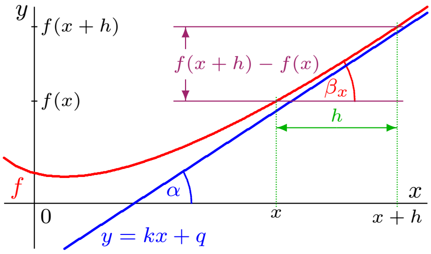
- Linia prosta $y = kx + q$ nazywa się **asymptota (ukośna) wykresu** f, jeśli $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ lub $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

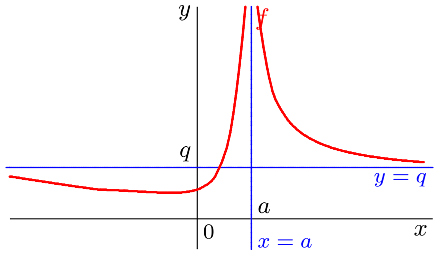
  Jeśli $k = 0$ (nachylenie linii), asymptota nazywa się **pozioma**.

> Linia prosta $y = kx + q$ jest asymptą funkcji $y = f(x)$, $x \in D(f)$.
>
> $\Leftrightarrow$ • Istnieją rzeczywiste granice $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q \in R$.

- $y = kx + q$ to asymptota. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

  $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right) = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.





Asymptota z nachylenie α (po lewej), asymptoty $y = q$, $x = a$ (po prawej)

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0 \;\Rightarrow\; \bullet \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

- $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k\in R, \; \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q\in R.$

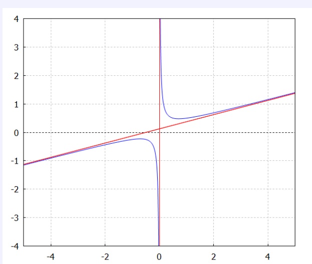
$$\Rightarrow \bullet \lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] - \lim_{x\to\infty} q = q - q = 0.$$

```
(%i10) f(x):=(2*x^2+x+1)/(8*x); km:limit(f(x)/x,x,minf)$ kp:limit(f(x)/x,x,inf)$
       qm:limit(f(x)-km*x,x,minf)$ qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf)$
       dm(x):=km*x+qm$ dp(x):=kp*x+qp$ dm(x);dp(x);
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],
       color=blue,explicit(f(x),x,-8,0),explicit(f(x),x,0,8),
       color=red,parametric(0,t,t,-5,5),
       explicit(dm(x),x,-8,8),explicit(dp(x),x,-8,8))$
```

(%o1) $f(x) := \frac{2x^2+x+1}{8x}$

(%o8) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$

(%o9) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$



Ciągłość funkcji

Ściśle związane z pojęciem granicy funkcji f w punkcie a jest pojęcie ciągłości f w punkcie a. Ciągłość funkcji jest również problemem lokalnym w otoczeniach $O(a)$.

f **jest ciągła w punkcie** $a \in D(f)$ jeżeli:

- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ dotyczy $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

Warunek można zapisać w postaci:

- $x_n \in D(f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Ta definicja nazywa się **Heineho**.

Punkt $a \in D(f)$ może być tylko skupienia zbioru lub izolowany:

- $a \in D(f)$ jest izolowanym punktem. $\Rightarrow$ Istnieje pojedynczy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a) = f(a)$.

$a \in D(f)$ jest izolowanym punktem. $\Rightarrow$ • f jest ciągła w a.

- $a \in D(f)$ jest punktem skupienia zbioru. $\Rightarrow$ Definicja jest identyczna z definicją granicy f w punkcie a.

$a \in D(f)$ jest punktem skupienia zbioru $D(f)$. $\Rightarrow$

- f jest ciągła w punkcie a. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ciągłość funkcji w punkcie $a \in D(f)$ można scharakteryzować przez otoczenia $O(a)$ a $O(f(a))$.

f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$. $\Leftrightarrow$

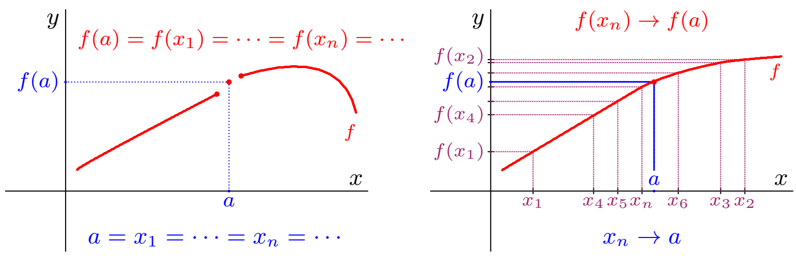
- Dla każdego otoczenia $O(f(a))$ istnieje otoczenie $O(a)$ tak, że $f(x) \in O(f(a))$ dotyczy wszystkich $x \in O(a)$.

Warunek możemy zapisać w postaci:

Dla każdego otoczenia $O(f(a))$ istnieje otoczenie $O(a)$ takie, że $f\big(O(a)\big) \subset O(f(a))$.

Jeśli korzystamy z promieni otoczenia, drugi warunek możemy zapisać w postaci:

- Dla każdego otoczenia $O_\varepsilon(f(a))$ istnieje otoczenie $O_\delta(a)$, że dla wszystkich $x \in O_\delta(a)$ dotyczy $f(x) \in O_\varepsilon(f(a))$.
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)$: $|x-a| < \delta. \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.



Ciągłość funkcji f w punkcie izolowanym (po lewej) i w punkcie skupienia zbioru (po prawej)

Funkcja f nazywa się **niециągła w punkcie** $a \in D(f)$, jeśli nie jest ciągła w punkcie a:

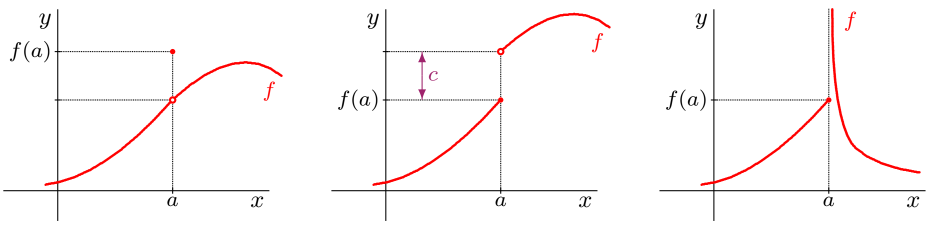
- Istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ więc, że $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow f(a)$,
  czyli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ lub nie istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

- f jest ciągła w $a \in D(f)$. $\Rightarrow$ • a nazywa się **punkt ciągłości** f.
- f jest nieciągła w punkcie $a \in D(f)$. $\Rightarrow$ • a nazywa się **punkt nieciągłości** f.

f może być nieciągła tylko w punkcie skupienia zbioru $D(f)$.
$\Rightarrow$ Rozszerzymy pojęcie punktu nieciągłości na wszystkie punkty dziedziny $D(f)$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.

- a jest **usuwalnym punktem nieciągłości funkcji** f,
  jeśli istnieje $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.
  - Usuwamy nieciągłość w punkcie a, jeśli zdefiniujemy $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- a jest **punktem nieusuwalnym nieciągłości I. rodzaju funkcji** f,
  jeśli istnieją $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \in R$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \in R$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
  - Liczba $c = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ nazywa się **skok funkcji f w punkcie a**.
- a jest **punktem nieusuwalnym nieciągłości II. rodzaju funkcji** f,
  jeśli przynajmniej jedna z granic $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ nie istnieje lub jest nieskończona.
  - Jeśli którakolwiek z granic jest nieskończona, mówimy o**nieciągłości asymptotycznej**.



Nieciągłość usuwalna, nieusuwalna I. i II. rodzaju

f, g są ciągłe w punkcie $a \in D(f) \cap D(g)$, $r \in R$. $\Rightarrow$

- $|f|$, $f \pm g$, rf, fg są ciągłe w punkcie a.
- $g(a) \neq 0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$ są ciągłe w punkcie a.

Ciągłość funkcji złożonej

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ jest ciągła w punkcie } a \in D(f). \\ g \text{ jest ciągła w punkcie } b = f(a) \in D(g). \\ H(f) \subset D(g). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ F = g(f) \text{ jest ciągła w punkcie } a.$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in D(f) \cap D(g) \cap D(h),\ O(a) \text{ to otoczenie.} \\ g, h \text{ są ciągłe w punkcie } a. \\ h(a) = f(a) = g(a). \\ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ dla wszystkich } x \in O(a). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f \text{ jest ciągła w punkcie } a.$$

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in D(f)$, oznaczmy:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, x\leq a\}}$ zwężenie funkcja w lewo.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, a\leq x\}}$ zwężenie funkcja w prawo.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ nazywa się **w punkcie** $a \in D(f)$:

- **ciągła lewostronnie**, jeśli w punkcie a jest ciągła spojitá funkcja f_a^-.
- **ciągła prawostronnie**, jeśli w punkcie a jest ciągła spojitá funkcja f_a^+.

Ciągłość jednostronna.

f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$. $\Leftrightarrow$

- f jest ciągłą lewostronnie i ciągłą prawostronnie w a.

Lokalne rozgraniczenie

f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$. $\Rightarrow$ • Istnieje otoczenie $O(a)$, w którym f jest ograniczona.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$.

- f nazywa się **ciągła na zbiorze** A, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $a \in A$.

Ciągłość f na zbiorze $a \subset D(f)$ nie następuje granica f do a.

- f: $y = \frac{1}{x}$, $x \in R$ jest ciągła w przedziale $(0; 1)$, ale nie ogranicza się do $(0; 1)$.

Cauchy w miejscu zerowym

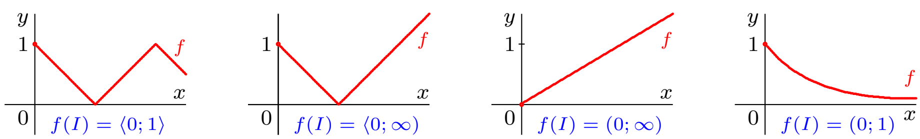
$\left.\begin{array}{l} f \text{ jest ciągła na } \langle a; b\rangle. \\ f(a) \cdot f(b) < 0. \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ • Istnieje $c \in (a; b)$ taki, że $f(c) = 0$.

f jest ciągła na przedziale $I \subset R$. $\Rightarrow$

- $f(I)$ to przedział.
- Funkcja odwrotna f^{-1} (jeśli istnieje) jest ciągła na $f(I)$.

f jest ciągła w przedziale $I \subset R$.

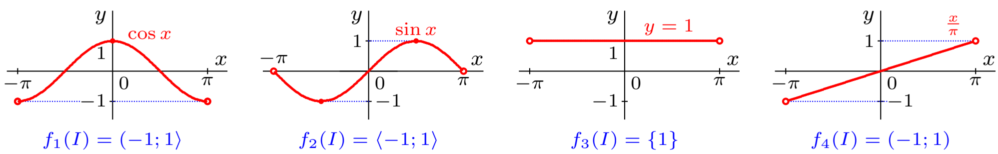
- I to przedział zamknięty. $\Rightarrow$ • $f(I)$ jest przedziałem domkniętym.
- I nie jest przedziałem zamkniętym. $\Rightarrow$ • $f(I)$ może być przedziałem różnych typów.



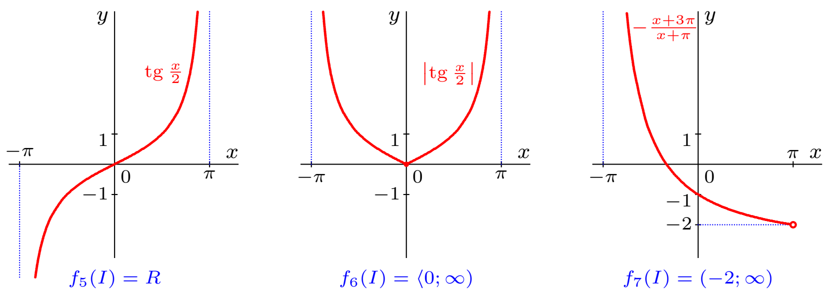
Przedział wyświetlania $I = (0; \infty)$ przez ciągłą funkcję f

Funkcja ciągła może wyświetlać $I = (-\pi; \pi)$ w różnych przedziałach:

- $y = \cos x$: $(-\pi;\pi) \to (-1;1\rangle$.
- $y = \sin x$: $(-\pi;\pi) \to \langle -1;1\rangle$.
- $y = 1$: $(-\pi;\pi) \to \{1\}$.
- $y = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi;\pi) \to (-1;1)$.
- $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $(-\pi;\pi) \to R$.
- $y = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$: $(-\pi;\pi) \to \langle 0;\infty)$.
- $y = -\frac{2x}{x+\pi} - 1$: $(-\pi;\pi) \to (0;\infty)$.
- $y = -\frac{2x}{x+\pi}$: $(-\pi;\pi) \to (1;\infty)$.



Wyświetlanie przedziału $I = (-\pi;\, \pi)$ za pomocą funkcji ciągłej



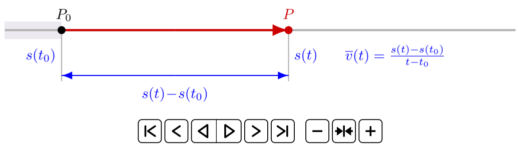
Wyświetlanie przedziału $I = (-\pi;\, \pi)$ za pomocą funkcji ciągłej

Pochodna funkcji rzeczywistej

Dwa problemy doprowadziły do wprowadzenia derywacji funkcji (poniższe przykłady).

Punkt porusza się wzdłuż linii prostej, jego ruch w czasie t opisuje funkcja $y = s(t)$.

- W czasie t_0 jest w punkcie P_0, w czasie t jest w punkcie P.
- W przedziale czasowym $\langle t_0; t\rangle$ pokonuje ścieżkę $s(t) - s(t_0)$.
  - $\Rightarrow$ • Średnia prędkość $\overline{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.
- Dla $t \to t_0$ otrzymujemy natychmiastową prędkość punktu w czasie t_0.
  - $\Rightarrow$ • Natychmiastowa prędkość $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \overline{v}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

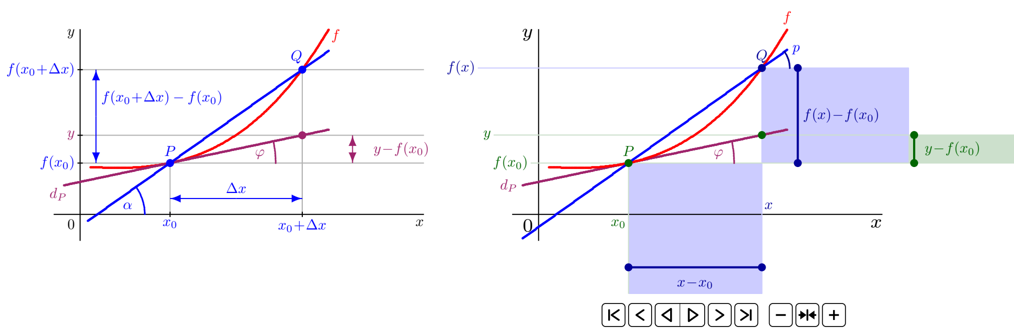


Zadanie prędkości

Funkcja $y = f(x)$, $x\ IND(f)$ jest ciągła.

- Punkty $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leży na wykresie f.
- Linia prosta PQ ma nachylenie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Styczna do f w punkcie P ma postać d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  gdzie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je jej nachylenie.
- $Q \to P. \quad \Rightarrow \quad PQ \to d_P,\ \Delta x \to 0,\ \alpha \to \varphi,\ f(x_0+\Delta x) \to f(x_0). \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi.$

  $\Rightarrow$ • Nachylenie styczny funkcji $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.



Zadanie stycznej

f ma w punkcie $x_0 \in D(f)$ **pochodną**, oznaczenie $f'(x_0)$, ewent. $y'(x_0)$ jeśli:

- istnieje granica $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

- $f'(x_0) \in R. \quad \Rightarrow \quad$ Pochodna $f'(x_0)$ jest **właściwa (skończona)**.
- $f'(x_0) \pm \infty. \quad \Rightarrow \quad$ Pochodna $f'(x_0)$ jest **niewłaściwa (nieskończona)**.

Oznaczenie wprowadzone przez G. W. Leibniza jest często używane:

- $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0)$, ew. • $y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x_0)$.

$f'(x_0) \in R$ (jest skończona). $\Rightarrow$ • f jest ciągła w punkcie x_0.

- Ciągłość funkcji f w punkcie x_0 nie gwarantuje istnienia $f'(x_0)$.

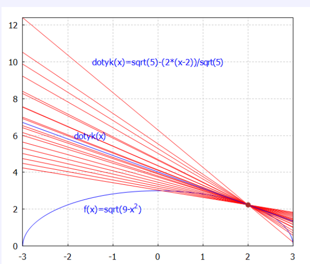
Funkcja f: $y = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

- Nie istnieje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Wyznacz styczną do półokręgu $y = \sqrt{9-x^2}$ w punkcie 2.

(%i8)
```
f(x):=sqrt(9-x^2)$ pomer(a,b):=(f(b)-f(a))/(b-a)$
sek(x,a,b):=pomer(a,b)*(x-a)+f(a)$
Sek:makelist(explicit(sek(x,2,-.15+.25*i),x,-3,3),i,1,20)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$ dotyk(x):=f(2)+subst(2,x,f1(x))*(x-2)$
print("Secant y=dotyk(x)=",dotyk(x)," in point 2 have a blue color")$
draw2d(grid=true,xaxis=true,color=blue,explicit(f(x),x,-3,3),
color=red,Sek,color=blue,explicit(dotyk(x),x,-3,3),
point_type=7,color=brown,points([[2,f(2)]]),
color=blue,label(["f(x)=sqrt(9-x^2)",-1,2]),
label(["dotyk(x)",-1.5,6]),label([concat("dotyk(x)=",string(dotyk(x))),0,10]))$
```

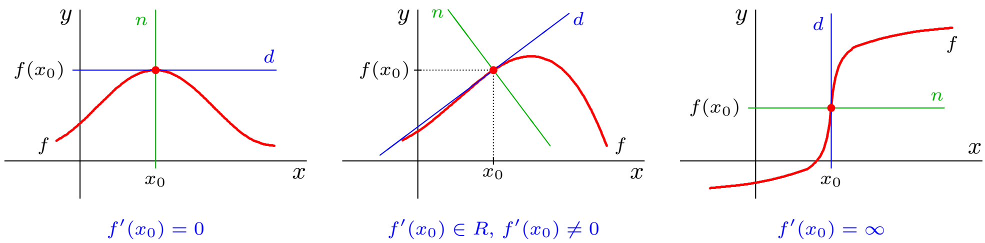
Secant $y = dotyk(x) = \sqrt{5} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{5}}$ *in point 2 have a blue color*



- $f'(x_0) \in R$. $\Rightarrow$ $f'(x_0)$ to nachylenie stycznej do wykresu f w punkcie x_0.

  Styczna ma postać $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

- $f'(x_0) = \pm\infty$, f jest ciągłe w punkcie x_0.
  $\Rightarrow$ $x = x_0$ jest asymptota pionowa do wykresu f w punkcie x_0.



Styczna i normalna do funkcji f w punkcie x_0

Obliczamy i upraszczamy pochodną funkcji $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log(x + \sqrt{x^2+1})$

(%i3) `f1(x):=diff(f(x),x);f1(x);`

(%o2) $f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Obliczyliśmy pochodną $f'(x)$, ale nie mogliśmy jej odpowiednio uprościć. Użyj komendą `subst`.

(%i5) `fp:subst(a,sqrt(x^2+1),f1(x));`

(fp) $\frac{\frac{x}{a}+1}{x+a}$

(%i6) `ratsimp(fp);`

(%o6) $\frac{1}{a}$

(%i7) `subst(sqrt(x^2+1),a,ratsimp(fp));`

(%o7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f ma w punkcie $x_0 \in D(f)$ **pochodną lewostronną** $f'_-(x_0)$, jeżeli:

- Istnieje $f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f'_{-}(x_0) \in R$ (jest skończona). $\Rightarrow$ • f jest ciągła lewostronna w punkcie x_0.

f ma w punkcie $x_0 \in D(f)$ **pochodną prawostronną** $f'_{+}(x_0)$, jeżeli:

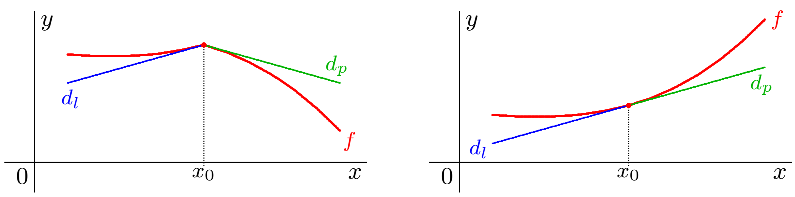
- Istnieje $f'_{+}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f'_{+}(x_0) \in R$ (jest skończona). $\Rightarrow$ • f jest ciągła prawostronna w punkcie x_0.

Pochodne $f'_{-}(x_0)$, $f'_{+}(x_0)$ nazywają się **jednostronnie** i przedstawiają graficznie **prawa stycznu**, ew. **lewa stycznu** do wykresu f. Pochodna $f'(x_0)$ nazywa się **obustronna**.

$f'_{-}(x_0), f'_{+}(x_0) \in R$ (są skończone, nie muszą być równe). $\Rightarrow$ • f jest ciągła w punkcie x_0.

Istnieje $f'(x_0)$. $\Leftrightarrow$ • Istnieją $f'_{-}(x_0)$, $f'_{+}(x_0)$ i $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$.



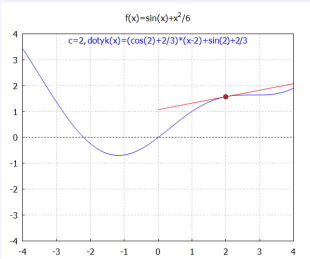
Obustronne styczny

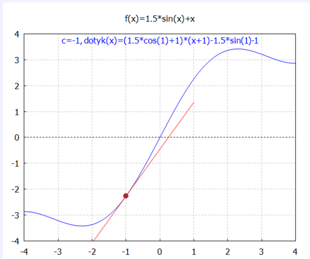
Poniższa konstrukcja oblicza i rysuje styczną do wykresu funkcji f w punkcie c.

(%i6)
```
c:2$ f(x):=x^2/6+sin(x)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$ dotyk(x):=f(c)+subst(c,x,f1(x))*(x-c)$
print("Secant y=dotyk(x)=",dotyk(x)," in point",c)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,xrange=[-4,4],yrange=[-4,4],
color=blue,explicit(f(x),x,-4,4),
color=red,explicit(dotyk(x),x,c-2,c+2),
point_type=7,color=brown,points([[c,f(c)]]),
```

```
color=blue,title=concat("f(x)=",string(f(x))),
label([concat("c=",string(c),", dotyk(x)=",string(dotyk(x))),0,3.75]))$
```

$Secant\ y = dotyk(x) = (\cos(2) + 2/3) * (x - 2) + \sin(2) + 2/3\ \ in\ point\ 2$





$y = f(x),\ x \in D(f),\ A \subset \{x_0 \in D(f);\ f'(x_0) \text{ jest skończona}\},\ A \neq \emptyset.$

- Funkcja g: $y = f'(x)$, $x \in A$ nazywa się **pochodna funkcji f na zbiorze A**,

oznaczenie f', y', ew. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

- Pochodna f w punkcie $x_0 \in D(f)$ to $f'(x_0)$, czyli liczba lub $\pm\infty$.
- Pochodna f na zbiorze $A \subset D(f)$ jest funkcją $y = f'(x)$, $x \in A$.

f ma pochodną skończoną f' na zbiorze $A \subset D(f)$. $\Rightarrow$ • f jest ciągła na A.

$f\colon y = x^n,\ x \in R,\ n \in N,\ x_0 \in D(f).$

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1})(x - x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.$$

$f\colon y = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$

- $[\mathrm{e}^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x.$

W praktycznym obliczaniu instrumentów pochodnych stosujemy różne formuły i reguły.

f', g' istnieją na $A\neq\emptyset$, $c\in R$. $\Rightarrow$
- $(cf)'$, $(f\pm g)'$, $(fg)'$ istnieją na A, $\left(\frac{f}{g}\right)'$ istnieją na $A_1=\{x\in A; g(x)\neq 0\}$.

Ponadto:
- $(cf)'(x)=cf'(x)$.
- $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$.
- $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Krótko piszemy poprzednie formuły:
- $(cf)'=cf'$. • $(f\pm g)'=f'\pm g'$. • $(fg)'=f'g+fg'$. • $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

f: $y=\frac{x}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$, linia prosta p: $y=2-x$.
- Styczne do wykresu f równoległe do p są d_1: $y=-x$, d_2: $y=4-x$.

Styczna d: $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ w punkcie x_0 ma nachylenie $f'(x_0)$.

Linia prosta p ma nachylenie -1. $\Rightarrow$ $f'(x_0)=-1$.
- $f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'=\frac{1\cdot(x-1)-x(1-0)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-1)^2}=-1$. $\Rightarrow$ $(x_0-1)^2=1$. $\Rightarrow$ $x_0=0$ alebo $x_0=2$.

Dwa punkty styku $D=\left[x_0; f_(x_0)\right]$ i dwie styczne d:
- $D_1=[0;0]$, d_1: $y=0-(x-0)=-x$.
- $D_1=[2;2]$, d_2: $y=2-(x-2)=4-x$.

Pochodna funkcji odwrotnej

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ jest ciągła i właściwe monotoniczna na przedziale } I\subset R. \\ x_0\in I \text{ jest punkt wewnętrzny.} \\ f'(x_0)\neq 0 \text{ jest skończone.}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

- Funkcja odwrotna f^{-1} ma pochodną w punkcie $y_0=f(x_0)$ i dotyczy
$$[f^{-1}]'(y_0)=\left.\frac{1}{f'(x_0)}\right|_{x_0=f^{-1}(y_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

- $[f^{-1}]'(y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } y=f(x) & x\to x_0\\ x=f^{-1}(y) & y\to y_0\end{array}\right]$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Możemy po prostu napisać:

- $[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, ew. • $\frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}}$.

$f\colon\ y = \mathrm{e}^x,\ x \in R$ jest ciągła i rosnąca, $f'(x) = \mathrm{e}^x \neq 0$ przed $x \in R$.
$f^{-1}\colon\ x = \ln y$ dla $y \in (0; \infty)$.

- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[\mathrm{e}^x]'} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ pre $y \in (0; \infty)$.

$f\colon\ y = \sin x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ jest ciągła i rosnąca, $H(f) = (-1; 1)$.
$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1; 1)$.

Pochodna funkcji złożonej

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x),\ y = g(u),\ H(f) \subset D(g). \\ x_0 \in D(f),\ u_0 = f(x_0). \\ f'(x_0),\ g'(u_0) \text{ są skończone.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \begin{aligned}[t] [g(f(x_0))]' &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= g'(u_0) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Możemy po prostu napisać:

- $F'(x) = [g(f)]'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$, ew. • $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

- $[\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x,\ x \in R$.

- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x,\ x \in R$.

- $[a^x]' = \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x \ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a,\ x \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$.

- $[x^a]' = \left[\mathrm{e}^{\ln x^a}\right]' = \left[\mathrm{e}^{a \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1},\ x > 0,\ a \in R$.

- $[x^x]' = \left[\mathrm{e}^{\ln x^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot [x \ln x]'$
  $= x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x],\ x > 0$.

- Wyrażenie $[\ln f(x_0)]' = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ nazywa się **pochodna logarytmiczna** f **w punkcie** x_0.

Pochodna logarytmiczna

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) > 0 \text{ dla } x_0 \in D(f). \\ f'(x_0) \text{ istnieje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f'(x_0) = f(x_0) \cdot [\ln f(x_0)]'.$$

Pochodne podstawowych funkcji elementarnych

Formuła	Ważność	Formuła	Ważność
$[c]' = 0,$	$x \in R,\ c \in R$	$[x]' = 1,$	$x \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1},$	$x \in R,\ n \in N$	$[x^a]' = ax^{a-1},$	$x > 0,\ a \in R$
$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x,$	$x \in R$	$[a^x]' = a^x \ln a,$	$x \in R,\ a > 0$
$[\ln x]' = \frac{1}{x},$	$x > 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x},$	$x \neq 0$	$[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\sin x]' = \cos x,$	$x \in R$	$[\cos x]' = -\sin x,$	$x \in R$
$[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z$	$[\mathrm{cotg}\, x]' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1;1)$	$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1;1)$
$[\mathrm{arctg}\, x]' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$	$[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$
$[\sinh x]' = \cosh x,$	$x \in R$	$[\cosh x]' = \sinh x,$	$x \in R$
$[\mathrm{tgh}\, x]' = \frac{1}{\cosh^2 x},$	$x \in R$	$[\mathrm{cotgh}\, x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$	$x \neq 0$
$[\mathrm{arsinh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$	$x \in R$	$[\mathrm{arcosh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$x > 1$
$[\mathrm{artgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in (-1;1)$	$[\mathrm{arcotgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in R - \langle -1;1 \rangle$

Dla potrzeb praktycznych konieczne jest zapamiętanie tych wzorców.

Funkcje różniczkowe i pochodne wyższego rzędu

Często musimy aproksymować daną funkcję f (w przybliżeniu wymienić) inna, prostsza funkcja g tak, że ich różnica była jak najmniejsza $|f(x) - g(x)|$. Zwykle potrzebujemy**przybliżenie lokalne** w jakimś otoczeniu $O(x_0)$, $x_0 \in D(f)$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, istnieje skończona $f'(x_0)$.

- **Różniczka funkcji** f w punkcie x_0, oznaczenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0)$, ew. $\mathrm{d}f(x_0, h)$

jest funkcją liniową $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$.

Substytucja $h = x - x_0$. $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

f jest **zróżnicowana**:

- **w punkcie** $x_0 \in D(f)$, jeśli istnieje $\mathrm{d}f(x_0, h)$, czyli istnieje skończona $f'(x_0)$.
- **na zbiorze** $A \subset D(f)$, jeśli $\mathrm{d}f(x_0, h)$ istnieje dla wszystkich $x_0 \in A$.

---

f: $y = x$, $x \in R$, punkt $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$.
• $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, oznaczenie $\mathrm{d}x$. $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0, h) = \mathrm{d}x$.

---

f: $y = f(x)$, $x \in R$, punkt $x_0 \in R$, $f'(x_0)$ jest skończona.
• $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, $h \in R$, oznaczenie $\mathrm{d}f(x_0)$.
$\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0, h) = \mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, ew. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

O najlepszym lokalnym przybliżeniu liniowym

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ jest różniczkowalna w punkcie } x_0 \in D(f). \\ h\colon\ y = f(x_0) + c(x - x_0),\ c \in R,\ c \neq f'(x_0). \\ g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{array}\right\} \Rightarrow$$

• Istnieje otoczenie $O(x_0)$ takie, że dla wszystkich $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$
dotyczy $|f(x) - g(x)| < |f(x) - h(x)|$.

$\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$. Dokładnie $\sqrt[6]{1,06} = 10097588$, błąd obliczeniowy $< 0,00025$.

Rozwiązanie.
Oznaczają $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
$\Rightarrow$ • $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6} x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$, $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.

Niech $O(1)$ istnieje tak, że $1,06 \in O(1)$.
$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.
$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1,06} = f(1,06) \approx \frac{1,06+5}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

- Przybliżenie f w otoczeniu $O(x_0)$ przy użyciu stycznej w punkcie x_0
  g: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$

jest najlepszym ze wszystkich przybliżeń f przy użyciu funkcji liniowej (linia prosta).

(%i8)
```
c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$
s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$ p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$ p(x);
h(c):=print("c=",c,"           c^(1/6)=",'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
subst(c,x,float(p(x))))$ h(c)$
```
(%o6) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad c^{(1/6)} = f(1.06) = 1.009758794179192 \;\; approx\; 1.01$

- Przybliżenie f ma sens tylko dla x w pobliżu punktu x_0.

(%i18)
```
h(0.9)$ h(1.1)$ h(1.2)$ h(1.5)$ h(2.0)$ h(4.0)$ h(10)$ h(16)$ h(32)$ h(64)$
```
$c = 0.9 \quad c^{(1/6)} = f(0.9) = 0.9825931938526898 \;\; approx\; 0.9833333333333334$

$c = 1.1 \quad c^{(1/6)} = f(1.1) = 1.016011867773387 \;\; approx\; 1.016666666666667$

$c = 1.2 \quad c^{(1/6)} = f(1.2) = 1.030853320886445 \;\; approx\; 1.033333333333333$

$c = 1.5 \quad c^{(1/6)} = f(1.5) = 1.069913193933663 \;\; approx\; 1.083333333333333$

$c = 2.0 \quad c^{(1/6)} = f(2.0) = 1.122462048309373 \;\; approx\; 1.166666666666667$

$c = 4.0 \quad c^{(1/6)} = f(4.0) = 1.259921049894873 \;\; approx\; 1.5$

$c = 10 \quad c^{(1/6)} = f(10) = 1.46779926762207 \;\; approx\; 2.5$

$c = 16 \quad c^{(1/6)} = f(16) = 1.587401051968199 \;\; approx\; 3.5$

$c = 32 \quad c^{(1/6)} = f(32) = 1.781797436280679 \;\; approx\; 6.166666666666666$

$c = 64 \quad c^{(1/6)} = f(64) = 2.0 \;\; approx\; 11.5$

$\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01.$ Dokładnie $\sqrt[6]{1,06} = 10097588$, błąd obliczeniowy $< 0,00025$.

Inne rozwiązanie.

Oznaczają $f(x) = \sqrt[6]{x+1}$, $x > -1$, $x_0 = 0$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > 0$, $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.

Niech $O(0)$ istnieje tak, że $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1,06} = f(0,06) \approx \frac{0,06+6}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

(%i8)
```
c:0.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$
s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$ p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$ p(x);
h(c):=print("c=",c,"           c^(1/6)=",'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
subst(c,x,float(p(x))))$ h(c)$
```
(%o6) $\frac{x}{6}+1$

$c = 0.06 \quad (c+1)^{(1/6)} = f(1.06) = 1.009758794179192 \;\; approx\; 1.01$

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ ma pochodną f' na zbiorze $A_1 \subset D(f)$, $A_1 \neq \emptyset$.

- $f' = f^{(1)}$ nazywa się **pochodna pierwszego rzędu (pierwsza pochodna)** f na zbiorze A_1.

- Pochodna f' (jeśli istnieje), czyli $[f']' = f'' = f^{(2)}$ na $A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ nazywa się **pochodna drugiego rzędu (druga pochodna)** f na zbiorze A_2.
- Pochodna f'' (jeśli istnieje), czyli $[f'']' = f''' = f^{(3)}$ na $A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ nazywa się **pochodna trzeciego rzędu (trzecia pochodna)** f na zbiorze A_3.
- Pochodna f''' (jeśli istnieje), czyli $[f''']' = f^{(4)}$ na $A_4 \subset A_3$, $A_4 \neq \emptyset$ nazywa się **pochodna czwartego rzędu (czwarta pochodna)** f na zbiorze A_4.
- W ten sposób kontynuujemy dla $n = 5, 6, 7, \ldots$.
- Pochodna $f^{(n-1)}$, $n \in N$ (jeśli istnieje), czyli $[f^{(n-1)}]' = f^{(n)}$ na $A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ nazywa się **pochodna n-tego rzędu (n-ta pochodna)** f na zbiorze A_n.
- Specjalnie definiujemy $f = f^{(0)}$**pochodna zerowego rzędu (pochodna zerowa)** f.

$f^{(n)}(x_0)$ dla $x_0 \in A_n$ nazywa się **pochodna n-tego rzędu (n-ta pochodna) f w punkcie x_0**.

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$

dla $x_0 \in A_n$, $A_n \subset A_{n-1}$, $n \in N$.

- Oznacza to, że funkcja $f^{(n-1)}$ musi być zdefiniowana w jakimś otoczeniu $O(x_0)$.

Obliczanie $f^{(n)}$, $n \in N$ może być generalnie bardzo pracochłonne, ponieważ musimy zacząć od f'.

$y = x^k$, $x \in R$, $k \in N$.

$$[x^k]' = kx^{k-1}, \qquad [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}, \qquad [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}, \ldots,$$
$$[x^k]^{(k-1)} = k(k-1)\cdots 2x, \qquad [x^k]^{(k)} = k!, \qquad [x^k]^{(k+1)} = 0, \ldots$$

$$\Rightarrow \bullet\ [x^k]^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},\ x\in R & \text{przed } n\in N,\ n\le k. \\ 0,\ x\in R & \text{przed } n\in N,\ n>k. \end{cases}$$

$y = \sin x$, $x \in R$, $y = \cos x$, $x \in R$.

$$[\sin x]' = \cos x, \qquad [\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x, \qquad [\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x,$$
$$[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x, \qquad [\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ldots$$

$$\Rightarrow \bullet\ [\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x,\ x\in R & \text{przed } n=2k,\ k\in N. \\ (-1)^{k+1}\cos x,\ x\in R & \text{przed } n=2k-1,\ k\in N. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bullet\ [\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x,\ x\in R & \text{przed } n=2k,\ k\in N. \\ (-1)^{k}\cos x,\ x\in R & \text{przed } n=2k-1,\ k\in N. \end{cases}$$

$y = \mathrm{e}^x,\ x \in R.\ \Rightarrow\ \bullet\ [\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x,\ x \in R$ pre $n \in N$.

Formuła Leibniza

f, g mają pochodne na zbiorze A na zamówienie $n \in N$ (włącznie). $\Rightarrow$

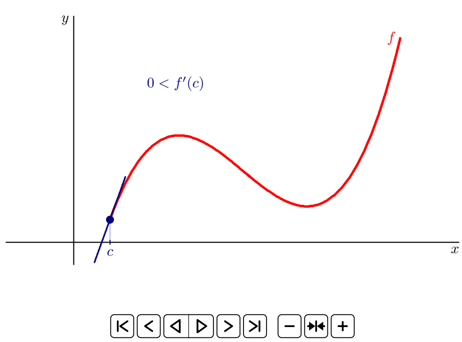
$$\bullet\ [fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}.$$

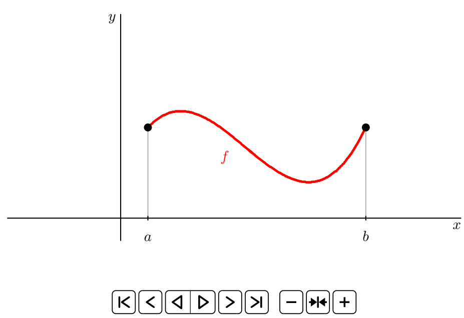
Aplikacje do wyprowadzania funkcji

Twierdzenia o wartości średniej funkcji (Rolle'a i Lagrange'a) i reguła l'Hospitala należą do najczęstszych zastosowań wyprowadzania w praktyce.

Warunek konieczny dla istnienia ekstremum lokalnego

$$\left.\begin{array}{l} c \in D(f) \text{ to punkt wewnętrzny.} \\ f \text{ ma ekstremum lokalne w punkcie } c. \\ f'(c) \text{ istnieje.} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \bullet\ f'(c) = 0.$$





Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (po lewej) i twierdzenie Rolle'a (po prawej)

Rolle

f jest ciągła na $\langle a;b\rangle$.
$f(a) = f(b)$.
Istnieje $f'(x)\in R^*$ dla wszystkich $x\in(a;b)$.

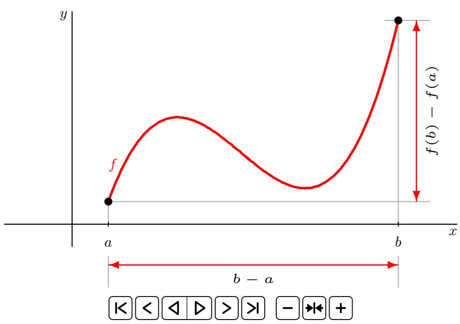
$\Rightarrow$ • Istnieje $c\in(a;b)$ tak, że $f'(c) = 0$.

• $c\in(a;b)$ leży na linii z punktami końcowymi a, b,
dlatego często wyrażany jest w postaci $c = a + \theta(b-a)$, $\theta\in(0;1)$.

Lagrange (rachunek różniczkowy)

f jest ciągła na $\langle a;b\rangle$.
Istnieje $f'(x)\in R^*$ dla wszystkich $x\in(a;b)$.

$\Rightarrow$ • Istnieje $c\in(a;b)$ tak, że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Twierdzenie Lagrange'a

• $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\Rightarrow$ • $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$.

Označme $b = a+h$, $h = b-a$, $h\in R$. $\Rightarrow$ $c = a+\theta(b-a) = a+\theta h$, $\theta\in(0;1)$.

• $f(b) - f(a) = f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)\cdot h$, $h\in R$, $\theta\in(0;1)$.

Dla wystarczająco małego h możemy założyć $f'(a+\theta h) \approx f'(a)$.

• $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)\cdot h \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a,h)$.

Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a gwarantuje istnienie $c\in(a;b)$. Jednak nie możemy ich użyć do znalezienia takich punktów, ani nie możemy określić ich liczby.

Wyrażenia nieokreślone typu $\frac{0}{0}$, ew. $\frac{\infty}{\infty}$ sa często oblicza się je zgodnie z regułą l'Hospital.

Reguła L'Hospital

Dla wszystkich $x \in O(a)$, $x \neq a$ istnieją $f'(x)$, $g'(x)$, $a \in R^*$, istnieje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty \ [L'H\frac{\infty}{\infty}], \\ \text{ew. } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \ [L'H\frac{0}{0}]. \end{cases}$

$\Rightarrow$

- Istnieje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12$.

- $f(x) = x^3 - 8$, $x \in R$, $g(x) = x - 2$, $x \in R$.
- $O(2)$ można wybrać dowolnie, np. $O(2) = R$.

$f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 1$ pre $x \in R - \{2\}$.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12$.

$\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 8) = \lim\limits_{x\to 2} (x - 2) = 0$.

$\Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12$.

```
(%i9) f(x):=(x^3-8)/(x-2)$
      fc(x):=num(f(x))$ fc(x);
      fm(x):=denom(f(x))$ fm(x);
      'limit(f(x),x,2); 'limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
      limit(f(x),x,2); limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o4) $x^3 - 8$

(%o5) $x - 2$

(%o6) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

(%o7) $3 \lim\limits_{x\to 2} x^2$

(%o8) 12

(%o9) 12

Bez reguły l'Hospital:

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = 12$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Spełnione są warunki reguły l'Hospital:

- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $[x]' = 1$ pre $x \in (0;\infty)$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$

```
(%i4) f(x):=log(x)/x$ fc(x):=num(f(x))$ fm(x):=denom(f(x))$
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
(%o4) 1/2
```

- Bardzo ważne jest zweryfikowanie wszystkich założeń reguły l'Hospital.
- Ważność założenia $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$ jest weryfikowany w sposób ciągły podczas obliczania granicy.
- Odwrotne stwierdzenie nie ma zastosowania.

Istnienie $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nie implikuje istnienia $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- Regułę L'Hospital można zastosować kilka razy z rzędu:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},\ k \in N.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{6x}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$

Spełnione są warunki reguły l'Hospital:

- Dla $O(0) = (-1;1)$, $x \in O(0)$, $x \neq 0$ istnieją odpowiednie pochodne i granice.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \cdots$

Nie możemy zastosować reguły L'Hospital.

Reguła L'Hospital może być również wykorzystana do obliczenia innych nieokreślonych wyrażeń. Musimy je najpierw przekonwertować na typ $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ z odpowiednimi modyfikacjami.

Rodzaj $\pm\infty \cdot 0$: • $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$, gdzie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$ $[L'H\frac{0}{0}]$.
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$ $[L'H\frac{\infty}{\infty}]$.

Rodzaj $\infty-\infty$: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, gdzie $\lim\limits_{x\to a}f(x) = \lim\limits_{x\to a}g(x) = \pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$. $\Rightarrow$ Typ $\infty\cdot 0$.

Rodzaj ∞^0: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, gdzie $\lim\limits_{x\to a}f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln f(x)}$. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.

Rodzaj 0^0: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, gdzie $\lim\limits_{x\to a}f(x) = \lim\limits_{x\to a}g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln f(x)}$. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.

Rodzaj $1^{\pm\infty}$: • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, gdzie $\lim\limits_{x\to a}f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x) = \pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln f(x)}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}x^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\ln x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{0^+}\cdot(-\infty)}$
$= \mathrm{e}^{\infty\cdot(-\infty)} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$

Nie zastosowaliśmy zasady L'Hospital.

$y = f(x)$, $x\in D(f)$, bod $x_0\in D(f)$, okolie $O(x_0)\subset D(f)$, $n\in N$.
Istnieją skończone pochodne $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)\in R$.

- **wielomian Taylora stopnia n funkcji f ze środkiem w punkcie x_0** jest funkcją

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x\in O(x_0).$$

Jeżeli oznaczymy $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$, to ma postać:

$$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h \in O(0).$$

- Wielomian Taylora $T_n(x)$ o środku $x_0 = 0$ nazywa się **wielomian Maclaurina**:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!},\ x \in O(0).$$

- **Pozostałą część wielomianu Taylora** (stopnie n) nazywa się różnicą

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in O(x_0), & \text{Lagrangeov tvar,} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!},\ x \in O(x_0), & \text{Cauchyho tvar,} \end{cases}$$

gdzie $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0; 1)$.

Reszta $R_n(x)$ wyraża błąd aproksymacji f za pomocą wielomianu Taylora $T_n(x)$:

- Aproksymacja ma charakter lokalny w otoczeniu $O(x_0)$.
- Przybliżenie jest najlepsze ze wszystkich przybliżeń przy użyciu wielomianów stopnia n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \langle -1; \infty)$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ $f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3}\cdot(-\frac{2}{9})\cdot(x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x \in O(0)$.

- $$\sqrt[3]{1+x} \approx \begin{cases} 1 + \frac{x}{3}, & x \in O(0) \text{ z błędem } R_1(x). \\ 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}, & x \in O(0) \text{ z błędem } R_2(x). \\ 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}, & x \in O(0) \text{ z błędem } R_3(x). \end{cases}$$

Obliczamy wielomian Taylora funkcji $\sqrt{x^2+1}$. Jak widać z wiersza (%i2), ręczne pochodzenie jest dość pracochłonne.

```
(%i1) f(x):=sqrt(x^2+1)$

(%i2) print("f(x)=",f(x),", f'(x)=",diff(f(x),x),",
        f''(x)=",ratsimp(diff(f(x),x,2)),", f'''(x)=",ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

Na przykład widzimy, że komenda `coeff` zależy od komendy `taylor`. Wielomian `tp1` jest dziewiątym (praktycznie ósmym) stopniem, stąd wyjście komenda `coeff(tp1,x,10))` to liczba 0. Wielomian `tp2` to dziesiąty stopień i wyjście komendy `coeff(tp2,x,10))` jest realne współczynnik $c_{10} = 7/256$.

```
(%i3) tp1:taylor(f(x),x,0,9);
```
(tp1) $1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \cdots$
```
(%i4) print("c_3=",coeff(tp1,x,3),",c_4=",coeff(tp1,x,4),",c_10=",coeff(tp1,x,10))$
```
$c\_3 = 0,\ c\_4 = -\frac{1}{8},\ c\_10 = 0$
```
(%i5) tp2:taylor(f(x),x,0,10);
```
(tp2) $1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^10}{256} + \cdots$
```
(%i6) print("c_3=",coeff(tp2,x,3),",c_4=",coeff(tp2,x,4),",c_10=",coeff(tp2,x,10))$
```
$c\_3 = 0,\ c\_4 = -\frac{1}{8},\ c\_10 = \frac{7}{256}$

$f(x) = \ln x,\ x \in (0;\infty),\ x_0 = 1.$ $\Rightarrow$ $f(1) = 0.$

- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},\ x > 0.$ $\Rightarrow$ $f'(1) = 1 = 0!.$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2},\ x > 0.$ $\Rightarrow$ $f''(1) = -1 = -1!.$
- $f'''(x) = 2\frac{1}{x^3} = 2x^{-3},\ x > 0.$ $\Rightarrow$ $f'''(1) = 2 \cdot 1 = 2!.$
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2\frac{1}{x^3} = -3 \cdot 2x^{-4},\ x > 0.$ $\Rightarrow$ $f^{(4)}(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = -3!.$

  $\ldots$
- $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{x^{k-1}},\ x > 0,\ k \in N.$ $\Rightarrow$ $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$

$\Rightarrow$ • $T_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(x-1)^k}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(x-1)^k}{k},\ x \in O(1).$$

```
(%i1) taylor(log(x),x,1,10);
```
(%o1) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \cdots$

Czasami wygodniej jest wyrazić $f(x) = \ln x$ w postaci wielomianu Maclaurina.

- $x = t+1.$ $\Rightarrow f(t) = \ln(t+1),\ t \in (-1;\infty),$

$$T_n(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k},\ t \in O(0).$$

```
(%i1) taylor(log(x+1),x,0,10);
```
(%o1) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \cdots$

$f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ Wielomian Maclaurina stopnia $n \in N$ ma postać:

- $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$, $x \in R$.

$f(x) = \sin x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ Wielomian Maclaurina stopnia $n \in N$ ma postać:

- $T_{2k+1}(x) = 0 + \frac{x}{1!} + 0 + \frac{-x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, $x \in R$.

$f(x) = \cos x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ Wielomian Maclaurina stopnia $n \in N$ ma postać:

- $T_{2k}(x) = 1 + 0 + \frac{-x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$, $x \in R$.

(%i1) `taylor(exp(x),x,0,10);`

(%o1) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

(%i2) `taylor(sin(x),x,0,10);`

(%o2) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \cdots$

(%i3) `taylor(cos(x),x,0,10);`

(%o3) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

- Funkcje $y = \mathrm{e}^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ mogą być aproksymowane dla każdego $x \in R$.
- Wymaganą dokładność możemy osiągnąć poprzez wystarczające zwiększenie stopnia n.

$f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Niech $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$, $t = x^2$. $\Rightarrow$ $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} = g(x^2) = g(t) = \mathrm{e}^t$.

Dla wielomianu Maclaurina $P_n(t)$ funkcji $g(t)$, $t \geq 0$
oraz wielomian Maclaurina $T_{2n}(x)$ funkcji $f(x)$, $x \in R$ dotyczy:

- $P_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(x^2)^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = T_{2n}(x)$.

(%i1) `taylor(exp(x^2),x,0,10);`

(%o1) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \cdots$

(%i3) `subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,5)); subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,10));`

(%o2) $\frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

(%o3) $\frac{x^{20}}{3628800} + \frac{x^{18}}{362880} + \frac{x^{16}}{40320} + \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

Na końcu tej sekcji znajdujemy wielomian Maclaurina stopnia 10 funkcji $f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x+1}$.

(%i1) `taylor(log((x^2+1)/(x+1)),x,0,10);`

(%o1) $-x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{2}-\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}-\frac{x^9}{9}+\frac{3x^{10}}{10}+\cdots$

(%i3) `tp1(x):= taylor(log(x^2+1),x,0,10)-taylor(log(x+1),x,0,10)$ tp1(x);`

(%o3) $-x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{2}-\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}-\frac{x^9}{9}+\frac{3x^{10}}{10}+\cdots$

(%i6) `tp2(x):=ratsimp(subst(x^2,t,taylor(log(t+1),t,0,5))-taylor(log(x+1),x,0,10))$`

`tp2(x); tp1(x)-tp2(x);`

(%o5) $\frac{756x^{10}-280x^9-315x^8-360x^7+1260x^6-504x^5-630x^4-840x^3+3780x^2-2520x}{2520}$

(%o6) $0+\cdots$

Przebieg funkcji

Ważną częścią badania przebiegu funkcji jest wyznaczanie przedziałów, on której ta funkcja jest monotoniczna.

$I\subset R$ jest przedziale, f jest ciągła na I, dla wszystkich $x\in I$ istnieje $f'(x)\in R$. $\Rightarrow$

- f jest w przedziale I $\left\{\begin{array}{lcl} \text{stacjonarna.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x)=0 \\ \text{rosnąca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x)>0 \\ \text{niemalejąca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x)\ge 0 \\ \text{malejąca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x)<0 \\ \text{nierosnąca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x)\le 0 \end{array}\right\}$ dla wszystkich $x\in I$.

Punkty, w których funkcja ciągła f ma ekstrema lokalne, ściśle związane z interwałami, w których funkcja ta jest ostro monotoniczna.

Warunek konieczny dla istnienia ekstremum lokalnego

$\left.\begin{array}{l} x_0\in D(f),\ f(x_0) \text{ jest ekstremum lokalne.} \\ f'(x_0) \text{ istnieje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f'(x_0)=0.$

- $f'(x_0)=0$ nie gwarantuje lokalnej ekstremum w punkcie x_0.
- Ekstremum lokalne może być również punktem, w którym pochodna nie istnieje.

Wyszukując ekstrema lokalne funkcji, musimy:

- Zbadaj wszystkie punkty $x_0 \in D(f)$ dla których obowiązuje $f'(x_0) = 0$.
- Zbadaj wszystkie punkty $x_0 \in D(f)$, w których $f'(x_0)$ nie istnieje.

Dodatkowo, szukając ekstremów globalnych funkcji, musimy:

- Zbadaj punkty graniczne $D(f)$.

Punkt $x_0 \in D(f)$ nazywamy **punkt stacjonarny funkcji** f, jeśli $f'(x_0) = 0$ istnieje.

Warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$. Dla wszystkich $x \in O(x_0)$ istnieje $f'(x)$ a dotyczy:

- $f'(x) > 0$ dla $x < x_0$, $f'(x) < 0$ dla $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe lokalne maksimum.
- $f'(x) < 0$ dla $x < x_0$, $f'(x) > 0$ dla $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe lokalne minimum.
- $f'(x) < 0$ dla $x \neq x_0$, ew. $f'(x) > 0$ dla $x \neq x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ nie jest lokalne ekstremum.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ jest skończona. $\Rightarrow$

- $f''(x_0) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe lokalne maksimum.
- $f''(x_0) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe lokalne minimum.

Ważną częścią badania przebiegu funkcji jest wyznaczanie przedziałów, on którego funkcja jest wypukła lub wklęsła.

$I \subset R$ jest przedzial, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f'(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f jest w przedziale I $\begin{cases} \text{wypukła.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ jest na } I \text{ niemalejąca.} \\ \text{ściśle wypukła.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ jest na } I \text{ rosnąca.} \\ \text{wklęsła.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ jest na } I \text{ nierosnąca.} \\ \text{ściśle wklęsła.} & \Leftrightarrow \bullet\ f' \text{ jest na } I \text{ malejąca.} \end{cases}$

$I \subset R$ jest przedzial, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f''(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f je na intervale I $\left\{\begin{array}{lll} \text{ściśle wypukła.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) > 0 \\ \text{wypukła.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) \geq 0 \\ \text{ściśle wklęsła.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) < 0 \\ \text{wklęsła.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) \leq 0 \end{array}\right\}$ dla wszystkich $x \in I$.

Aby zbadać wypukłość i wklęsłość funkcji f, musimy:

- Zbadaj wszystkie punkty $x_0 \in D(f)$ dla których obowiązuje $f''(x_0) = 0$.
- Zbadaj wszystkie punkty $x_0 \in D(f)$, gdzie f jest ciągła, a $f'(x_0)$ nie istnieje.

$\left.\begin{array}{l} x_0 \in D(f) \text{ jest punktem przegięcia funkcji } f. \\ f''(x_0) \text{ istnieje.} \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ • $f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$. Dla wszystkich $x \in O(x_0)$ istnieje $f''(x)$ i dotyczy:

- $f''(x) > 0$ dla $x < x_0$, $f''(x) < 0$ dla $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.
- $f''(x) < 0$ dla $x < x_0$, $f''(x) > 0$ dla $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.
- $f''(x) < 0$ dla $x \neq x_0$, ew. $f''(x) > 0$ dla $x \neq x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 nie jest punktem przegięcia funkcji f.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. $\Rightarrow$ • x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \in N$.
$n = 2k-1$, $k \in N$ (nieparzyste). $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ nie jest lokalne ekstremum.

- f rośnie w punkcie x_0 dla $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- f maleje w punkciev bod x_0 dla $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \in N$.
$n = 2k$, $k \in N$ (parzyste). $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest lokalne ekstremum.

- $f(x_0)$ jest właściwe minimum dla $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- $f(x_0)$ jest właściwe maximum dla $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$.
$n = 2k+1$, $k \in N$ (nieparzyste). $\Rightarrow$ • x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.
$n = 2k$, $k \in N$ (parzyste). $\Rightarrow$ • f jest ściśle wypukła w punkcie x_0 dla $f^{(n)}(x_0) > 0$.
• f jest ściśle wklęsła w punkcie x_0 dla $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Badanie przebiegu funkcji

Badanie przebiegu funkcji f oznacza wyznaczenie:

- Definicja dziedzina $D(f)$, punkty i przedziały ciągłości i nieciągłości.
- Równość, osobliwość, okresowość, ewent. inne specjalne funkcje.
- Granice jednostronne w punktach nieciągłości, w punktach brzegowych oraz w punktach $\pm\infty$.
- Zero punktów; przedziały, w których f jest pozytywna i negatywna.
- f', punkty stacjonarne, ekstrema lokalne i globalne; przedziały, w których f rośnie, opada i jest stała.
- f'', punkty przegięcia; przedziały, na których f jest wypukła i wklęsła.
- Asymptoty.
- Zbiór wartości $H(f)$, szkic wykresu funkcji.

Wykres zazwyczaj daje nam najbardziej ilustracyjne wyobrażenie o przebiegu funkcji. W jego budowie wykorzystujemy wszystkie uzyskane dane. Często jednak są one niewystarczające, dlatego musimy je uzupełnić odpowiednio dobranymi wartości użytkowymi.

Przebieg funkcji $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{8x-16}{x^2}$.

(%i1) `f(x):=(8*x-16)/x^2;`
(%o1) $f(x) := \frac{8x-16}{x^2}$

- $D(f) = R - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Za pomocą komendy `denom` (denominator) dowiadujemy się, kiedy mianownik wynosi zero.

```
(%i3)  fm:denom(f(x));solve(fm=0,x);
(fmen) x^2
(%o3)  [x = 0]
```

- f nie jest okresowa, f nie jest parzysta, f nie jest nieparzysta.
- f jest ciągła w przedziałach $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, w punkcie 0 jest nieciągła.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right) = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0.$

```
(%i5)  limit(f(x),x,minf);limit(f(x),x,inf);
(%o4)  0
(%o5)  0
```

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$.

```
(%i7)  limit(f(x),x,0,minus);limit(f(x),x,0,plus);
(%o6)  -∞
(%o7)  -∞
```

- Punkt $x = 0$ jest nieusuwalnym punktem nieciągłości II. rodzaju.,
- $x = 0$ to asymptota pionowa.
- $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = 0. \quad \Leftrightarrow \quad 8x - 16 = 0. \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

Za pomocą komendy `num` (numerator) dowiadujemy się, kiedy licznik wynosi zero.

```
(%i9)  fcit:num(f(x));solve(fcit=0,x);
(fcit) 8x - 16
(%o9)  [x = 2]
```

- $x = 2$ to punkt zerowy f. $\Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \text{ przed } x \in (-\infty; 0), \\ f(x) < 0 \text{ przed } x \in (0; 2), \\ f(x) > 0 \text{ przed } x \in (2; \infty). \end{cases}$

$f(2) = 0$, f nie jest zdefiniowana w punkcie $x = 0$.

$\Rightarrow$ Funkcja f nie zmienia znaku w przedziałach $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$.

$\Rightarrow$ Wystarczy wybrać dowolny punkt w podanych przedziałach i zweryfikować jego wartość.

```
(%i13) f(2);f(-1);f(1);f(3);
(%o10) 0
```

(%o11) -24
(%o12) -8
(%o13) $\frac{8}{9}$

- $f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x-8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i15) f1(x):=diff(f(x),x,1)$ ratsimp(f1(x));
```
(%o15) $-\frac{8x-32}{x^3}$

- $f'(x) = \frac{32-8x}{x^3} = 0. \;\; \Leftrightarrow \;\; 32 - 8x = 0. \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 4.$

```
(%i16) solve(f1(x)=0,x);
```
(%o16) $[x = 4]$

- f' jest nieciągła w punkcie 0.

```
(%i18) f1men:denom(ratsimp(f1(x)));solve(f1men=0,x);
```
(f1men) x^3
(%o18) $[x = 0]$

- $x = 4$ to punkt zerowy f'. $\Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0, \ f \text{ maleje przed } x \in (-\infty; 0), \\ f'(x) > 0, \ f \text{ rośnie przed } x \in (0; 4), \\ f'(x) < 0, \ f \text{ maleje przed } x \in (4; \infty). \end{cases}$

$f'(4) = 0$, f' nie jest zdefiniowana w $x = 0$.

$\Rightarrow$ Funkcja f' nie zmienia znaku w przedziałach $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$, $(4; \infty)$.

$\Rightarrow$ Wystarczy wybrać dowolny punkt w podanych przedziałach i zweryfikować jego wartość.

```
(%i22) subst(4,x,f1(x));subst(-1,x,f1(x));subst(1,x,f1(x));subst(5,x,f1(x));
```
(%o19) 0
(%o20) -40
(%o21) 24
(%o22) $-\frac{8}{125}$

- f ma lokalne maksimum w punkcie $x = 4$, a także globalne maksimum $f(4) = 1$.

```
(%i23) f(4);
```
(%o23) 1

- f nie ma lokalnego minimum ani globalnego minimum.

- $f''(x) = \left[\frac{32-8x}{x^3}\right]' = \frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6} = \frac{16x^3-96x^2}{x^6} = \frac{16x-96}{x^4}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i25) f2(x):=diff(f(x),x,2)$ ratsimp(f2(x));
(%o25) (16x-96)/x^4
```

- $f''(x) = \frac{16x-96}{x^4} = 0. \quad \Leftrightarrow \quad 16x - 96 = 0. \quad \Leftrightarrow \quad x = 6.$

```
(%i26) solve(f2(x)=0,x);
(%o26) [x = 6]
```

- f'' jest nieciągła w punkcie 0.

```
(%i28) f2men:denom(ratsimp(f2(x)));solve(f2men=0,x);
(f2men) x^4
(%o28) [x = 0]
```

- $x = 6$ to punkt zerowy f''. $\Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0, \ f \text{ jest wklęsła przed } x \in (-\infty; 0), \\ f''(x) < 0, \ f \text{ jest wklęsła przed } x \in (0; 6), \\ f''(x) > 0, \ f \text{ jest wypukła przed } x \in (6; \infty). \end{cases}$

$f''(6) = 0$, f'' nie jest zdefiniowana w punkcie $x = 0$.

$\Rightarrow$ Funkcja f'' nie zmienia znaku w przedziałach $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; \infty)$.

$\Rightarrow$ Wystarczy wybrać dowolny punkt w podanych przedziałach i zweryfikować jego wartość.

```
(%i32) subst(6,x,f2(x));subst(-1,x,f2(x));subst(1,x,f2(x));subst(7,x,f2(x));
(%o29) 0
(%o30) -112
(%o31) -80
(%o32) 16/2401
```

- Punkt $x = 6$ jest punktem przegięcia funkcji f.

```
(%i33) f(6);
(%o33) 8/9
```

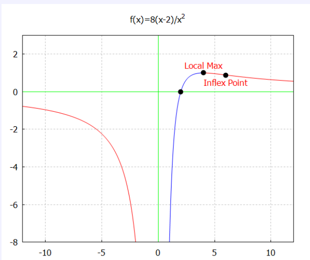
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = 0 - 0 = 0. \\ \bullet\ q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow y = kx + q = 0.$$

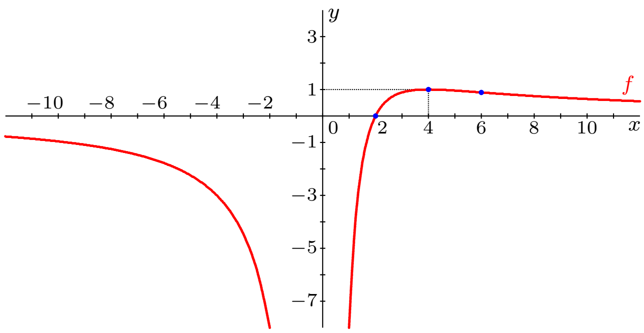
```
(%i35) km:limit(f(x)/x,x,minf);kp:limit(f(x)/x,x,inf);
(km)   0
(kp)   0
(%i37) qm:limit(f(x)-km*x,x,minf);qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf);
```

```
(km)  0
(kp)  0
```

- $y = 0$ to asymptota pozioma.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.

```
(%i38) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-12,12],yrange=[-8,3],
       title="f(x)=8(x-2)/x^2",color=blue,explicit(f(x),x,0,4),
       color=red,explicit(f(x),x,-12,0),explicit(f(x),x,4,12),
       label(["Inflex Point",6,f(6)-.4],["Local Max",4,f(4)+.4]),
       color=green,parametric(0,t,t,-8,3),parametric(t,0,t,-12,12),
       color=black,point_type=7,points([[4,f(4)],[6,f(6)],[2,f(2)]]))$
```





Wykres funkcji $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$

Bibliografia

[1] Blaško R., Matematická analýza I, Žilina, EDIS 2009.

[2] Blaško R., Matematická analýza I, skriptum, https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/sa1.pdf.

[3] Blaško R., Nurčitý a určitý integrál reálnej funkcie, skriptum, https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/sa2.pdf.

[4] Blaško R., Základy lineárnej algebry a základy matematickej analýzy pre manažérov, skriptum, https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/zla-zma.pdf.

[5] Buša J., Maxima Open source systém počítačovej algebry, online, https://people.tuke.sk/jan.busa/kega/maxima/maxima.pdf, 2006.

[6] Bittinger M. L., Ellenbogen D. J., Surgent S. A., Calculus and its Applications, Addisok-Wesley, ISBN-10: 0-321-69433-3.

[7] Crowell B., Calculus, Light and Matter, www.lightandmatter.com, March 2010.

[8] Hannan Z., wxMaxima for Calculus I and II, Solano Community College, https://wxmaximafor.wordpress.com/.

[9] Mardsen J., Weinstein A., Calculus I — III, Springer.

[10] Strang G., Calculus, Wellesley-Cambridge Press, Box 82-279 Wellesley MA 02181.