Matematická analýza podporovaná wxMaxima

Summer School Open Source

Innovative Open Source courses for Computer Science

Rudolf Blaško

2021

Funded by the European Union

Obsah

Úvod do wxMaxima

wxMaxima je dialógové rozhranie pre systém počítačovej algebry Maxima. wxMaxima ponúka menu a dialógové okná pre bežné príkazy, automatické dokončovanie, vložené grafy a jednoduché animácie. wxMaxima je distribuovaný pod licenciou GPL.

Maxima patrí medzi Open Source programy s otvoreným zdrojovým kódom. Program je možné kompilovať v rôznych OS, vrátane Windows, GNU/Linuxu a MacOS X. Predkompilovaný program pre GNU/Linux a Windows sa dá bezplatne získať na stránke SourceForge `https://sourceforge.net/projects/maxima/files/`.

Po spustení prostredia wxMaxima sa na obrazovke objaví okno s menu v hornej časti. Pod menu sa nachádza priestor, kde môžeme zadávať príkazy a kde sa objavujú výstupy.

(%i1) `First input line.`
(%o1) *First output line.*
(%i2) `Second input line.`
(%o2) *Second output line.*

Príkazy zadávame na samostatné riadky (vstupné riadky), ich vykonanie sa zabezpečí súčasným stlačením kláves `Shift` a `Enter` alebo kliknutím v menu na ikonu (Send the current cell to maxima). Vstupné riadky sú uvedené oznamom (%i1) a výstupné riadky sú uvedené oznamom (%o1). Čísla pre vstupný a k nemu zodpovedajúci výstupný riadok sú identické a na základe tohto čísla sa môžeme na obsah týchto riadkov odvolávať.

(%i1) `solve(0=x+2,x);`
(%o1) $[x = -2]$
(%i2) `%i1;`
(%o2) $solve(0 = x + 2, x)$
(%i3) `%o1;`
(%o3) $[x = -2]$

Príkazy sa vykonajú na nové samostatmé riadky (výstupné riadky). Príkazy na vstupných riadkoch môžeme ukončiť symbolom `;` (ktorý systém automaticky doplní) alebo symbolom `$`, ktorý potlačí zobrazenie príslušného výstupu. Na vstupný riadok môžeme zadať aj viac príkazov, ale musíme ich oddeliť symbolmi `;` alebo `$`. Príkaz môžeme taktiež štrukturovať na viac vstupných riadkov.

(%i1) `a:2;b:3;solve(a*x+b*x^2=0,x)`
(a) 2
(b) 3
(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$
(%i2) `a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);`
(%o2) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$
(%i3) `a:2$`
`b:3$`
`solve(a*x+b*x^2=0,x);`
(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup môžeme uložiť v rôznych tvaroch a následne použiť v iných programoch (LaTeX, editor rovníc MSWord, ...). Výstup (%o3) z predchádzajúceho okna môžeme:

- kopírovať (`Crl C` a `Crl V`), resp. kopírovať ako text (možno použiť napr. pre editor rovníc MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- kopírovať ako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- kopírovať ako MathML, obrázok, RTF, SVG...

Prostredie wxMaxima má dobre prepracovaný help pre užívateľa, ktorý nájdeme v menu `Help`. Help otvoríme aj stlačením klávesy `F1`. Manuál nájdeme aj na stránke `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základné príkazy

Príkazom `apropos` môžeme zistiť presný názov príkazu pomocou časti jeho názvu.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

Príkaz `describe` vypíše popis zadaného príkazu.

```
(%i1) describe(plot2d);
      -- Function: plot2d
         plot2d (<expr><, <range_x><, <options><)
         plot2d (<expr_<>=<expr_<>, <range_x><, <range_y><, <options><)
         ...
(%o1) true
```

Výrazy sa zadávajú pomocou obvyklých znakov operácií, relácií a funkcií. Argumenty funkcií a príkazov sú v okrúhlych zátvorkách, symbol násobenia`*` sa musí zadať! Umocnenie sa zadáva znakom `^` alebo dvojicou `**`.

Symbol `:` slúži na priradenie hodnoty napravo výrazu na naľavo.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```
(%o1) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

V menu `View` a podmenu `Display equations` môžeme zmeniť zobrazenia výstupných riadkov na tvary `in 2D`, `as 1D ASCII` alebo `as ASCII Art`. Implicitne je nastavené zobrazenie `in 2D`. Nastavenie výstupu môžeme zmeniť aj príkazom `set_display`. Nastavenie na tvar `in 2D` má argument `none`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$
```
(%o1) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ `/* in 2D */`

Pomocou argumentu `ascii` v príkaze `set_display` zmeníme výstup na tvar `as 1D ASCII` a pomocou argumentu `xml` na tvar `as ASCII Art`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
(%o1) x/sqrt(x^2 + 1)       /* as 1D ASCII */
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
             x
(%o2) ------------          /* as ASCII Art */
              2
      sqrt(x   + 1)
```

Príkazom `kill` môžeme odstrániť premenné so všetkými ich priradeniami a vlastnosťami z pamäte.

```
(%i1) kill(a,b)             /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all)             /* removes all items on all infolists */
```

Práca s číslami a základné konštanty

Maxima môže pracovať s reálnymi číslami zapísanými v numerickom alebo symbolickom tvare. Spôsob zápisu reálnych čísel môžeme nastaviť v menu `Numeric` pomocou prepínača `Numeric Output` medzi numerickým a symbolickým zobrazovaním. Taktiež tu môžeme zvoliť spôsob a presnosnosť numerického zobrazovania. O spôsobe zobrazovania rozhoduje nastavenie premennej `numer`.

Štandardne sa zobrazuje 16 číslic (vrátane desatinnej bodky). Presnosť zobrazenia definuje premenná `fpproc` a ovplyvňuje zobrazenie pomocou `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje vždy rovnako. Presnosť môžeme prakticky neobmedzene zvýšiť alebo znížiť. Môžeme ju zmeniť globálne a aj lokálne iba pre jednu premenú alebo príkaz.

```
(%i1) log(2);
(%o1) log(2)
(%i2) log(2),numer;
(%o2) 0.6931471805599453
(%i3) float(log(2));
(%o3) 0.6931471805599453
(%i4) bfloat(log(2));
(%o4) 6.931471805599453b-1
(%i5) log(2),bfloat;
(%o5) 6.931471805599453b-1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=34;
(%o6) 6.931471805599453094172321214581766b-1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=134;
(%o6) 6.931471805599453094172321214[78digits]102057068573368552023575813b-1
```

Číselné konštanty e, π, i (imaginárna jednotka) majú prefix `%`, t. j. `%e`, `%pi`, `%i`. To platí aj pre konštanty, ktoré sú súčasťou alebo výsledkom výpočtov. Tiež majú prefix `%`.

Maxima má preddefinované konštanty `inf`, `minf` pre reálne nekonečná ∞, $-\infty$ a `infinity` pre komplexné nekonečno.

Logické konštanty `true` a `false` predstavujú pravdu a nepravdu.

```
(%i1) %pi; %i; %e;
(%o1) π %i %e
(%i2) minf; inf;
(%o2) -∞ ∞
(%i3) infinity;
(%o3) infinity
```

Komplexným číslam sa v tomto kurze nevenujeme, preto iba spomenieme ako sa zobrazujú. Komplexné čísla sa implicitne zadávajú algebraickom tvare (`rectform`). Do goniometrického (exponenciálneho) tvaru ich môžeme previesť pomocou príkazu `polarform`.

```
(%i1) z:1+%i;
(z)   i+1
(%i2) polarform(z)+rectform(z);
```
(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Priradenia a funkcie

Operátor `:` používame na priradenie hodnôt alebo výrazov premenným. Funkcie definujeme pomocou priradenia `:=`.

```
(%i1) f(x):=x^2+2*x+3;
```
(%o1) $f(x) := x^2 + 2 * x + 3$

```
(%i6) f(x);f(y);f(x+1);f(-2);f(1);
```
(%o2) $x^2 + 2 * x + 3$

(%o3) $y^2 + 2 * y + 3$

(%o4) $(x + 1)^2 + 2 * (x + 1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

Maxima obsahuje oveľa viac funkcií ako štandardné programovacie jazyky. Sú to nielen samotné reálne funkcie, ale aj rôzne funkcie pre ich podporu. Medzi základné funkcie patria `sign(x)`, `abs(x)`, `floor(x)` (dolná celá časť čísla x), `round(x)` (zaokrúhli x na najbližšie celé číslo), `truncate(x)` (odstrání všetky číslice za desatinnou bodkou), `ceiling(x)` (horná celá časť čísla x).

```
(%i2) f(x):=sign(x)$ print(f(-3.2),f(0),f(3.2))$
      neg zero pos
(%i4) f(x):=abs(x)$ print(f(-3.2),f(0),f(3.2))$
      3.2 0 3.2
(%i6) f(x):=floor(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
```

```
        −4 −4 −1 0 1 3 3
(%i8)   f(x):=round(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
        −4 −3 −1 0 1 3 4
(%i10)  f(x):=truncate(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
        −3 −3 −1 0 1 3 3
(%i12)  f(x):=ceiling(x)$ print(f(-3.6),f(-3.2),f(-1),f(0),f(1),f(3.2),f(3.6))$
        −3 −3 −1 0 1 4 4
```

Pre formátovanie výpisu sme použili príkaz `print`.

```
(%i3)   a:2$ b:log(2),numer$ print("Logarithm of a number",a," is ",log(a),"=",b)$
        Logarithm of a number 2 is log(2) = 0.6931471805599453
```

Maxima obsahuje mnoho elementárnych funkcií. Sú to napríklad `exp(x)=%e^x`, `log(x)`, goniometrické funkcie a k nim inverzné funkcie `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`, `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`, hyperbolické funkcie a k nim inverzné funkcie `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)` atď.

Maxima obsahuje taktiež mnoho funkcií pre ich podporu. Niektoré z nich nie sú implementované priamo v prostredí wxMaxima, ale v externých knižniciach nazývaných balíčky (packages). Tieto balíčky sa do systému načítavajú pomocou príkazu `load`. Na ukážku uvedieme balíček `spangl` pre podporu práce s goniometrickými funkciami.

```
(%i2)   print(tan(%pi/8),ratsimp(tan(%pi/8)),trigsimp(tan(%pi/8)))$
```

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

```
(%i3)   load(spangl);
(%o3)   ../share/trigonometry/spangl.mac
(%i4)   tan(%pi/8);
```

(%o4) $\sqrt{2} - 1$

Práca s výrazmi

Operácie a výpočty programu Maxima prebiehajú v nejakom prostredí, v ktorom systém predpokladá platnosť určitých podmienok. Tieto podmienky môžeme meniť. Mnohokrát potrebujeme zmeniť podmienky iba lokálne pre nejaký konkrétny výpočet bez toho, aby sme menili globálne nastavenia. K tomuto účelu posytuje Maxima veľmi účinný príkaz `ev`, ktorý umožňuje definovať špecifické prostredie v rámci jedného príkazu.

Po zadaní príkazu `ev(a,b1,b2,...,bn)` sa vyhodnotí výraz `a` pri splnení podmienok `b1`, `b2`, ..., `bn`. Tieto podmienky môžu byť rovnice, priradenia, funkcie, prepínače (logické nastavenia). Na ukážku uvádzame príklad riešenia kvadratickej rovnice pomocou príkazu `solve`. Premenné `a`, `b`, `c` po vykonaní príkazu `ev` nemajú priradené hodnoty.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x = \frac{3}{2}, x = -1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $\left[x = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a},\ x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\right]$

Na zjednodušovanie a úpravy rôznych výrazov ponúka Maxima niekoľko príkazov. Základné funkcie nájdeme v menu `Simplify`. S príkazmi `ratsimp` a `trigsimp` sme sa už stretli a pri úprave hodnoty `tan(%pi/8)` nemali žiadúci efekt.

Maxima ponúka pomocou príkazu `example` príklady k jednotlivým príkazom. Pozrime sa na niektoré ukážky, ktoré ponúka `example(ratsimp)`.

(%i2) `f(x):=b*(a/b-x)+b*x+a$ print(f(x),"?",ratsimp(f(x)))$`

$bx + b(\frac{a}{b} - x) + a$? $2a$

(%i3) `ratsimp(a+1/a);`

(%o3) $\frac{a^2+1}{a}$

(%i4) `ev(x^(a+1/a),ratsimp);`

(%o4) $x^{a+\frac{1}{a}}$

(%i5) `ev(x^(a+1/a),ratsimpexpons);`

(%o5) $x^{\frac{a^2+1}{a}}$

Funkcia `expand` roznásobí príslušné členy vo výraze. Funkcia `factor` daný výraz naopak rozloží. Funkcia `gfactor` tak činí nad poľom komplexných čísel.

(%i1) `f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$`
(%i3) `ratsimp(f(x));expand(f(x));`
(%o2) $x^5 + x^4 - 16x - 16$
(%o3) $x^5 + x^4 - 16x - 16$
(%i6) `factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);`
(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$
(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%\,\mathrm{i})(x+2\%\,\mathrm{i})$
(%o6) $2^2 5^2$

Racionálnu lomenú funkciu rozložíme na parciálne zlomky pomocou príkazu `partfrac`.

(%i1) `partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);`

(%o1) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

Substituovať výrazy môžeme pomocou príkazov `subst(a,b,c)` a `ratsubst(a,b,c)`. Výraz `a` bude nahradený za výraz `b` a následne dosadený do výrazu `c`. Pri použití príkazu `subst` musí byť `b` najjednoduchšou časťou (atómom) alebo kompletným podvýrazom výrazu `c`. V príklade nie je podvýraz `x+y` kompletný (chýba `z`). Príkaz `ratsubst` výsledný výraz aj upraví.

(%i2) `subst(x+y,a,a^2+b^2);ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);`
(%o1) $(y+x)^2+b^2$
(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$
(%i4) `subst(a,x+y,x+y+z);ratsubst(a,x+y,x+y+z);`
(%o3) $z+y+x$
(%o4) $z+a$

Limity a derivovanie

V menu `Calulus` nájdeme funkcie na riešenie základných úloh matematickej analýzy (limity, derivovanie, integrovanie, súčty radov, rozklad funkcie do Taylorovho polynómu...).

Limity počítame pomocou príkazu `limit`. Posledný parameter určuje smer jednostranných limít, má hodnoty `plus`, resp. `minus` a je nepovinný. Ak nie je určený, Maxima počíta limitu ako komplexnú. Príkazmi `limit(f(x),x,a)`, `limit(f(x),x,a,plus)` vypočítame limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

(%i4) `limit(1/x,x,0);limit(1/x,x,0,plus);limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,t,0);`
(%o1) $infinity$
(%o2) ∞
(%o3) $-\infty$
(%o4) $\frac{1}{x}$

Ak použijeme pred príkazom apostrof `'`, príkaz sa nevykoná, len sa zobrazí.

(%i2) `limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);'limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);`

(%o1) 0

(%o2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{3n+1}\right)^{4n+1}$

Derivácie počítame pomocou príkazu `diff`. Parameter, ktorý určuje rád derivácie je nepovinný.

(%i4)
```
f(x):=2*x^4-3*x+sin(x);
print("f'=",diff(f(x),x),"=",diff(f(x),x,1))$
print("f''=",diff(diff(f(x),x),x),"=",diff(f(x),x,2),"=",diff(f(x),x,1,x,1))$
print("f^(10)=",diff(f(x),x,10),"=",diff(f(x),x,1,x,9))$
```
(%o1) $f(x) := 2x^4-3x+\sin(x)$
$f' = \cos(x)+8x^3-3 = \cos(x)+8x^3-3$
$f'' = 24x^2-\sin(x) = 24x^2-\sin(x) = 24x^2-\sin(x)$
$f\_(10) = -\sin(x) = -\sin(x)$

Parciálne derivácie počítame pomocou rovnakého príkazu.

```
(%i3) g(x,y):=x^3*y^2-1;
      print("g'_x=",diff(g(x,y),x),", resp. g'_y=",diff(g(x,y),y,1))$
      print("g''_(xx)=",diff(g(x,y),x,2),", resp. g''_(yx)=",diff(g(x,y),y,1,x,1))$
(%o1) g(x,y):=x^3*y^2-1
```

$g'\_x = 3x^2y^2, \, resp. \; g'\_y = 2x^3y$

$g''\_(xx) = 6xy^2, \, resp. \; g''\_(yx) = 6x^2y$

Taylorov polynóm n-tého stupňa vypočítame pomocou príkazu `taylor`. Tento príkaz nájdeme v menu `Calculus` a podmenu `Get Series...`. Taylorov rad funkcie f stupňa n v strede c vypočítame príkazom `taylor(f(x),x,c,n)`. Jeho koeficienty dostaneme použitím príkazu `coeff`. Použitie tohto príkazu je závislé na príkaze `taylor`.

```
(%i1) t1:taylor(sin(x),x,0,5); t2:taylor(sin(x),x,-1,5);
```

(t1) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$

(t2) $-\sin(1) + \cos(1)(x+1) + \frac{\sin(1)(x+1)^2}{2} - \frac{\cos(1)(x+1)^3}{6} - \frac{\sin(1)(x+1)^4}{24} + \frac{\cos(1)(x+1)^5}{120} + \cdots$

```
(%i3) print(coeff(sin(x),x,5)," and ",coeff(t1,x,5)," and ",coeff(t2,x,5))$
```

$0 \; and \; \frac{1}{120} \; and \; \frac{\cos(1)}{120}$

Taylorov polynóm polynómu je opäť polynóm, iba je vyjadrený v inom tvare. Prakticky sa zmení iba súradnicový systém, v ktorom polynóm vyjadrujeme. Začiatok systému sa posunie z bodu 0 do bodu -1. V nasledujúcom príklade je Taylorov polynóm daného polynómu vypočítaný aj iným spôsobom. Príkaz `taylor` dáva na koniec tri bodky, aj keď je rozvoj uzavretý.

(%i1) `f(x):=2*x^5-x^4-3*x^3-x+1;`

(%o1) $f(x) := 2x^5 - x^4 + (-3)x^3 - x + 1$

(%i2) `tp1:taylor(f(x),x,-1,5);`

(tp1) $2 + 4(x+1) - 17(x+1)^2 + 21(x+1)^3 - 11(x+1)^4 + 2(x+1)^5 + \cdots$

(%i4) `ratsimp(tp1);expand(tp1);`

(%o3) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%o4) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%i6) `tpx:ratsubst(t,x+1,f(x));subst(x+1,t,tpx);`

(tpx) $2t^5 - 11t^4 + 21t^3 - 17t^2 + 4t + 2$

(tp2) $2(x+1)^5 - 11(x+1)^4 + 21(x+1)^3 - 17(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$

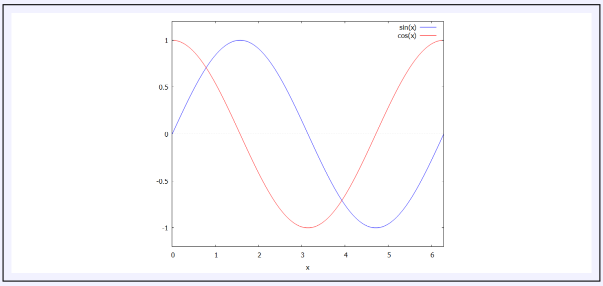
(%i7) `tp1-tp2;`

(%o7) $0 + \cdots$

Grafy funkcií

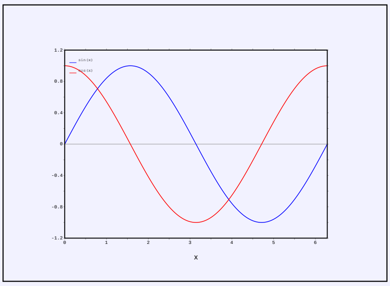
Graf funkcie môžeme vykresliť viacerými spôsobmi. Najjednoduchšie je zvoliť v menu `Plot` podmenu `Plot 2d...`. Ak zvolíme `Format=gnuplot`, funkciu vykreslí príkaz `plot2d` pomocou Open Source programu `Gnuplot` do nového okna. `Gnuplot` sa automaticky inštaluje spolu s programom Maxima.

```
(%i1)  plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],[plot_format, gnuplot])$
```



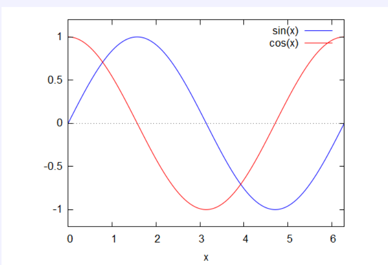
Ak zvolíme `Format=wxmaxima`, Maxima vykreslí graf pomocou príkazu `plot2d` do nového okna. Obrázok môžeme uložiť iba do postscriptu.

```
(%i1)  plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],[plot_format, xmaxima])$
```



Ak zvolíme `Format=inline`, Maxima vykreslí graf pomocou príkazu `wxplot2d` do svojho prostredia.

```
(%i1)  wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2])$
```



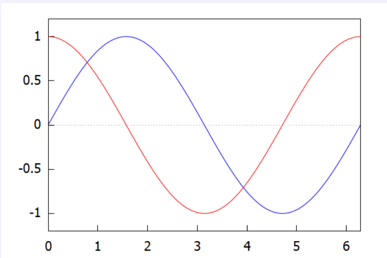
(%o1)

Príkazy `plot2d` a `wxplot2d` majú rovnakú syntax a majú oveľa viac parametrov. Parametre môžeme zistiť napríklad príkazom `describe(plot2d)`.

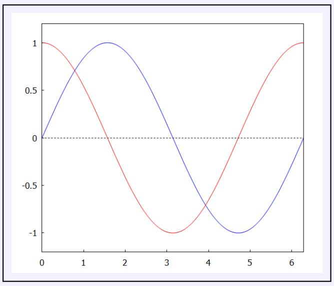
Na tlač grafov funkcií je výhodnejšie použiť príkaz `wxdraw2d` alebo `draw2d`, ktorý je vhodné smerovať na výstup programu `Gnuplot`. Tieto príkazy majú trochu inú syntax ako príkazy `wxplot2d`, resp. `plot2d`. Parametre tlače sú v nich jednoduchšie a prehľadnejšie. Vykresľovaná funkcia musí byť umiestnená v príkaze `explicit`, `parametric` alebo `implicit`.

(%i1)
```
wxdraw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

(%o1)

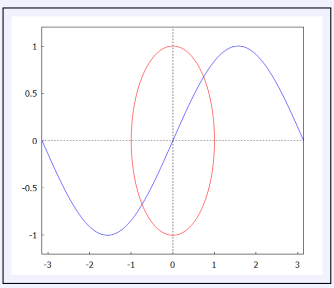


(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```



Parametrickú krivku alebo funkciu vykreslíme podobným spôsobom.

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
color=red,nticks=300,parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))$
```



Postupnosti a rady

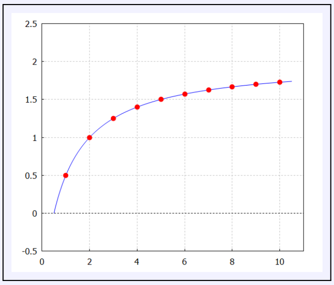
Postupnosti môžeme v programe Maxima vytvoriť napríklad pomocou príkazu `makelist` alebo príkazmi cyklu `for` – `do`.

Príkaz `makelist` vytvorí zoznam, ktorý môžeme zobraziť aj ako celok a aj po členoch.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 199
```

Usporiadané dvojice sa dávajú do hranatých zátvoriek a môžeme ich zobrazovať ako body v rovine. V nasledujúcom príklade je vygenerovaná postupnosť aj so svojimi vzormi a následne vykreslená príkazom `draw2d`.

```
(%i1) S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);
(S1)  [[1, 1/2], [2, 1], [3, 5/4], [4, 7/5], [5, 3/2], [6, 11/7], [7, 13/8], [8, 5/3], [9, 17/10], [10, 19/11]]
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
      color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
      point_type=7,color=red,points(S1))$
```



Pomocou príkazov `for` – `do` vypíšeme niekoľko členov postupnosti $\left\{2n^2-1\right\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 12 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
1
7
17
31
49
71
97
127
161
199
241
287
```

Pekným príkladom použitia príkazov `for` – `do` je Fibonacciho postupnosť.

```
(%i3)  a0:0$ a1:1$ (for i:1 thru 12 do (an:a1+a0, print(an), a1:a0, a0:an))$
       1
       1
       2
       3
       5
       8
       13
       21
       34
       55
       89
       144
```

Konečný aj nekonečný súčet počítame pomocou príkazu `sum`.

```
(%i1)  sum(2*n^2-1,n,1,8);
(%o1)  400
```

Pomocou tohto príkazu dokáže Maxima vypočítať presný súčet niektorých nekonečných radov. Súčet radu môžeme zadať v menu `Calculus` a podmenu `Calculate Sum...`.

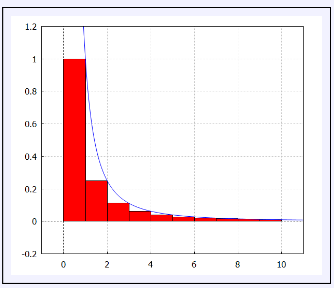
```
(%i2)  sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum; sum(1/k^2,k,1,inf);
```

(%o1) $\frac{\pi^2}{6}$

(%o2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Číselný rad z predchádzajúceho príkladu môže byť graficky znázornený nasledovne.

```
(%i1)  a(n):=1/n^2$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,10)$
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1,11],yrange=[-0.2,1.2],
       border=true,color=black,fill_color=red,rec,
       color=blue,explicit(a(n),n,0,11))$
```



Postupnosti

Postupnosť (reálnych čísel) je každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej členy sú reálne čísla $a_n \in R$ (t. j. zobrazenie $N \to R$).

- **Explicitné zadanie** (všeobecné vyjadrenie) člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentné zadanie** prvého člena a zadanie a_n pomocou predchádzajúcich členov.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

- Explicitné zadanie $a_n = 2n-1$, $n \in N$.
- Rekurentné zadanie $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \in N$.

```
(%i3) a(n):=2*n-1$ S:makelist(a(n),n,1,7);
(S)   [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i4) an:1$ (for n:1 thru 7 do (print(an),an:an+2))$
      1
      3
      5
      7
      9
      11
      13
```

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Ohraničená zdola**, ak existuje $a \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a \leq a_n$.
- **Ohraničená zhora**, ak existuje $a \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a$.
- **Ohraničená**, ak je ohraničená zdola a zhora.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola.
- **Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.
- **Neohraničená**, ak nie je ohraničená,
  t. j. nie je ohraničená zdola alebo nie je ohraničená zhora.

α A	alfa	a	η H	éta	é	ν N	ný	n	τ T	tau	t
β B	beta	b	ϑ Θ	théta	th	ξ Ξ	ksí (xí)	x	υ Υ	ypsilon	y
γ Γ	gama	g	ι I	ióta	i	o O	omikron	o	φ Φ	fí	f
δ Δ	delta	d	κ K	kappa	k	π Π	pí	p	χ X	chí	ch
ε E	epsilon	e	λ Λ	lambda	l	ρ P	ró	r	ψ Ψ	psí	ps
ζ Z	dzéta	dz	μ M	mí	m	σ Σ	sigma	s	ω Ω	omega	ó

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **monotónna**:

- **Rastúca**, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- **Klesajúca**, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} **Ostro monotónna.**

- **Neklesajúca** ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- **Nerastúca** ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- **Stacionárna (konštantná)**, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel.
$\Rightarrow$ $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **podpostupnosť (vybraná postupnosť)** z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$.

Podpostupnosti sú napr.

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

$a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ sa nazýva **hromadná hodnota postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
ak pre každé okolie $O(a)$ existuje nekonečne veľa členov $a_n \in O(a)$.

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu.

Označme symbolom E množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ sa nazýva **limes superior (horná limita)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ sa nazýva **limes inferior (dolná limita)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\inf E = \sup E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (E má jediný prvok) sa nazýva **limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ existujú vždy.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nemusí existovať. Ak limita existuje, potom je jediná.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in R$ (existuje konečná).
  $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje k číslu** a,
  označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

  $\Bigg\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje**, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (existuje nekonečná).
  $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje do** $\pm\infty$,
  označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje. $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **osciluje**.

  $\Bigg\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje**, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

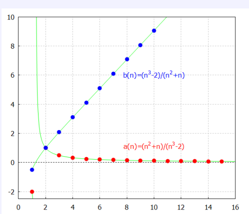
- **Konečný počet členov** nemá vplyv na konvergenciu, resp. divergenciu postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$ Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$ Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      print("limit a(n)=",limit(a(n),n,inf),"  limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[0,16],yrange=[-2.5,10],
      color=green,explicit(a(n),n,1,16),point_type=7,color=red,points(Sa),
        label(["a(n)=(n^2+n)/(n^3-2)",10,a(10)+1]),
      color=green,explicit(b(n),n,1,16),point_type=7,color=blue,points(Sb),
        label(["b(n)=(n^3-2)/(n^2+n)",10,6]))$
```

(%o1) $limita(n) = 0 \quad limitb(n) = \infty$



- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n^3}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4(1-n^{-1})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}} = \infty \cdot \frac{1-0}{1+0} = \infty \cdot 1 = \infty.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(1+n^{-1})}{n^2(1-2n^{-2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^{-1}}{1-2n^{-2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \text{ pre } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ 1 \text{ pre } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ 0 \text{ pre } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$

Geometrická postupnosť

- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \text{ pre } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ 1 \text{ pre } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ 0 \text{ pre } q \in (0;1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q < -1. \end{cases}$

- Číslo e sa nazýva **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je približne $2,718\,281\,827$.

$a_n > 0,\ n \in N. \Rightarrow \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (ak limity existujú).

$a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*. \Rightarrow \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a < 1, \\ \infty & \text{pre } a > 1. \end{cases}$

$a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*. \Rightarrow \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a < 1, \\ \infty & \text{pre } a > 1. \end{cases}$

Dôležité limity.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \mathrm{e}^b$ pre $b \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Číselné rady

Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

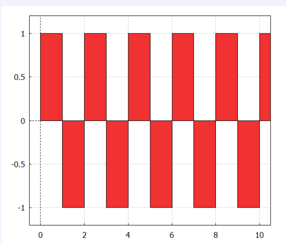
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \text{ sa nazýva } \textbf{(nekonečný číselný) rad}.$$

Pre nekonečné rady neplatia niektoré pravidlá platné pre konečné počty sčítancov. Neplatí napr. asociatívny zákon:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0, \\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \quad = 1+0+0+\cdots = 1. \end{cases}$$

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad.

- $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $k \in N$ sa nazýva **k-ty čiastočný súčet radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $r_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots$ sa nazýva **k-ty zvyšok radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **postupnosť čiastočných súčtov radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Vzťah medzi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.

Pre $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

- $s_1 = a_1$.
- $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

  $\ldots$
- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.

- $a_1 = s_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
- $a_2 = s_2 - s_1$.
- $a_3 = s_3 - s_2$.
- $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (pokiaľ existuje), označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$ (existuje konečná).

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje k súčtu** s,

  označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

  $\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**,

  označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ (existuje nekonečná).

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje do** $\pm\infty$,

  označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **osciluje (nemá súčet)**.

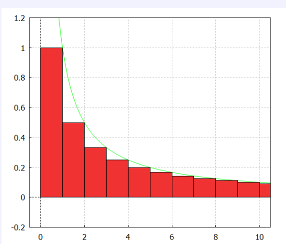
  $\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje**,

  označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

(%i1)
```
a(n):=1/n$ rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.2,1.2],
color=green,explicit(a(n),n,.5,11),
border=true,color=black,fill_color=light_red,rec)$
```

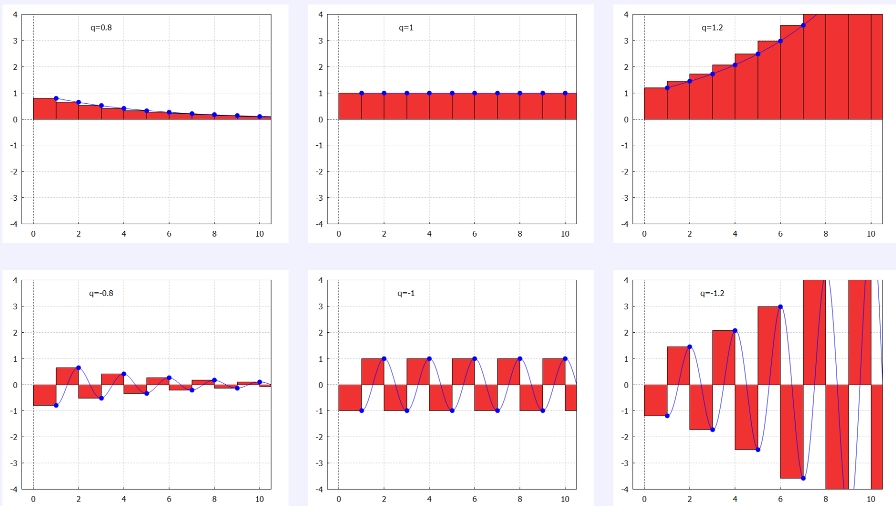


Geometrický rad

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$ pre všetky $q \in (-1; 1)$.

V nasledujúcom príklade stačí meniť na začiatku hodnotu q.

(%i1)
```
q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
label([concat("q=",string(q)),3,3.5]), color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
point_type=7,color=blue,points(peca))$
```



$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, $s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = (q^{n-1} + \cdots + q + 1)\frac{q-1}{q-1} = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^{n-1}-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{\infty-1}{q-1} = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \quad \text{pre } q > 1. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty. & \Rightarrow \bullet\ \infty \quad \text{pre } q = 1. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}. & \Rightarrow \bullet\ \frac{1}{1-q} \quad \text{pre } q \in (-1; 1). \\ -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{pre } q = -1. \\ \left.\begin{array}{l} \frac{q^{2k-1}-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{-\infty-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = -\infty \text{ pre } n = 2k. \\ \frac{q^{2k+1-1}-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{\infty-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}} = \infty \text{ pre } n = 2k+1. \end{array}\right\} & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{pre } q < -1. \end{cases}$$

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$
      sq(1/2),simpsum; sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
(%i1) 1
(%i2) 1/2
(%i3) -1/3
(%i4) sum: sum is divergent.
```

Nutná podmienka konvergencie radu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s\in R.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Neplatí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (osciluje alebo diverguje do $\pm\infty$).

- **Konečný počet členov** nemá vplyv na konvergenciu, resp. divergenciu radu.
- **Konečný počet členov** má vplyv na súčet radu.

Číselné rady s nezápornými členmi

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi ($a_n \geq 0$, $n\in N$) má vždy súčet.

$0 \leq a_n \leq b_n,\ n\in N.$ $\Rightarrow$ • $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty.$

Porovnávacie kritérium

$0 \leq a_n \leq b_n,\ n\in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

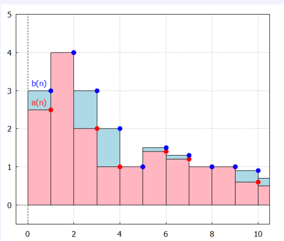
• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar

$0 < a_n \leq b_n,\ n\in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;\infty).\ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow.$ $\Leftrightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Leftrightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

(%i1)
```
a:[2.5,4,2,1,1,1.4,1.2,1,1,0.6,0.5]$ pa:makelist([i,a[i]],i,1,11)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a[i]]),i,1,11)$
b:[3.0,4,3,2,1,1.5,1.3,1,1,0.9,0.7]$ pb:makelist([i,b[i]],i,1,11)$
rb:makelist(rectangle([i-1,0],[i,b[i]]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.5,5],
border=true,color=black,fill_color=light_blue,
rb,color=black,fill_color=light_pink,ra,
point_type=7,color=red,points(pa),point_type=7,color=blue,points(pb),
color=red,label(["a(n)",.5,2.7]),color=blue,label(["b(n)",.5,3.2]))$
```



Podielové d'Alembertovo kritérium

$a_n > 0,\ n\in N.\ \Rightarrow$ • $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ q\in(0;1),\ n\in N.\ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

• $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n\in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar

$a_n > 0,\ n\in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.\ \Rightarrow$ • $p < 1.\ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

• $p > 1.\ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť o konvergencii alebo divergencii radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Odmocninové Cauchyho kritérium

$a_n \geq 0,\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ q \in (0;1),\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$

• $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar

$a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p. \ \Rightarrow$ • $p < 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$

• $p > 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť o konvergencii alebo divergencii radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

• $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1. \ \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longmapsto \infty.$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longmapsto \text{pre } a > 0.$$

```
(%i4)  an(n):=n^n/n!$ limit(an(n),n,inf,plus);
       limit(an(n+1)/an(n),n,inf,plus);
       limit((an(n))^(1/n),n,inf,plus);
(%o2)  ∞
(%o3)  e
(%o8)  e
(%i9)  an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
       limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
       limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%i7)  0
(%o8)  0
(%o9)  0
```

Absolútna, relatívna konvergencia a alternujúce rady

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$. $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolútne**, označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\mathrm{A}}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty$.

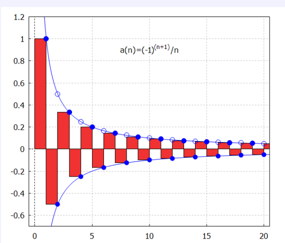
  $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje relatívne (neabsolútne)**, označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\mathrm{R}}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\mathrm{A}}$ (absolútne). $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (konverguje).

Leibnizovo kritérium

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerastúca.} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow .$$

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)/n$ pa:makelist([i,a(i)],i,1,21)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,21)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,20.5],yrange=[-.7,1.2],
color=blue,explicit(abs(a(n)),n,.5,21),explicit(-abs(a(n)),n,.5,21),
border=true,color=black,fill_color=light_red,ra,
label(["a(n)=(-1)^{(n+1)}/n",10,.9]),
point_type=6,color=blue,points(abs(pa)),point_type=7,color=blue,points(pa))$
```



Anharmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{\mathrm{R}} \ln 2.$

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t. j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- Množina $\{[x; y] \in R^2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\}$ sa nazýva **graf funkcie** f.
- **Funkcia reálnej premennej**, ak definičný obor $D(f) \subset R$.
- **Reálna funkcia**, ak obor hodnôt $H(f) \subset R$.

$y = f(x)$, $x \in A$ sa nazýva:

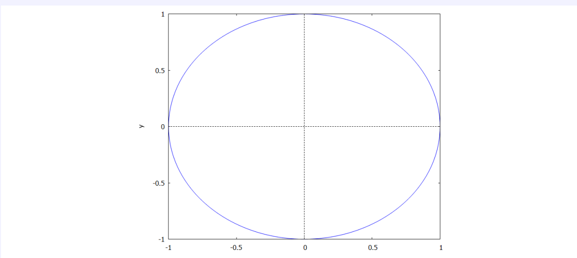
- **Injektívna (injekcia, prostá)**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, t. j. z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva rovnosť $x_1 = x_2$.
- **Surjektívna (surjekcia, na množinu)**, ak $f(A) = B$, t. j. ku každému $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$.
- **Bijektívna (bijekcia)**, ak je injektívna a surjektívna.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa vyjadruje:

- **Explicitne**, t. j. analyticky vzorcom $y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- **Parametricky** rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$, kde $\varphi, \psi\colon J \to R$. Parameter t má pomocný význam.
- **Implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$, kde $F\colon R^2 \to R$ a podmienkami pre $[x; y]$.

Ak chceme v programe Maxima zobraziť funkciu zadanú implicitne, musíme načítať knižnicu `implicit_plot`.

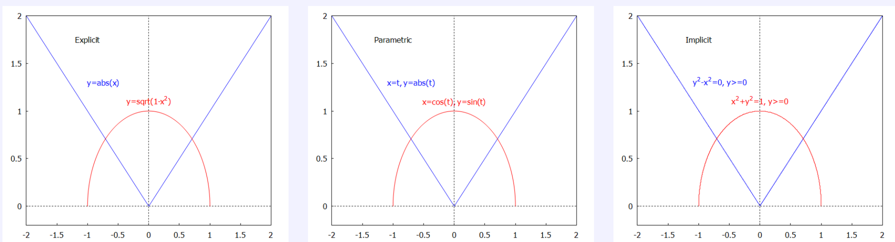
```
(%i1) load(implicit_plot);
(%o1) ../share/contrib/implicit_plot.lisp
(%i2) implicit_plot(x^2+y^2-1, [x,-1,1], [y,-1,1])$
      implicit_plot is now obsolete. Using plot2d instead:
          plot2d (y^2+x^2-1 = 0, [x,-1,1], [y,-1,1])
(%i2) plot2d(x^2+y^2-1=0, [x,-1,1], [y,-1,1])$   /* is correct */
```



Funkciu f: $y = |x|$, $x \in R$ môžeme zadať napr.:

- Explicitne: $y = \sqrt{x^2}$, resp. $y = \max\{-x, x\}$.
- Parametricky: $x = t$, $y = |t|$ $t \in R$, resp. $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
- Implicitne: $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. $y - |x| = 0$.

```
(%i1) load(implicit_plot)$
(%i2) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,explicit(abs(x),x,-2,2),label(["y=abs(x)",-.75,1.3]),
      color=red,explicit(sqrt(1-x^2),x,-1,1),label(["y=sqrt(1-x^2)",0,1.1]),
      color=black,label(["Explicit",-1,1.75]))$
(%i3) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,parametric(t,abs(t),t,-2,2),label(["x=t, y=abs(t)",-.7,1.3]),
      color=red,nticks=100,parametric(cos(t),sin(t),t,0,%pi),
      label(["x=cos(t), y=sin(t)",0,1.1]),
      color=black,label(["Parametric",-1,1.75]))$
(%i4) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,implicit(y^2-x^2,x,-2,2,y,0,2),label(["y^2-x^2=0, y>=0",-.65,1.3]),
      color=red,implicit(x^2+y^2-1,x,-1,1,y,0,1),label(["x^2+y^2=1, y>=0",0,1.1]),
      color=black,label(["Implicit",-1,1.75]))$
```



$y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine** $A \subset D(f)$:

- **Ohraničená zdola**, ak existuje $a \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $a \leq f(x)$.
- **Ohraničená zhora**, ak existuje $a \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq a$.
- **Ohraničená**, ak je ohraničená zdola a zhora na množine A,
  t. j. ak existujú $a_1, a_2 \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $a_1 \leq f(x) \leq a_2$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine** $A \subset D(f)$:

- **Neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola na množine A,
- **Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora na množine A,
- **Neohraničená**, ak nie je ohraničená na množine A,
  t. j. je neohraničená zdola alebo je neohraničená zhora.

- $A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$. $\Rightarrow$ **Lokálna vlastnosť.**
- $A = D(f)$. $\Rightarrow$ **Globálna vlastnosť** na celom $D(f)$.

Slová na množine $D(f)$ väčšinou vynechávame.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$:

- $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf\{f(x); x \in A\} = \inf f(A)$ sa nazýva **infimum f na množine A**.
- $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup\{f(x); x \in A\} = \sup f(A)$ sa nazýva **suprémum f na A**.
- $\inf f(x) = \inf\{f(x); x \in D(f)\}$ sa nazýva **infimum f**.
- $\sup f(x) = \sup\{f(x); x \in D(f)\}$ sa nazýva **suprémum f**.

f: $y = x^2 + 1$, $x \in R$.

- f je ohraničená zdola, nie je ohraničená zhora, nie je ohraničená. Minimum (globálne) funkcie f je 1, funkcia f ho nadobúda v bode $x = 0$, maximum neexistuje.
- Na intervale $\langle -1; 2)$ je f ohraničená. Lokálne minimum funkcie f na intervale $\langle -1; 2)$ je 1 a nadobúda ho v bode $x = 0$, lokálne maximum neexistuje, lokálne suprémum je 5.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$, $x_0 \in A$:

- $f(x_0) = \min f(A) = \min\{f(x); x \in A\}$ sa nazýva **minimum f na množine A**.

  $$f(x_0) \begin{cases} \textbf{minimum}, & \text{ak pre všetky } x \in A \text{ platí } f(x_0) \leq f(x). \\ \textbf{ostré minimum}, & \text{ak pre všetky } x \in A,\ x \neq x_0 \text{ platí } f(x_0) < f(x). \end{cases}$$

- $f(x_0) = \max f(A) = \max\{f(x); x \in A\}$ sa nazýva **maximum f na množine A**.

  $$f(x_0) \begin{cases} \textbf{maximum}, & \text{ak pre všetky } x \in A \text{ platí } f(x_0) \geq f(x). \\ \textbf{ostré maximum}, & \text{ak pre všetky } x \in A,\ x \neq x_0 \text{ platí } f(x_0) > f(x). \end{cases}$$

- Minimum a maximum sa nazývajú **extrémy**.
- Ostré minimum a ostré maximum sa nazývajú **ostré extrémy**.

- $A = D(f)$. $\Rightarrow$ Extrémy sa nazývajú **globálne (absolútne)**.
- $A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$. $\Rightarrow$ Extrémy sa nazývajú **lokálne (na množine A)**.

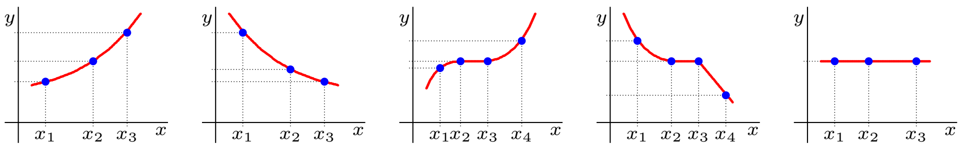
Lokálne extrémy postačí vyšetrovať v nejakom okolí $O(x_0) \subset D(f)$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine $A \subset D(f)$ monotónna**:

- **Rastúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Klesajúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Ostro monotónna.

- **Neklesajúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **Nerastúca**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **Konštantná**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$, t. j. $f(x_1) = c$, kde $c \in R$.



Grafy rastúcej, klesajúcej, neklesajúcej, nerastúcej a konštantnej funkcie

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

- **Párna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$, $f(x) = f(-x)$.
- **Nepárna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$, $f(x) = -f(-x)$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

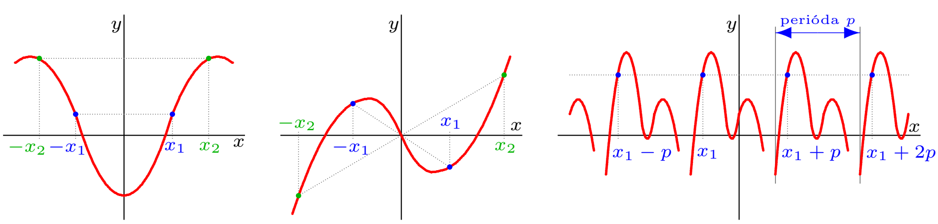
- **Periodická**, ak existuje $p \in R$, $p \neq 0$ také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $x + p \in D(f)$, $x - p \in D(f)$, $f(x) = f(x + p) = f(x - p)$.

  Číslo p sa nazýva **perióda**.

  Najmenšie $p > 0$ (pokiaľ existuje) sa nazýva **primitívna (základná) perióda**.

  Každý celočíselný násobok periódy je tiež perióda.

Funkciu stačí vyšetrovať na intervale s dĺžkou p (**interval periodicity**).



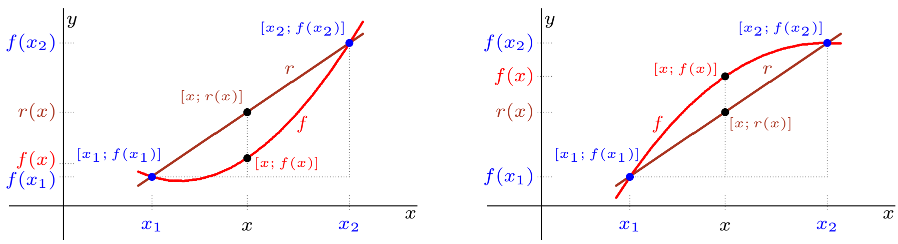
Graf párnej, nepárnej a periodickej funkcie

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, f sa nazýva **na intervale I**:

- **Konvexná**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) \leq r(x)$.
- **Ostro konvexná**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) < r(x)$.
- **Konkávna**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) \geq r(x)$.
- **Ostro konkávna**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) > r(x)$.

Priamka $y = r(x)$ spája body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$,

- f je konvexná na intervale $I \subset D(f)$.
  $\Leftrightarrow$ • $f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$ pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.
- f je konkávna na intervale $I \subset D(f)$.
  $\Leftrightarrow$ • $f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2)$ pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.



Konvexná a konkávna funkcia

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$ sa nazýva:

- **Inflexný bod f**, ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že

  v $O^-(x_0)$ je f ostro konvexná, v $O^+(x_0)$ je f ostro konkávna,

  resp. v $O^-(x_0)$ je f ostro konkávna, v $O^+(x_0)$ je f ostro konvexná.
- **Nulový bod (koreň) f**, ak platí $f(x_0) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$.

- $y = h(x)$, $x \in A$ sa nazýva **zúženie (reštrikcia) f na množinu A**, označenie $h = f|_A$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(x)$, $x \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

- $y = F(x) = g[f(x)]$, $x \in D(f)$ sa nazýva **zložená funkcia f a g**.
  f sa nazýva **vnútorná zložka**, g sa nazýva **vonkajšia zložka**.

$y = f(x)$, $x \in D(f) \to H(f)$, t. j. $y = f(x)$: $D(f) \to H(f)$.

- $x = g(y)$: $H(f) \to D(f)$ taká, že $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$, t. j. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$,
  sa nazýva **inverzná funkcia k f**, označenie $g = f^{-1}$.

$f\colon D(f) \to H(f)$ je bijekcia. $\Rightarrow$ • Existuje $f^{-1}\colon H(f) \to D(f)$ a platí:

- f^{-1} je bijekcia.
- $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $f[f^{-1}(y)] = y$ pre všetky $y \in H(f) = D(f^{-1})$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ pre všetky $x \in D(f) = H(f^{-1})$.

Elementárne funkcie

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam. Dajú sa pomocou nich popísať (aspoň približne) mnohé prírodné a spoločenské zákonitosti a javy.

Elementárna funkcia sa nazýva každá funkcia vytvorená pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania z funkcií:

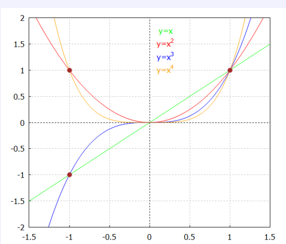
- $y=$konšt., • $y=x$, • $y=e^x$, • $y=\ln x$, • $y=\sin x$, • $y=\arcsin x$, • $y=\operatorname{arctg} x$.

Polynóm (racionálna celistvá funkcia) stupňa n sa nazýva

$$f_n\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R,\ n \in N \cup \{0\},\ a_n \neq 0.$$

- Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sa nazývajú **koeficienty**. Prirodzený $D(f_n) = R$.
- $f_0\colon y = a_0,\ a_0 \neq 0$ sa nazýva **konštantná funkcia**.
- $f_1\colon y = a_0 + a_1x,\ a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**.
- $f_2\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2,\ a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická funkcia**.

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
      color=green,explicit(x,x,-1.5,1.5),label(["y=x",.2,1.75]),
      color=red,explicit(x^2,x,-1.5,1.5),label(["y=x^2",.2,1.5]),
      color=blue,explicit(x^3,x,-1.5,1.5),label(["y=x^3",.2,1.25]),
      color=orange,explicit(x^4,x,-1.5,1.5),label(["y=x^4",.2,1]),
      color=brown,point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```

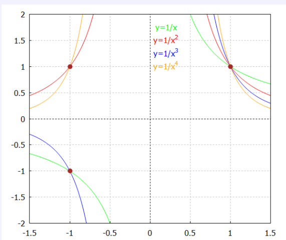


Racionálna lomená funkcia sa nazýva

$$f\colon y=\frac{f_n(x)}{f_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+b_mx^m},\ n,m\in N-\{0\}.$$

- f_n, f_m sú polynómy stupňov n a m, $a_0,a_1,\ldots,a_n\in R$, $b_0,b_1,\ldots,b_m\in R$.

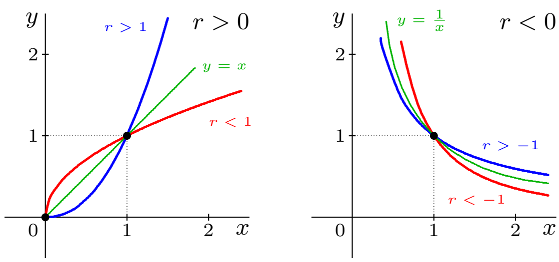
(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(1/x,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x",.2,1.75]),
color=red,explicit(1/x^2,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(1/x^3,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(1/x^4,x,-1.5,1.5),label(["y=1/x^4",.2,1]),
color=brown,point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



Mocninná funkcia sa nazýva

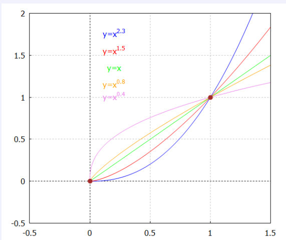
$$f\colon y=x^r,\ r\in R,\ r\neq 0.$$

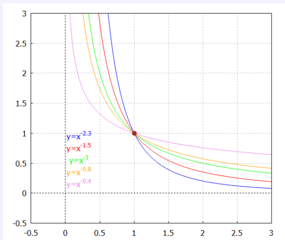
- Pre $r=n\in N$ je $f\colon y=x^n$ polynóm.
- Pre $r=-n\in Z^-$ je $f\colon y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ racionálna lomená funkcia.
- Pre $r\neq 0$ je $f^{-1}\colon y=x^{1/r}$.
- Pre $r>0$ je f rastúca, prirodzený $D(f)=\langle 0;\infty)$.
- Pre $r<0$ je f klesajúca, prirodzený $D(f)=(0;\infty)$.



Funkcia $f\colon y=x^r$ pre $r>0$ a $r<0$

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,1.5],yrange=[-.5,2],
      color=blue,explicit(x^2.3,x,0,1.5),label(["y=x^{2.3}",.2,1.75]),
      color=red,explicit(x^1.5,x,0,1.5),label(["y=x^{1.5}",.2,1.55]),
      color=green,explicit(x,x,-0,1.5),label(["y=x",.2,1.35]),
      color=orange,explicit(x^.8,x,0,1.5),label(["y=x^{0.8}",.2,1.15]),
      color=violet,explicit(x^.4,x,0,1.5),label(["y=x^{0.4}",.2,1]),
      color=brown,point_type=7,points([[0,0],[1,1]]))$
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-.5,3],yrange=[-.5,3],
      color=blue,explicit(x^-2.3,x,0,3),label(["y=x^{-2.3}",.2,.95]),
      color=red,explicit(x^-1.5,x,0,3),label(["y=x^{-1.5}",.2,.75]),
      color=green,explicit(x^-1,x,-0,3),label(["y=x^{-1}",.2,.55]),
      color=orange,explicit(x^-.8,x,0,3),label(["y=x^{-0.8}",.2,.35]),
      color=violet,explicit(x^-.4,x,0,3),label(["y=x^{-0.4}",.2,.15]),
      color=brown,point_type=7,points([[1,1]]))$
```

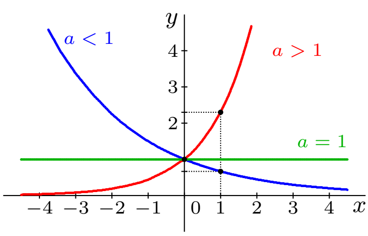


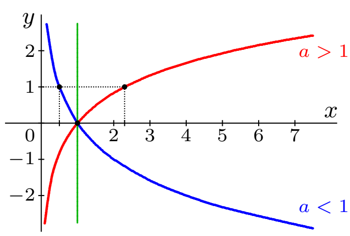


Exponenciálna funkcia so základom $a > 0$ sa nazýva

$f\colon y = a^x,\ x \in R.$

- Najdôležitejšia je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ so základom e (Eulerovo číslo).
- Pre $a = 1$ je $f\colon y = 1^x = 1$ konštantná (polynóm).
- Pre $a \in (0; 1)$ je f klesajúca, pre $a \in (1; \infty)$ je f rastúca.
- Graf sa nazýva **exponenciálna krivka** a prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcií $y = a^x$, $y = a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.





Funkcie $f\colon y = a^x$, $a > 0$ (vľavo) a $f\colon y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (vpravo)

Exponenciálna funkcia `exp(x)=%e^x` a logaritmická funkcia `log(x)` (prirodzený logaritmus) majú základ e. Ak chceme vypočítať iný logaritmus, napr. $\log_2 x$, musíme použiť konštrukciu $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

```
(%i1) exp(x)+%e^x;exp(1);
(%o1) 2 * %e^x
(%o2) %e
(%i5) log(x);log(2);log(%e);
(%o3) log(x)
(%o4) log(2)
(%o5) 1
(%i7) log_2(x):=log(x)/log(2);log_2(2);
(%o6) log_2(x) := log(x)/log(2)
(%o7) 1
```

Logaritmická funkcia so základom $a > 0$, $a \neq 1$ sa nazýva

$$f\colon y = \log_a x,\ x \in (0; \infty).$$

- f je inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$, $x \in R$ s rovnakým základom $a > 0$, $a \neq 1$.
- Pre $x \in (0; \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí $f\colon y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.
- $a > 0,\ a \neq 1. \ \Rightarrow \begin{cases} x = a^{\log_a x} & \text{pre } x > 0, \\ x = \log_a a^x & \text{pre } x \in R. \end{cases}$
- Pre $a \in (0; 1)$ je f klesajúca, pre $a \in (1; \infty)$ je f rastúca.
- Graf sa nazýva **logaritmická krivka** a prechádza bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcií $y = \log_a x$, $y = \log_{a^{-1}} x$ sú symetrické podľa osi x.

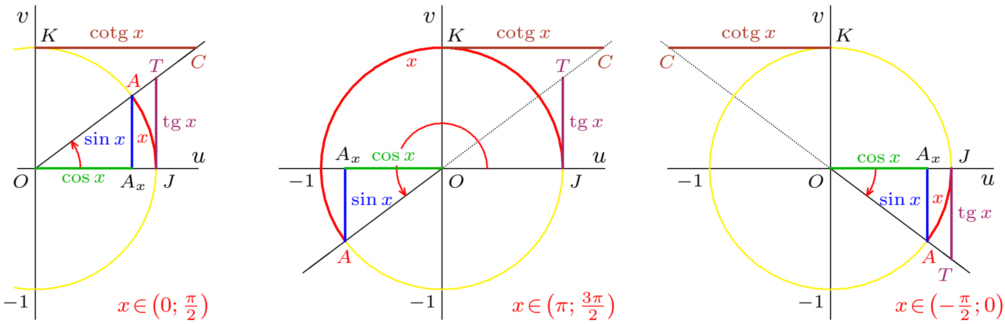
Číslo $\log_a x$ sa nazýva **logaritmus čísla x so základom a.**

- $a = 10. \ \Rightarrow$ **Dekadický logaritmus** čísla x, označenie $\log x$.
- $a = \mathrm{e}. \ \Rightarrow$ **Prirodzený logaritmus** čísla x, označenie $\ln x$.

Goniometrické (trigonometrické) funkcie sú:

- **Sínus** $y = \sin x = |AA_x|$, $x \in R$.
- **Kosínus** $y = \cos x = |OA_x|$, $x \in R$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$, $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z\right\}$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$, $x \in R - \{k\pi;\ k \in Z\}$.

Goniometrické funkcie sa definujú na kružnici so stredom v počiatku súradnicového sys-



Definovanie funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

tému s polomerom 1.

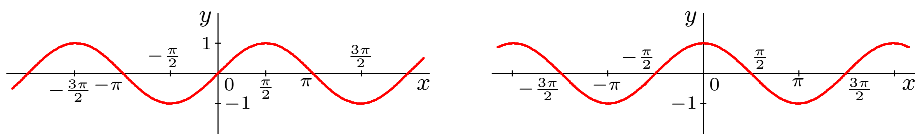
- Číslo π sa nazýva **Ludolfovo**. Jeho hodnota je približne $3,141592654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π.

$f\colon y = \sin x$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1; 1\rangle$.

- f je nepárna, f je periodická s primitívnou periódou 2π.
- Graf f sa nazýva **sínusoida**, nulové body sú $k\pi$, $k\in Z$.

$f\colon y = \cos x$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1; 1\rangle$.

- f je párna, f je periodická s primitívnou periódou 2π.
- Graf f sa nazýva **kosínusoida**, nulové body sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in Z$.



Funkcie $f\colon y = \sin x$ (vľavo) a $f\colon y = \cos x$ (vpravo)

V programe Maxima majú goniometrické funkcie tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`. Argumenty goniometrických funkcií musíme zadávať v radiánoch. Ak chceme použiť stupne, musíme najprv urobiť prevod na radiány.

(%i3) `tangrad(x):=tan(x/180*%pi);tangrad(22.5);ratsimp(tangrad(22.5));`

(%o1) $\operatorname{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

$\mathit{rat:}\ \ \mathit{replaced}\ 0.125\ \mathit{by}\ 1/8 = 0.125$

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Na zjednodušenie práce s goniometrickými funkciami môžeme použiť príkazy `trigexpand`, `trigreduce`, `trigsimp`, `trigrat` a balíčky (packages) `atrig1`, `ntrig` a `spangl`, ktoré obsahujú ďaľšiu podporu pre prácu s goniometrickými funkciami. Balíčky musíme do systému načítať pomocou príkazu `load`.

(%i1) `tan(%pi/4);tan(%pi/6);tan(%pi/8);`

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i4) `ratsimp(tan(%pi/8));`

(%o4) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i5) `trigsimp(tan(%pi/8));`

(%o5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

(%i6) `load(spangl);`

(%o6) `"../share/trigonometry/spangl.mac"`

(%i7) `tan(%pi/8);`

(%o7) $\sqrt{2}-1$

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus

$x, y \in R. \Rightarrow$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y.$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y.$

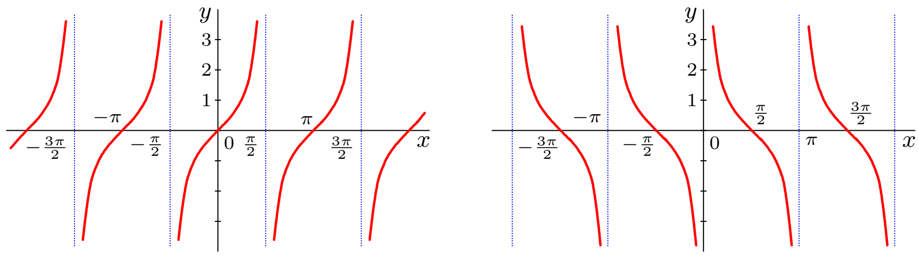
$x \in R. \Rightarrow$
- $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x.$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$

$f\colon y = \operatorname{tg} x$, $D(f) = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z\right\}$, $H(f) = R$.

- f je nepárna, f je periodická s primitívnou periódou π.
- Graf f sa nazýva **tangenta**, nulové body sú $k\pi$, $k \in Z$.

$f\colon y = \operatorname{cotg} x$, $D(f) = R - \{k\pi;\ k \in Z\}$, $H(f) = R$.

- f je nepárna, f je periodická s primitívnou periódou π.
- Graf f sa nazýva **kotangenta**, nulové body sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.



Funkcie $f\colon y = \operatorname{tg} x$ (vľavo) a $f\colon y = \operatorname{cotg} x$ (vpravo)

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám:

- **Arkussínus** $y = \arcsin x\colon \; \langle -1; 1\rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle.$
- **Arkuskosínus** $y = \arccos x\colon \; \langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle.$
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x\colon \; R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x\colon \; R \to (0; \pi).$

Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú injektívne. Je potrebné ich vhodne zúžiť.

$y = \arcsin x$, $D(f) = \langle -1; 1\rangle$, $H(f) = \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

- f je rastúca, f je nepárna.

$y = \arccos x$, $D(f) = \langle -1; 1\rangle$, $H(f) = \langle 0; \pi\rangle$.

- f je klesajúca.

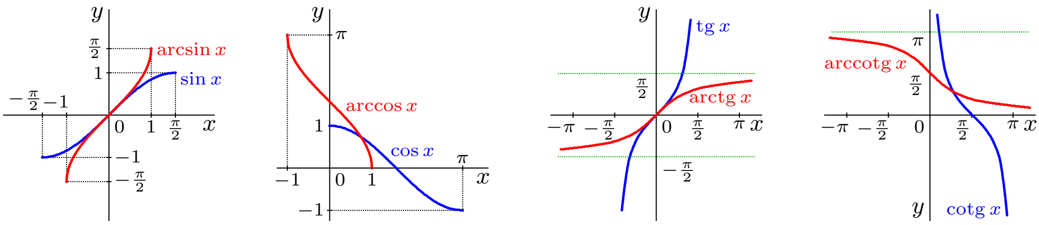
Inverzné funkcie ku goniometrickým funkciám majú v programe Maxima tvar `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`. Na tomto mieste môžeme spomenúť funkciu `atan2(x,y)` definovanú vzťahom $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

(%i2) `asin(1);acos(1);`
(%o1) $\frac{\pi}{2}$
(%o2) 0
(%i4) `atan2(2,4);atan(1/2);`
(%o3) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$
(%o4) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$

Súčtové vzorce pre cyklometrické funkcie

$x \in \langle -1; 1\rangle. \;\Rightarrow$ • $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$

$x \in R. \;\Rightarrow$ • $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$



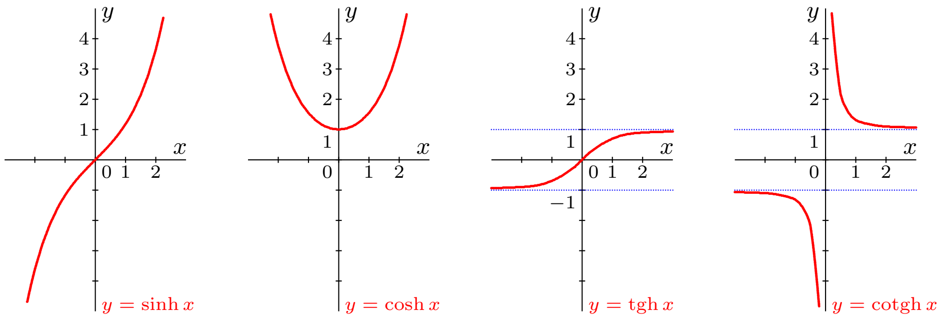
Funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

$y = \operatorname{arctg} x$, $D(f) = R$, $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- f je rastúca, f je nepárna.

$y = \operatorname{arccotg} x$, $D(f) = R$, $H(f) = (0; \pi)$.

- f je klesajúca.



Hyperbolické funkcie $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$

Hyperbolické funkcie sú:

- **Sínus hyperbolický** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}\colon\ R \to R.$
- **Kosínus hyperbolický** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}\colon\ R \to \langle 1; \infty).$
- **Tangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\colon\ R \to (-1; 1).$$
- **Kotangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\colon\ (R - \{0\}) \to (R - \langle -1; 1\rangle).$$

Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti ako goniometrické funkcie, preto majú podobné názvy.

$f\colon y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $D(f)=R$, $H(f)=R$.

- f je nepárna, f je rastúca.

$f\colon y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $D(f)=R$, $H(f)=\langle 1;\infty)$.

- f je párna, f je klesajúca na $(-\infty;0)$, f je rastúca na $(0;\infty)$.

Súčtové vzorce pre sínus hyperbolický a kosínus hyperbolický

$x,y\in R.\ \Rightarrow$
- $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y.$
- $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y.$

$x\in R.\ \Rightarrow$
- $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$,
- $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x.$
- $\sinh^2 x=\frac{\cosh 2x-1}{2}$,
- $\cosh^2 x=\frac{\cosh 2x+1}{2}.$
- $\sinh x\pm\cosh x=\pm e^{\pm x}$,
- $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$

Moivreov vzorec

$x\in R,\ n\in N.\ \Rightarrow$
- $(\cosh x\pm\sinh x)^n=\cosh nx\pm\sinh nx.$

$f\colon y=\operatorname{tgh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $D(f)=R$, $H(f)=(-1;1)$.

- f je nepárna, f je rastúca.

$f\colon y=\operatorname{cotgh} x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, $D(f)=R-\{0\}$, $H(f)=(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$.

- f je nepárna, f je klesajúca na $(-\infty;0)$, f je klesajúca na $(0;\infty)$.

Hyperbolometrické funkcie sú inverzné ku hyperbolickým funkciám:

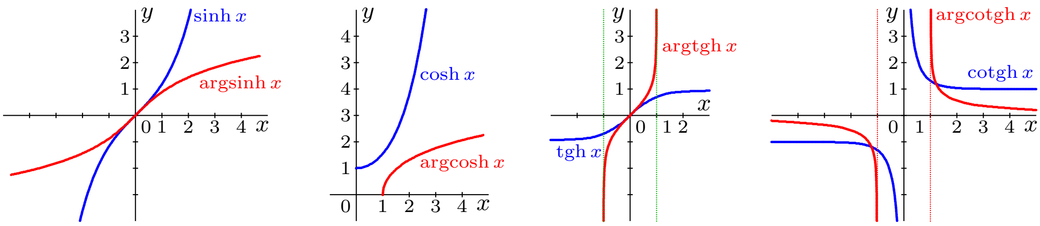
- **Argument sínus hyperbolický**
  $y=\operatorname{argsinh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\colon\ R\to R.$
- **Argument kosínus hyperbolický**
  $y=\operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\colon\ \langle 1;\infty)\to\langle 0;\infty).$
- **Argument tangens hyperbolický**
  $y=\operatorname{argtgh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\colon\quad(-1;1)\to R.$
- **Argument kotangens hyperbolický**
  $y=\operatorname{argcotgh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\colon\ (R-\langle -1;1\rangle)\to(R-\{0\}).$

$f\colon y=\operatorname{argsinh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $D(f)=R$, $H(f)=R$.

- f je nepárna, f je rastúca.

$f\colon\, y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $D(f) = \langle 1; \infty)$, $H(f) = \langle 0; \infty)$.

- f je rastúca.



Funkcie $y = \operatorname{argsinh} x$, $y = \operatorname{argcosh} x$, $y = \operatorname{argtgh} x$, $y = \operatorname{argcotgh} x$

$f\colon\, y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $D(f) = (-1; 1)$, $H(f) = R$.

- f je nepárna, f je rastúca.

$f\colon\, y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $H(f) = R - \{0\}$.

- f je nepárna, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$, f je klesajúca na $(1; \infty)$.

Hyperbolické funkcie sú `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` a k nim inverzné hyperbolometrické funkcie sú `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

```
(%i4)  sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1)  sinh(x)
(%o2)  1
(%o3)  0
(%o4)  1.313035285499331
(%i8)  asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5)  asinh(x)
(%o6)  0
(%o7)  0
(%o8)  1.01844096363052
```

Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie je potrebné charakterizovať jej lokálne vlastnosti na rôznych intervaloch a v okoliach rôznych významných bodov. Funkcia f nemusí byť definovaná v bode, v okolí ktorého ju vyšetrujeme.

$a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $A \subset R$, ak pre každé okolie $O(a)$ existuje bod $x \in O(a)$ taký, že $x \in A$, $x \neq a$.

f **má v bode** $a\in R^*$ **limitu** $b\in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Druhú podmienku môžeme písať v tvare:

- $x_n \in D(f),\ x_n \neq a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a. \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Táto definícia sa nazýva **Heineho**.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ a\in R^*. \left\{ \begin{array}{ll} a\in R. & \Rightarrow \textbf{Limita vo vlastnom bode } a. \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \textbf{Limita v nevlastnom bode } a. \end{array} \right. \\ \bullet\ b\in R^*. \left\{ \begin{array}{ll} b\in R. & \Rightarrow \textbf{Vlastná limita}. \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \textbf{Nevlastná limita}. \end{array} \right. \end{array} \right.$

Limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ môžeme charakterizovať pomocou okolí $O(a)$ a $O(b)$.

$a, b\in R^*,\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b.\ \Leftrightarrow$

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre každé okolie $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x\in O(a)$, $x\neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

Druhú podmienku môžeme písať v tvare:

- Pre každé okolie $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ tak, že $f\big(O(a) - \{a\}\big) \subset O(b)$.

Ak použijeme polomery okolí, môžeme druhú podmienku písať v tvare:

- Pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje $O_\delta(a)$ tak, že pre všetky $x\in O_\delta(a)$, $x\neq a$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.

Špeciálne platí:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ a, b\in R.$
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\in D(f)\colon 0 < |x-a| < \delta. \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b,\ b\in R.$
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\in R\ \forall x\in D(f)\colon \delta < x$, resp. $x < \delta. \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ a\in R.$
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta > 0\ \forall x\in D(f)\colon 0 < |x-a| < \delta. \Rightarrow \varepsilon < f(x)$, resp. $f(x) < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$
  $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta\in R\ \forall x\in D(f)\colon \delta < x$, resp. $x < \delta. \Rightarrow \varepsilon < f(x)$, resp. $f(x) < \varepsilon$.

$a \in R^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = b \in R$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je f ohraničená.

Nasledujúce tvrdenia reprezentujú základné vlastnosti limít funkcií.

$\left.\begin{array}{l} a \in R^* \text{ je hromadný bod } D(f) \text{ a } D(g). \\ f(x) = g(x) \text{ pre všetky } x \in O(a),\ x \neq a. \end{array}\right\} \Rightarrow$

- Existuje $\lim_{x\to a} f(x)$. $\Leftrightarrow$ Existuje $\lim_{x\to a} g(x)$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, pokiaľ limity existujú.

$\left.\begin{array}{l} a \in R^* \text{ je hromadný bod } D(f) \text{ a } D(g). \\ f(x) \leq g(x) \text{ pre všetky } x \in O(a),\ x \neq a. \end{array}\right\} \Rightarrow$

- $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$, pokiaľ limity existujú.

- Ak zmeníme predpoklad na $f(x) < g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.

$\Rightarrow$ Tvrdenie $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$ sa nezmení.

$\left.\begin{array}{l} a \in R^* \text{ je hromadný bod } D(f),\ D(g) \text{ a } D(h). \\ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ pre všetky } x \in O(a),\ x \neq a. \\ \text{Existujú } \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b \in R^*. \end{array}\right\} \Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o1) 0
```

∞ je hromadný bod definičného oboru funkcie $y = \frac{\sin x}{x}$.

Pre $x \in R$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$. $\Rightarrow$ Pre $x > 0$ platí $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow$ $0 = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. $\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(%i1) `f(x):=sin(x)/x$ for i:1 thru 10 do (x:100^i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$`

100 -0.005063656411097588
10000 $-3.056143888882521 \cdot 10^{-5}$
1000000 $-3.499935021712929 \cdot 10^{-7}$
100000000 $9.31639027109726 \cdot 10^{-9}$
10000000000 $-4.875060250875107 \cdot 10^{-11}$
1000000000000 $-6.112387023768895 \cdot 10^{-13}$
100000000000000 $-2.094083074964523 \cdot 10^{-15}$
10000000000000000 $7.796880066069787 \cdot 10^{-17}$
1000000000000000000 $-9.929693207404051 \cdot 10^{-19}$
100000000000000000000 $-6.452512852657808 \cdot 10^{-21}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(%i1) `limit(sin(x)/x,x,0);`
(%o1) 1

Označme $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$, bod 0 je hromadný bod $D(f)$.
Pre všetky $x \in D(f)$ platí:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x. \;\Rightarrow\; 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \;\Rightarrow\; \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}. \\ x < 0. \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0. \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x}. \end{array}\right\} \Rightarrow\; 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Rightarrow\; 1 = \lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

(%i1)
```
f(x):=sin(x)/x$
for i:-1 thru -10  step -1 do (x:1/i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
print("Limit")$
for i:10 thru 1 step -1 do (x:1/i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

-1 0.8414709848078965
$-\frac{1}{2}$ 0.958851077208406
$-\frac{1}{3}$ 0.9815840903884566
$-\frac{1}{4}$ 0.9896158370180917
$-\frac{1}{5}$ 0.9933466539753061
$-\frac{1}{6}$ 0.9953767961604901
$-\frac{1}{7}$ 0.9966021085458455
$-\frac{1}{8}$ 0.9973978670818215
$-\frac{1}{9}$ 0.9979436565895768
$-\frac{1}{10}$ 0.9983341664682815
Limit
$\frac{1}{10}$ 0.9983341664682815
$\frac{1}{9}$ 0.9979436565895768
$\frac{1}{8}$ 0.9973978670818215
$\frac{1}{7}$ 0.9966021085458455
$\frac{1}{6}$ 0.9953767961604901

$\frac{1}{5}$	0.9933466539753061
$\frac{1}{4}$	0.9896158370180917
$\frac{1}{3}$	0.9815840903884566
$\frac{1}{2}$	0.958851077208406
1	0.8414709848078965

Limita zloženej funkcie

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x),\ y=g(x),\ H(f)\subset D(g).\\ a,b,c\in R^*,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u)=c.\\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\neq b \text{ pre všetky } x\in O(a)-\{a\},\\ \text{resp. } g(b)=c.\end{array}\right.\end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{u\to b} g(u)=c.$$

- Pri výpočte $\lim\limits_{x\to a} g(f)$ položíme $u=f(x)$. $\Rightarrow$ **Substitúcia** $u=f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $x\to a$, $x=h+a$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(h+a)$, $h\to 0$.

$a,b,c\in R^*$, $r\in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=b\pm c$.
- $\lim\limits_{x\to a} rf(x)=r\lim\limits_{x\to a} f(x)=rb$.
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=bc$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{1}{c}$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b}{c}$.

Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať neexistenciu limity. Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.

$y=f(x)$, $x\in D(f)$, bod $a\in R$, označme:

- $f^-(x)=f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)}=f(x)|_{\{x\in D(f),\, x<a\}}$ zúženie funkcie naľavo.
- $f^+(x)=f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)}=f(x)|_{\{x\in D(f),\, a<x\}}$ zúženie funkcie napravo.

Limitou zľava a **limitou sprava funkcie** f **v bode** $a\in R$ sa nazývajú limity:

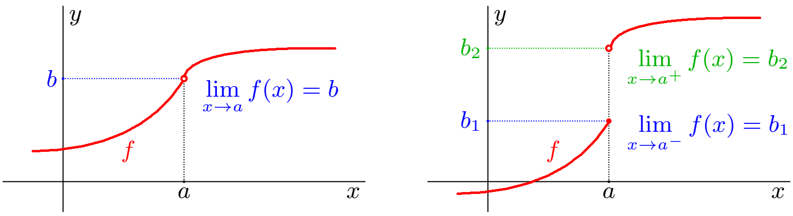
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f^-(x)=\lim\limits_{x\to a}\left[f|_{D(f)\cap(-\infty;a)}(x)\right].\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left[f|_{D(f)\cap(a;\infty)}(x)\right].\end{array}\right\} \text{ **Jednostranné limity**.}$$

$a\in R$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ sa nazýva **obojstranná limita**.

```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);
      limit(1/x,x,0);
      limit(1/x,x,0,plus);
(%o1) -∞
(%o2) infinity  /* Complex inf */
(%o3) ∞
```



Obojstranná limita a jednostranné limity

Dôležité limity.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = \mathrm{e}^b$ pre $b\in R.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \ln \mathrm{e} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty \text{ pre } a\in(0;1),\ q\in R, \\ 0 \quad \text{pre } a\in(1;\infty),\ q\in R. \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 \quad \text{pre } a\in(0;1),\ q\in R, \\ \infty \text{ pre } a\in(1;\infty),\ q\in R. \end{cases}$

```
(%i2) limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0); limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1) und        /* undefined */
(%o2) 1
```

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} \cdot \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{x^2+4} = \frac{3\cdot 0+2}{0+4} = \frac{1}{2}.$

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$

```
(%i3) limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
      limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
      limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $\frac{1}{2}$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
  $$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}$$
  $$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+x\cdot\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}.$$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
  $$=\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}=\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}=1+1=2.$$

```
(%i3) limit(x/(sqrt(1+x)-sqrt(1-x)),x,0);
      limit((1-sqrt(1-x))/x,x,0);
      limit((\sqrt(x^2-1)+sqrt(x^2+1))/x,x,inf);
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) 2

- $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\begin{bmatrix}\text{Subst.} & x=z^{12}\\ x\to 1, & z\to 1\end{bmatrix}=\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^3-1}$$
  $$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1}=\frac{1+1+1+1}{1+1+1}=\frac{4}{3}.$$

- $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1-\infty^{-2}}+2^0=\frac{5}{1-0}+1=6.$$

- $$\lim_{x\to 0+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}}=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a \text{ pre } a\in R.$$

```
(%i3) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
      limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
```
(%o1) $\frac{4}{3}$
(%o2) 6
(%o3) e^a

Ak použijeme substitúciu $x = z^{12}$, môžeme prvú limitu zjednodušiť.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$ g(z):=subst(z^12,x,f(x))$

      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
```
(%o1) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^2\cdot|z|-1}$ `/* z is positive, z=|z| */`

(%o2) $\frac{4}{3}$

V poslednom príklade sme počítali limitu výrazu 0^0 – tzv. neurčitý výraz.

Medzi **neurčité výrazy** (počítame ich pomocou limít) patria:

- $\infty - \infty$, • $\pm\infty \cdot 0$, • $\frac{0}{0}$, • $\frac{1}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, • 0^0, • $0^{\pm\infty}$, • $1^{\pm\infty}$, • $(\pm\infty)^0$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2) - \ln x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln \frac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \ln e^2 = 2.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } z = tx \\ x\to 0,\ z\to 0\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\frac{z}{t}}{\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\cdot \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\ln(1+z)}$
  $= \frac{1}{t}\cdot \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{t}$ pre $t\in R,\ t\neq 0.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } z = 3x+1 \\ x\to\infty,\quad z\to\infty\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty} \left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}}$
  $= \lim\limits_{z\to\infty} \left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[e^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

```
(%i3) limit(x*(log(x+2)-log(x)),x,inf);
      limit(x/log(1+t*x),x,0);
      limit(((3*x-2)/(3*x+1))^x,x,inf);
```
(%o1) 2
(%o2) $\frac{1}{t}$
(%o3) e^{-1}

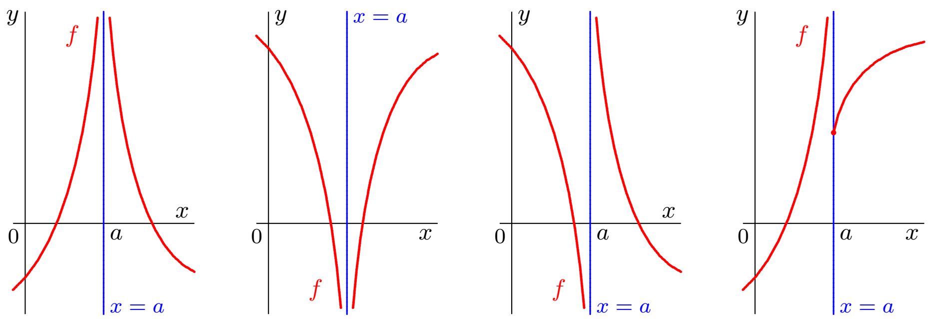
Asymptotické vlastnosti

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti v nevlastných bodoch:

- Pre $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodu $a \in R$, pre ktorý platí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $a \in R$.

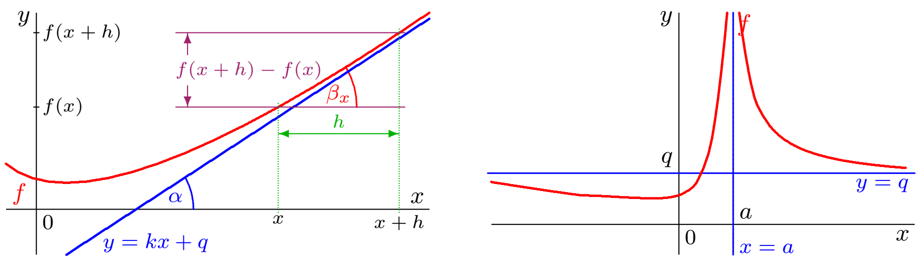
- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice (vertikálna) grafu** f,
  ak $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (aspoň jedna z limít je nevlastná).



Príklady asymptoty bez smernice

- Priamka $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou grafu** f,
  ak platí $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo platí $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

  Ak $k = 0$ (smernica priamky), asymptota sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.



Asymptota so smernicou α (vľavo), asymptoty $y = q$, $x = a$ (vpravo)

> Priamka $y = kx + q$ je asympta so smernicou funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$.
>
> $\Leftrightarrow$ • Existujú reálne limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q \in R$.

- $y = kx + q$ je asymptota so smernicou. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right) = 0. \;\Rightarrow\; \bullet \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-(kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x)-kx)-q] = 0 \;\Rightarrow\; \bullet \lim_{x\to\infty} [f(x)-kx] = q.$$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R, \; \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-kx] = q \in R.$

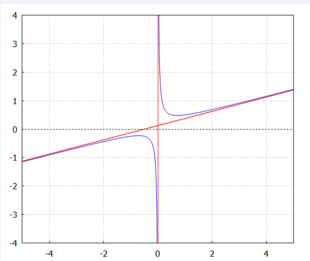
  $\Rightarrow \bullet \lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-(kx+q)] = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-kx] - \lim\limits_{x\to\infty} q = q - q = 0.$

(%i10)
```
f(x):=(2*x^2+x+1)/(8*x); km:limit(f(x)/x,x,minf)$ kp:limit(f(x)/x,x,inf)$
qm:limit(f(x)-km*x,x,minf)$ qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf)$
dm(x):=km*x+qm$ dp(x):=kp*x+qp$ dm(x);dp(x);
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],
color=blue,explicit(f(x),x,-8,0),explicit(f(x),x,0,8),
color=red,parametric(0,t,t,-5,5),
explicit(dm(x),x,-8,8),explicit(dp(x),x,-8,8))$
```

(%o1) $f(x) := \frac{2x^2+x+1}{8x}$

(%o8) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$

(%o9) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$



Spojitosť funkcie

S pojmom limita funkcie f v bode a úzko súvisí pojem spojitosti f v bode a. Spojitosť je tiež lokálna záležitosť v nejakom okolí $O(a)$.

f je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

Podmienku môžeme písať v tvare:

- $x_n \in D(f), \; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a. \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$

Táto definícia sa nazýva **Heineho**.

Bod $a \in D(f)$ môže byť iba hromadný alebo izolovaný:

- $a \in D(f)$ je izolovaný bod. $\Rightarrow$ Existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a).$$

> $a \in D(f)$ je izolovaný bod. $\Rightarrow$ • f je spojitá v bode a.

- $a \in D(f)$ je hromadný bod. $\Rightarrow$ Definícia je zhodná s definíciou limity f v bode a.

> $a \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. $\Rightarrow$
> • f je spojitá v bode a. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Spojitosť funkcie v bode $a \in D(f)$ môžeme charakterizovať pomocou okolí $O(a)$ a $O(f(a))$.

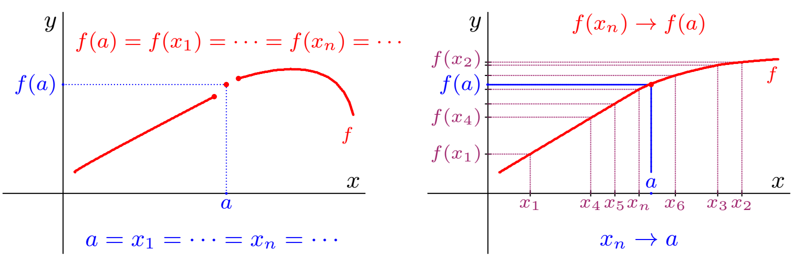
> f je spojitá v bode $a \in D(f)$. $\Leftrightarrow$
> • Pre každé okolie $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ tak,
> že pre všetky $x \in O(a)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

Podmienku môžeme písať v tvare:

- Pre každé okolie $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ tak, že $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Ak použijeme polomery okolí, potom môžeme písať:

- Pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje $O_\delta(a)$ tak, že pre všetky $x \in O_\delta(a)$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)$: $|x-a| < \delta. \Rightarrow |f(x)-f(x)| < \varepsilon$.



Spojitosť funkcie f v izolovanom bode (vľavo) a v hromadnom bode (vpravo)

Funkcia f sa nazýva **nespojitá v bode** $a\in D(f)$, ak nie je spojitá v bode a:

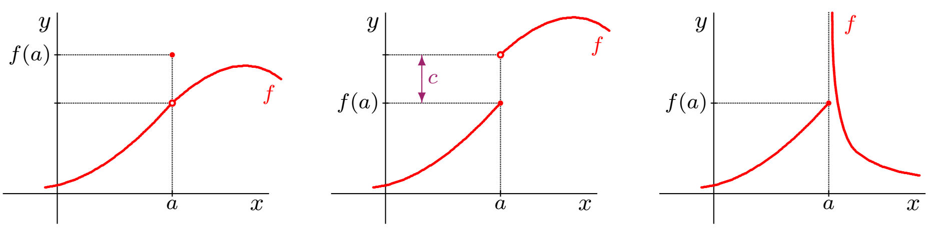
- Existuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ tak, že $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow f(a)$,
  t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ alebo neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

- f je spojitá v bode $a\in D(f)$. $\Rightarrow$ • a sa nazýva **bod spojitosti** f.
- f je nespojitá v bode $a\in D(f)$. $\Rightarrow$ • a sa nazýva **bod nespojitosti** f.

f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $D(f)$.
$\Rightarrow$ Rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky hromadné body $D(f)$.

$y = f(x)$, $x\in D(f)$, a je hromadný bod $D(f)$.

- a je bod **odstrániteľnej nespojitosti funkcie** f,
  ak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.
  - Nespojitosť v bode a odstránime, ak definujeme $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- a je bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu funkcie** f,
  ak existujú $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \in R$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \in R$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
  - Číslo $c = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ sa nazýva **skok funkcie f v bode a**.
- a je bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu funkcie** f,
  ak aspoň jedna z limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nekonečná.
  - Ak je niektorá z limít nekonečná, hovoríme o **asymtotickej nespojitosti**.



Nespojitosť odstrániteľná, neodstrániteľná I. druhu a neodstrániteľná II. druhu

f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, $r \in R$. $\Rightarrow$

- $|f|$, $f \pm g$, rf, fg sú spojité v bode a.
- $g(a) \neq 0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$ sú spojité v bode a.

Spojitosť zloženej funkcie

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá v bode } a \in D(f). \\ g \text{ spojitá v bode } b = f(a) \in D(g). \\ H(f) \subset D(g). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ F = g(f) \text{ je spojitá v bode } a.$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in D(f) \cap D(g) \cap D(h),\ O(a) \text{ je okolie.} \\ g, h \text{ sú spojité v bode } a. \\ h(a) = f(a) = g(a). \\ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ pre všetky } x \in O(a). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f \text{ je spojitá v bode } a.$$

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$, označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, x\leq a\}}$ zúženie funkcie naľavo.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\, a\leq x\}}$ zúženie funkcie napravo.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **v bode** $a \in D(f)$:

- **spojitá zľava**, ak je v a spojitá funkcia f_a^-.
- **spojitá sprava**, ak je v a spojitá funkcia f_a^+.

} **Jednostranná spojitosť**.

f je spojitá v bode $a \in D(f)$. $\Leftrightarrow$ • f je spojitá zľava a spojitá sprava v bode a.

Lokálna ohraničenosť

f je spojitá v bode $a \in D(f)$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je f ohraničená.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- f sa nazýva **spojitá na množine** A, ak je spojitá v každom bode $a \in A$.

Zo spojitosti f na množine $A \subset D(f)$ nevyplýva ohraničenosť f na A.

- $f\colon y = \frac{1}{x}$, $x \in R$ je spojitá na intervale $(0;1)$, ale nie je ohraničená na $(0;1)$.

Cauchyho o nulovom bode

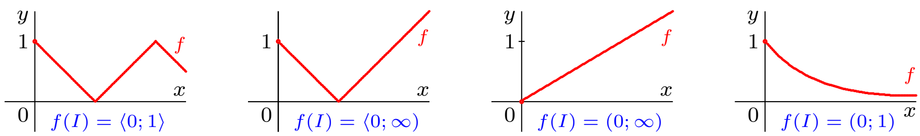
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ f(a)\cdot f(b) < 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } c \in (a;b) \text{ tak, že } f(c) = 0.$$

f je spojitá na intervale $I \subset R$. $\Rightarrow$

- $f(I)$ je interval.
- Inverzná funkcia f^{-1} (pokiaľ existuje) je spojitá na $f(I)$.

f je spojitá na intervale $I \subset R$.

- I je uzavretý interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ je uzavretý interval.
- I nie je uzavretý interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ môže byť interval rôzneho typu.



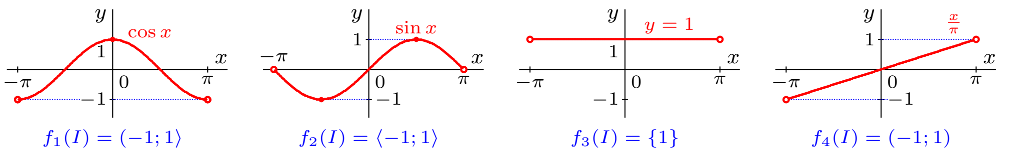
Zobrazenie intervalu $I = (0;\, \infty)$ spojitou funkciou f

Spojitá funkcia môže zobraziť $I = (-\pi;\pi)$ na rôzne intervaly:

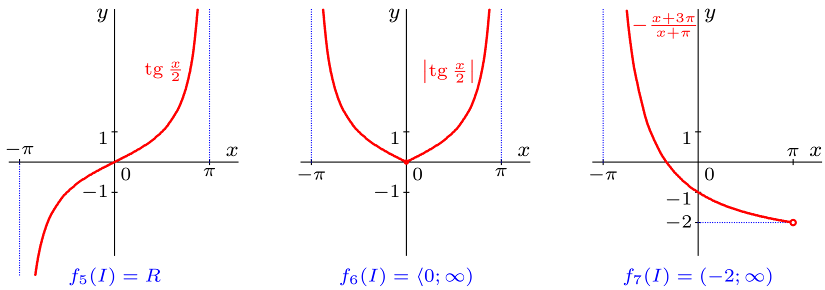
- $y = \cos x$: $(-\pi;\pi) \to (-1;1\rangle$.
- $y = \sin x$: $(-\pi;\pi) \to \langle -1;1\rangle$.
- $y = 1$: $(-\pi;\pi) \to \{1\}$.
- $y = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi;\pi) \to (-1;1)$.
- $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$: $(-\pi;\pi) \to R$.
- $y = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$: $(-\pi;\pi) \to \langle 0;\infty)$.
- $y = -\frac{2x}{x+\pi} - 1$: $(-\pi;\pi) \to (0;\infty)$.
- $y = -\frac{2x}{x+\pi}$: $(-\pi;\pi) \to (1;\infty)$.

Derivácia reálnej funkcie

K zavedeniu derivácie funkcie viedli hlavne dva problémy (nasledujúce príklady).



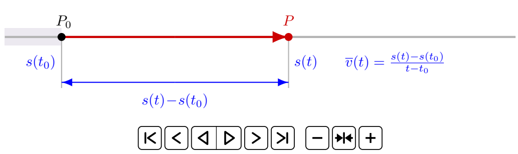
Zobrazenie intervalu $I = (-\pi;\, \pi)$ spojitými funkciami



Zobrazenie intervalu $I = (-\pi;\, \pi)$ spojitými funkciami

Bod sa pohybuje po priamke, jeho pohyb v čase t popisuje funkcia $y = s(t)$.

- V čase t_0 sa nachádza v bode P_0, v čase t sa nachádza v bode P.
- V časovom intervale $\langle t_0; t\rangle$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$.
  - $\Rightarrow$ • Priemerná rýchlosť $\overline{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.
- Pre $t \to t_0$ dostaneme okamžitú rýchlosť bodu v čase t_0.
  - $\Rightarrow$ • Okamžitá rýchlosť $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \overline{v}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

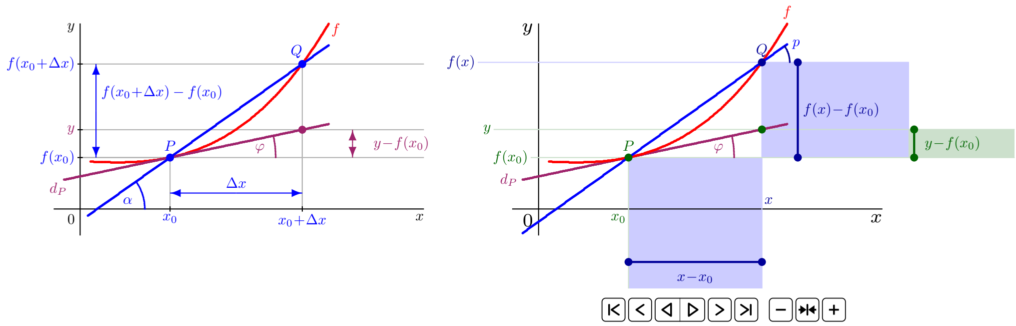


Úloha o rýchlosti

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ ležia na grafe f.
- Priamka PQ má smernicu $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Dotyčnica k f v bode P má tvar $d_P\colon\, y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$,
  kde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ je jej smernica.
- $Q \to P$. $\Rightarrow$ $PQ \to d_P$, $\Delta x \to 0$, $\alpha \to \varphi$, $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$. $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.

  $\Rightarrow$ • Smernica dotyčnice $\operatorname{tg} \varphi = \lim\limits_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



Úloha o dotyčnici

f má v bode $x_0 \in D(f)$ **deriváciu**, označenie $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$, ak:

- Existuje limita $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{matrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{matrix} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

- $f'(x_0) \in R$. $\Rightarrow$ Derivácia $f'(x_0)$ je **vlastná (konečná)**.
- $f'(x_0) \pm \infty$. $\Rightarrow$ Derivácia $f'(x_0)$ je **nevlastná (nekonečná)**.

Často sa používa označenie, ktoré zaviedol G. W. Leibniz:

• $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d} f(x_0)}{\mathrm{d} x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} f(x_0)$, resp. • $y'(x_0) = \frac{\mathrm{d} y(x_0)}{\mathrm{d} x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} y(x_0)$.

$f'(x_0) \in R$ (je konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bode x_0.

- Spojitosť funkcie f v bode x_0 nezaručuje existenciu $f'(x_0)$.

Funkcia f: $y = |x|$ je spojitá v bode $x_0 = 0$.

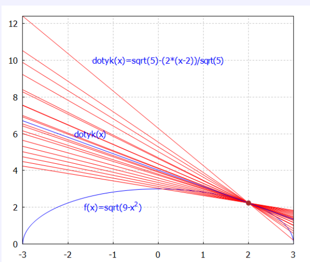
- Neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x \to 0+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

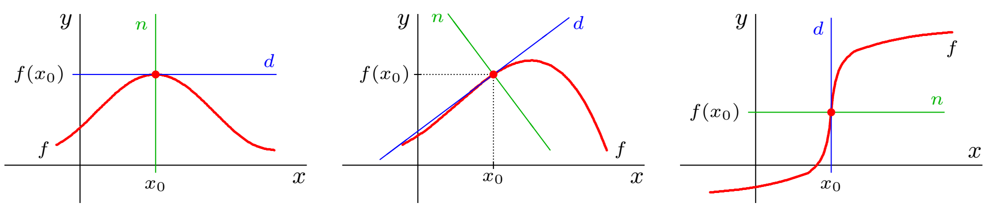
- $f'(x_0) \in R. \;\Rightarrow\; f'(x_0)$ je smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0.
  Dotyčnica má tvar $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$, f je spojitá v bode x_0.
  $\Rightarrow\; x = x_0$ je dotyčnica (bez smernice) ku grafu f v bode x_0.

Určíme dotyčnicu ku polkružnici $y = \sqrt{9 - x^2}$ v bode 2.

(%i8)
```
f(x):=sqrt(9-x^2)$ pomer(a,b):=(f(b)-f(a))/(b-a)$
sek(x,a,b):=pomer(a,b)*(x-a)+f(a)$
Sek:makelist(explicit(sek(x,2,-.15+.25*i),x,-3,3),i,1,20)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$ dotyk(x):=f(2)+subst(2,x,f1(x))*(x-2)$
print("Secant y=dotyk(x)=",dotyk(x)," in point 2 have a blue color")$
draw2d(grid=true,xaxis=true,color=blue,explicit(f(x),x,-3,3),
color=red,Sek,color=blue,explicit(dotyk(x),x,-3,3),
point_type=7,color=brown,points([[2,f(2)]]),
color=blue,label(["f(x)=sqrt(9-x^2)",-1,2]),
label(["dotyk(x)",-1.5,6]),label([concat("dotyk(x)=",string(dotyk(x))),0,10]))$
```

Secant $y = dotyk(x) = \sqrt{5} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{5}}$ *in point 2 have a blue color*





$f'(x_0) = 0$ $\quad$ $f'(x_0) \in R,\ f'(x_0) \neq 0$ $\quad$ $f'(x_0) = \infty$

Dotyčnica a normála k funkcii f v bode x_0

Vypočítame a zjednodušíme deriváciu funkcie $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f1(x):=diff(f(x),x);f1(x);`

(%o2) $f1(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Deriváciu $f'(x)$ sme vypočítali, ale nepodarilo sa nám ju vhodne zjednodušiť. Použijeme príkaz `subst`.

(%i5) `fp:subst(a,sqrt(x^2+1),f1(x));`

(fp) $\frac{\frac{x}{a}+1}{x+a}$

(%i6) `ratsimp(fp);`

(%o6) $\frac{1}{a}$

(%i7) `subst(sqrt(x^2+1),a,ratsimp(fp));`

(%o7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f má v bode $x_0 \in D(f)$ **deriváciu zľava** $f'_-(x_0)$, ak:

- Existuje $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{matrix}\text{Subst. } h = x - x_0\\ x \to x_0, \quad h \to 0\end{matrix}\right] = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f'_-(x_0) \in R$ (je konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá zľava v bode x_0.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ **deriváciu sprava** $f'_+(x_0)$, ak:

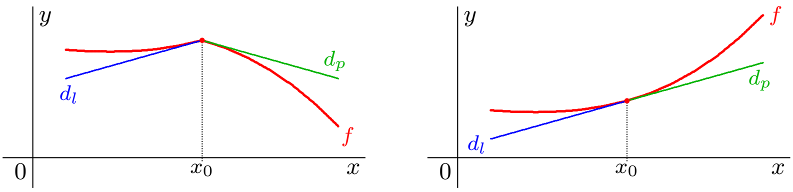
- Existuje $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{matrix}\text{Subst. } h = x - x_0\\ x \to x_0, \quad h \to 0\end{matrix}\right] = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f'_+(x_0) \in R$ (je konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá sprava v bode x_0.

Derivácie $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ sa nazývajú **jednostranné** a graficky reprezentujú smernice **ľavej**, resp. **pravej poldotyčnice ku grafu f v bode x_0**. Derivácia $f'(x_0)$ sa nazýva **obojstranná**.

$f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in R$ (sú konečné, nemusia sa rovnať). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bode x_0.

Existuje $f'(x_0)$. $\Leftrightarrow$ • Existujú $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

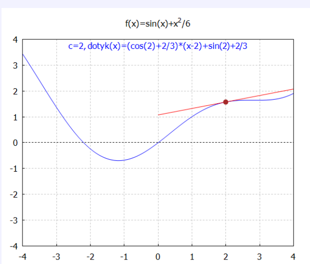


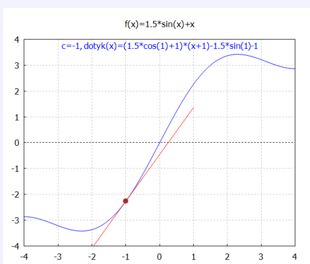
Jednostranné poldotyčnice

Nasledujúca konštrukcia vypočíta a nakreslí dotyčnicu ku grafu funkcie f v bode c.

(%i6)
```
c:2$ f(x):=x^2/6+sin(x)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$ dotyk(x):=f(c)+subst(c,x,f1(x))*(x-c)$
print("Secant y=dotyk(x)=",dotyk(x)," in point",c)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,xrange=[-4,4],yrange=[-4,4],
color=blue,explicit(f(x),x,-4,4),
color=red,explicit(dotyk(x),x,c-2,c+2),
point_type=7,color=brown,points([[c,f(c)]]),
color=blue,title=concat("f(x)=",string(f(x))),
label([concat("c=",string(c),", dotyk(x)=",string(dotyk(x))),0,3.75]))$
```

Secant $y = dotyk(x) = (\cos(2) + 2/3) * (x - 2) + \sin(2) + 2/3$ *in point* 2





$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset \{x_0 \in D(f);\ f'(x_0) \text{ je konečná}\}$, $A \neq \emptyset$.

- Funkcia g: $y = f'(x)$, $x \in A$ sa nazýva **derivácia funkcie f na množine A**, označenie f', y', resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

- Derivácia f v bode $x_0 \in D(f)$ je $f'(x_0)$, t. j. číslo alebo $\pm\infty$.
- Derivácia f na množine $A \subset D(f)$ je funkcia $y = f'(x)$, $x \in A$.

---

f má na množine $A \subset D(f)$ konečnú deriváciu f'. $\Rightarrow$ • f je spojitá na A.

$f: y = x^n$, $x \in R$, $n \in N$, $x_0 \in D(f)$.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1})(x - x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.$$

$f: y = \mathrm{e}^x$, $x \in R$.

- $[\mathrm{e}^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x$.

Pri praktickom výpočte derivácií používame rôzne vzorce a pravidlá.

---

f', g' existujú na $A \neq \emptyset$, $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ existujú na A, $\left(\frac{f}{g}\right)'$ existuje na $A_1 = \{x \in A; g(x) \neq 0\}$.

Navyše platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$.
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Predchádzajúce vzorce stručne zapisujeme:

- $(cf)' = cf'$. • $(f \pm g)' = f' \pm g'$. • $(fg)' = f'g + fg'$. • $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

---

f: $y = \frac{x}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$, priamka p: $y = 2 - x$.

- Dotyčnice ku grafu f rovnobežné s p sú d_1: $y = -x$, d_2: $y = 4 - x$.

Dotyčnica d: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ v bode x_0 má smernicu $f'(x_0)$.

Priamka p má smernicu -1. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = -1$.

- $f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{1\cdot(x-1)-x(1-0)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$. $\Rightarrow$ $(x_0 - 1)^2 = 1$. $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ alebo $x_0 = 2$.

Dva dotykové body $D = \big[x_0; f_(x_0)\big]$ a dve dotyčnice d:

- $D_1 = [0; 0]$, d_1: $y = 0 - (x - 0) = -x$.
- $D_1 = [2; 2]$, d_2: $y = 2 - (x - 2) = 4 - x$.

Derivácia inverznej funkcie

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá a ostro monotónna na intervale } I \subset R. \\ x_0 \in I \text{ je vnútorný bod.} \\ f'(x_0) \neq 0 \text{ je konečná.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- Inverzná funkcia f^{-1} má deriváciu v bode $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\bigg|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

- $[f^{-1}]'(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array}\right]$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Zjednodušene môžeme písať:

- $[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, resp. • $\frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}}$.

f: $y = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ je spojitá a rastúca, $f'(x) = \mathrm{e}^x \neq 0$ pre $x \in R$.

f^{-1}: $x = \ln y$ pre $y \in (0; \infty)$.

- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[\mathrm{e}^x]'} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ pre $y \in (0; \infty)$.

f: $y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá a rastúca, $H(f) = (-1; 1)$.

$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$ pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1; 1)$.

Derivácia zloženej funkcie

$\left.\begin{array}{l} u=f(x),\ y=g(u),\ H(f)\subset D(g). \\ x_0\in D(f),\ u_0=f(x_0). \\ f'(x_0),\ g'(u_0) \text{ sú konečné.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ • $[g(f(x_0))]'=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) = g'(u_0)\cdot f'(x_0).$

Zjednodušene môžeme písať:

- $F'(x)=[g(f)]'(x)=g'(u)\cdot f'(x)$, resp. • $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

- $[\sin(\sin x)]'=\cos(\sin x)\cdot[\sin x]'=\cos(\sin x)\cdot\cos x,\ x\in R.$

- $[\sin(\sin(\sin x))]'=\cos(\sin(\sin x))\cdot[\sin(\sin x)]'$
  $=\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot[\sin x]'=\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x,\ x\in R.$

- $[a^x]'=\left[e^{\ln a^x}\right]'=\left[e^{x\ln a}\right]'=e^{x\ln a}\cdot[x\ln a]'=a^x\cdot\ln a,\ x\in R,\ a>0,\ a\neq 1.$

- $[x^a]'=\left[e^{\ln x^a}\right]'=\left[e^{a\ln x}\right]'=e^{a\ln x}\cdot[a\ln x]'=x^a\cdot\frac{a}{x}=ax^{a-1},\ x>0,\ a\in R.$

- $[x^x]'=\left[e^{\ln x^x}\right]'=\left[e^{x\ln x}\right]'=e^{x\ln x}\cdot[x\ln x]'$
  $=x^x\cdot\left[1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right]=x^x\cdot[1+\ln x],\ x>0.$

- Výraz $[\ln f(x_0)]'=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ sa nazýva **logaritmická derivácia f v bode x_0**.

Logaritmická derivácia

$\left.\begin{array}{l} f(x_0)>0 \text{ pre } x_0\in D(f). \\ f'(x_0) \text{ existuje.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f'(x_0)=f(x_0)\cdot[\ln f(x_0)]'.$

Derivácie základných elementárnych funkcií

Vzorec	Platnosť	Vzorec	Platnosť
$[c]'=0,$	$x\in R,\ c\in R$	$[x]'=1,$	$x\in R$
$[x^n]'=nx^{n-1},$	$x\in R,\ n\in N$	$[x^a]'=ax^{a-1},$	$x>0,\ a\in R$
$[e^x]'=e^x,$	$x\in R$	$[a^x]'=a^x\ln a,$	$x\in R,\ a>0$

Vzorec	Platnosť	Vzorec	Platnosť
$[\ln x]' = \frac{1}{x},$	$x > 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x},$	$x \neq 0$	$[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\sin x]' = \cos x,$	$x \in R$	$[\cos x]' = -\sin x,$	$x \in R$
$[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z$	$[\mathrm{cotg}\, x]' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1; 1)$	$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1; 1)$
$[\mathrm{arctg}\, x]' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$	$[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$
$[\sinh x]' = \cosh x,$	$x \in R$	$[\cosh x]' = \sinh x,$	$x \in R$
$[\mathrm{tgh}\, x]' = \frac{1}{\cosh^2 x},$	$x \in R$	$[\mathrm{cotgh}\, x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$	$x \neq 0$
$[\mathrm{argsinh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$	$x \in R$	$[\mathrm{argcosh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$x > 1$
$[\mathrm{argtgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in (-1; 1)$	$[\mathrm{argcotgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in R - \langle -1; 1 \rangle$

Základom úspešného derivovania sú derivácie elementárnych funkcií. Pre praktické potreby je nevyhnutné si tieto vzorce zapamätať.

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Často potrebujeme danú funkciu f aproximovať (približne vyjadriť) inou, jednoduchšou funkciou g tak, aby bol ich rozdiel $|f(x) - g(x)|$ čo najmenší. Väčšinou nám postačí **lokálna aproximácia** v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, existuje konečná $f'(x_0)$.

- **Diferenciál funkcie** f v bode x_0, označenie $\mathrm{d}f(x_0, x-x_0)$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h)$

  je lineárna funkcia $\mathrm{d}f(x_0, x-x_0) = f'(x_0) \cdot (x-x_0)$, $x \in R$.

  Položíme $h = x - x_0$. $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0, x-x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

f je **diferencovateľná**:

- **v bode** $x_0 \in D(f)$, ak existuje $\mathrm{d}f(x_0, h)$, t. j. existuje konečná $f'(x_0)$.
- **na množine** $A \subset D(f)$, ak existuje $\mathrm{d}f(x_0, h)$ pre všetky $x_0 \in A$.

f: $y = x$, $x \in R$, bod $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$.

• $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}x$. $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0, h) = \mathrm{d}x$.

f: $y = f(x)$, $x \in R$, bod $x_0 \in R$, $f'(x_0)$ je konečná.

- $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}f(x_0)$.

$\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0, h) = \mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, resp. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

O najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je diferencovateľná v bode } x_0 \in D(f). \\ h\colon y = f(x_0) + c(x - x_0),\ c \in R,\ c \neq f'(x_0). \\ g\colon y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- Existuje okolie $O(x_0)$ tak, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - h(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou dotyčnice v bode x_0
  g: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$
  je najlepšia zo všetkých aproximácií f pomocou lineárnej funkcie (priamky).

$\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01.$ Presne $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Riešenie.

Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$, $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.

Nech $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1,06} = f(1,06) \approx \frac{1,06+5}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

```
(%i8) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$
      s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$ p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$ p(x);
      h(c):=print("c=",c,"          c^(1/6)=",'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ h(c)$
```

(%o6) $\frac{x-1}{6} + 1$

$c = 1.06 \quad c^{(1/6)} = f(1.06) = 1.009758794179192$ *approx* 1.01

- Aproximácia f má zmysel iba pre x v blízkosti bodu x_0.

```
(%i18) h(0.9)$ h(1.1)$ h(1.2)$ h(1.5)$ h(2.0)$ h(4.0)$ h(10)$ h(16)$ h(32)$ h(64)$
```

$c = 0.9 \quad c^{(1/6)} = f(0.9) = 0.9825931938526898$ *approx* 0.9833333333333334

$c = 1.1 \quad c^{(1/6)} = f(1.1) = 1.016011867773387$ *approx* 1.016666666666667

$c = 1.2 \quad c^{(1/6)} = f(1.2) = 1.030853320886445 \ approx\ 1.033333333333333$
$c = 1.5 \quad c^{(1/6)} = f(1.5) = 1.069913193933663 \ approx\ 1.083333333333333$
$c = 2.0 \quad c^{(1/6)} = f(2.0) = 1.122462048309373 \ approx\ 1.166666666666667$
$c = 4.0 \quad c^{(1/6)} = f(4.0) = 1.259921049894873 \ approx\ 1.5$
$c = 10 \quad c^{(1/6)} = f(10) = 1.46779926762207 \ approx\ 2.5$
$c = 16 \quad c^{(1/6)} = f(16) = 1.587401051968199 \ approx\ 3.5$
$c = 32 \quad c^{(1/6)} = f(32) = 1.781797436280679 \ approx\ 6.166666666666666$
$c = 64 \quad c^{(1/6)} = f(64) = 2.0 \ approx\ 11.5$

$\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01.$ Presne $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Iné riešenie.

Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1}$, $x > -1$, $x_0 = 0$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > 0$, $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.

Nech $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1,06} = f(0,06) \approx \frac{0,06+6}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01.$

(%i8)
```
c:0.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$
s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$ p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$ p(x);
h(c):=print("c=",c,"          c^(1/6)=",'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
subst(c,x,float(p(x))))$ h(c)$
```
(%o6) $\frac{x}{6} + 1$

$c = 0.06 \quad (c+1)^{(1/6)} = f(1.06) = 1.009758794179192 \ approx\ 1.01$

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ má deriváciu f' na množine $A_1 \subset D(f)$, $A_1 \neq \emptyset$.

- $f' = f^{(1)}$ sa nazýva **derivácia prvého rádu (prvá derivácia)** f na množine A_1.
- Derivácia f' (pokiaľ existuje), t. j. $[f']' = f'' = f^{(2)}$ na $A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ sa nazýva **derivácia druhého rádu (druhá derivácia)** f na množine A_2.
- Derivácia f'' (pokiaľ existuje), t. j. $[f'']' = f''' = f^{(3)}$ na $A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ sa nazýva **derivácia tretieho rádu (tretia derivácia)** f na množine A_3.
- Derivácia f''' (pokiaľ existuje), t. j. $[f''']' = f^{(4)}$ na $A_4 \subset A_3$, $A_4 \neq \emptyset$ sa nazýva **derivácia štvrtého rádu (štvrtá derivácia)** f na množine A_4.
- Takýmto spôsobom pokračujeme pre $n = 5, 6, 7, \ldots$.
- Derivácia $f^{(n-1)}$, $n \in N$ (pokiaľ existuje), t. j. $[f^{(n-1)}]' = f^{(n)}$ na $A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ sa nazýva **derivácia n-tého rádu (n-tá derivácia)** f na množine A_n.
- Špeciálne definujeme $f = f^{(0)}$ **deriváciu nultého rádu (nultú deriváciu)** f.

$f^{(n)}(x_0)$ pre $x_0 \in A_n$ sa nazýva **derivácia n-tého rádu (n-tá derivácia) f v bode x_0**.

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$
pre $x_0 \in A_n$, $A_n \subset A_{n-1}$, $n \in N$.

- To znamená, že funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

Výpočet $f^{(n)}$, $n \in N$ môže byť vo všeobecnosti veľmi prácny, pretože musíme začať f'.

$y = x^k$, $x \in R$, $k \in N$.

$$[x^k]' = kx^{k-1}, \quad [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}, \quad [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}, \ldots,$$
$$[x^k]^{(k-1)} = k(k-1)\cdots 2x, \quad [x^k]^{(k)} = k!, \quad [x^k]^{(k+1)} = 0, \ldots$$

$\Rightarrow$ • $[x^k]^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},\ x \in R & \text{pre } n \in N,\ n \le k. \\ 0,\ x \in R & \text{pre } n \in N,\ n > k. \end{cases}$

$y = \mathrm{e}^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ pre $n \in N$.

$y = \sin x$, $x \in R$, $y = \cos x$, $x \in R$.

$$[\sin x]' = \cos x, \quad [\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x, \quad [\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x,$$
$$[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x, \quad [\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ldots$$

$\Rightarrow$ • $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x,\ x \in R & \text{pre } n = 2k,\ k \in N. \\ (-1)^{k+1} \cos x,\ x \in R & \text{pre } n = 2k-1,\ k \in N. \end{cases}$

$\Rightarrow$ • $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)} = \begin{cases} (-1)^k \sin x,\ x \in R & \text{pre } n = 2k,\ k \in N. \\ (-1)^k \cos x,\ x \in R & \text{pre } n = 2k-1,\ k \in N. \end{cases}$

Leibnizov vzorec

f, g majú na množine A derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane). $\Rightarrow$

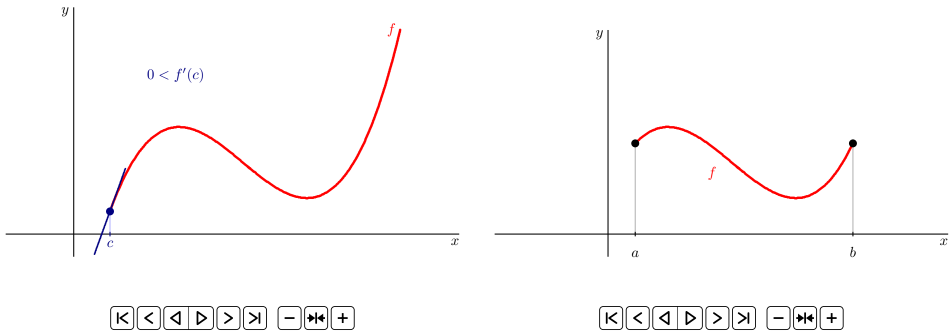
- $[fg]^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$.

Aplikácie derivácie funkcie

Vety o strednej hodnote funkcie (Rolleho a Lagrangeova) a l'Hospitalovo pravidlo patria medzi najčastejšie aplikácie derivovania v praxi.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému

$$\left.\begin{array}{l} c\in D(f) \text{ je vnútorný bod.} \\ f \text{ má v bode } c \text{ lokálny extrém.} \\ f'(c) \text{ existuje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f'(c)=0.$$



Nutná podmienka existencie lokálneho extrému (vľavo) a Rolleho veta (vpravo)

Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ f(a)=f(b). \\ \text{Existuje } f'(x)\in R^* \text{ pre všetky } x\in(a;b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \begin{array}{l}\text{Existuje } c\in(a;b) \text{ tak,} \\ \qquad\text{že } f'(c)=0.\end{array}$$

- $c\in(a;b)$ leží na úsečke s koncovými bodmi a, b,

preto sa často vyjadruje v tvare $c=a+\theta(b-a)$, $\theta\in(0;1)$.

Lagrange (veta o prírastku funkcie)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ \text{Existuje } f'(x)\in R^* \text{ pre všetky } x\in(a;b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \begin{array}{l}\text{Existuje } c\in(a;b) \text{ tak,} \\ \qquad\text{že } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\end{array}$$

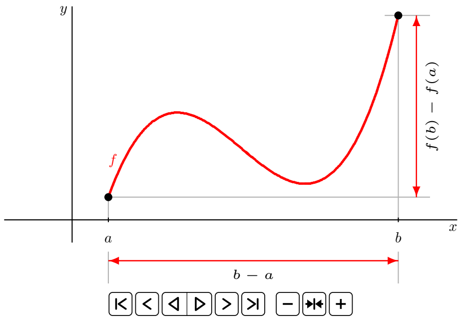
- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\Rightarrow$ • $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Označme $b=a+h$, $h=b-a$, $h\in R$. $\Rightarrow$ $c=a+\theta(b-a)=a+\theta h$, $\theta\in(0;1)$.

- $f(b)-f(a)=f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)\cdot h$, $h\in R$, $\theta\in(0;1)$.

Pre dostatočne malé h môžeme predpokladať $f'(a+\theta h)\approx f'(a)$.

- $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)\cdot h\approx f(a)+f'(a)h=f(a)+\mathrm{d}f(a,h)$.



Lagrangeova veta

Rolleho a Lagrangeova veta zaručujú existenciu $c \in (a;b)$. Pomocou nich však takéto body nevieme nájsť a ani nedokážeme určiť ich počet.

Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$ sa často počítajú pomocou l'Hospitalovho pravidla.

L'Hospitalovo pravidlo

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pre všetky } x \in O(a),\ x \neq a \text{ existujú } f'(x),\ g'(x), \\ a \in R^*, \text{ existuje } \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*. \\ \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty\ [L'H\tfrac{\infty}{\infty}], \\ \text{resp. } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\ [L'H\tfrac{0}{0}]. \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12.$

- $f(x) = x^3 - 8,\ x \in R,\ g(x) = x - 2,\ x \in R.$
- $O(2)$ môžeme zvoliť ľubovoľne, napr. $O(2) = R$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2,\ g'(x) = 1 \text{ pre } x \in R - \{2\}. \\ \lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12. \\ \lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 8) = \lim\limits_{x\to 2} (x - 2) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12.$$

```
(%i9) f(x):=(x^3-8)/(x-2)$
      fc(x):=num(f(x))$ fc(x);
      fm(x):=denom(f(x))$ fm(x);
      'limit(f(x),x,2); 'limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

```
limit(f(x),x,2); limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o4) $x^3 - 8$

(%o5) $x - 2$

(%o6) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

(%o7) $3 \lim\limits_{x\to 2} x^2$

(%o8) 12

(%o9) 12

Bez l'Hospitalovho pravidla:

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = 12.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Predpoklady l'Hospitalovho pravidla sú splnené:

- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $[x]' = 1$ pre $x \in (0; \infty)$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$ • $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$

```
(%i4) f(x):=log(x)/x$ fc(x):=num(f(x))$ fm(x):=denom(f(x))$
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o4) $\frac{1}{2}$

- Je veľmi dôležité overiť všetky predpoklady l'Hospitalovho pravidla.
- Platnosť predpokladu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$ sa overuje priebežne počas výpočtu limity.
- Obrátené tvrdenie neplatí. Z existencie $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nevyplýva existencia $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj niekoľkokrát za sebou:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},\ k \in N.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{6x}$
  $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$

Predpoklady l'Hospitalovho pravidla sú splnené:

- Pre $O(0) = (-1; 1)$, $x \in O(0)$, $x \neq 0$ existujú príslušné derivácie a limity.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \cdots$

L'Hospitalovo pravidlo nemôžeme použiť.

L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov. Musíme ich najprv vhodnými úpravami previesť na typ $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Typ $\pm\infty\cdot 0$: • $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}. \;\Rightarrow\;$ Typ $\frac{0}{0}$ $[L'H\frac{0}{0}]$.
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}. \;\Rightarrow\;$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$ $[L'H\frac{\infty}{\infty}]$.

Typ $\infty-\infty$: • $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]. \;\Rightarrow\;$ Typ $\infty\cdot 0$.

Typ ∞^0: • $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}. \;\Rightarrow\;$ Typ $0\cdot\infty$.

Typ 0^0: • $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}. \;\Rightarrow\;$ Typ $0\cdot(-\infty)$.

Typ $1^{\pm\infty}$: • $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}. \;\Rightarrow\;$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \ln x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{0^+}\cdot(-\infty)}$
$= \mathrm{e}^{\infty\cdot(-\infty)} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$

L'Hospitalovo pravidlo sme nepoužili.

$y = f(x)$, $x\in D(f)$, bod $x_0\in D(f)$, okolie $O(x_0) \subset D(f)$, $n\in N$.

Existujú konečné derivácie $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)\in R$.

- **Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0** je funkcia

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x\in O(x_0).$$

Ak označíme $h = x-x_0$, $x = x_0+h$, $h\in O(0)$, potom má tvar:

$$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h\in O(0).$$

- Taylorov polynóm $T_n(x)$ so stredom $x_0 = 0$ sa nazýva **Maclaurinov polynóm**:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!},\ x\in O(0).$$

- **Zvyšok Taylorovho polynómu** (stupna n) sa nazýva rozdiel

$$R_n(x) = f(x)-T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x\in O(x_0), & \text{Lagrangeov tvar,} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!},\ x\in O(x_0), & \text{Cauchyho tvar,} \end{cases}$$

pričom $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta\in(0;1)$.

Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie f pomocou Taylorovho polynómu $T_n(x)$:

- Aproximácia má lokálny charakter v okolí $O(x_0)$.
- Aproximácia je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou polynómov stupňa n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x\in\langle -1;\infty)$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ $f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3}\cdot(-\frac{2}{9})\cdot(x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x\in O(0)$.

- $\sqrt[3]{1+x} \approx \begin{cases} 1+\frac{x}{3}, & x\in O(0) \text{ s chybou } R_1(x). \\ 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}, & x\in O(0) \text{ s chybou } R_2(x). \\ 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}, & x\in O(0) \text{ s chybou } R_3(x). \end{cases}$

Vypočítame Taylorov polynóm funkcie $\sqrt{x^2+1}$. Ako vidíme z riadku (%i2), ručné derivovanie je dosť prácne.

```
(%i1) f(x):=sqrt(x^2+1)$

(%i2) print("f(x)=",f(x),", f'(x)=",diff(f(x),x),",

         f''(x)=",ratsimp(diff(f(x),x,2)),", f'''(x)=",ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}, \quad f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

Na príklade vidíme, že príkaz `coeff` je závislý na príkaze `taylor`. Polynóm `tp1` je deviateho (prakticky ôsmeho) stupňa, preto výstupom príkazu `coeff(tp1,x,10))` je číslo 0. Polynóm `tp2` je desiateho stupňa a výstup príkazu `coeff(tp2,x,10))` je skutočný koeficient $c_{10} = 7/256$.

```
(%i3) tp1:taylor(f(x),x,0,9);
```

(tp1) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\cdots$

```
(%i4) print("c_3=",coeff(tp1,x,3),",c_4=",coeff(tp1,x,4),",c_10=",coeff(tp1,x,10))$
```

$c\_3 = 0, \quad c\_4 = -\frac{1}{8}, \quad c\_10 = 0$

```
(%i5) tp2:taylor(f(x),x,0,10);
```

(tp2) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\frac{7x^10}{256}+\cdots$

```
(%i6) print("c_3=",coeff(tp2,x,3),",c_4=",coeff(tp2,x,4),",c_10=",coeff(tp2,x,10))$
```

$c\_3 = 0, \quad c\_4 = -\frac{1}{8}, \quad c\_10 = \frac{7}{256}$

$f(x) = \ln x,\ x\in(0;\infty),\ x_0 = 1.$ $\quad\Rightarrow\quad f(1) = 0.$

- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},\ x>0.$ $\quad\Rightarrow\quad f'(1) = 1 = 0!.$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2},\ x>0.$ $\quad\Rightarrow\quad f''(1) = -1 = -1!.$
- $f'''(x) = 2\frac{1}{x^3} = 2x^{-3},\ x>0.$ $\quad\Rightarrow\quad f'''(1) = 2\cdot 1 = 2!.$
- $f^{(4)}(x) = -3\cdot 2\frac{1}{x^3} = -3\cdot 2x^{-4},\ x>0.$ $\quad\Rightarrow\quad f^{(4)}(1) = 3\cdot 2\cdot 1 = -3!.$

  $\ldots$
- $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{x^{k-1}},\ x>0,\ k\in N.$ $\quad\Rightarrow\quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$

$\Rightarrow$ • $T_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(x-1)^k}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(x-1)^k}{k},\ x\in O(1).$$

(%i1) `taylor(log(x),x,1,10);`

(%o1) $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^7}{7}-\frac{(x-1)^8}{8}+\frac{(x-1)^9}{9}-\frac{(x-1)^{10}}{10}+\cdots$

Niekedy je výhodnejšie $f(x)=\ln x$ vyjadriť v tvare Maclaurinovho polynómu.

- $x=t+1. \ \Rightarrow f(t)=\ln(t+1),\ t\in(-1;\infty),$

$$T_n(t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k},\ t\in O(0).$$

(%i1) `taylor(log(x+1),x,0,10);`

(%o1) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$

$f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in R. \ \Rightarrow$ Maclaurinov polynóm stupňa $n\in N$ má tvar:

- $T_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!},\ x\in R.$

$f(x)=\sin x,\ x\in R. \ \Rightarrow$ Maclaurinov polynóm stupňa $n\in N$ má tvar:

- $T_{2k+1}(x)=0+\frac{x}{1!}+0+\frac{-x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!},\ x\in R.$

$f(x)=\cos x,\ x\in R. \ \Rightarrow$ Maclaurinov polynóm stupňa $n\in N$ má tvar:

- $T_{2k}(x)=1+0+\frac{-x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!},\ x\in R.$

(%i1) `taylor(exp(x),x,0,10);`

(%o1) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}+\cdots$

(%i2) `taylor(sin(x),x,0,10);`

(%o2) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}+\cdots$

(%i3) `taylor(cos(x),x,0,10);`

(%o3) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}-\frac{x^{10}}{3628800}+\cdots$

- Funkcie $y=\mathrm{e}^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ môžeme aproximovať pre každé $x\in R$.
- Požadovanú presnosť dosiahneme dostatočným zväčšením stupňa n.

$f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Označme $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$, $t = x^2$. $\Rightarrow$ $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} = g(x^2) = g(t) = \mathrm{e}^t$.

Pre Maclaurinov polynóm $P_n(t)$ funkcie $g(t)$, $t \geq 0$
a Maclaurinov polynóm $T_{2n}(x)$ funkcie $f(x)$, $x \in R$ platí:

- $P_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(x^2)^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = T_{2n}(x).$

(%i1) `taylor(exp(x^2),x,0,10);`

(%o1) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \cdots$

(%i3) `subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,5)); subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,10));`

(%o2) $\frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

(%o3) $\frac{x^{20}}{3628800} + \frac{x^{18}}{362880} + \frac{x^{16}}{40320} + \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

Na záver tejto časti nájdeme Maclaurinov polynóm stupňa 10 funkcie $f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x+1}$.

(%i1) `taylor(log((x^2+1)/(x+1)),x,0,10);`

(%o1) $-x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9} + \frac{3x^{10}}{10} + \cdots$

(%i3) `tp1(x):= taylor(log(x^2+1),x,0,10)-taylor(log(x+1),x,0,10)$ tp1(x);`

(%o3) $-x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9} + \frac{3x^{10}}{10} + \cdots$

(%i6) `tp2(x):=ratsimp(subst(x^2,t,taylor(log(t+1),t,0,5))-taylor(log(x+1),x,0,10))$`
`tp2(x); tp1(x)-tp2(x);`

(%o5) $\frac{756x^{10} - 280x^9 - 315x^8 - 360x^7 + 1260x^6 - 504x^5 - 630x^4 - 840x^3 + 3780x^2 - 2520x}{2520}$

(%o6) $0 + \cdots$

Priebeh funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna.

$I \subset R$ je interval, f je spojitá na I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f je na intervale I $\left\{ \begin{array}{lll} \text{konštantná.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) = 0 \\ \text{rastúca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) > 0 \\ \text{neklesajúca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) \geq 0 \\ \text{klesajúca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) < 0 \\ \text{nerastúca.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f'(x) \leq 0 \end{array} \right\}$ pre všetky $x \in I$.

Body, v ktorých má spojitá funkcia f lokálne extrémy, úzko súvisia s intervalmi, na ktorých je táto funkcia ostro monotónna.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in D(f),\ f(x_0) \text{ je lokálny extrém.} \\ f'(x_0) \text{ existuje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f'(x_0) = 0.$$

- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje lokálny extrém v bode x_0.
- Lokálny extrém môže byť aj bode, v ktorom derivácia neexistuje.

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie musíme:

- Vyšetriť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(x_0) = 0$.
- Vyšetriť všetky body $x_0 \in D(f)$, v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje.

Pri hľadaní globálnych extrémov funkcie musíme navyše:

- Vyšetriť hraničné body $D(f)$.

Bod $x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie** f, ak existuje $f'(x_0) = 0$.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$. Pre všetky $x \in O(x_0)$ existuje $f'(x)$ a platí:

- $f'(x) > 0$ pre $x < x_0$, $f'(x) < 0$ pre $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.
- $f'(x) < 0$ pre $x < x_0$, $f'(x) > 0$ pre $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.
- $f'(x) < 0$ pre $x \neq x_0$, resp. $f'(x) > 0$ pre $x \neq x_0$.
  $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ nie je lokálny extrém.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná. $\Rightarrow$

- $f''(x_0) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.
- $f''(x_0) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia konvexná alebo konkávna.

$I \subset R$ je interval, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f je na intervale I $\left\{\begin{array}{lcl} \text{konvexná.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ neklesajúca.} \\ \text{ostro konvexná.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ rastúca.} \\ \text{konkávna.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ nerastúca.} \\ \text{ostro konkávna.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f' \text{ je na } I \text{ klesajúca.} \end{array}\right.$

$I \subset R$ je interval, pre všetky $x \in I$ exituje $f''(x) \in R$. $\Rightarrow$

- f je na intervale I $\left\{\begin{array}{lcl} \text{ostro konvexná.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) > 0 \\ \text{konvexná.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) \geq 0 \\ \text{ostro konkávna.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) < 0 \\ \text{konkávna.} & \Leftrightarrow & \bullet\ f''(x) \leq 0 \end{array}\right\}$ pre všetky $x \in I$.

Pri vyšetrovaní konvexnosti a konkávnosti funkcie f musíme:

- Vyšetriť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$.
- Vyšetriť všetky body $x_0 \in D(f)$, v ktorých je f spojitá a $f'(x_0)$ neexistuje.

$\left.\begin{array}{l} x_0 \in D(f) \text{ je inflexný bod funkcie } f. \\ f''(x_0) \text{ existuje.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ f''(x_0) = 0.$

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$. Pre všetky $x \in O(x_0)$ existuje $f''(x)$ a platí:

- $f''(x) > 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) < 0$ pre $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 je inflexný bod funkcie f.
- $f''(x) < 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) > 0$ pre $x > x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 je inflexný bod funkcie f.
- $f''(x) < 0$ pre $x \neq x_0$, resp. $f''(x) > 0$ pre $x \neq x_0$.
  $\Rightarrow$ • x_0 nie je inflexný bod funkcie f.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. $\Rightarrow$ • x_0 je inflexný bod funkcie f.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \in N$.

$n = 2k-1$, $k \in N$ (nepárne). $\Rightarrow$
- $f(x_0)$ nie je lokálny extrém.
- f je rastúca v bode x_0 pre $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- f je klesajúca v bode x_0 pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$n = 2k$, $k \in N$ (párne). $\Rightarrow$
- $f(x_0)$ je lokálny extrém.
- $f(x_0)$ ostré minimum pre $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- $f(x_0)$ ostré maximum pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$.

$n = 2k+1$, $k \in N$ (nepárne). $\Rightarrow$ • x_0 je inflexný bod funkcie f.

$n = 2k$, $k \in N$ (párne). $\Rightarrow$
- f je ostro konvexná v bode x_0 pre $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- f je ostro konkávna v bode x_0 pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetrit priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, resp. iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body; intervaly, na ktorých je f kladná a záporná.
- f', stacionárne body, lokálne a globálne extrémy; intervaly, na ktorých je f rastúca, klesajúca a konštantná.
- f'', inflexné body; intervaly, na ktorých je f konvexná a konkávna.
- Asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.
- Obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.

Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne graf. Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje. Mnohokrát sú ale nedostatočné, preto ich musíme doplniť vhodne zvolenými funkčnými hodnotami.

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{8x-16}{x^2}$.

(%i1) `f(x):=(8*x-16)/x^2;`
(%o1) $f(x) := \frac{8x-16}{x^2}$

- $D(f) = R - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Pomocou príkazu **denom** (denominator) zistíme, kedy je menovateľ nulový.

(%i3) `fm:denom(f(x));solve(fm=0,x);`
(fmen) x^2
(%o3) $[x = 0]$

- f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.
- f je spojitá na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, v bode 0 je nespojitá.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right) = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0.$

(%i5) `limit(f(x),x,minf);limit(f(x),x,inf);`
(%o4) 0
(%o5) 0

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$.

(%i7) `limit(f(x),x,0,minus);limit(f(x),x,0,plus);`
(%o6) $-\infty$
(%o7) $-\infty$

- Bod $x = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu.
- $x = 0$ je asymptota bez smernice.
- $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = 0. \Leftrightarrow 8x - 16 = 0. \Leftrightarrow x = 2.$

Pomocou príkazu **num** (numerator) zistíme, kedy je čitateľ nulový.

(%i9) `fcit:num(f(x));solve(fcit=0,x);`
(fcit) $8x - 16$
(%o9) $[x = 2]$

- $x = 2$ je nulový bod f. $\Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \text{ pre } x \in (-\infty; 0), \\ f(x) < 0 \text{ pre } x \in (0; 2), \\ f(x) > 0 \text{ pre } x \in (2; \infty). \end{cases}$

$f(2) = 0$, f nie je v bode $x = 0$ definovaná.

$\Rightarrow$ Funkcia f nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$.

$\Rightarrow$ Stačí zvoliť ľubovoľný bod v daných intervaloch a overiť jeho hodnotu.

```
(%i13) f(2);f(-1);f(1);f(3);
(%o10) 0
(%o11) -24
(%o12) -8
(%o13) 8/9
```

- $f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x-8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i15) f1(x):=diff(f(x),x,1)$ ratsimp(f1(x));
(%o15) -(8x-32)/x^3
```

- $f'(x) = \frac{32-8x}{x^3} = 0. \iff 32 - 8x = 0. \iff x = 4.$

```
(%i16) solve(f1(x)=0,x);
(%o16) [x = 4]
```

- f' je v bode 0 nespojitá.

```
(%i18) f1men:denom(ratsimp(f1(x)));solve(f1men=0,x);
(f1men) x^3
(%o18) [x = 0]
```

- $x = 4$ je nulový bod f'. $\Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0, \ f \text{ je klesajúca pre } x \in (-\infty; 0), \\ f'(x) > 0, \ f \text{ je rastúca} \quad \text{pre } x \in (0; 4), \\ f'(x) < 0, \ f \text{ je klesajúca pre } x \in (4; \infty). \end{cases}$

$f'(4) = 0$, f' nie je v bode $x = 0$ definovaná.

$\Rightarrow$ Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$, $(4; \infty)$.

$\Rightarrow$ Stačí zvoliť ľubovoľný bod v daných intervaloch a overiť jeho hodnotu.

```
(%i22) subst(4,x,f1(x));subst(-1,x,f1(x));subst(1,x,f1(x));subst(5,x,f1(x));
(%o19) 0
(%o20) -40
(%o21) 24
(%o22) -8/125
```

- f má v bode $x = 4$ lokálne maximum a aj globálne maximum $f(4) = 1$.

(%i23) `f(4);`
(%o23) 1

- f nemá lokálne a ani globálne minimum.
- $f''(x) = \left[\frac{32-8x}{x^3}\right]' = \frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6} = \frac{16x^3-96x^2}{x^6} = \frac{16x-96}{x^4}$, $x\in R$, $x\neq 0$.

(%i25) `f2(x):=diff(f(x),x,2)$ ratsimp(f2(x));`
(%o25) $\frac{16x-96}{x^4}$

- $f''(x) = \frac{16x-96}{x^4} = 0. \;\Leftrightarrow\; 16x-96=0. \;\Leftrightarrow\; x=6.$

(%i26) `solve(f2(x)=0,x);`
(%o26) $[x=6]$

- f'' je v bode 0 nespojitá.

(%i28) `f2men:denom(ratsimp(f2(x)));solve(f2men=0,x);`
(f2men) x^4
(%o28) $[x=0]$

- $x=6$ je nulový bod f''. $\Rightarrow \begin{cases} f''(x)<0,\ f \text{ je konkávna pre } x\in(-\infty;0), \\ f''(x)<0,\ f \text{ je konkávna pre } x\in(0;6), \\ f''(x)>0,\ f \text{ je konvexná pre } x\in(6;\infty). \end{cases}$

$f'(6)=0$, f'' nie je v bode $x=0$ definovaná.

$\Rightarrow$ Funkcia f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty;0)$, $(0;6)$, $(6;\infty)$.

$\Rightarrow$ Stačí zvoliť ľubovoľný bod v daných intervaloch a overiť jeho hodnotu.

(%i32) `subst(6,x,f2(x));subst(-1,x,f2(x));subst(1,x,f2(x));subst(7,x,f2(x));`
(%o29) 0
(%o30) -112
(%o31) -80
(%o32) $\frac{16}{2401}$

- Bod $x=6$ je inflexný bod funkcie f.

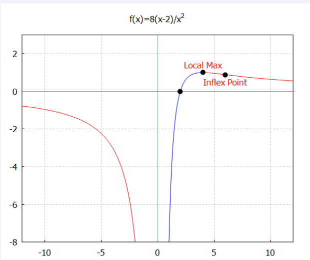
(%i33) `f(6);`
(%o33) $\frac{8}{9}$

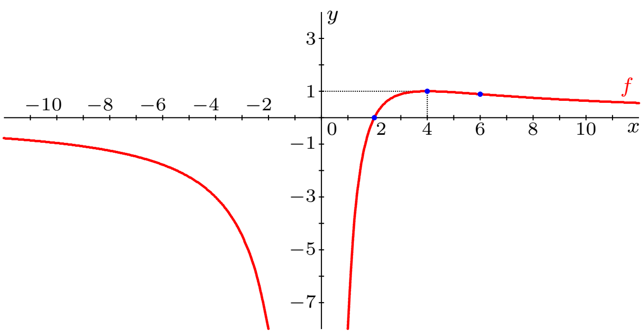
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = 0-0=0. \\ \bullet\ q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-0\cdot x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow\ y = kx+q = 0.$$

```
(%i35) km:limit(f(x)/x,x,minf);kp:limit(f(x)/x,x,inf);
(km)   0
(kp)   0
(%i37) qm:limit(f(x)-km*x,x,minf);qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf);
(km)   0
(kp)   0
```

- $y = 0$ je asymptota so smernicou.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.

```
(%i38) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-12,12],yrange=[-8,3],
       title="f(x)=8(x-2)/x^2",color=blue,explicit(f(x),x,0,4),
       color=red,explicit(f(x),x,-12,0),explicit(f(x),x,4,12),
       label(["Inflex Point",6,f(6)-.4],["Local Max",4,f(4)+.4]),
       color=green,parametric(0,t,t,-8,3),parametric(t,0,t,-12,12),
       color=black,point_type=7,points([[4,f(4)],[6,f(6)],[2,f(2)]]))$
```





Graf funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$

Literatúra

[1] Blaško R., Matematická analýza I, Žilina, EDIS 2009.

[2] Blaško R., Matematická analýza I, skriptum, `https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/sa1.pdf`.

[3] Blaško R., Nurčitý a určitý integrál reálnej funkcie, skriptum, `https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/sa2.pdf`.

[4] Blaško R., Základy lineárnej algebry a základy matematickej analýzy pre manažérov, skriptum, `https://frcatel.fri.utc.sk/~beerb/ma1/zla-zma.pdf`.

[5] Buša J., Maxima Open source systém počítačovej algebry, online, `https://people.tuke.sk/jan.busa/kega/maxima/maxima.pdf`, 2006.

[6] Bittinger M. L., Ellenbogen D. J., Surgent S. A., Calculus and its Applications, Addisok-Wesley, ISBN-10: 0-321-69433-3.

[7] Crowell B., Calculus, Light and Matter, www.lightandmatter.com, March 2010.

[8] Hannan Z., wxMaxima for Calculus I and II, Solano Community College, `https://wxmaximafor.wordpress.com/`.

[9] Mardsen J., Weinstein A., Calculus I — III, Springer.

[10] Strang G., Calculus, Wellesley-Cambridge Press, Box 82-279 Wellesley MA 02181.