Matematická analýza 1

2023/2024

8. Derivácia funkcie – aplikácie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou získate nápomoc.
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

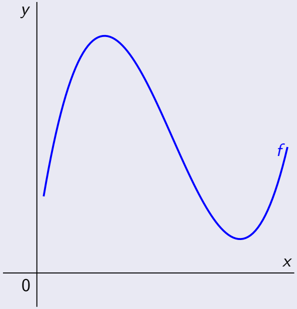
Vety o strednej hodnote – $\mathrm{NP}_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Vety o strednej hodnote – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

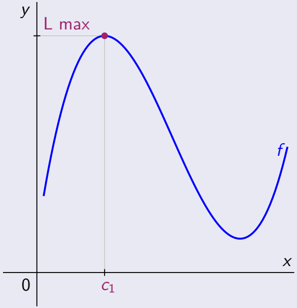
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,



Vety o strednej hodnote – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

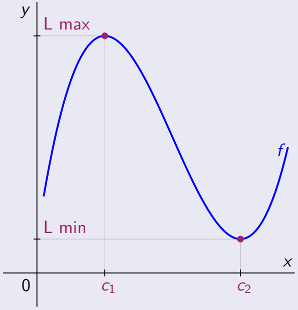
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.



Vety o strednej hodnote – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

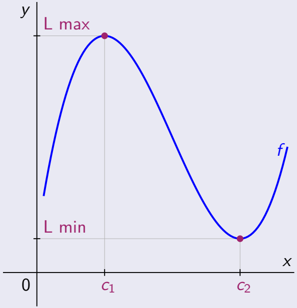
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.



Vety o strednej hodnote – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.



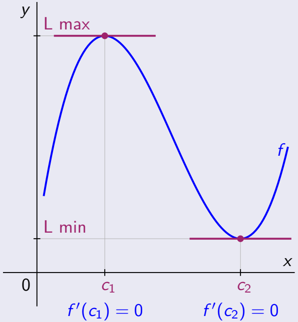
Vety o strednej hodnote – NP$_\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$

- $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]



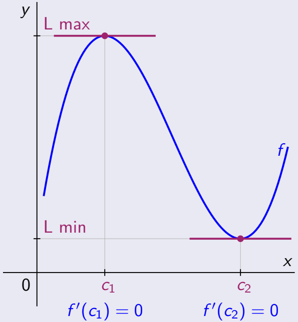
Vety o strednej hodnote – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému. [Viď Pr I.]



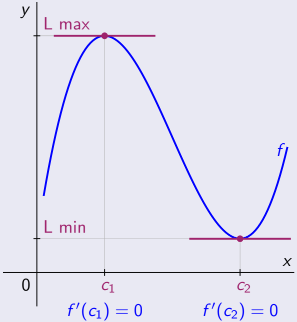
Vety o strednej hodnote – $\text{NP}_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]



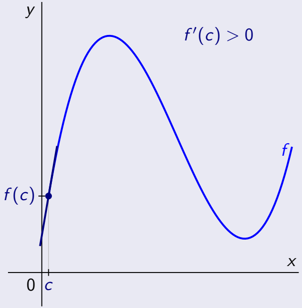
Vety o strednej hodnote – $\text{NP}_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]



Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

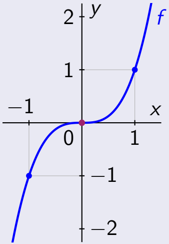
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.

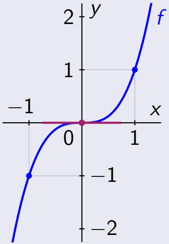


- $f(x) = x^3,\ x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



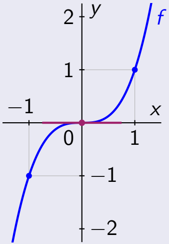
- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

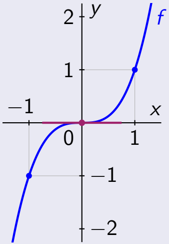
- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



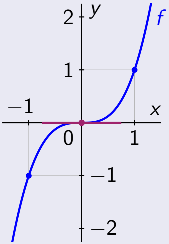
- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

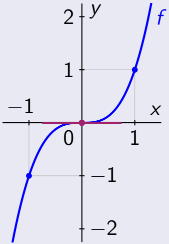
- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

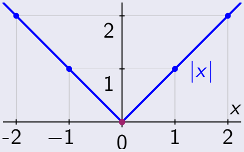
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

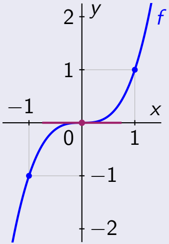


- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

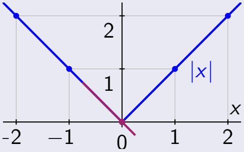
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



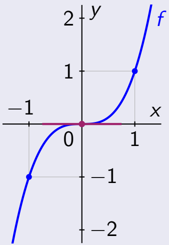
- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

- $x \leq 0$: $f'(x) = [-x]' = -1$. • $f'_-(0) = -1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

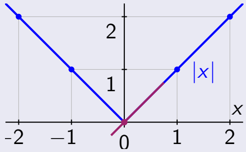
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

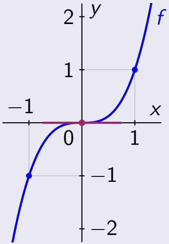
- $x \geq 0$: $f'(x) = [x]' = 1$. • $f'_+(0) = 1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



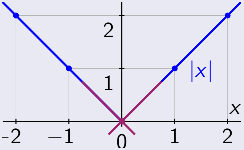
- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:

  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



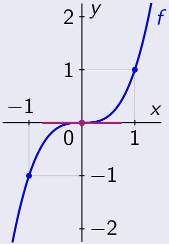
- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

- $x \leq 0$: $f'(x) = [-x]' = -1$. • $f'_-(0) = -1$.
- $x \geq 0$: $f'(x) = [x]' = 1$. • $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

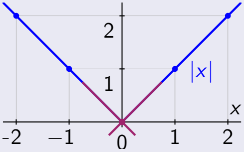
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

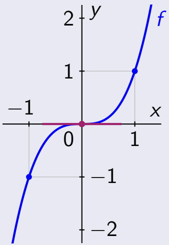
- $x \leq 0$: $f'(x) = [-x]' = -1$. • $f'_-(0) = -1$.
- $x \geq 0$: $f'(x) = [x]' = 1$. • $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

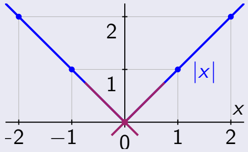
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2$, $x \in R$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

- $x \leq 0$: $f'(x) = [-x]' = -1$. • $f'_-(0) = -1$.
- $x \geq 0$: $f'(x) = [x]' = 1$. • $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.
- To znamená, že pri hľadaní lokálnych extrémov musíme overiť aj všetky body, v ktorých derivácia neexistuje.

Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

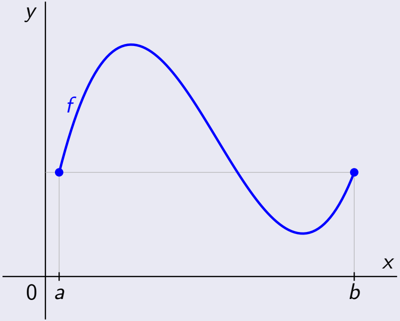
[1. veta o strednej hodnote.]

Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.

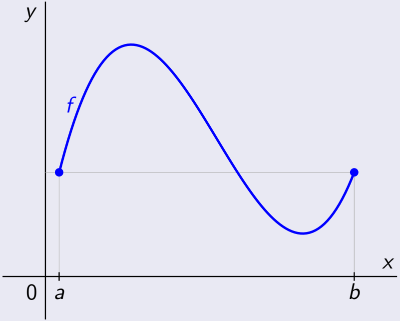


Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

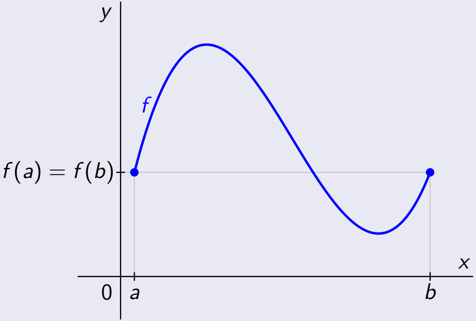


Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- Platí $f(a) = f(b)$.



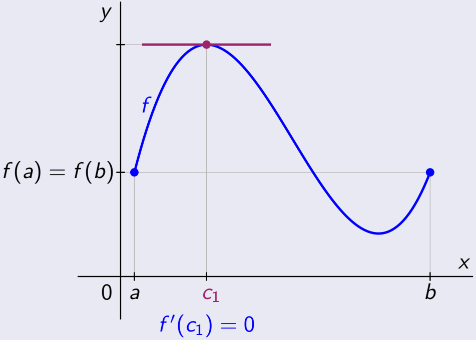
Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- Platí $f(a) = f(b)$.

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = 0$.



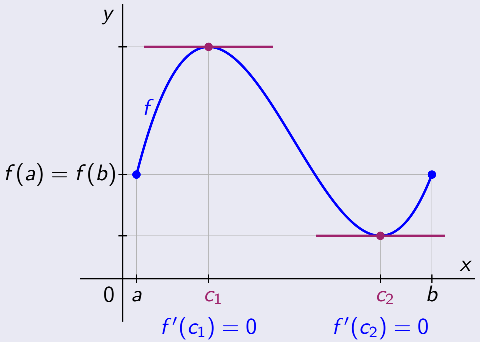
Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- Platí $f(a) = f(b)$.

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = 0$.



Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

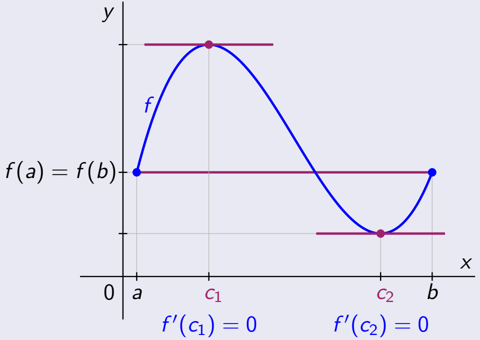
Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- Platí $f(a) = f(b)$.

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = 0$.

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$,



Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

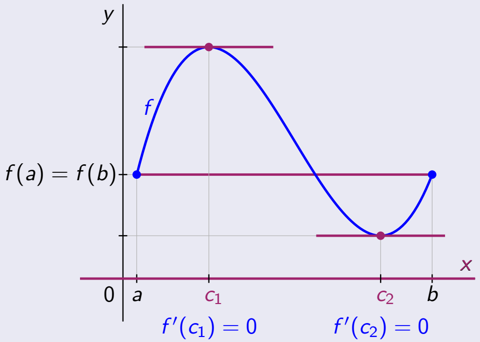
Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- Platí $f(a) = f(b)$.

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = 0$.

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, t. j. s osou x.



Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

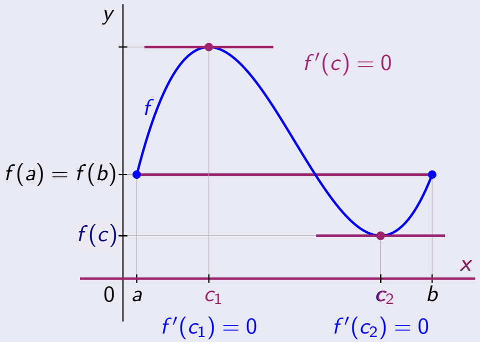
Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x\in(a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- Platí $f(a) = f(b)$.

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c\in(a; b)$ také, že $f'(c) = 0$.

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, t. j. s osou x.



Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

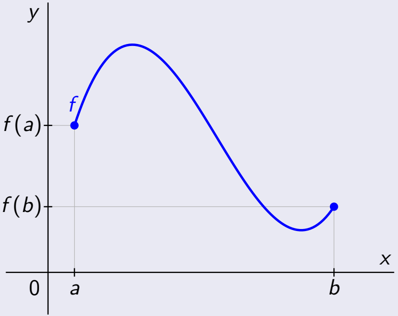
[2. veta o strednej hodnote.]

Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.

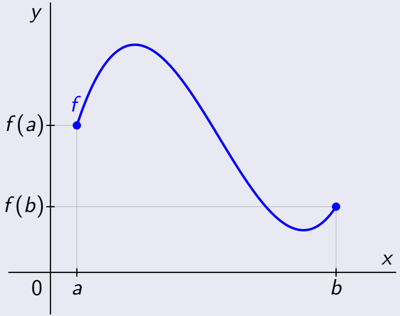


Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).



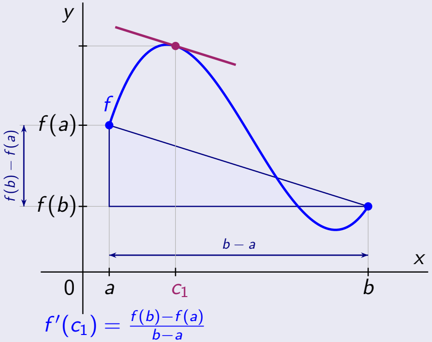
Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



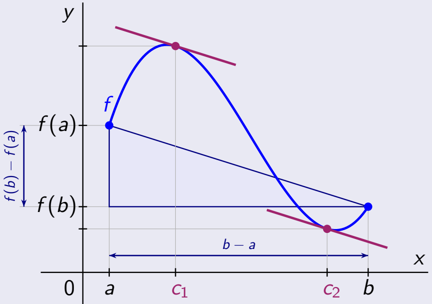
Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x\in(a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c\in(a; b)$ také, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



$f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\qquad$ $f'(c_2) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

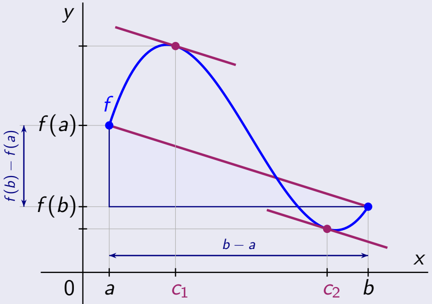
Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.



$f'(c_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\qquad$ $f'(c_2) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

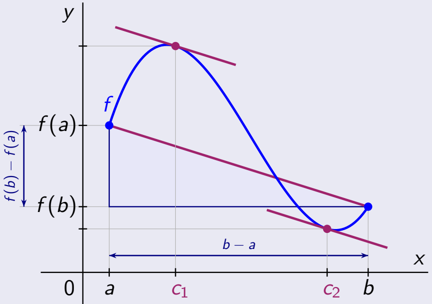
Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.
- Pre $f(a) = f(b)$ dostaneme Rolleho vetu o strednej hodnote.



$f'(c_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\qquad$ $f'(c_2) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

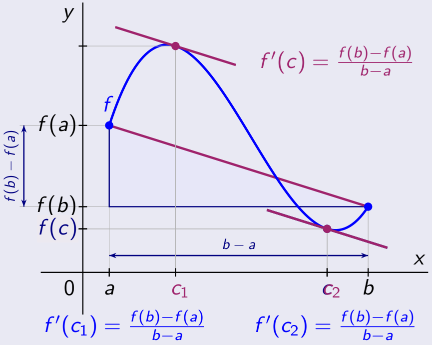
Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

$\Rightarrow$ Existuje aspoň jedno $c \in (a; b)$ také, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.
- Pre $f(a) = f(b)$ dostaneme Rolleho vetu o strednej hodnote.



Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval,

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

  - Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

  - Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0;2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2;4) \end{cases}$ nie je konštantná.

  - $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

  - Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0;2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2;4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0;2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2;4). \end{cases}$

  - $I = (0;2) \cup (2;4)$ nie je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$

- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0;2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2;4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0;2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2;4). \end{cases}$

- $I = (0;2) \cup (2;4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2\rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$

- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2\rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2\rangle, \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$

- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2 \rangle, \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.

- $I = \langle 0; 2 \rangle$ je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
  - Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
  - $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
  - Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2\rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2\rangle, \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2\rangle, \\ \text{neexistuje} & \text{pre } x = 1. \end{cases}$
  - $I = \langle 0; 2\rangle$ je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$

- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2 \rangle, \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2 \rangle, \\ \text{neexistuje} & \text{pre } x = 1. \end{cases}$

- $I = \langle 0; 2 \rangle$ je interval.
- Nie pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$,

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4\rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$

- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2\rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

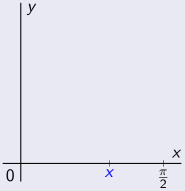
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2\rangle, \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2\rangle, \\ \text{neexistuje} & \text{pre } x = 1. \end{cases}$

[• $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-2}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = \infty$. • $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1-2}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$. • $f'_-(1) \neq f'_+(1)$.]

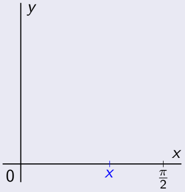
- $I = \langle 0; 2\rangle$ je interval.
- Nie pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$, neplatí pre $x = 1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $\sin x < x$.



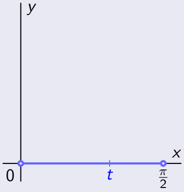
Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $x < \operatorname{tg} x$.



Vety o strednej hodnote – Príklady

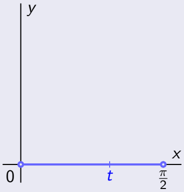
Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.



Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

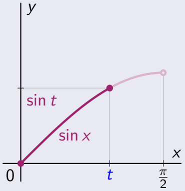


Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

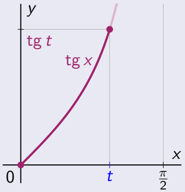
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.



Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.

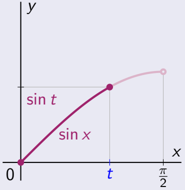


Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

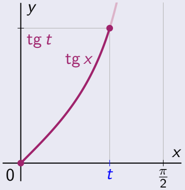
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$



Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

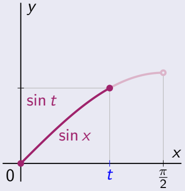


Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t\rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

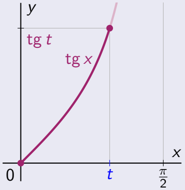


Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t\rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

  a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\dfrac{1}{\cos^2 x} > 1$.



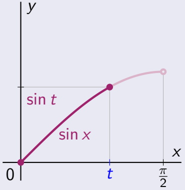
Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]



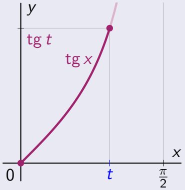
Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\dfrac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]



Vety o strednej hodnote – Príklady

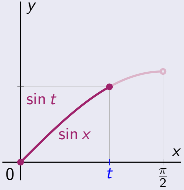
Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\cos c = \dfrac{\sin t - \sin 0}{t-0} = \dfrac{\sin t}{t}$.



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

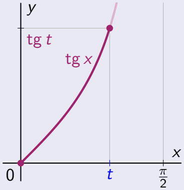
Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\dfrac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\dfrac{1}{\cos^2 c} = \dfrac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 0}{t-0} = \dfrac{\operatorname{tg} t}{t}$.



Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $\sin x < x$.

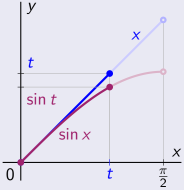
Zvoľme ľubovoľne $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\cos c = \frac{\sin t - \sin 0}{t-0} = \frac{\sin t}{t}$.

$\Rightarrow$ • $\sin t = t \cdot \cos c < t \cdot 1 = t$ pre $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

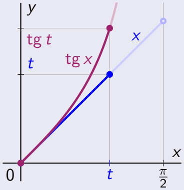
- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\frac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 0}{t-0} = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$.

$\Rightarrow$ • $\operatorname{tg} t = \frac{t}{\cos^2 c} > \frac{t}{1} = t$ pre $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

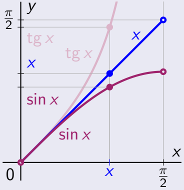
Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\cos c = \frac{\sin t - \sin 0}{t-0} = \frac{\sin t}{t}$.

$\Rightarrow$ • $\sin t = t \cdot \cos c < t \cdot 1 = t$ pre $t \in (0; \frac{\pi}{2})$. $\Rightarrow$ • $\sin x < x$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

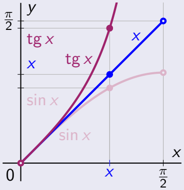
- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\frac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 0}{t-0} = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$.

$\Rightarrow$ • $\operatorname{tg} t = \frac{t}{\cos^2 c} > \frac{t}{1} = t$ pre $t \in (0; \frac{\pi}{2})$. $\Rightarrow$ • $x < \operatorname{tg} x$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$,

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$. $\left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]$

resp. 1'. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. $\left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1'. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]

2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

[T. j. existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. $\left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]$

   resp. 1' $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. $\left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right]$
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

$\left[\text{T. j. existuje } \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.\right]$

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

[T. j. existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Longrightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

[T. j. existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?,$

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

[T. j. existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = [\text{L'h } \tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?,$$

  t. j. limita neexistuje,

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1' $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

[T. j. existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = [\text{L'h } \tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\,(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?,$$

  t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. $\left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]$

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. $\left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right]$
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

$\left[\text{T. j. existuje } \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.\right]$

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?,$$

  t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. $\left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]$

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. $\left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right]$
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

[T. j. existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?,$$

  t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. $\left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]$

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. $\left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right]$
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

$\left[\text{T. j. existuje } \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.\right]$

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?,$$

  t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$$

L'H pravidlo môžeme použiť opakovane.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

1. Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

   resp. 1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
2. Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.
3. Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}$.

$\Rightarrow$ Existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

[T. j. existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad 3 sa overuje až počas výpočtu. [Pr I]

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok. [Pr II]

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?,$$

  t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť. [Pr II]

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$$

L'H pravidlo môžeme použiť opakovane. [Pr III, Pr IV]

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme.

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$ [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$ [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$.
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1$.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad 3 overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \dfrac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$

L'Hospitalo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$ $\left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty}$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \dfrac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad 3 overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{\cos 0}{1}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \dfrac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{\cos 0}{1} = 1.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ pre $a > 0.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ pre $a > 0.$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[a^x - 1]'}{[x]'}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ pre $a > 0.$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[a^x - 1]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x \cdot \ln a - 0}{1}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x > 0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a > 0.$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[a^x-1]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x \cdot \ln a - 0}{1} = \frac{a^0 \cdot \ln a}{1}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

- $= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h}\,\tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ❸ overujeme počas výpočtu.]

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$
2. Pre všetky $x>0$ existujú derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = [x]' = 1.$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

- $= \left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \text{ pre } a>0.$$

- $= \left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{[a^x-1]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a-0}{1} = \frac{a^0\cdot\ln a}{1} = \ln a.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0$
  - $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0$

  - $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$

    [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

    pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí:

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0$

  - $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$

[Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ a $-|x| \le x \le |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0$

  - $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$

[Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí:
- $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ a $-|x| \le x \le |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$\Rightarrow$
- $-\frac{2|x|}{\cos x} \le \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \le \frac{2|x|}{\cos x}$.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0$

  - $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$

[Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$\Rightarrow$ • $-\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0$.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = \quad - \, ?$

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$ [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

  pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ a $-|x| \le x \le |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

  $\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \le \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \le \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} \le L_1 \le \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} = 0.$

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = \quad - \,?$

- $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$

  [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

  pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí:
  - $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

  $\Rightarrow$
  - $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$
  - $0 = -\lim_{x\to 0} \frac{2\,|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{2\,|x|}{\cos x} = 0.$

- $L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

  pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = \quad - \, ?$

- $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$ [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

  pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

  $\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} = 0.$

- $L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

  pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

  - $L_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$
  - $L_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = \quad - \,?$

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$ [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

  pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

  $\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} = 0.$

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

  pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$
  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1.$

  $\Big\}$ t. j. $1 \neq -1$.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?$, t. j. neexistuje.

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$ [Keďže $x\to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

  pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

  $\Rightarrow$ • $-\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim\limits_{x\to 0}\frac{2|x|}{\cos x} = 0$.

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

  pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$
  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1.$

  t. j. $1 \neq -1$.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože limita podielu derivovaných funkcií neexistuje.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x}-\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0-?,$ t. j. neexistuje. !!!

- $L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$

[Keďže $x\to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0)=(-1;1)$.]

pretože pre všetky $x\in O(0)-\{0\}$ platí: • $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ a $-|x|\leq x\leq |x|$ a $\cos x>\cos 1>0$.

$\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x}\leq\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x}\leq\frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0=-\lim_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x}\leq L_1\leq\lim_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x}=0$.

- $L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}=\{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}=\{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty}\to 0$ platí:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ L_2=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1. \\ \bullet\ L_2=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}}=\frac{-1}{\cos 0}=\frac{-1}{1}=-1. \end{array}\right\}\ \text{t. j. } 1\neq -1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ [L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože limita podielu derivovaných funkcií neexistuje.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?$, t. j. neexistuje. !!!

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$ [Keďže $x\to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

  pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ a $-|x| \le x \le |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

  $\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \le \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \le \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\,|x|}{\cos x} \le L_1 \le \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\,|x|}{\cos x} = 0.$

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

  pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$
  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1.$

  t. j. $1 \ne -1$.

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin\frac{1}{x}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ [L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože limita podielu derivovaných funkcií neexistuje.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?$, t. j. neexistuje. !!!

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0$, [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} = 0$.

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet\ L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{array}\right\} \text{t. j. } 1 \neq -1.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ [L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože limita podielu derivovaných funkcií neexistuje.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?$, t. j. neexistuje. !!!

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$ [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} = 0.$

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet\ L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{array}\right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right]$

$$= \left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\right]\left[\begin{array}{r} x\in R. \Rightarrow -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1. \Rightarrow -|x| \leq x\cdot\sin\frac{1}{x} \leq |x|. \\ \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to 0}|x| \leq \lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\sin\frac{1}{x}\right] \leq \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0. \end{array}\right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ [L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože limita podielu derivovaných funkcií neexistuje.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?$, t. j. neexistuje. !!!

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0$, [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1;1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: • $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$\Rightarrow$ • $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$ • $0 = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,|x|}{\cos x} = 0$.

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$.
- $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1$.

t. j. $1 \neq -1$.

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \left[x \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right]$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\right] \left[\begin{array}{l} x \in R. \Rightarrow -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1. \Rightarrow -|x| \leq x\cdot\sin\frac{1}{x} \leq |x|. \\ \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to 0}|x| \leq \lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\sin\frac{1}{x}\right] \leq \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0. \end{array}\right] = 1 \cdot 0$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože limita podielu derivovaných funkcií neexistuje.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-x^{-2})}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right] = 0 - ?$, t. j. neexistuje. !!!

- $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$ [Keďže $x \to 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

  pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí:
  - $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

  $\Rightarrow$
  - $-\frac{2\,|x|}{\cos x} \leq \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2\,|x|}{\cos x}$. $\Rightarrow$
  - $0 = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\,|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\,|x|}{\cos x} = 0.$

- $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje,

  pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ platí:
  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos 0}{\cos\frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$
  - $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos\pi}{\cos\frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1.$

  $\Big\}$ t. j. $1 \neq -1$.

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \left[x \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right]$

$$= \left[\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1\right] \left[\begin{array}{r} x \in R. \Rightarrow -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1. \Rightarrow -|x| \leq x \cdot \sin\frac{1}{x} \leq |x|. \\ \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to 0} |x| \leq \lim\limits_{x\to 0} \left[x \cdot \sin\frac{1}{x}\right] \leq \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0. \end{array}\right] = 1 \cdot 0 = 0.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h} \, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h} \, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $\cancel{= \left[\text{L'h}\ \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots}$.

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $\cancel{= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots}$

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $\cancel{= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots}$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $$\cancel{= \left[\text{L'h}\ \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots}$$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $\cancel{= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots}$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

  $= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $\cancel{= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots}$.

~~[Dostali sme pôvodnú limitu.]~~

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$
$$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

  $= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

  $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $\cancel{= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.}$

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

  $= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

  $= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

$$= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$$

$$= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2}$

$$= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$$

$$= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

  [Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

  $= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} =$ [Posledný predpoklad je overený až tu.]

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

$= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$

$= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \left[\begin{matrix}\text{Posledný predpoklad}\\ \text{je overený až tu.}\end{matrix}\right] = \frac{\cos 0}{6}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \cdots.$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2\cdot\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

$= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$

$= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \left[\begin{array}{c}\text{Posledný predpoklad}\\ \text{je overený až tu.}\end{array}\right] = \frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{6}.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n \in N$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n \in N$.

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n\in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$

  $\ldots$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n\in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$

  $\ldots$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n\in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n\in N$.

- $= \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n\in N$.

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n\in N$.

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ pre $n \in N$.

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty}$

L'Hospitalov pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^7}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^7}$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^7}$

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
$\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
$\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^7}$

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$ pre $n\in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}=\frac{e^\infty}{n!}=\frac{\infty}{n!}=\infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ pre $n\in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x}=\frac{n!}{e^\infty}=\frac{n!}{\infty}=0.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^7}$

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{7x^6}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln^3 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^7}$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$
  $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^3 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^4 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^7}$

- $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$
  $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^3 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^4 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^5 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^7}$

- $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$
  $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^3 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^4 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^5 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}$
  $= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2\cdot\ln^6 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \dfrac{e^\infty}{n!} = \dfrac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \dfrac{n!}{e^\infty} = \dfrac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^7}$

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$
  $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^3 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^4 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2} = \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^5 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}$
  $= \left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^6 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{2^\infty \ln^7 2}{7!} = \dfrac{\infty\cdot\ln^7 2}{7!}$

L'Hospitalov pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$ pre $n\in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}=\frac{e^\infty}{n!}=\frac{\infty}{n!}=\infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ pre $n\in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x}=\frac{n!}{e^\infty}=\frac{n!}{\infty}=0.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^7}$

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{7x^6}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln^3 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln^4 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2}=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln^5 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\cdot\ln^6 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{2^\infty\ln^7 2}{7!}=\frac{\infty\cdot\ln^7 2}{7!}=\left[\ln 2\approx 0{,}693147>0\right]=\frac{\infty}{7!}$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{nx^{n-1}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \dfrac{e^\infty}{n!} = \dfrac{\infty}{n!} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ pre $n \in N$. [L'H pravidlo sme použili n-krát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$
  $\cdots = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = \dfrac{n!}{e^\infty} = \dfrac{n!}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^7} = \infty$. [L'H pravidlo sme použili sedemkrát opakovane.]

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln 2}{7\cdot 6x^5} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^2 2}{7\cdot 6\cdot 5x^4}$
  $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^3 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^4 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2} = \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^5 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}$
  $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \ln 2\cdot\ln^6 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{2^\infty \ln^7 2}{7!} = \dfrac{\infty\cdot\ln^7 2}{7!} = \left[\ln 2 \approx 0{,}693147 > 0\right] = \dfrac{\infty}{7!} = \infty.$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov,

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$. .]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty\cdot 0$. .]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$. .]

- $$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \text{ pričom } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0. \\ \end{cases}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty\cdot 0$, • $\infty-\infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty\cdot 0$. .]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$. .]

- $$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0. \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty\cdot 0$, • $\infty-\infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right]. \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right]. \end{cases}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right]. \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right]. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [x \ln x]$ [Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right]. \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right]. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [x \ln x]$ [Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-1}}$$

- $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right]. \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right]. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [x \ln x]$ [Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{(\ln x)^{-1}} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{-(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{(\ln x)^{-2}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty\cdot 0$, • $\infty-\infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right]. \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right]. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}[x\ln x]$ [Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\ln x)^{-1}} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\ln x)^{-2}}$$
$$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-2(\ln x)^{-3}\cdot\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\ln x)^{-3}}$$

- $$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+} x$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0, • 0^0, • $1^{\pm\infty}$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right]. \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty. \quad \text{V tomto prípade použijeme } \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right]. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [x \ln x] = 0.$ [Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-1}} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-2}}$$
$$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-2(\ln x)^{-3}\cdot\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-3}} = \cdots.$$

[L'H pravidlo v tomto tvare nemôžeme použiť.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty - \infty$. .]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty - \infty$. .]

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)]$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right]$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty - \infty$. .]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty-\infty$. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty-\infty$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty - \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0} \left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty - \infty$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right]$

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right]$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty - \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0} \left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty - \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right],$$

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$
  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

- $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$
  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. ⇒ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right],$

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty-\infty$. ⇒ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$
  $$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$
  $$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}$$

- $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$
  $$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$
  $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$

  $= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$

  $= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$

  $= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$

  $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right]=\lim_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right],$$

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]=0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right]$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x(-\sin x)-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0\cdot 1}{2\cdot 1-0}$$

- $$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x(-\sin x)-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}$$
  $$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\right]=\frac{-0}{1+1}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right],$$

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right] = 0.$ [Typ $\infty-\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$
  $$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$
  $$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{-0-0\cdot 1}{2\cdot 1 - 0} = 0.$$

- $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$
  $$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$
  $$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.\right] = \frac{-0}{1+1} = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ ∞^0.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ ∞^0. .]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.$ [Typ ∞^0. .]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ ∞^0.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x) \ln f(x)}$,

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. .]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty.$ [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \infty.$ [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)=\infty.$ [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty.$ [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\infty}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $$=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\infty}}=\mathrm{e}^0=1.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $=\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

  $=\left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^0=1.$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. [Typ 0^∞.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$

  [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

  $=\left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\infty}}=\mathrm{e}^0=1$.

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$

  [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty.$ [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $=\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

  $=\left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\infty}}=\mathrm{e}^0=1.$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty.$ [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}=\left[\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\ln 0^+=-\infty\right.$

  [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{1}{0^+}\cdot\ln 0^+}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$
  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\infty}} = \mathrm{e}^0 = 1.$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a}\ln f(x) = \ln 0^+ = -\infty\right] = \mathrm{e}^{\infty\cdot(-\infty)}$
  [Typ 0^∞. $\Rightarrow$ Typ $\infty\cdot(-\infty)$.]
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{0^+}\cdot\ln 0^+} = \mathrm{e}^{\infty\cdot(-\infty)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$
  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = \left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)\\ \quad = \ln 0^+ = -\infty\end{array}\right] = e^{\infty\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty}$
  [Typ 0^∞. $\Rightarrow$ Typ $\infty\cdot(-\infty)=-\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{1}{0^+}\cdot\ln 0^+} = e^{\infty\cdot(-\infty)} = e^{-\infty}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0, ale nie typ 0^∞

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot\infty$.]

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1.$ [Typ ∞^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot\infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

  $= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. [Typ 0^∞.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a}\ln f(x) = \ln 0^+ = -\infty\right] = e^{\infty\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$

  [Typ 0^∞. $\Rightarrow$ Typ $\infty\cdot(-\infty)=-\infty$. V tomto prípade L'Hospitalovo pravidlo použiť nemôžeme.]

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{1}{0^+}\cdot\ln 0^+} = e^{\infty\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. .]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. .]

- $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. .]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$.

  [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ [Typ 0^0.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x$ [Typ 0^0.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ [Typ 0^0.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x$ [Typ 0^0.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln [\sin x]^x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=-\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ [Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x]^x$ [Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln[\sin x]^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln\sin x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln [\sin x]^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln \sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$

  $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln [\sin x]^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln \sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$

  $= \left[\text{L'h}\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$$
  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$$
  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=-\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x^{-1}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+} x}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x]^x$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln[\sin x]^x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln\sin x]'}{[x^{-1}]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right]}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$

pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1.$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}$$
$$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{\infty}{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0^+} x} = e^{-0} = e^0 = 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x = 1.$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[\sin x]^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}}$$
$$= \left[\text{L'h}\ \tfrac{\infty}{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln\sin x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right]} = e^{-0\cdot 1\cdot 1} = e^0 = 1.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $f(x)>0$ pre $x\in O(a)-\{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=-\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=1.$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x^{-1}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+} x}=\mathrm{e}^{-0}=\mathrm{e}^0=1.$$
  [O limitách $\lim\limits_{x\to 0^-} x^x$ a $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ nemá zmysel uvažovať,

$\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x]^x=1.$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln[\sin x]^x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}}$$
  $$=\left[\text{L'h}\,\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln\sin x]'}{[x^{-1}]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right]}=\mathrm{e}^{-0\cdot 1\cdot 1}=\mathrm{e}^0=1.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$. [Dostaneme typ $0\cdot(-\infty)$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1.$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$$
  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}} = \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+} x} = \mathrm{e}^{-0} = \mathrm{e}^0 = 1.$$
  [O limitách $\lim\limits_{x\to 0^-} x^x$ a $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ nemá zmysel uvažovať, pretože funkcia $f(x) = x^x$ nie je definovaná pre $x < 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x = 1.$

[Typ 0^0. $\Rightarrow$ Typ $0\cdot(-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$$
  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{\infty}{\infty}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \left[-x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right]} = \mathrm{e}^{-0\cdot 1\cdot 1} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. .]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$ [Typ $1^{\pm\infty}$. .]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. .]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. .]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)=0$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ [Typ $1^{\pm\infty}$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ [Typ $1^{\pm\infty}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{x}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos x}$

- $= \lim\limits_{x\to 0^+}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln (\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos x}{x}}$$

- $$= \lim_{x\to 0^+} (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left[(1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right]^{\frac{\cos x - 1}{x}}$$

pričom
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x}}$$

  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln\cos x]'}{[x]'}}$$

- $$= \lim_{x\to 0^+}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}} = \mathrm{e}$$

pričom

- $$\lim_{x\to 0^+}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\cos x-1 & x\to 0^+ \\ \cos x-1\le 1 & t\to 0^- \end{array}\right] = \lim_{t\to 0^-}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e},$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos x}{x}}$$
  $$= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\ln\cos x]'}{[x]'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}}$$

- $$= \lim_{x\to 0^+} (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \mathrm{e}$$

pričom
- $$\lim_{x\to 0^+} (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \cos x - 1 & x\to 0^+ \\ \cos x - 1 \le 1 & t\to 0^- \end{array}\right] = \lim_{t\to 0^-} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e},$$
- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$,

  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln (\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\cos x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x}}$

  $= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln\cos x]'}{[x]'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0^+} (1+\cos x-1)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}} = e^0$

pričom

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\cos x-1 & x\to 0^+ \\ \cos x-1\leq 1 & t\to 0^- \end{array}\right] = \lim\limits_{t\to 0^-} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x-1}{x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\sin x-0}{1} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = -\sin 0 = -0 = 0.$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$.]

- $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$
  pričom platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=0$. [Dostaneme typ $\pm\infty\cdot 0$.]

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1.$ [Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty\cdot 0$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

- $$=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x}}$$
  $$=\left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right]=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln\cos x]'}{[x]'}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x}}=\mathrm{e}^{\frac{-0}{1}}=\mathrm{e}^0=1.$$

- $$=\lim_{x\to 0^+}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}}=\mathrm{e}^0=1,$$

  pričom
  - $$\lim_{x\to 0^+}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } t=\cos x-1 & x\to 0^+\\ \cos x-1\leq 1 & t\to 0^-\end{array}\right]=\lim_{t\to 0^-}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e},$$
  - $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{x}=\left[\text{L'h}\ \tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x-0}{1}=-\lim_{x\to 0^+}\sin x=-\sin 0=-0=0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right]$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right]$

- $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\mathrm{L'h}\ \frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\mathrm{L'h}\ \frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$$

- $= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$$

- $= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x} = \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $= \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0} = \frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0}=\frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0}=\frac{1}{2}.$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \dfrac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $= \left[\text{L'h } \tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0} = \dfrac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0} = \dfrac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ pre $m,n\in N.$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$$

- $=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$$

- $=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0}=\frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0}=\frac{1}{2}.$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ pre $m,n\in N.$

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x - 0}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \dfrac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $= \left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0} = \dfrac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0} = \dfrac{1}{2}.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} \quad \text{pre } m,n\in N.$$

- $= \left[\text{L'h}\,\tfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $= \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0} = \frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0} = \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ pre $m,n\in N.$

- $= \left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0} = \frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0} = \frac{1}{2}.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n} \text{ pre } m,n\in N.$$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $=\left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0}=\frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0}=\frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$ pre $m,n\in N.$

- $=\left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}}=\frac{m}{n}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ pre $m,n\in N.$

- $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{m}}-1}{x^{\frac{1}{n}}-1}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0}=\frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0}=\frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$ pre $m,n\in N.$

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}}=\frac{m}{n}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ pre $m,n\in N.$

- $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{m}}-1}{x^{\frac{1}{n}}-1}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}-0}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-0}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0} = \frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0} = \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$ pre $m,n\in N.$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ pre $m,n\in N.$

- $= \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{m}}-1}{x^{\frac{1}{n}}-1} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}-0}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-0} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{nx^{\frac{1}{m}-1}}{mx^{\frac{1}{n}-1}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0} = \frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0} = \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$ pre $m,n\in N.$

- $= \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ pre $m,n\in N.$

- $= \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{m}}-1}{x^{\frac{1}{n}}-1} = \left[\text{L'h}\ \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}-0}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-0} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{nx^{\frac{1}{m}-1}}{mx^{\frac{1}{n}-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{n\cdot 1^{\frac{1}{m}-1}}{m\cdot 1x^{\frac{1}{n}-1}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]=0.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-0-0}{1+1-0\cdot 0}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}.$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{e^x+xe^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$
  $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-0}{e^x+e^x+xe^x-0}=\frac{1-0}{1+1+0\cdot 1-0}=\frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$ pre $m,n\in N.$

- $=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}-0}{nx^{n-1}-0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}}=\frac{m}{n}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{n}{m}$ pre $m,n\in N.$

- $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{m}}-1}{x^{\frac{1}{n}}-1}=\left[\text{L'h}\,\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}-0}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{nx^{\frac{1}{m}-1}}{mx^{\frac{1}{n}-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{n\cdot 1^{\frac{1}{m}-1}}{m\cdot 1x^{\frac{1}{n}-1}}=\frac{n}{m}.$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$,
$O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x \in O(x_0).$$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$,
$O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$$
  $$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}, \; x \in O(x_0).$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x \in O(x_0).$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

- $$T_n(x) = T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h \in O(0).$$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x \in O(x_0).$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

- $$T_n(x) = T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h \in O(0).$$

Taylorov polynóm (stupňa n) funkcie f so stredom $x_0 = 0$,

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$,
$O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x \in O(x_0).$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

- $$T_n(x) = T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h \in O(0).$$

Taylorov polynóm (stupňa n) funkcie f so stredom $x_0 = 0$, t. j. funkcia

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!},\ x \in O(0)$$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}, \ x \in O(x_0).$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

- $$T_n(x) = T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}, \ h \in O(0).$$

Taylorov polynóm (stupňa n) funkcie f so stredom $x_0 = 0$, t. j. funkcia

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}, \ x \in O(0)$$

sa nazýva Maclaurinov polynóm (stupňa n) funkcie f.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}, \; x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}$, $x \in O(x_0)$. [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}, \; x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}, \; x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \; x \in O(x_0), & \\ & \end{cases}$ [Lagrangeov tvar zvyšku.]

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, \ x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, \ x \in O(x_0), \end{cases}$ [Cauchyho tvar zvyšku.]

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!},\ x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in O(x_0), & \text{[Lagrangeov tvar zvyšku.]} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!},\ x \in O(x_0), & \text{[Cauchyho tvar zvyšku.]} \end{cases}$

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$,
$O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}, \ x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Lagrangeov tvar zvyšku.]} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Cauchyho tvar zvyšku.]} \end{cases}$

pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$, $x \in O(x_0)$. [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Lagrangeov tvar zvyšku.]} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Cauchyho tvar zvyšku.]} \end{cases}$

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x.] pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!},\ x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in O(x_0), & \text{[Lagrangeov tvar zvyšku.]} \\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!},\ x \in O(x_0), & \text{[Cauchyho tvar zvyšku.]} \end{cases}$$

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x.] pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0;1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!},\ x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in O(x_0), & \text{[Lagrangeov tvar zvyšku.]} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!},\ x \in O(x_0), & \text{[Cauchyho tvar zvyšku.]} \end{cases}$

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x.] pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Aproximácia funkcie $f(x)$ pomocou Taylorovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 \in D(f)$:

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$, $x \in O(x_0)$. [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Lagrangeov tvar zvyšku.]} \\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Cauchyho tvar zvyšku.]} \end{cases}$$

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x.] pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Aproximácia funkcie $f(x)$ pomocou Taylorovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 \in D(f)$:

- Má lokálny charakter v okolí $O(x_0)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in N$, $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}, \ x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0.]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Lagrangeov tvar zvyšku.]} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)\cdot(x-\xi)^n}{n!}, \ x \in O(x_0), & \text{[Cauchyho tvar zvyšku.]} \end{cases}$$

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x.] pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Aproximácia funkcie $f(x)$ pomocou Taylorovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 \in D(f)$:

- Má lokálny charakter v okolí $O(x_0)$.
- Je najlepšia zo všetkých aproximácií funkcie f pomocou polynómov stupňa n.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1,\ x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1,$

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1,$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$
nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$,

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$,

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1,$
- $f'(x) = 3x^2+6x+1,$
- $f''(x) = 6x+6,$
- $f'''(x) = 6.$

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1,$
- $f'(c) = 3c^2+6c+1,$
- $f''(c) = 6c+6,$
- $f'''(c) = 6.$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1,$ • $f'(x) = 3x^2+6x+1,$ • $f''(x) = 6x+6,$ • $f'''(x) = 6.$

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1,$ • $f'(c) = 3c^2+6c+1,$ • $f''(c) = 6c+6,$ • $f'''(c) = 6.$

- $T_0(x) = f(c)$

  $= (c^3+3c^2+c+1)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1,$ • $f'(x) = 3x^2+6x+1,$ • $f''(x) = 6x+6,$ • $f'''(x) = 6.$

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1,$ • $f'(c) = 3c^2+6c+1,$ • $f''(c) = 6c+6,$ • $f'''(c) = 6.$

- $T_1(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!}$

$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $T_2(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!}$

  $= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$T_3(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$T_3(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$\begin{aligned} T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c) \\ &\qquad +(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$T_3(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$

$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$

$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3$$

$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c)$$
$$+(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3)$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0=c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x)=x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x)=3x^2+6x+1$, • $f''(x)=6x+6$, • $f'''(x)=6$.

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c)=c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c)=3c^2+6c+1$, • $f''(c)=6c+6$, • $f'''(c)=6$.

- $T_3(x)=f(c)+\frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!}+\frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!}+\frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$

$$=(c^3+3c^2+c+1)+\frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1}+\frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2}+\frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$

$$=(c^3+3c^2+c+1)+(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)+(3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2)+(x-c)^3$$

$$=(c^3+3c^2+c+1)+(3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c)$$
$$+(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2)+(x^3-3cx^2+3c^2x-c^3)$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$T_3(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c)$$
$$+(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3)$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0=c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x)=x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x)=3x^2+6x+1$, • $f''(x)=6x+6$, • $f'''(x)=6$.

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c)=c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c)=3c^2+6c+1$, • $f''(c)=6c+6$, • $f'''(c)=6$.

- $$T_3(x)=f(c)+\frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!}+\frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!}+\frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$

$$=(c^3+3c^2+c+1)+\frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1}+\frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2}+\frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$

$$=(c^3+3c^2+c+1)+(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)+(3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2)+(x-c)^3$$

$$=(c^3+3c^2+c+1)+(3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c)$$

$$+(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2)+(x^3-3cx^2+3c^2x-c^3)$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$\begin{aligned} T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c) \\ &\qquad +(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$T_3(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c)$$
$$+(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3)$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$T_3(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c)$$
$$+(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3)$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c \in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$T_3(x) = f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6}$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3$$
$$= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c)$$
$$+(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3)$$
$$= x^3+3x^2+x+1,\ x \in R.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$
nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$,
- $f'(x) = 3x^2+6x+1$,
- $f''(x) = 6x+6$,
- $f'''(x) = 6$.

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$,
- $f'(c) = 3c^2+6c+1$,
- $f''(c) = 6c+6$,
- $f'''(c) = 6$.

- $$\begin{aligned} T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c) \\ &\qquad +(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3) \\ &= x^3+3x^2+x+1,\ x\in R. \end{aligned}$$

- Polynómy $f(x)$ a $T_3(x)$ sú rovnaké.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3+3x^2+x+1,\ x\in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c\in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x\in R$ platí:

- $f(x) = x^3+3x^2+x+1$, • $f'(x) = 3x^2+6x+1$, • $f''(x) = 6x+6$, • $f'''(x) = 6$.

Pre $c\in R$ platí:

- $f(c) = c^3+3c^2+c+1$, • $f'(c) = 3c^2+6c+1$, • $f''(c) = 6c+6$, • $f'''(c) = 6$.

- $$\begin{aligned} T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c)\cdot(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)\cdot(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + \frac{(3c^2+6c+1)\cdot(x-c)}{1} + \frac{(6c+6)\cdot(x-c)^2}{2} + \frac{6\cdot(x-c)^3}{6} \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2+6c+1)\cdot(x-c) + (3c+3)\cdot(x^2-2xc+c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3+3c^2+c+1) + (3c^2x+6cx+x-3c^3-6c^2-c) \\ &\qquad +(3cx^2+3x^2-6c^2x-6cx+3c^3+3c^2) + (x^3-3cx^2+3c^2x-c^3) \\ &= x^3+3x^2+x+1,\ x\in R. \end{aligned}$$

- Polynómy $f(x)$ a $T_3(x)$ sú rovnaké.
- To znamená, že polynóm $T_3(x)$ najlepšie aproximuje danú funkciu (polynóm) $f(x)$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x,$

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$,

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$,
- $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$,

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x,$
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1},$
- $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2},$
- $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3},$

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$,
- $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$,
- $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$,

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$,
- $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$,
- $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\ldots$,

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$,
- $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$,
- $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$,
- $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$,
- $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$.
- $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\ldots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$,
- $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$,
- $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ...,
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$.
- $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\ln x$, $x>0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ so stredom $x_0=1$.

- $f(x)=\ln x$, • $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}=\frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x)=-x^{-2}=\frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x)=2x^{-3}=\frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-3\cdot 2x^{-4}=\frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x>0$.

- $f(1)=\ln 1=0$. • $f^{(k)}(1)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k}=(-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k\in N$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=f(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\ln x,\ x>0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ so stredom $x_0=1$.

- $f(x)=\ln x$, • $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}=\frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x)=-x^{-2}=\frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x)=2x^{-3}=\frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-3\cdot 2x^{-4}=\frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x>0$.

- $f(1)=\ln 1=0$. • $f^{(k)}(1)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k}=(-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k\in N$.

- $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=f(1)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=0+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x\in O(1),\ n\in N.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$
  $$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x \in O(1),\ n \in N.$$

- $f(x) = \ln x,\ x > 0,\ x_0 = 1,\ n \in N.$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$
  $$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x \in O(1),\ n \in N.$$

- $f(x) = \ln x,\ x > 0,\ x_0 = 1,\ n \in N$.
- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\ln x,\ x>0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ so stredom $x_0=1$.

- $f(x)=\ln x$, • $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}=\frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x)=-x^{-2}=\frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x)=2x^{-3}=\frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-3\cdot 2x^{-4}=\frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\ldots$, • $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x>0$.

- $f(1)=\ln 1=0$. • $f^{(k)}(1)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k}=(-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k\in N$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=f(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x\in O(1),\ n\in N.$$

- $f(x)=\ln x,\ x>0,\ x_0=1,\ n\in N$.
- Ak položíme $x=t+1$, t. j. $t=x-1$, potom platí $f(x)=f(t+1)=\ln(t+1),\ t>-1,\ t_0=0,\ n\in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\ln x,\ x>0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ so stredom $x_0=1$.

- $f(x)=\ln x$, • $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}=\frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x)=-x^{-2}=\frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x)=2x^{-3}=\frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-3\cdot 2x^{-4}=\frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\ldots$, • $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x>0$.

- $f(1)=\ln 1=0$. • $f^{(k)}(1)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k}=(-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k\in N$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=f(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x\in O(1),\ n\in N.$$

- $f(x)=\ln x,\ x>0,\ x_0=1,\ n\in N$.
- Ak položíme $x=t+1$, t. j. $t=x-1$, potom platí $f(x)=f(t+1)=\ln(t+1),\ t>-1,\ t_0=0,\ n\in N$.

- $t=x-1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\ln x,\ x>0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ so stredom $x_0=1$.

- $f(x)=\ln x$, • $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}=\frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x)=-x^{-2}=\frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x)=2x^{-3}=\frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-3\cdot 2x^{-4}=\frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x>0$.

- $f(1)=\ln 1=0$. • $f^{(k)}(1)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k}=(-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k\in N$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=f(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!}=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$
  $$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x\in O(1),\ n\in N.$$

- $f(x)=\ln x,\ x>0,\ x_0=1,\ n\in N$.
- Ak položíme $x=t+1$, t. j. $t=x-1$, potom platí $f(x)=f(t+1)=\ln(t+1),\ t>-1,\ t_0=0,\ n\in N$.

- $t=x-1$. $\Rightarrow$ • $T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}=T_n(t),\ t\in O(0)$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x \in O(1),\ n \in N.$$

- $f(x) = \ln x,\ x > 0,\ x_0 = 1,\ n \in N$.
- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$, potom platí $f(x) = f(t+1) = \ln(t+1),\ t > -1,\ t_0 = 0,\ n \in N$.

- $t = x - 1$. $\Rightarrow$ • $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = T_n(t),\ t \in O(0)$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm (Taylorov polynóm so stredom v bode 0) stupňa $n \in N$

funkcie $f(x) = \ln(x+1),\ x > -1$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x,\ x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^k}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ x \in O(1),\ n \in N.$$

- $f(x) = \ln x,\ x > 0,\ x_0 = 1,\ n \in N$.
- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$, potom platí $f(x) = f(t+1) = \ln(t+1),\ t > -1,\ t_0 = 0,\ n \in N$.

- $t = x - 1$. $\Rightarrow$ • $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = T_n(t),\ t \in O(0)$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm (Taylorov polynóm so stredom v bode 0) stupňa $n \in N$

funkcie $f(x) = \ln(x+1),\ x > -1$ má tvar: • $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},\ x \in O(0)$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1),\ x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\ldots$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$.
- $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1),\ x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, . . . ,
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$.
- $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! x^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\dots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ x \in O(0),\ n \in N.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1),\ x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},\ x \in O(0),\ n \in N.$$

- $f(x) = \ln(x+1),\ x > -1,\ x_0 = 0,\ n \in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \; x \in O(0), \; n \in N.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in N$.
- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\ldots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \; x \in O(0), \; n \in N.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in N$.
- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$, potom platí $f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t$, $t > 0$, $t_0 = 1$, $n \in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\ldots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \ x \in O(0), \ n \in N.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in N$.
- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$, potom platí $f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t$, $t > 0$, $t_0 = 1$, $n \in N$.

- $x = t - 1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,
- $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$,
- $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, ...,
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$.
- $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \ x \in O(0),\ n \in N.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in N$.
- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$, potom platí $f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t$, $t > 0$, $t_0 = 1$, $n \in N$.

- $x = t - 1$. $\Rightarrow$
- $$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(t-1)^k}{k} = T_n(t),\ t \in O(1).$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3\cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\ldots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ x \in O(0),\ n \in N.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in N$.
- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$, potom platí $f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t$, $t > 0$, $t_0 = 1$, $n \in N$.

- $x = t-1$. $\Rightarrow$ • $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(t-1)^k}{k} = T_n(t)$, $t \in O(1)$.

To znamená, že Taylorov polynóm so stredom v bode 1 stupňa $n \in N$

funkcie $f(x) = \ln x$, $x > 0$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \ldots,$ • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}!(k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pre $k \in N$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \; x \in O(0), \; n \in N.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in N$.
- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$, potom platí $f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t$, $t > 0$, $t_0 = 1$, $n \in N$.

- $x = t-1$. $\Rightarrow$ • $$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(t-1)^k}{k} = T_n(t), \; t \in O(1).$$

To znamená, že Taylorov polynóm so stredom v bode 1 stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln x$, $x > 0$ má tvar: • $$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}, \; x \in O(1).$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, pre všetky $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = \mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = \mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(c) = \mathrm{e}^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = \mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(c) = \mathrm{e}^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = \mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(c) = \mathrm{e}^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^c (x-c)^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ v strede $x_0=c\in R$ (ľubovoľné).

- $f(x)=\mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x)=f(x)=\mathrm{e}^x$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x\in R$.

- $f^{(k)}(c)=\mathrm{e}^c$ pre $k\in N\cup\{0\}$.

- $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)\cdot(x-c)^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^k}{k!}=\mathrm{e}^c+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)}{1!}+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^n}{n!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ v strede $x_0=c\in R$ (ľubovoľné).

- $f(x)=\mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x)=f(x)=\mathrm{e}^x$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x\in R$.

- $f^{(k)}(c)=\mathrm{e}^c$ pre $k\in N\cup\{0\}$.

- $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)\cdot(x-c)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^k}{k!}=\mathrm{e}^c+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)}{1!}+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^n}{n!}$

$$=\mathrm{e}^c\left[1+\frac{x-c}{1!}+\frac{(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-c)^n}{n!}\right]$$ pre $x\in R,\ n\in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ v strede $x_0=c\in R$ (ľubovoľné).

- $f(x)=\mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x)=f(x)=\mathrm{e}^x$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x\in R$.

- $f^{(k)}(c)=\mathrm{e}^c$ pre $k\in N\cup\{0\}$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)\cdot(x-c)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^k}{k!}=\mathrm{e}^c+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)}{1!}+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^n}{n!}$$
$$=\mathrm{e}^c\left[1+\frac{x-c}{1!}+\frac{(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-c)^n}{n!}\right]$$ pre $x\in R,\ n\in N$.

Špeciálne pre $x_0=1$ platí:

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}(x-1)^k}{k!}=\mathrm{e}\left[1+\frac{x-1}{1!}+\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}\right]$$ pre $x\in R,\ n\in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = \mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(c) = \mathrm{e}^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)\cdot(x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^c(x-c)^k}{k!} = \mathrm{e}^c + \frac{\mathrm{e}^c(x-c)}{1!} + \frac{\mathrm{e}^c(x-c)^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{e}^c(x-c)^n}{n!}$$
$$= \mathrm{e}^c\left[1 + \frac{x-c}{1!} + \frac{(x-c)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-c)^n}{n!}\right]$$ pre $x \in R$, $n \in N$.

Špeciálne pre $x_0 = 1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}(x-1)^k}{k!} = \mathrm{e}\left[1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!}\right]$$ pre $x \in R$, $n \in N$.

Špeciálne pre $x_0 = -1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}(x+1)^k}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left[1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x+1)^n}{n!}\right]$$ pre $x \in R$, $n \in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ v strede $x_0=c\in R$ (ľubovoľné).

- $f(x)=\mathrm{e}^x$,
- $f^{(k)}(x)=f(x)=\mathrm{e}^x$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x\in R$.

- $f^{(k)}(c)=\mathrm{e}^c$ pre $k\in N\cup\{0\}$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)\cdot(x-c)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^k}{k!}=\mathrm{e}^c+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)}{1!}+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^n}{n!}$$
  $$=\mathrm{e}^c\Big[1+\frac{x-c}{1!}+\frac{(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-c)^n}{n!}\Big]$$ pre $x\in R,\ n\in N$.

Špeciálne pre $x_0=1$ platí:

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}(x-1)^k}{k!}=\mathrm{e}\Big[1+\frac{x-1}{1!}+\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}\Big]$$ pre $x\in R,\ n\in N$.

Špeciálne pre $x_0=-1$ platí:

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-1}(x+1)^k}{k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\Big[1+\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x+1)^n}{n!}\Big]$$ pre $x\in R,\ n\in N$.

Špeciálne pre $x_0=0$ dostaneme Maclaurinov polynóm stupňa n:

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$ pre $x\in R,\ n\in N$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ v strede $x_0=c\in R$ (ľubovoľné).

- $f(x)=\mathrm{e}^x$, • $f^{(k)}(x)=f(x)=\mathrm{e}^x$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x\in R$.

- $f^{(k)}(c)=\mathrm{e}^c$ pre $k\in N\cup\{0\}$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)\cdot(x-c)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^k}{k!}=\mathrm{e}^c+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)}{1!}+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^c(x-c)^n}{n!}$$
$$=\mathrm{e}^c\left[1+\frac{x-c}{1!}+\frac{(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-c)^n}{n!}\right]$$ pre $x\in R$, $n\in N$.

Špeciálne pre $x_0=1$ platí:

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}(x-1)^k}{k!}=\mathrm{e}\left[1+\frac{x-1}{1!}+\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}\right]$$ pre $x\in R$, $n\in N$.

Špeciálne pre $x_0=-1$ platí:

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-1}(x+1)^k}{k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left[1+\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x+1)^n}{n!}\right]$$ pre $x\in R$, $n\in N$.

Špeciálne pre $x_0=0$ dostaneme Maclaurinov polynóm stupňa n:

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$ pre $x\in R$, $n\in N$.

[Maclaurinov polynóm sa používa v praxi najčastejšie.]

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$,
- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\sin x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$,
- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\sin x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x,$
- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\sin x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí:

- $\sin x = f(x)$
- $\cos x = f'(x)$
- $-\sin x = f''(x)$
- $-\cos x = f'''(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$,
- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\sin x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x)$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x)$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x)$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$.
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\sin x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\sin x$, • $f'(x)=\cos x$ • $f''(x)=-\sin x$ • $f'''(x)=-\cos x$ • $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0$.
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$. • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$. • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$. • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0$.
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$. • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$. • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$. • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\sin x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\sin x$,
- $f'(x)=\cos x$
- $f''(x)=-\sin x$
- $f'''(x)=-\cos x$
- $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=0+\frac{x}{1!}$

$$=\frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0+1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\sin x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\sin x$,
- $f'(x)=\cos x$
- $f''(x)=-\sin x$
- $f'''(x)=-\cos x$
- $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$.

- $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0$.
- $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0$$
$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0+1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\sin x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\sin x$, • $f'(x)=\cos x$ • $f''(x)=-\sin x$ • $f'''(x)=-\cos x$ • $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=0+\frac{x}{1!}+0-\frac{x^3}{3!}$

$$=\frac{(-1)^0x}{(2\cdot 0+1)!}-\frac{(-1)^1x^3}{(2\cdot 1+1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$,
- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\sin x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$.

- $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0$.
- $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0$$
  $$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0+1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2\cdot 1+1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\sin x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\sin x$, • $f'(x)=\cos x$ • $f''(x)=-\sin x$ • $f'''(x)=-\cos x$ • $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=0+\frac{x}{1!}+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}$$
$$=\frac{(-1)^0x}{(2\cdot0+1)!}-\frac{(-1)^1x^3}{(2\cdot1+1)!}+\frac{(-1)^2x^5}{(2\cdot2+1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x,$ • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0$

$$= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0+1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2+1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0$.
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$. • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$. • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$. • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \dfrac{x}{1!} + 0 - \dfrac{x^3}{3!} + 0 + \dfrac{x^5}{5!} + 0 - \dfrac{x^7}{7!}$

$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0+1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2\cdot 2+1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2\cdot 3+1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\sin x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\sin x$, • $f'(x)=\cos x$ • $f''(x)=-\sin x$ • $f'''(x)=-\cos x$ • $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\dots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0$.
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$. • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$. • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$. • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=0+\frac{x}{1!}+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$
$$=\frac{(-1)^0x}{(2\cdot0+1)!}-\frac{(-1)^1x^3}{(2\cdot1+1)!}+\frac{(-1)^2x^5}{(2\cdot2+1)!}-\frac{(-1)^3x^7}{(2\cdot3+1)!}+\cdots$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\sin x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\sin x$, • $f'(x)=\cos x$ • $f''(x)=-\sin x$ • $f'''(x)=-\cos x$ • $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=0+\frac{x}{1!}+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$=\frac{(-1)^0x}{(2\cdot0+1)!}-\frac{(-1)^1x^3}{(2\cdot1+1)!}+\frac{(-1)^2x^5}{(2\cdot2+1)!}-\frac{(-1)^3x^7}{(2\cdot3+1)!}+\cdots+\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

pre všetky $i\in N\cup\{0\},\ 2i+1\le n$ a $x\in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \sin x$,
- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\sin x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$ $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0$.
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$. $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$. $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$. $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0+1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2\cdot 2+1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2\cdot 3+1)!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\},\ 2i + 1 \leq n$ a $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$, resp. $2n+1$.

- $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0+1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2\cdot 2+1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2\cdot 3+1)!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\},\ 2i+1 \leq n$ a $x \in R$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1,\ n \in N$ funkcie $f(x) = \sin x,\ x \in R$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$, resp. $2n+1$.

- $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
- $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0+1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2\cdot 2+1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2\cdot 3+1)!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\},\ 2i+1 \leq n$ a $x \in R$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1,\ n \in N$ funkcie $f(x) = \sin x,\ x \in R$

má tvar: • $$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ pre $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x,$
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x,$
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x,$
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R.$

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- $\cos x = f(x)$
- $-\sin x = f'(x)$
- $-\cos x = f''(x)$
- $\sin x = f'''(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x,$
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R.$

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x)$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x)$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x)$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\dots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$.
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$.
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$.
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x,$ • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$,
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$.
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$.
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$.

- $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1$.
- $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0$.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x)$. $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1$.
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x)$. • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0$.
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x)$. • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1$.
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x)$. • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1$$

$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1 + 0$$
$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\cos x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\cos x$,
- $f'(x)=-\sin x$
- $f''(x)=-\cos x$
- $f'''(x)=\sin x$
- $f^{(4)}(x)=\cos x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$

$\Rightarrow$

- $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!}$

$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2\cdot 1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$,
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$

$\Rightarrow$

- $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0$

$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2\cdot 1)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$,
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$

- $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!}$$
$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2\cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2\cdot 2)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\cos x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\cos x$, • $f'(x)=-\sin x$ • $f''(x)=-\cos x$ • $f'''(x)=\sin x$ • $f^{(4)}(x)=\cos x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x)=f^{(4)}(x)=f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0)=\cos 0=1.$
- $-\sin x = f'(x)=f^{(5)}(x)=f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0)=-\sin 0=0.$
- $-\cos x = f''(x)=f^{(6)}(x)=f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0)=-\cos 0=-1.$
- $\sin x = f'''(x)=f^{(7)}(x)=f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0)=\sin 0=0.$

- $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+0-\frac{x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0$

$$=\frac{(-1)^0x}{(2\cdot 0)!}-\frac{(-1)^1x^2}{(2\cdot 1)!}+\frac{(-1)^2x^4}{(2\cdot 2)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x). \quad \Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!}$$
$$= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2 \cdot 3)!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\cos x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$,

- $f(x)=\cos x$, • $f'(x)=-\sin x$ • $f''(x)=-\cos x$ • $f'''(x)=\sin x$ • $f^{(4)}(x)=\cos x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1+0-\frac{x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

$$=\frac{(-1)^0x}{(2\cdot 0)!}-\frac{(-1)^1x^2}{(2\cdot 1)!}+\frac{(-1)^2x^4}{(2\cdot 2)!}-\frac{(-1)^3x^6}{(2\cdot 3)!}+\cdots$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\dots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$
$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2\cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2\cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2\cdot 3)!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\},\ 2i \le n$ a $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x,\ x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

$$= \frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2\cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2\cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2\cdot 3)!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\},\ 2i \le n$ a $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\cos x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$, resp. $2n$.

- $f(x)=\cos x$, • $f'(x)=-\sin x$ • $f''(x)=-\cos x$ • $f'''(x)=\sin x$ • $f^{(4)}(x)=\cos x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x)=f^{(4)}(x)=f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0)=\cos 0=1.$
- $-\sin x = f'(x)=f^{(5)}(x)=f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0)=-\sin 0=0.$
- $-\cos x = f''(x)=f^{(6)}(x)=f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0)=-\cos 0=-1.$
- $\sin x = f'''(x)=f^{(7)}(x)=f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0)=\sin 0=0.$

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+0-\frac{x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$
$$=\frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!}-\frac{(-1)^1 x^2}{(2\cdot 1)!}+\frac{(-1)^2 x^4}{(2\cdot 2)!}-\frac{(-1)^3 x^6}{(2\cdot 3)!}+\cdots+\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

pre všetky $i\in N\cup\{0\},\ 2i\le n$ a $x\in R$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n,\ n\in N$ funkcie $f(x)=\cos x,\ x\in R$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x)=\cos x,\ x\in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$, resp. $2n$.

- $f(x)=\cos x$, • $f'(x)=-\sin x$ • $f''(x)=-\cos x$ • $f'''(x)=\sin x$ • $f^{(4)}(x)=\cos x=f(x)$ pre $x\in R$.

Potom pre všetky $x\in R$ a pre všetky $j=0,1,2,3,\ldots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ $\Rightarrow$ • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+0-\frac{x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$
$$=\frac{(-1)^0 x}{(2\cdot 0)!}-\frac{(-1)^1x^2}{(2\cdot 1)!}+\frac{(-1)^2x^4}{(2\cdot 2)!}-\frac{(-1)^3x^6}{(2\cdot 3)!}+\cdots+\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$
pre všetky $i\in N\cup\{0\},\ 2i\leq n$ a $x\in R$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n,\ n\in N$ funkcie $f(x)=\cos x,\ x\in R$

má tvar: • $$T_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$ pre $x\in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí: • $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,

- $T_0(x) = 1$ $= 1$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:
- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,

- $T_1(x) = 1 + 0 \qquad = 1$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:
- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,

- $T_2(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} = 1 + \frac{x^2}{1}$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,

- $T_3(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 \quad = 1 + \frac{x^2}{1}$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,

- $T_4(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2}$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,

---

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0)\cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0)\cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0)\cdot 1 = 0$,

- $T_5(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 \quad = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2}$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:
- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,

---

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0)\cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0)\cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0)\cdot 1 = 120$,

- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^4}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2xe^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,e^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,e^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\,e^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)\,e^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6)\,e^{(x^2)}$, ...

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0)\cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0)\cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0)\cdot 1 = 120$, ... [Príliš prácne.]

- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^4}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$, ...

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ...

[Príliš prácne.]

- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^4}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in R$.

Iné riešenie.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$, ...

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0)\cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0)\cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0)\cdot 1 = 120$, ... [Príliš prácne.]

- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^4}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in R$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$ pre $t \in R$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2xe^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2+4x^2)\, e^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x+8x^3)\, e^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12+48x^2+16x^4)\, e^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x+160x^3+32x^5)\, e^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x) = (120+720x^2+480x^4+64x^6)\, e^{(x^2)}$, ...

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2+0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0+0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12+0+0) \cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0+0+0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120+0+0) \cdot 1 = 120$, ...

[Príliš prácne.]

- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^4}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in R$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in R$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$ pre $t \in R$, $n \in N$.

Ak položíme $t = x^2$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6)\,\mathrm{e}^{(x^2)}$, ...

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0)\cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0)\cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0)\cdot 1 = 120$, ... [Príliš prácne.]

- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^4}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in R$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$ pre $t \in R$, $n \in N$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2xe^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2)\, e^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3)\, e^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)\, e^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)\, e^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6)\, e^{(x^2)}$, ...

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0)\cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0)\cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0)\cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0)\cdot 1 = 120$, ... [Príliš prácne.]

- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^4}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in R$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in R$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$ pre $t \in R$, $n \in N$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

- $T_{2n}(x) = T'_n(x^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}$ pre $x \in R$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=e^{(x^2)}$, $x\in R$.

Pre všetky $x\in R$ platí:
- $f(x)=e^{(x^2)}$,
- $f'(x)=2xe^{(x^2)}$,
- $f''(x)=(2+4x^2)\,e^{(x^2)}$,
- $f'''(x)=(12x+8x^3)\,e^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x)=(12+48x^2+16x^4)\,e^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x)=(120x+160x^3+32x^5)\,e^{(x^2)}$,
- $f^{(6)}(x)=(120+720x^2+480x^4+64x^6)\,e^{(x^2)}$, ...

- $f(0)=1$,
- $f'(0)=2\cdot 0\cdot 1=0$,
- $f''(0)=(2+0)\cdot 1=2$,
- $f'''(0)=(0+0)\cdot 1=0$,
- $f^{(4)}(0)=(12+0+0)\cdot 1=12$,
- $f^{(5)}(0)=(0+0+0)\cdot 1=0$,
- $f^{(6)}(0)=(120+0+0)\cdot 1=120$, ... [Príliš prácne.]

- $T_6(x)=1+0+\frac{2x^2}{2!}+0+\frac{12x^4}{4!}+0+\frac{120x^4}{6!}=1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}$ pre $x\in R$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n\in N$ funkcie $g(t)=e^t$, $t\in R$ platí:

- $T'_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}$ pre $t\in R$, $n\in N$.

Ak položíme $t=x^2$, potom $g(t)=g(x^2)=f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

- $T_{2n}(x)=T'_n(x^2)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x^2)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}$ pre $x\in R$, $n\in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T_n'(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x)$

pre $x < 1$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n\in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n\in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1+k}x^k}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}x^k}{k}$

pre $x < 1$, $n\in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k}$

  $= \sum_{k=0}^{n} \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n}$ pre $x < 1$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T_n'(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T_n'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $$T_n(x) = T_n'(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k}$$
  $$= \sum_{k=0}^{n} \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1,\ n \in N.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k}$
  $= \sum_{k=0}^{n} \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n}$ pre $x < 1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in R$.

Ak položíme $t = x^2$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n\in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n\in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1+k}x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}x^k}{k}$
  $= \sum_{k=0}^{n} \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n}$ pre $x < 1$, $n\in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x\in R$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n\in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k}$
  $= \sum_{k=0}^{n} \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n}$ pre $x < 1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in R$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

- $T_{2n}(x) = T'_n(x^2)$ [Maclaurinov polynóm $T_{2n}(x)$ má stupeň $2n$.]

pre $x \in R$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n\in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n\in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1+k}x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}x^k}{k}$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n}$ pre $x < 1$, $n\in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x\in R$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

- $T_{2n}(x) = T'_n(x^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x^2)^k}{k}$

[Maclaurinov polynóm $T_{2n}(x)$ má stupeň $2n$.]

pre $x\in R$, $n\in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T_n'(t)$ stupňa $n\in N$ funkcie $g(t)=\ln(t+1)$, $t>-1$ platí:

- $T_n'(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$ pre $t>-1$, $n\in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\ln(1-x)$, $x<1$.

Ak položíme $t=-x$, potom $g(t)=g(-x)=f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x)=T_n'(-x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1+k}x^k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{2k-1}x^k}{k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{-x^k}{k}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n} \text{ pre } x<1,\ n\in N.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\ln(x^2+1)$, $x\in R$.

Ak položíme $t=x^2$, potom $g(t)=g(x^2)=f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

- $T_{2n}(x)=T_n'(x^2)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x^2)^k}{k}$ [Maclaurinov polynóm $T_{2n}(x)$ má stupeň $2n$.]

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n} \text{ pre } x\in R,\ n\in N.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1;1)$.

Pre všetky $x\in R-\{1\}$ platí:

- $f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=\frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x)=-2\cdot 1(1-x)^{-3}(-1)=\frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-4\cdot 3!(1-x)^{-4}(-1)=\frac{4!}{(1-x)^5}$, . . . ,
- $f'(x)=-1(1-x)^{-2}(-1)=\frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x)=-3\cdot 2!(1-x)^{-3}(-1)=\frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k\in N\subset\{0\}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}$, $\ldots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in N \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in N \cup \{0\}$ platí:

- $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}$, $\ldots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in N \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in N \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$ pre $x \in R - \{1\}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1;1)$.

Pre všetky $x\in R-\{1\}$ platí:

- $f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=\frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x)=-2\cdot 1(1-x)^{-3}(-1)=\frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-4\cdot 3!(1-x)^{-4}(-1)=\frac{4!}{(1-x)^5}$, . . . ,
- $f'(x)=-1(1-x)^{-2}(-1)=\frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x)=-3\cdot 2!(1-x)^{-3}(-1)=\frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k\in N\subset\{0\}$.

Pre všetky $k\in N\cup\{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{(1-0)^{k+1}}=\frac{k!}{1^{k+1}}=k!$.

- $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\cdot x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$ pre $x\in R-\{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+\cdots$ s kvocientom $x\in(-1;1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \ldots,$
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in N \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in N \cup \{0\}$ platí:

- $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$$ pre $x \in R - \{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ s kvocientom $x \in (-1; 1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1;1)$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \ \ldots,$
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in N \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in N \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$ pre $x \in R - \{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ s kvocientom $x \in (-1;1)$ má konečný súčet $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x \in O(0) = (-1;1)$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1;1)$.

Pre všetky $x\in R-\{1\}$ platí:

- $f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=\frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f'(x)=-1(1-x)^{-2}(-1)=\frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f''(x)=-2\cdot 1(1-x)^{-3}(-1)=\frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f'''(x)=-3\cdot 2!(1-x)^{-3}(-1)=\frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(4)}(x)=-4\cdot 3!(1-x)^{-4}(-1)=\frac{4!}{(1-x)^5}$, ...,
- $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k\in N\subset\{0\}$.

Pre všetky $k\in N\cup\{0\}$ platí:
- $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{(1-0)^{k+1}}=\frac{k!}{1^{k+1}}=k!$.

- $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k!\cdot x^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$ pre $x\in R-\{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+\cdots$ s kvocientom $x\in(-1;1)$ má konečný súčet $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x\in O(0)=(-1;1)$,

  t. j. jeho konečný podpolynóm $1+x+x^2+\cdots+x^n$ stupňa $n\in N$

  najlepšie aproximuje $f(x)$ zo všetkých polynómov stupňa $n\in N$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1;1)$.

Pre všetky $x\in R-\{1\}$ platí:

- $f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=\frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x)=-2\cdot 1(1-x)^{-3}(-1)=\frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x)=-4\cdot 3!(1-x)^{-4}(-1)=\frac{4!}{(1-x)^5}$, ...,
- $f'(x)=-1(1-x)^{-2}(-1)=\frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x)=-3\cdot 2!(1-x)^{-3}(-1)=\frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k\in N\subset\{0\}$.

Pre všetky $k\in N\cup\{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{(1-0)^{k+1}}=\frac{k!}{1^{k+1}}=k!$.

- $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\cdot x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$ pre $x\in R-\{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+\cdots$ s kvocientom $x\in(-1;1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x\in O(0)=(-1;1)$,

  t. j. jeho konečný podpolynóm $1+x+x^2+\cdots+x^n$ stupňa $n\in N$

  najlepšie aproximuje $f(x)$ zo všetkých polynómov stupňa $n\in N$ a je súčasne aj Maclaurinovým polynómom.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1;1)$.

Pre všetky $x\in R-\{1\}$ platí:

- $f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=\frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f'(x)=-1(1-x)^{-2}(-1)=\frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f''(x)=-2\cdot 1(1-x)^{-3}(-1)=\frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f'''(x)=-3\cdot 2!(1-x)^{-3}(-1)=\frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(4)}(x)=-4\cdot 3!(1-x)^{-4}(-1)=\frac{4!}{(1-x)^5}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k\in N\subset\{0\}$.

Pre všetky $k\in N\cup\{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{(1-0)^{k+1}}=\frac{k!}{1^{k+1}}=k!$.

- $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k!\cdot x^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$ pre $x\in R-\{1\}$.

[Pre praktické použitie a pre aproximácie má význam tento polynóm iba pre $x\in(-1;1)$.]

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+\cdots$ s kvocientom $x\in(-1;1)$ má konečný súčet $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x\in O(0)=(-1;1)$,

  t. j. jeho konečný podpolynóm $1+x+x^2+\cdots+x^n$ stupňa $n\in N$

  najlepšie aproximuje $f(x)$ zo všetkých polynómov stupňa $n\in N$ a je súčasne aj Maclaurinovým polynómom.

- $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$ pre $x\in(-1;1)$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$

- e^x
- $\sin x$
- $\cos x$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy

- e^x $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

  [Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $$\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $$\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

  [Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $$\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $$\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

  [Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$,

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

  pričom $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$,

  [Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

  pričom $\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1!}$,

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$,

  pričom $\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}$,

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkcie e^x, $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in R$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

  pričom $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, t. j. $\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right] \longmapsto e^x$.

  [Maclaurinov polynóm stupňa n.]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

  pričom $\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1!}$, t. j. $\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \longmapsto \sin x$.

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$,

  pričom $\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}$, t. j. $\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] \longmapsto \cos x$.

  [Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$,

pre všetky $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$,
- $f'(x) = -e^{-x}$,

pre všetky $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$,
- $f'(x) = -e^{-x}$,
- $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$,

pre všetky $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$,
- $f'(x) = -e^{-x}$,
- $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$,
- $f'''(x) = -e^{-x}$,

pre všetky $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$,
- $f'(x) = -e^{-x}$,
- $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$,
- $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,

pre všetky $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
- $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$,
- $f''(x) = -(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}$,
- $f'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k \mathrm{e}^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$

pre $x \in R$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$,
- $f'(x) = -e^{-x}$,
- $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$,
- $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

pre $x \in R$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
  $$= 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in R,\ n \in N.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$,
- $f'(x) = -e^{-x}$,
- $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$,
- $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
  $$= 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$ pre $x \in R$, $n \in N$.

Iné riešenie.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
$$= 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in R,\ n \in N.$$

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in R$ platí:

- $$T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in R,\ n \in N.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$, $x\in R$.

- $f(x)=e^{-x}$, • $f'(x)=-e^{-x}$, • $f''(x)=-(-e^{-x})=e^{-x}$, • $f'''(x)=-e^{-x}$, ...,
- $f^{(k)}(x)=(-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k\in N$ a pre všetky $x\in R$.

- $f^{(k)}(0)=(-1)^k e^0=(-1)^k$ pre $k\in N\cup\{0\}$.

- $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
  $$=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}$$ pre $x\in R$, $n\in N$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n\in N$ funkcie $g(t)=e^t$, $t\in R$ platí:

- $$T'_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}$$ pre $t\in R$, $n\in N$.

Ak položíme $t=-x$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$ pre $x \in R$, $n \in N$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in R$ platí:

- $$T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$ pre $t \in R$, $n \in N$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
$$= 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \text{pre } x \in R,\ n \in N.$$

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in R$ platí:

- $$T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \quad \text{pre } t \in R,\ n \in N.$$

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $$T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

pre $x \in R$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in R$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\ldots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
$$= 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in R,\ n \in N.$$

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in R$ platí:

- $$T'_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in R,\ n \in N.$$

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $$T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
$$= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in R,\ n \in N.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1;1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$

- $\ln(x+1)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$

- $\ln(x+1)$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.

- $f(x) = \ln(x^2) = 2\ln x$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1;1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1;1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.

- $f(x) = \ln(x^2) = 2\ln x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x = t+1 & x > 0 \\ t = x-1 & t > -1 \end{array}\right] = 2\ln(t+1) = 2g(t),\ t > -1.$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Použijeme Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, t. j. v strede $t_0 = 0$

- $f(x) = \ln(x^2) = 2\ln x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x = t+1 & x > 0 \\ t = x-1 & t > -1 \end{array}\right] = 2\ln(t+1) = 2g(t)$, $t > -1$.

$\Rightarrow$ • $T'_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}$

$t \in (-1; 1\rangle$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Použijeme Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, t. j. v strede $t_0 = 0$

- $f(x) = \ln(x^2) = 2\ln x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x = t+1 & x > 0 \\ t = x-1 & t > -1 \end{array}\right] = 2\ln(t+1) = 2g(t)$, $t > -1$.

$\Rightarrow$ • $T'_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}$

$t \in (-1; 1\rangle$, $x \in (0; 2\rangle$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1\rangle$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n.

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

  pričom $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right] \longmapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Použijeme Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, t. j. v strede $t_0 = 0$

  a dostaneme taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln x$ v strede $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln(x^2) = 2\ln x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x = t+1 & x > 0 \\ t = x-1 & t > -1 \end{array}\right] = 2\ln(t+1) = 2g(t),\ t > -1$.

$\Rightarrow$ • $T'_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = T_n(x)$,

$t \in (-1; 1\rangle$, $x \in (0; 2\rangle$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in N$

- $T_n(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in R$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in R$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

pričom
- $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in R$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

pričom • $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, t. j. • $e^x = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in R$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

pričom • $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, t. j. • $e^x = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$.

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

- e^1

Špeciálne pre $x = -1$ platí:

- e^{-1}

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in R$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

pričom • $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, t. j. • $e^x = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$.

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

- $e^1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$,

Špeciálne pre $x = -1$ platí:

- $e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x, $x \in R$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^x$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in R$ platí:

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

pričom • $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$, t. j. • $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$.

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

- $\mathrm{e}^1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$,

t. j. • $\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Špeciálne pre $x = -1$ platí:

- $\mathrm{e}^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$,

t. j. • $\frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x \in (-1;1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in N$

- $T_n(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x \in (-1;1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1;1\rangle$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

pričom
- $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

pričom • $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, t. j. • $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right]$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x\in(-1;1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x)=\ln(x+1)$ stupňa $n\in N$ pre všetky $x\in(-1;1\rangle$ platí:

- $T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$,

pričom • $f(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x)$, t. j. • $\ln(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right]$.

Špeciálne pre $x=1$ platí:

[Pre všetky $k\in N$ platí $x^k=1^k=1$, t. j. $(-1)^{k-1}\cdot 1^k=(-1)^{k-1}$.]

- $\ln 2=\ln(1+1)$

Špeciálne pre $x\to -1^+$ platí:

[Pre všetky $k\in N$ platí $(-1)^{k-1}x^k=(-1)^{k-1}\cdot(-1)^k=(-1)^{2k-1}=-1$.]

- $-\infty=\ln(-1+1)^+=\ln 0^+$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},$$

pričom
- $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$, t. j.
- $$\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right].$$

Špeciálne pre $x = 1$ platí: [Pre všetky $k \in N$ platí $x^k = 1^k = 1$, t. j. $(-1)^{k-1} \cdot 1^k = (-1)^{k-1}$.]

- $$\ln 2 = \ln(1+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right],$$

Špeciálne pre $x \to -1^+$ platí: [Pre všetky $k \in N$ platí $(-1)^{k-1}x^k = (-1)^{k-1} \cdot (-1)^k = (-1)^{2k-1} = -1$.]

- $$-\infty = \ln(-1+1)^+ = \ln 0^+ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} = \lim_{n\to\infty} \left[-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{n}\right],$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou logaritmickej funkcie $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1\rangle$ a jej Maclaurinovho polynómu môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in N$ pre všetky $x \in (-1; 1\rangle$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom • $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, t. j. • $\ln(x+1) = \lim_{n\to\infty} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\right]$.

Špeciálne pre $x = 1$ platí: [Pre všetky $k \in N$ platí $x^k = 1^k = 1$, t. j. $(-1)^{k-1} \cdot 1^k = (-1)^{k-1}$.]

- $$\ln 2 = \ln(1+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right],$$

[Anharmonický rad.] t. j. • $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Špeciálne pre $x \to -1^+$ platí: [Pre všetky $k \in N$ platí $(-1)^{k-1} x^k = (-1)^{k-1} \cdot (-1)^k = (-1)^{2k-1} = -1$.]

- $$-\infty = \ln(-1+1)^+ = \ln 0^+ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} = \lim_{n\to\infty} \left[-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{n}\right],$$

[Harmonický rad.] t. j. • $\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in N - \{1\}$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in N - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty)$ platí:

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in N - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty)$ platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in N - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty)$ platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1} = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in N - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty)$ platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1} = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1} = \frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\sqrt[u]{1+x}$, $x\geq -1$, $u\in N-\{1\}$.

Pre všetky $x\in\langle -1;\infty)$ platí:

- $f(x)=\sqrt[u]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x)=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1}=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1}=\frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x)=\frac{1-u}{u^2}\cdot\frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1}=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\sqrt[u]{1+x}$, $x\geq -1$, $u\in N-\{1\}$.

Pre všetky $x\in\langle -1;\infty)$, $k\in N$ platí:

- $f(x)=\sqrt[u]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x)=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1}=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}=\frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1}=\frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x)=\frac{1-u}{u^2}\cdot\frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1}=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,
- $\cdots$
- $f^{(k)}(x)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in N - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty)$, $k \in N$ platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1} = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}} = \frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1} = \frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-u}{u^2} \cdot \frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1} = \frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,
- $\cdots$
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,

- $f(0) = 1$.

- $T_0(x) = f(0) \qquad = 1$

$= 1$ pre $x \geq -1$.

Špeciálne pre $u = 2$ platí:

- $T_0(x) = 1 \qquad = 1$ pre $x \in \langle -1; \infty)$.

Špeciálne pre $u = 3$ platí:

- $T_0(x) = 1 \qquad = 1$ pre $x \in \langle -1; \infty)$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\sqrt[u]{1+x}$, $x\geq -1$, $u\in N-\{1\}$.

Pre všetky $x\in\langle -1;\infty)$, $k\in N$ platí:

- $f(x)=\sqrt[u]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x)=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1}=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}=\frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1}=\frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x)=\frac{1-u}{u^2}\cdot\frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1}=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,
- $\cdots$
- $f^{(k)}(x)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,

- $f(0)=1.$
- $f'(0)=\frac{1}{u}=\frac{1-0u}{u}.$
- $f^{(k)}(0)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}.$

- $$T_1(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{1}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{1}\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)\cdots x^k}{u^k k!}$$

$$=1+\frac{x}{u}$$ pre $x\geq -1.$

Špeciálne pre $u=2$ platí: $[f'(0)=\frac{1}{2},$ $]$

- $T_1(x)=1+\frac{x}{2}$ $=1+\frac{x}{2}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Špeciálne pre $u=3$ platí: $[f'(0)=\frac{1}{3},$ $]$

- $T_1(x)=1+\frac{x}{3}$ $=1+\frac{x}{3}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\sqrt[u]{1+x}$, $x\geq -1$, $u\in N-\{1\}$.

Pre všetky $x\in\langle -1;\infty)$, $k\in N$ platí:

- $f(x)=\sqrt[u]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x)=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1}=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}=\frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1}=\frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x)=\frac{1-u}{u^2}\cdot\frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1}=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,
- $\ldots$
- $f^{(k)}(x)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,

- $f(0)=1$.
- $f'(0)=\frac{1}{u}=\frac{1-0u}{u}$.
- $f''(0)=\frac{1-u}{u^2}$.
- $f^{(k)}(0)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}$.

- $$T_2(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{2}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{2}\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)\cdots x^k}{u^k k!}$$

$$=1+\frac{x}{u}+\frac{(1-u)x^2}{u^2\cdot 2!}$$ pre $x\geq -1$.

Špeciálne pre $u=2$ platí: $[f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{-1}{2^2}=-\frac{1}{4},\quad]$

- $T_2(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\cdot 2!}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Špeciálne pre $u=3$ platí: $[f'(0)=\frac{1}{3},\quad f''(0)=\frac{-2}{3^2}=-\frac{2}{9},\quad]$

- $T_2(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{9\cdot 2!}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\sqrt[u]{1+x}$, $x\geq -1$, $u\in N-\{1\}$.

Pre všetky $x\in\langle -1;\infty)$, $k\in N$ platí:

- $f(x)=\sqrt[u]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x)=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1}=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}=\frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1}=\frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x)=\frac{1-u}{u^2}\cdot\frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1}=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,
- $\cdots$
- $f^{(k)}(x)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,

- $f(0)=1.$
- $f'(0)=\frac{1}{u}=\frac{1-0u}{u}.$
- $f''(0)=\frac{1-u}{u^2}.$
- $f'''(0)=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}.$
- $f^{(k)}(0)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}.$

- $$T_3(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{3}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{3}\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)\cdots x^k}{u^k k!}$$

$$=1+\frac{x}{u}+\frac{(1-u)x^2}{u^2\cdot 2!}+\frac{(1-u)(1-2u)x^3}{u^3\cdot 3!}$$ pre $x\geq -1.$

Špeciálne pre $u=2$ platí: $\left[f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{-1}{2^2}=-\frac{1}{4},\quad f'''(0)=\frac{-1\cdot(-3)}{2^3}=\frac{3}{8},\right]$

- $T_3(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\cdot 2!}+\frac{3x^3}{8\cdot 3!}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Špeciálne pre $u=3$ platí: $\left[f'(0)=\frac{1}{3},\quad f''(0)=\frac{-2}{3^2}=-\frac{2}{9},\quad f'''(0)=\frac{-2\cdot(-5)}{3^3}=\frac{10}{27},\right]$

- $T_3(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{9\cdot 2!}+\frac{10x^3}{27\cdot 3!}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\sqrt[u]{1+x}$, $x\geq -1$, $u\in N-\{1\}$.

Pre všetky $x\in\langle -1;\infty)$, $k\in N$ platí:

- $f(x)=\sqrt[u]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x)=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1}=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}=\frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1}=\frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x)=\frac{1-u}{u^2}\cdot\frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1}=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,
- $\cdots$
- $f^{(k)}(x)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,

- $f(0)=1$.
- $f'(0)=\frac{1}{u}=\frac{1-0u}{u}$.
- $f''(0)=\frac{1-u}{u^2}$.
- $f'''(0)=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}$.
- $f^{(k)}(0)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}$.

- $$T_4(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{4}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{4}\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)\cdots x^k}{u^k k!}$$

$$=1+\frac{x}{u}+\frac{(1-u)x^2}{u^2\cdot 2!}+\frac{(1-u)(1-2u)x^3}{u^3\cdot 3!}+\frac{(1-u)(1-2u)(1-3u)x^4}{u^4\cdot 4!}\quad\text{pre } x\geq -1.$$

Špeciálne pre $u=2$ platí: $\left[f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{-1}{2^2}=-\frac{1}{4},\quad f'''(0)=\frac{-1\cdot(-3)}{2^3}=\frac{3}{8},\quad f^{(4)}(0)=\frac{-1\cdot(-3)\cdot(-5)}{2^4}=-\frac{15}{16}.\right]$

- $$T_4(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\cdot 2!}+\frac{3x^3}{8\cdot 3!}-\frac{15x^4}{16\cdot 4!}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}\quad\text{pre } x\in\langle -1;\infty).$$

Špeciálne pre $u=3$ platí: $\left[f'(0)=\frac{1}{3},\quad f''(0)=\frac{-2}{3^2}=-\frac{2}{9},\quad f'''(0)=\frac{-2\cdot(-5)}{3^3}=\frac{10}{27},\quad f^{(4)}(0)=\frac{-2\cdot(-5)\cdot(-8)}{3^4}=-\frac{80}{81}.\right]$

- $$T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{9\cdot 2!}+\frac{10x^3}{27\cdot 3!}-\frac{80x^4}{81\cdot 4!}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}\quad\text{pre } x\in\langle -1;\infty).$$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\sqrt[u]{1+x}$, $x\geq -1$, $u\in N-\{1\}$.

Pre všetky $x\in\langle -1;\infty)$, $k\in N$ platí:

- $f(x)=\sqrt[u]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x)=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1}=\frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}=\frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1}=\frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x)=\frac{1-u}{u^2}\cdot\frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1}=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,
- $\cdots$
- $f^{(k)}(x)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,

- $f(0)=1$.
- $f'(0)=\frac{1}{u}=\frac{1-0u}{u}$.
- $f''(0)=\frac{1-u}{u^2}$.
- $f'''(0)=\frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}$.
- $f^{(k)}(0)=\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)}{u^k}$.

- $$T_n(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)\cdots x^k}{u^k k!}$$

$$=1+\frac{x}{u}+\frac{(1-u)x^2}{u^2\cdot 2!}+\frac{(1-u)(1-2u)x^3}{u^3\cdot 3!}+\frac{(1-u)(1-2u)(1-3u)x^4}{u^4\cdot 4!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{u^n n!}\ \text{pre}\ x\geq -1.$$

Špeciálne pre $u=2$ platí: $[f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{-1}{2^2}=-\frac{1}{4},\quad f'''(0)=\frac{-1\cdot(-3)}{2^3}=\frac{3}{8},\quad f^{(4)}(0)=\frac{-1\cdot(-3)\cdot(-5)}{2^4}=-\frac{15}{16}.]$

- $T_4(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\cdot 2!}+\frac{3x^3}{8\cdot 3!}-\frac{15x^4}{16\cdot 4!}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Špeciálne pre $u=3$ platí: $[f'(0)=\frac{1}{3},\quad f''(0)=\frac{-2}{3^2}=-\frac{2}{9},\quad f'''(0)=\frac{-2\cdot(-5)}{3^3}=\frac{10}{27},\quad f^{(4)}(0)=\frac{-2\cdot(-5)\cdot(-8)}{3^4}=-\frac{80}{81}.]$

- $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{9\cdot 2!}+\frac{10x^3}{27\cdot 3!}-\frac{80x^4}{81\cdot 4!}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$ pre $x\in\langle -1;\infty)$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0{,}8} = \sqrt[3]{1-0{,}2} = f(-0{,}2)$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0{,}8} = \sqrt[3]{1-0{,}2} = f(-0{,}2)$

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_1(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} = 0{,}933\,333.$

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_1(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} = 0{,}933\,333.$

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_1(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} = 0{,}933\,333.$

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_1(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} = 0{,}933\,333.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2)$

- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\,333$.

- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\,889$.

- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\,889$.

- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\,889$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$

  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0{,}8}=\sqrt[3]{1-0{,}2}=f(-0{,}2)$

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_1(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}=0{,}933\,333$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_2(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}=0{,}928\,889$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_3(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}=0{,}928\,395$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_3(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}\qquad=0{,}928\,395$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0{,}8}=\sqrt[3]{1-0{,}2}=f(-0{,}2)$

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_1(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}=0{,}933\,333.$

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_2(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}=0{,}928\,889.$

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_3(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}=0{,}928\,395.$

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_4(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}-\frac{10\cdot(-0{,}2)^4}{243}=0{,}928\,329.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0{,}8} = \sqrt[3]{1-0{,}2} = f(-0{,}2)$

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_1(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} = 0{,}933\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(-0{,}2)| < \frac{0{,}2^2}{9 \cdot 0{,}8^2} = 0{,}006\,944$.

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_2(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} - \frac{(-0{,}2)^2}{9} = 0{,}928\,889$.
  - Teoretická chyba $|R_2(-0{,}2)| < \frac{5 \cdot 0{,}2^3}{81 \cdot 0{,}8^3} = 0{,}000\,965$.

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_3(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} - \frac{(-0{,}2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0{,}2)^3}{81} = 0{,}928\,395$.
  - Teoretická chyba $|R_3(-0{,}2)| < \frac{10 \cdot 0{,}2^4}{243 \cdot 0{,}8^4} = 0{,}000\,161$.

- $\sqrt[3]{0{,}8} \approx T_4(-0{,}2) = 1 + \frac{-0{,}2}{3} - \frac{(-0{,}2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0{,}2)^3}{81} - \frac{10 \cdot (-0{,}2)^4}{243} = 0{,}928\,329$.
  - Teoretická chyba $|R_4(-0{,}2)| < \frac{22 \cdot 0{,}2^5}{729 \cdot 0{,}8^5} = 0{,}000\,029$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$

  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0{,}8}=\sqrt[3]{1-0{,}2}=f(-0{,}2)=0{,}928\,318$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_1(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}=0{,}933\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(-0{,}2)|<\frac{0{,}2^2}{9\cdot 0{,}8^2}=0{,}006\,944$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_2(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}=0{,}928\,889$.
  - Teoretická chyba $|R_2(-0{,}2)|<\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81\cdot 0{,}8^3}=0{,}000\,965$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_3(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}=0{,}928\,395$.
  - Teoretická chyba $|R_3(-0{,}2)|<\frac{10\cdot 0{,}2^4}{243\cdot 0{,}8^4}=0{,}000\,161$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_4(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}-\frac{10\cdot(-0{,}2)^4}{243}=0{,}928\,329$.
  - Teoretická chyba $|R_4(-0{,}2)|<\frac{22\cdot 0{,}2^5}{729\cdot 0{,}8^5}=0{,}000\,029$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0{,}8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0{,}8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0{,}8}=\sqrt[3]{1-0{,}2}=f(-0{,}2)=0{,}928\,318$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

[$S_n(x)=T_n(x)-f(x)$ pre $n=1,2,3,4$.]

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_1(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}=0{,}933\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(-0{,}2)|<\frac{0{,}2^2}{9\cdot 0{,}8^2}=0{,}006\,944$.
  - Skutočná chyba $|S_1(-0{,}2)|=0{,}005\,015$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_2(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}=0{,}928\,889$.
  - Teoretická chyba $|R_2(-0{,}2)|<\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81\cdot 0{,}8^3}=0{,}000\,965$.
  - Skutočná chyba $|S_2(-0{,}2)|=0{,}000\,571$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_3(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}=0{,}928\,395$.
  - Teoretická chyba $|R_3(-0{,}2)|<\frac{10\cdot 0{,}2^4}{243\cdot 0{,}8^4}=0{,}000\,161$.
  - Skutočná chyba $|S_3(-0{,}2)|=0{,}000\,077$.

- $\sqrt[3]{0{,}8}\approx T_4(-0{,}2)=1+\frac{-0{,}2}{3}-\frac{(-0{,}2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0{,}2)^3}{81}-\frac{10\cdot(-0{,}2)^4}{243}=0{,}928\,329$.
  - Teoretická chyba $|R_4(-0{,}2)|<\frac{22\cdot 0{,}2^5}{729\cdot 0{,}8^5}=0{,}000\,029$.
  - Skutočná chyba $|S_4(-0{,}2)|=0{,}000\,011$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1{,}2}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1{,}2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1{,}2}=\sqrt[3]{1+0{,}2}=f(0{,}2)$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1;\infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2)$

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\,667.$

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\,667.$

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\,667.$

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\,667.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1{,}2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1{,}2}=\sqrt[3]{1+0{,}2}=f(0{,}2)$

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_1(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}=1{,}066\,667$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_2(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}=1{,}062\,222$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_2(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}=1{,}062\,222$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_2(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}=1{,}062\,222$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1{,}2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1{,}2} = \sqrt[3]{1+0{,}2} = f(0{,}2)$

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_1(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} = 1{,}066\,667$.

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_2(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2^2}{9} = 1{,}062\,222$.

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_3(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2^2}{9} + \frac{5\cdot 0{,}2^3}{81} = 1{,}062\,716$.

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_3(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2^2}{9} + \frac{5\cdot 0{,}2^3}{81} \qquad = 1{,}062\,716$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1{,}2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1{,}2} = \sqrt[3]{1+0{,}2} = f(0{,}2)$

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_1(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} = 1{,}066\,667$.

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_2(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2^2}{9} = 1{,}062\,222$.

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_3(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0{,}2^3}{81} = 1{,}062\,716$.

- $\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_4(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0{,}2^3}{81} - \frac{10 \cdot 0{,}2^4}{243} = 1{,}062\,650$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1{,}2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1{,}2}=\sqrt[3]{1+0{,}2}=f(0{,}2)$

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_1(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}=1{,}066\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_1(0{,}2)|<\frac{0{,}2^2}{9}=0{,}004\,444$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_2(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}=1{,}062\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(0{,}2)|<\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81}=0{,}000\,494$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_3(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}+\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81}=1{,}062\,716$.
  - Teoretická chyba $|R_3(0{,}2)|<\frac{10\cdot 0{,}2^4}{243}=0{,}000\,066$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_4(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}+\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81}-\frac{10\cdot 0{,}2^4}{243}=1{,}062\,650$.
  - Teoretická chyba $|R_4(0{,}2)|<\frac{22\cdot 0{,}2^5}{729}=0{,}000\,010$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1;\infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2) = 1{,}062\,659$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1{,}066\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_1(0,2)| < \frac{0,2^2}{9} = 0{,}004\,444$.

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1{,}062\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(0,2)| < \frac{5\cdot 0,2^3}{81} = 0{,}000\,494$.

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_3(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5\cdot 0,2^3}{81} = 1{,}062\,716$.
  - Teoretická chyba $|R_3(0,2)| < \frac{10\cdot 0,2^4}{243} = 0{,}000\,066$.

- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_4(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5\cdot 0,2^3}{81} - \frac{10\cdot 0,2^4}{243} = 1{,}062\,650$.
  - Teoretická chyba $|R_4(0,2)| < \frac{22\cdot 0,2^5}{729} = 0{,}000\,010$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1{,}2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1{,}2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1{,}2}=\sqrt[3]{1+0{,}2}=f(0{,}2)=1{,}062\,659$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

[$S_n(x)=T_n(x)-f(x)$ pre $n=1,2,3,4$.]

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_1(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}=1{,}066\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_1(0{,}2)|<\frac{0{,}2^2}{9}=0{,}004\,444$.
  - Skutočná chyba $|S_1(0{,}2)|=0{,}004\,008$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_2(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}=1{,}062\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(0{,}2)|<\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81}=0{,}000\,494$.
  - Skutočná chyba $|S_2(0{,}2)|=0{,}000\,437$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_3(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}+\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81}=1{,}062\,716$.
  - Teoretická chyba $|R_3(0{,}2)|<\frac{10\cdot 0{,}2^4}{243}=0{,}000\,066$.
  - Skutočná chyba $|S_3(0{,}2)|=0{,}000\,057$.

- $\sqrt[3]{1{,}2}\approx T_4(0{,}2)=1+\frac{0{,}2}{3}-\frac{0{,}2^2}{9}+\frac{5\cdot 0{,}2^3}{81}-\frac{10\cdot 0{,}2^4}{243}=1{,}062\,650$.
  - Teoretická chyba $|R_4(0{,}2)|<\frac{22\cdot 0{,}2^5}{729}=0{,}000\,010$.
  - Skutočná chyba $|S_4(0{,}2)|=0{,}000\,009$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333.$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222.$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222.$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1{,}283\,951$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1{,}283\,951$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1{,}283\,951$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} - \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 1{,}242\,798$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(1)| < \frac{1^2}{9} = 0{,}111\,111$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(1)| < \frac{5\cdot 1^3}{81} = 0{,}061\,728$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5\cdot 1^3}{81} = 1{,}283\,951$.
  - Teoretická chyba $|R_3(1)| < \frac{10\cdot 1^4}{243} = 0{,}041\,152$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5\cdot 1^3}{81} - \frac{10\cdot 1^4}{243} = 1{,}242\,798$.
  - Teoretická chyba $|R_4(1)| < \frac{22\cdot 1^5}{729} = 0{,}030\,178$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1) = 1{,}259\,921$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(1)| < \frac{1^2}{9} = 0{,}111\,111$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(1)| < \frac{5\cdot 1^3}{81} = 0{,}061\,728$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5\cdot 1^3}{81} = 1{,}283\,951$.
  - Teoretická chyba $|R_3(1)| < \frac{10\cdot 1^4}{243} = 0{,}041\,152$.

- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5\cdot 1^3}{81} - \frac{10\cdot 1^4}{243} = 1{,}242\,798$.
  - Teoretická chyba $|R_4(1)| < \frac{22\cdot 1^5}{729} = 0{,}030\,178$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1;\infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1) = 1{,}259\,921$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

[$S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1,2,3,4$.]

- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}333\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(1)| < \frac{1^2}{9} = 0{,}111\,111$.
  - Skutočná chyba $|S_1(1)| = 0{,}073\,412$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1{,}222\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(1)| < \frac{5\cdot 1^3}{81} = 0{,}061\,728$.
  - Skutočná chyba $|S_2(1)| = 0{,}037\,699$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5\cdot 1^3}{81} = 1{,}283\,951$.
  - Teoretická chyba $|R_3(1)| < \frac{10\cdot 1^4}{243} = 0{,}041\,152$.
  - Skutočná chyba $|S_3(1)| = 0{,}024\,030$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5\cdot 1^3}{81} - \frac{10\cdot 1^4}{243} = 1{,}242\,798$.
  - Teoretická chyba $|R_4(1)| < \frac{22\cdot 1^5}{729} = 0{,}030\,178$.
  - Skutočná chyba $|S_4(1)| = 0{,}017\,123$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$

  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{1+2}=f(2)$

- $\sqrt[3]{3}\approx T_1(2)=1+\frac{2}{3}=1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_1(2)=1+\frac{2}{3} \quad =1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_1(2)=1+\frac{2}{3} \qquad =1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_1(2)=1+\frac{2}{3} \qquad\quad =1{,}666\,667$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$

- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1{,}222\,222$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} \qquad = 1{,}222\,222$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} \qquad = 1{,}222\,222$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$

- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1{,}222\,222$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5\cdot 2^3}{81} = 1{,}716\,049$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5\cdot 2^3}{81} \qquad = 1{,}716\,049$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{1+2}=f(2)$

- $\sqrt[3]{3}\approx T_1(2)=1+\frac{2}{3}=1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_2(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}=1{,}222\,222$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_3(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}+\frac{5\cdot 2^3}{81}=1{,}716\,049$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_4(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}+\frac{5\cdot 2^3}{81}-\frac{10\cdot 2^4}{243}=1{,}057\,613$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{1+2}=f(2)$

- $\sqrt[3]{3}\approx T_1(2)=1+\frac{2}{3}=1{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_1(2)|<\frac{2^2}{9}=0{,}444\,444$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_2(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}=1{,}222\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(2)|<\frac{5\cdot 2^3}{81}=0{,}493\,827$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_3(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}+\frac{5\cdot 2^3}{81}=1{,}716\,049$.
  - Teoretická chyba $|R_3(2)|<\frac{10\cdot 2^4}{243}=0{,}658\,436$.

- $\sqrt[3]{3}\approx T_4(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}+\frac{5\cdot 2^3}{81}-\frac{10\cdot 2^4}{243}=1{,}057\,613$.
  - Teoretická chyba $|R_4(2)|<\frac{22\cdot 2^5}{729}=0{,}965\,706$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2) = 1{,}442\,250$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_1(2)| < \frac{2^2}{9} = 0{,}444\,444$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1{,}222\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(2)| < \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 0{,}493\,827$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 1{,}716\,049$.
  - Teoretická chyba $|R_3(2)| < \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 0{,}658\,436$.

- $\sqrt[3]{3} \approx T_4(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} - \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 1{,}057\,613$.
  - Teoretická chyba $|R_4(2)| < \frac{22 \cdot 2^5}{729} = 0{,}965\,706$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$

  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{1+2}=f(2)=1{,}442\,250$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

[$S_n(x)=T_n(x)-f(x)$ pre $n=1,2,3,4$.]

- $\sqrt[3]{3}\approx T_1(2)=1+\frac{2}{3}=1{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_1(2)|<\frac{2^2}{9}=0{,}444\,444$.
  - Skutočná chyba $|S_1(2)|=0{,}224\,417$.
- $\sqrt[3]{3}\approx T_2(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}=1{,}222\,222$.
  - Teoretická chyba $|R_2(2)|<\frac{5\cdot 2^3}{81}=0{,}493\,827$.
  - Skutočná chyba $|S_2(2)|=0{,}220\,027$.
- $\sqrt[3]{3}\approx T_3(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}+\frac{5\cdot 2^3}{81}=1{,}716\,049$.
  - Teoretická chyba $|R_3(2)|<\frac{10\cdot 2^4}{243}=0{,}658\,436$.
  - Skutočná chyba $|S_3(2)|=0{,}273\,800$.
- $\sqrt[3]{3}\approx T_4(2)=1+\frac{2}{3}-\frac{2^2}{9}+\frac{5\cdot 2^3}{81}-\frac{10\cdot 2^4}{243}=1{,}057\,613$.
  - Teoretická chyba $|R_4(2)|<\frac{22\cdot 2^5}{729}=0{,}965\,706$.
  - Skutočná chyba $|S_4(2)|=0{,}384\,636$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x},\ x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243},\ x > -1.$

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{1+3}=f(3)$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_1(3)=1+\frac{3}{3}=2{,}000\,000.$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_1(3)=1+\frac{3}{3} = 2{,}000\,000.$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_1(3)=1+\frac{3}{3} = 2{,}000\,000.$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_1(3)=1+\frac{3}{3} = 2{,}000\,000.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x},\ x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243},\ x>-1.$

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{1+3}=f(3)$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_1(3)=1+\frac{3}{3}=2{,}000\,000.$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_2(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}=1{,}000\,000.$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_2(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}\qquad=1{,}000\,000.$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_2(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}\qquad\qquad=1{,}000\,000.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$

- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2{,}000\,000$.

- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1{,}000\,000$.

- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} \qquad = 2{,}666\,667$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{1+3}=f(3)$

- $\sqrt[3]{4}\approx T_1(3)=1+\frac{3}{3}=2{,}000\,000$.

- $\sqrt[3]{4}\approx T_2(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}=1{,}000\,000$.

- $\sqrt[3]{4}\approx T_3(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}+\frac{5\cdot 3^3}{81}=2{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{4}\approx T_4(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}+\frac{5\cdot 3^3}{81}-\frac{10\cdot 3^4}{243}=-0{,}666\,667$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1;\infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$

- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2{,}000\,000$.
  - Teoretická chyba $|R_1(3)| < \frac{3^2}{9} = 1{,}000\,000$.

- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1{,}000\,000$.
  - Teoretická chyba $|R_2(3)| < \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_3(3)| < \frac{10 \cdot 3^4}{243} = 3{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{4} \approx T_4(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} - \frac{10 \cdot 3^4}{243} = -0{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_4(3)| < \frac{22 \cdot 3^5}{729} = 7{,}333\,333$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{1+3}=f(3)=1{,}587\,401$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

- $\sqrt[3]{4}\approx T_1(3)=1+\frac{3}{3}=2{,}000\,000$.
  - Teoretická chyba $|R_1(3)|<\frac{3^2}{9}=1{,}000\,000$.

- $\sqrt[3]{4}\approx T_2(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}=1{,}000\,000$.
  - Teoretická chyba $|R_2(3)|<\frac{5\cdot3^3}{81}=1{,}666\,667$.

- $\sqrt[3]{4}\approx T_3(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}+\frac{5\cdot3^3}{81}=2{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_3(3)|<\frac{10\cdot3^4}{243}=3{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{4}\approx T_4(3)=1+\frac{3}{3}-\frac{3^2}{9}+\frac{5\cdot3^3}{81}-\frac{10\cdot3^4}{243}=-0{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_4(3)|<\frac{22\cdot3^5}{729}=7{,}333\,333$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1;\infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3) = 1{,}587\,401$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

[$S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1,2,3,4$.]

- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2{,}000\,000$.
  - Teoretická chyba $|R_1(3)| < \frac{3^2}{9} = 1{,}000\,000$.
  - Skutočná chyba $|S_1(3)| = 0{,}412\,599$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1{,}000\,000$.
  - Teoretická chyba $|R_2(3)| < \frac{5\cdot 3^3}{81} = 1{,}666\,667$.
  - Skutočná chyba $|S_2(3)| = 0{,}587\,401$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5\cdot 3^3}{81} = 2{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_3(3)| < \frac{10\cdot 3^4}{243} = 3{,}333\,333$.
  - Skutočná chyba $|S_3(3)| = 1{,}079\,266$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_4(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5\cdot 3^3}{81} - \frac{10\cdot 3^4}{243} = -0{,}666\,667$.
  - Teoretická chyba $|R_4(3)| < \frac{22\cdot 3^5}{729} = 7{,}333\,333$.
  - Skutočná chyba $|S_4(3)| = 2{,}254\,068$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{1+7}=f(7)$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1;\infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3{,}333\,333$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3{,}333\,333$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3{,}333\,333$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3{,}333\,333$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3{,}333\,333.$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2{,}111\,111.$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2{,}111\,111.$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2{,}111\,111.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{1+7}=f(7)$

- $\sqrt[3]{8}\approx T_1(7)=1+\frac{7}{3}=3{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_2(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}=-2{,}111\,111$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_3(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot 7^3}{81}=19{,}061\,728$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_3(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot 7^3}{81}\qquad=19{,}061\,728$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{1+7}=f(7)$

- $\sqrt[3]{8}\approx T_1(7)=1+\frac{7}{3}=3{,}333\,333$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_2(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}=-2{,}111\,111$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_3(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot 7^3}{81}=19{,}061\,728$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_4(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot 7^3}{81}-\frac{10\cdot 7^4}{243}=-79{,}744\,856$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3{,}333\,333.$
  - Teoretická chyba $|R_1(7)| < \frac{7^2}{9} = 5{,}444\,444.$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2{,}111\,111.$
  - Teoretická chyba $|R_2(7)| < \frac{5\cdot 7^3}{81} = 21{,}172\,840.$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_3(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5\cdot 7^3}{81} = 19{,}061\,728.$
  - Teoretická chyba $|R_3(7)| < \frac{10\cdot 7^4}{243} = 98{,}806\,584.$

- $\sqrt[3]{8} \approx T_4(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5\cdot 7^3}{81} - \frac{10\cdot 7^4}{243} = -79{,}744\,856.$
  - Teoretická chyba $|R_4(7)| < \frac{22\cdot 7^5}{729} = 507{,}207\,133.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$ má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{1+7}=f(7)=2{,}000\,000$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

- $\sqrt[3]{8}\approx T_1(7)=1+\frac{7}{3}=3{,}333\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(7)|<\frac{7^2}{9}=5{,}444\,444$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_2(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}=-2{,}111\,111$.
  - Teoretická chyba $|R_2(7)|<\frac{5\cdot 7^3}{81}=21{,}172\,840$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_3(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot 7^3}{81}=19{,}061\,728$.
  - Teoretická chyba $|R_3(7)|<\frac{10\cdot 7^4}{243}=98{,}806\,584$.

- $\sqrt[3]{8}\approx T_4(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot 7^3}{81}-\frac{10\cdot 7^4}{243}=-79{,}744\,856$.
  - Teoretická chyba $|R_4(7)|<\frac{22\cdot 7^5}{729}=507{,}207\,133$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{1+7}=f(7)=2{,}000\,000$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]

[$S_n(x)=T_n(x)-f(x)$ pre $n=1,2,3,4$.]

- $\sqrt[3]{8}\approx T_1(7)=1+\frac{7}{3}=3{,}333\,333$.
  - Teoretická chyba $|R_1(7)|<\frac{7^2}{9}=5{,}444\,444$.
  - Skutočná chyba $|S_1(7)|=1{,}333\,333$.
- $\sqrt[3]{8}\approx T_2(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}=-2{,}111\,111$.
  - Teoretická chyba $|R_2(7)|<\frac{5\cdot7^3}{81}=21{,}172\,840$.
  - Skutočná chyba $|S_2(7)|=4{,}111\,111$.
- $\sqrt[3]{8}\approx T_3(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot7^3}{81}=19{,}061\,728$.
  - Teoretická chyba $|R_3(7)|<\frac{10\cdot7^4}{243}=98{,}806\,584$.
  - Skutočná chyba $|S_3(7)|=17{,}061\,728$.
- $\sqrt[3]{8}\approx T_4(7)=1+\frac{7}{3}-\frac{7^2}{9}+\frac{5\cdot7^3}{81}-\frac{10\cdot7^4}{243}=-79{,}744\,856$.
  - Teoretická chyba $|R_4(7)|<\frac{22\cdot7^5}{729}=507{,}207\,133$.
  - Skutočná chyba $|S_4(7)|=81{,}744\,856$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1+x}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x>-1$
  má tvar $T_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$, $x>-1$.

- Pre $x\in O(0)\cap(-1;\infty)$ aproximujeme $f(x)\approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$.

Pre $x=-0,2$ platí $\sqrt[3]{0,8}=\sqrt[3]{1-0,2}=f(-0,2)=0,92831777.$ [Presnosť na 8 desatinných miest.]

[$S_n(x)=T_n(x)-f(x)$ pre $n=1,2,3,4$.]

- $\sqrt[3]{0,8}\approx T_1(-0,2)=1+\frac{-0,2}{3}=0,93333333.$
  - Teoretická chyba $|R_1(-0,2)|<\frac{0,2^2}{9\cdot 0,8^2}=0,00694444.$
  - Skutočná chyba $|S_1(-0,2)|=0,00501556.$
- $\sqrt[3]{0,8}\approx T_2(-0,2)=1+\frac{-0,2}{3}-\frac{(-0,2)^2}{9}=0,92888889.$
  - Teoretická chyba $|R_2(-0,2)|<\frac{5\cdot 0,2^3}{81\cdot 0,8^3}=0,00096451.$
  - Skutočná chyba $|S_2(-0,2)|=0,00057112.$
- $\sqrt[3]{0,8}\approx T_3(-0,2)=1+\frac{-0,2}{3}-\frac{(-0,2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0,2)^3}{81}=0,92839506.$
  - Teoretická chyba $|R_3(-0,2)|<\frac{10\cdot 0,2^4}{243\cdot 0,8^4}=0,00016075.$
  - Skutočná chyba $|S_3(-0,2)|=0,00007729.$
- $\sqrt[3]{0,8}\approx T_4(-0,2)=1+\frac{-0,2}{3}-\frac{(-0,2)^2}{9}+\frac{5\cdot(-0,2)^3}{81}-\frac{10\cdot(-0,2)^4}{243}=0,92832922.$
  - Teoretická chyba $|R_4(-0,2)|<\frac{22\cdot 0,2^5}{729\cdot 0,8^5}=0,00002947.$
  - Skutočná chyba $|S_4(-0,2)|=0,00001145.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1+x}$, $x \in \langle -1; 2\rangle$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

  má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Pre $x = -0,20$ platí $\sqrt[3]{0,80} = \sqrt[3]{1-0,20} = f(-0,20) = 0,92831777.$ [Presnosť na 8 desatinných miest.]

- $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$

  $T_4(-0,20) = 0,92832922$

- $T_3(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$

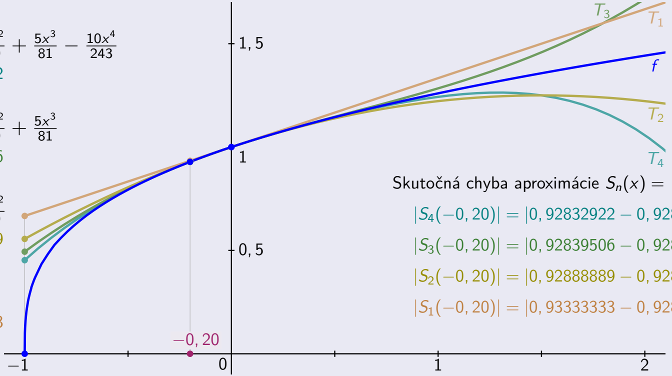
  $T_3(-0,20) = 0,92839506$

- $T_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$

  $T_2(-0,20) = 0,92888889$

- $T_1(x) = 1 + \frac{x}{3}$

  $T_1(-0,20) = 0,93333333$



Skutočná chyba aproximácie $S_n(x) = T_n(x) - f(x)$:

$|S_4(-0,20)| = |0,92832922 - 0,92831777| = 0,00001145$

$|S_3(-0,20)| = |0,92839506 - 0,92831777| = 0,00007729$

$|S_2(-0,20)| = |0,92888889 - 0,92831777| = 0,00057112$

$|S_1(-0,20)| = |0,93333333 - 0,92831777| = 0,00501556$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1+x}$, $x \in \langle -1; 8\rangle$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.

- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Pre $x = -0,2$ platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2) = 0,92831777.$ [Presnosť na 8 desatinných miest.]

- $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$

  $T_4(-0,2) = 0,92832922$

- $T_3(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$

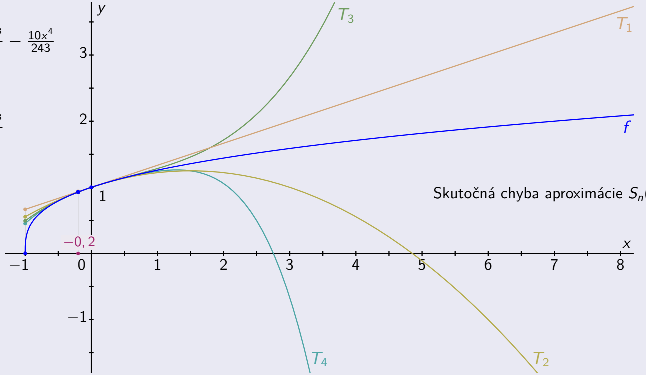
  $T_3(-0,2) = 0,92839506$

- $T_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$

  $T_2(-0,2) = 0,92888889$

- $T_1(x) = 1 + \frac{x}{3}$

  $T_1(-0,2) = 0,93333333$



Skutočná chyba aproximácie $S_n(x) = T_n(x) - f(x)$:

$|S_4(-0,2)| = 0,00001145$

$|S_3(-0,2)| = 0,00007729$

$|S_2(-0,2)| = 0,00057112$

$|S_1(-0,2)| = 0,00501556$

Koniec 8. časti (aplikácie)

Ďakujem za pozornosť.