Matematická analýza 1

2023/2024

2. Číselné postupnosti

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou získate nápomoc.
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

beerb@frcatel.fri.uniza.sk http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb

Obsah

1. Postupnosti reálnych čísel
2. Limita postupnosti
3. Výpočet limít
4. Riešené príklady

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$,

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$,

t. j. $f = \{[n; f(n)]\,, n \in N\} = \{[1; f(1)], [2; f(2)], [3; f(3)], \ldots, [n; f(n)], \ldots\}$

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$,

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$,

t. j. $f = \{[n; f(n)]\,, n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva reálna (postupnosť reálnych čísel),

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$.

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva reálna (postupnosť reálnych čísel),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- Explicitne, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

- Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ môžeme definovať

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

- Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ môžeme definovať

  explicitne vzťahom $a_n = 2n - 1$, $n \in N$

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva reálna (postupnosť reálnych čísel),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- Explicitne, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- Rekurentne, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

- Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ môžeme definovať explicitne vzťahom $a_n = 2n - 1$, $n \in N$ a rekurentne predpisom $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \in N$.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Ohraničená zhora**, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Ohraničená zhora**, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.

- **Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Ohraničená zhora**, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- **Ohraničená zdola**, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.

- **Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.

- Neohraničená zhora, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola, ak nie je ohraničená zdola.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.
- Ohraničená, ak je ohraničená zdola a súčasne je ohraničená zhora.

- Neohraničená zhora, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola, ak nie je ohraničená zdola.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.
- Ohraničená, ak je ohraničená zdola a súčasne je ohraničená zhora.

- Neohraničená zhora, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola, ak nie je ohraničená zdola.
- Neohraničená, ak nie je ohraničená zdola alebo nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Rastúca, ak pre všetky } n \in N \text{ platí } a_n < a_{n+1}. \\ \bullet\ \text{Klesajúca, ak pre všetky } n \in N \text{ platí } a_n > a_{n+1}. \end{array}\right\}$ Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

} Monotónna.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

} Monotónna.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Monotónna.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

} Monotónna.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom, rozdielom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom, rozdielom, súčinom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom, rozdielom, súčinom, resp. podielom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

resp. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ v prípade, že pre všetky $n \in N$ platí $b_n \neq 0$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- Vlastná, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- Vlastná, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).
- Nevlastná, ak $a = -\infty$ alebo $a = \infty$ (nevlastná hromadná hodnota).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- Vlastná, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).
- Nevlastná, ak $a = -\infty$ alebo $a = \infty$ (nevlastná hromadná hodnota).

- Množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme symbolom E.

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

Limita postupnosti – Existencia HH

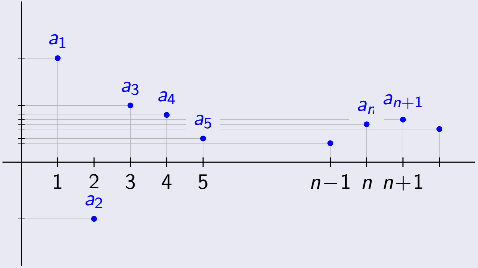
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

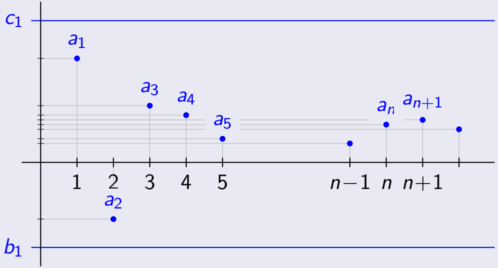


Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

  Označme $d = c_1 - b_1$.



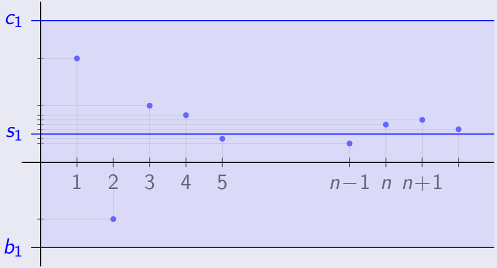
Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1 ; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_1 ; c_1 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_1 ; s_1 \rangle$, $\langle s_1 ; c_1 \rangle$, kde $s_1 = \frac{b_1 + c_1}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

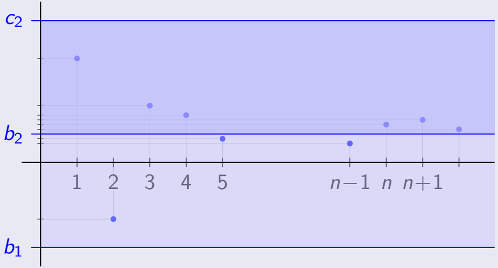
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_1; c_1 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_1; s_1 \rangle$, $\langle s_1; c_1 \rangle$, kde $s_1 = \frac{b_1 + c_1}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_2; c_2 \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

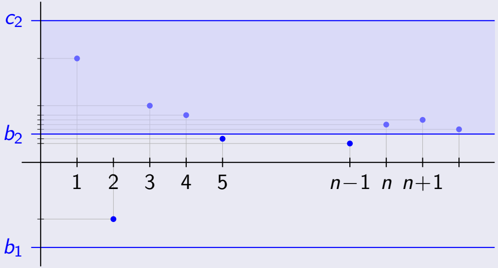
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_1; c_1 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_1; s_1 \rangle$, $\langle s_1; c_1 \rangle$, kde $s_1 = \frac{b_1+c_1}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_2; c_2 \rangle$.

Platí $\langle b_2; c_2 \rangle \subset \langle b_1; c_1 \rangle$, $c_2 - b_2 = \frac{c_1 - b_1}{2} = \frac{d}{2} = \frac{d}{2^{2-1}}$.



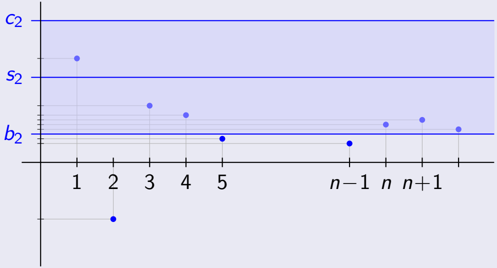
Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_2; s_2 \rangle$, $\langle s_2; c_2 \rangle$, kde $s_2 = \frac{b_2 + c_2}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

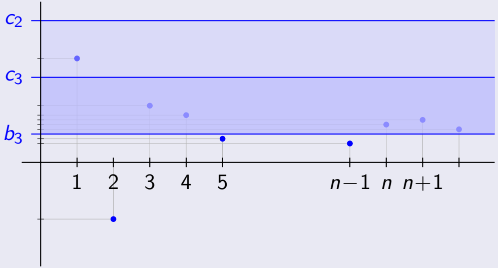
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_2; s_2 \rangle$, $\langle s_2; c_2 \rangle$, kde $s_2 = \frac{b_2+c_2}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_3; c_3 \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

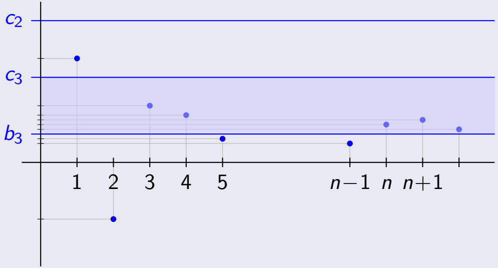
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_2; s_2 \rangle$, $\langle s_2; c_2 \rangle$, kde $s_2 = \frac{b_2+c_2}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_3; c_3 \rangle$.

Platí $\langle b_3; c_3 \rangle \subset \langle b_2; c_2 \rangle$, $c_3 - b_3 = \frac{c_2-b_2}{2} = \frac{d}{2^2} = \frac{d}{2^{3-1}}$.



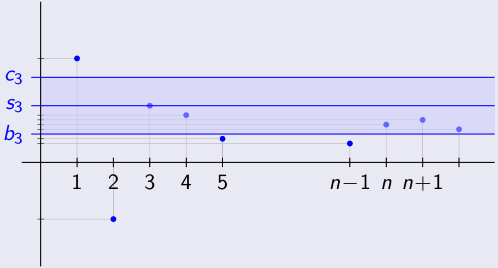
Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_3; c_3 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_3; s_3 \rangle$, $\langle s_3; c_3 \rangle$, kde $s_3 = \frac{b_3 + c_3}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

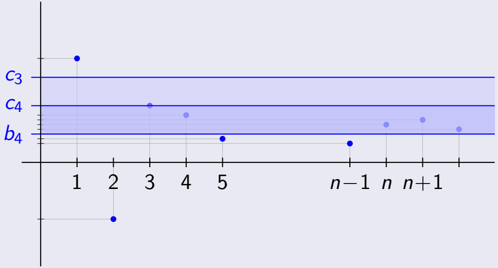
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_3; c_3 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_3; s_3 \rangle$, $\langle s_3; c_3 \rangle$, kde $s_3 = \frac{b_3 + c_3}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_4; c_4 \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

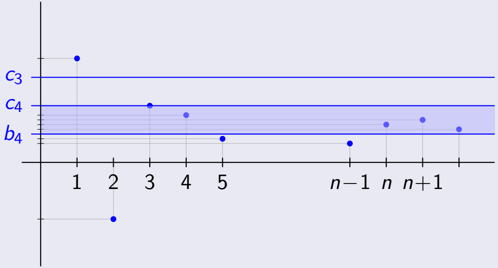
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_3; c_3 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_3; s_3 \rangle$, $\langle s_3; c_3 \rangle$, kde $s_3 = \frac{b_3 + c_3}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_4; c_4 \rangle$.

Platí $\langle b_4; c_4 \rangle \subset \langle b_3; c_3 \rangle$, $c_4 - b_4 = \frac{c_3 - b_3}{2} = \frac{d}{2^3} = \frac{d}{2^{4-1}}$.



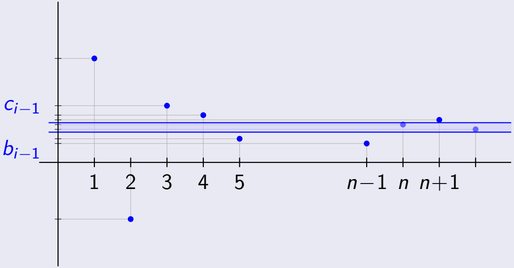
Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Takto pokračujeme do nekonečna, v praxi po požadovanú presnosť.

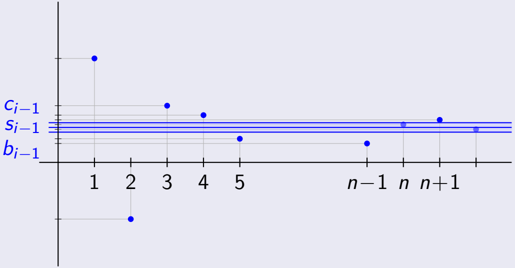


Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.
  Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

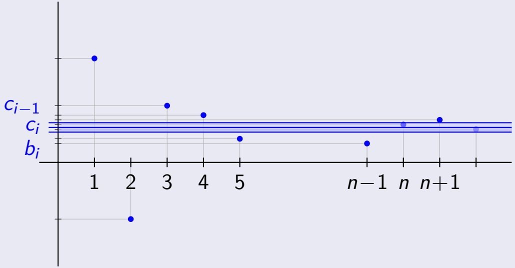
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

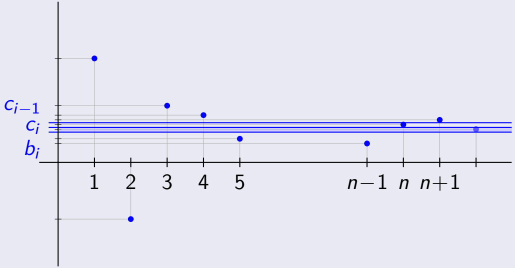
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

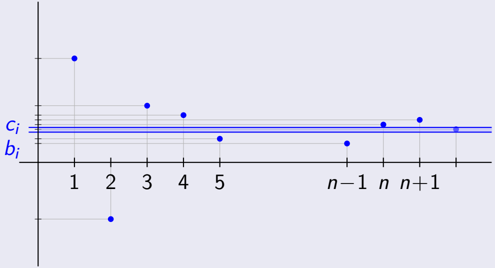
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

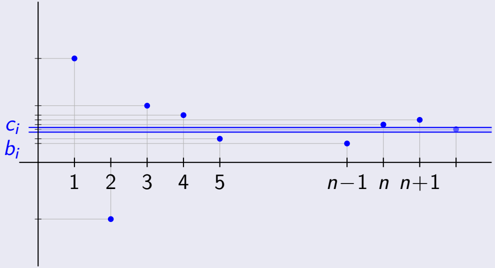
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

  V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

  Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

  v ktorom leží nekonečne veľa a_n

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

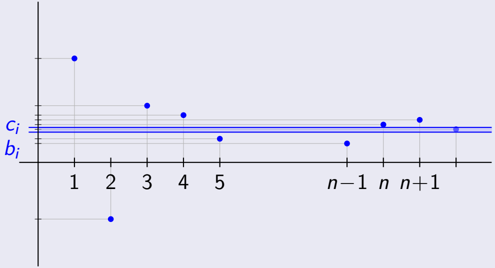
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

tak, že $|a_n - a| \leq c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

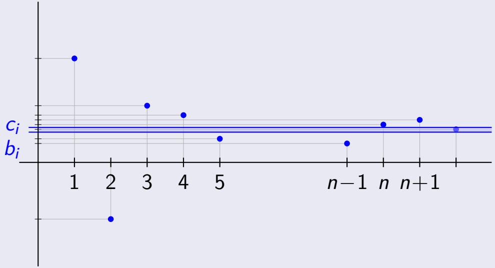
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

tak, že $|a_n - a| \leq c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

[Cantorov princíp vložených intervalov.]

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

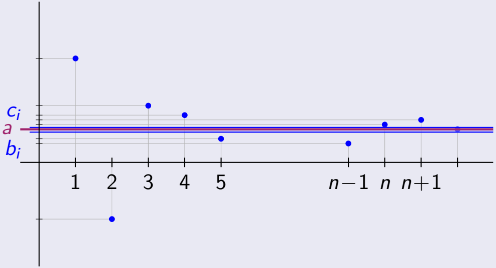
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

tak, že $|a_n - a| \leq c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

[Cantorov princíp vložených intervalov.]

$\Rightarrow$ • Existuje jediný bod $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \langle b_i; c_i \rangle$,

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

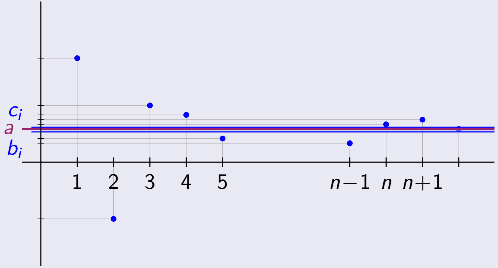
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

tak, že $|a_n - a| \leq c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

[Cantorov princíp vložených intervalov.]

$\Rightarrow$ • Existuje jediný bod $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \langle b_i; c_i \rangle$,

ktorý je hľadanou HH postupnosti.

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých **hromadných hodnôt** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R \\ \\ \pm\infty \\ \\ \nexists \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R & \text{vlastná limita} \\ \pm\infty & \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R & \text{vlastná limita} \\ \pm\infty & \text{nevlastná limita} \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R \quad \text{vlastná limita} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \pm\infty \quad \text{nevlastná limita} & \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R & \text{vlastná limita} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \pm\infty & \text{nevlastná limita} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje do } \pm\infty \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R \text{ (vlastná limita)} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \pm\infty \text{ (nevlastná limita)} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje do } \pm\infty \\ \nexists & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ osciluje} \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$a \in R$ vlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$
$\pm\infty$ nevlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$
$\nexists$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

- $a \in R$ — vlastná limita: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. } $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje
- $\pm\infty$ — nevlastná limita: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$
- $\nexists$ — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$a \in R$ vlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje
$\pm\infty$ nevlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje
$\nexists$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$a \in R$ vlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$
$\pm\infty$ nevlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$
$\nexists$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje	

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je **hromadná hodnota (HH)** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1,1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1,-1,1,1,1,1,\ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1,1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1,-1,1,1,1,1,\dots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

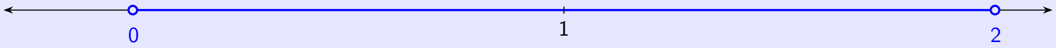
- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

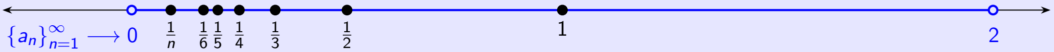
Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

• Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.

Platí • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, pričom $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$ pre všetky $n \in N$,



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

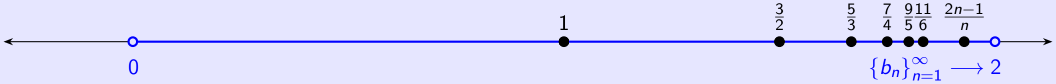
Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.

Platí
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, pričom $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$ pre všetky $n \in N$,
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 2$, pričom $b_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} \neq 2$ pre všetky $n \in N$.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

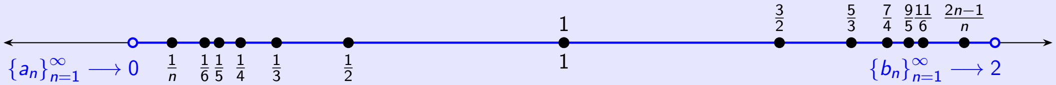
$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.

Platí • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, pričom $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$ pre všetky $n \in N$,

• $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 2$, pričom $b_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} \neq 2$ pre všetky $n \in N$.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$ • Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$

- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

[Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

[Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

[Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\left\{ \begin{array}{l} \text{až od nejakého } n_0 \in N, \\ \end{array} \right.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\Big\{$ až od nejakého $n_0 \in N$, t. j. pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\begin{cases} \text{až od nejakého } n_0 \in N, \text{ t. j. pre všetky } n \in N,\ n \geq n_0. \\ \text{pre všetky } n \in N \text{ okrem konečného počtu členov.} \end{cases}$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\begin{cases} \text{až od nejakého } n_0 \in N, \text{ t. j. pre všetky } n \in N,\ n \geq n_0. \\ \text{pre všetky } n \in N \text{ okrem konečného počtu členov.} \end{cases}$

- Vo všeobecnosti budeme tvrdenia pre postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formulovať pre všetky členy a_n.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia
  - až od nejakého $n_0 \in N$, t. j. pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$.
  - pre všetky $n \in N$ okrem konečného počtu členov.

- Vo všeobecnosti budeme tvrdenia pre postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formulovať pre všetky členy a_n.

  [V predchádzajúcom zmysle tvrdenia pre postupnosti ostanú v platnosti, aj keď vynecháme konečný počet ich členov.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{l_n}$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N.$

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{l_n}.$

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim_{n\to\infty} a_n.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$
- Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$
- Pre všetky $k \in N$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.
- Špeciálne platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

- $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{l_n}$.

$\Rightarrow$
- Neexistuje $\lim_{n\to\infty} a_n$. [Postupnosť osciluje.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$.

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [Postupnosť osciluje.]

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje,

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N.$

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}.$

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$ [Postupnosť osciluje.]

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje, pretože $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N.$

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}.$

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$ [Postupnosť osciluje.]

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje, pretože $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$ a $\{1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená,

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$,

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow +\infty$.

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora
• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola

$\left.\right\}$ ohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow +\infty$.

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora ohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R$.

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola ohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R$.

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$,

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$,

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$,

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$. • $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$. • $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$
- Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$
- Existuje $\lim_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $0 = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{n}) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $0 = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n\in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n\in N$. • $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $n < n^2$ pre všetky $n\in N$, $n>1$. • $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n\in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a\in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n\in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $0 = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{n}) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Longrightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$
- Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b\in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b\in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a.$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

  - $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty - \infty$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b\in R^*$, $a<b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $a_n<b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b\in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty-\infty = ?$.

[Postup nemôžeme použiť, pretože rozdiel $\infty-\infty$ nevieme vypočítať.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b\in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b\in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

  - $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty+\infty}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty+\infty} = 0$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

  - $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
  - $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
  - $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
  - $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = ?$.

  [Postup nemôžeme použiť, pretože rozdiel $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty+\infty} = 0$.

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0.$
- $q > 0.$
- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q > 0.$
- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q = 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0.$ $\Rightarrow$ $n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N.$

- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0.$ $\Rightarrow$ $n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N.$

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora.

- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q<0. \Rightarrow -q>0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$
- $q<0. \Rightarrow -q>0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \Bigg\{$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \Bigg\{$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$
- $q<0. \Rightarrow -q>0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q>0, \text{ t. j. } -q<0, \end{cases}$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q > 0, \text{ t. j. } -q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \text{ t. j. } -q = 0, \end{cases}$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$
- $q<0. \Rightarrow -q>0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q>0, \text{ t. j. } -q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \text{ t. j. } -q=0, \\ \infty & \text{pre } q<0, \text{ t. j. } -q>0. \end{cases}$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q<0. \Rightarrow -q>0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q>0, \text{ t. j. } -q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \text{ t. j. } -q=0, \\ \infty & \text{pre } q<0, \text{ t. j. } -q>0. \end{cases}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom platí:

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$
- $q<0. \Rightarrow -q>0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q>0, \text{ t. j. } -q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \text{ t. j. } -q=0, \\ \infty & \text{pre } q<0, \text{ t. j. } -q>0. \end{cases}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$.
- $a=1$.
- $a\in(-1;1)$.
- $a=-1$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1; \infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$.
- $a = 1$.
- $a \in (-1; 1)$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty; -1)$.

- $\lim_{n\to\infty} a^n$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$.
- $a\in(-1;1)$.
- $a = -1$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty \text{ pre } a\in(1;\infty), \\ \\ \\ \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \longrightarrow \infty \text{ pre } a\in(1;\infty), \\ \\ \\ \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a=1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n\in N$.
- $a\in(-1;1)$.
- $a=-1$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty \text{ pre } a\in(1;\infty), \\ \\ \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty \text{ pre } a\in(1;\infty), \\ \\ \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a \in (-1;1)$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow$ $a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow$ $a^n = 1$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a \in (-1;1)$. $\Rightarrow$ $|a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n \in N$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1; \infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a \in (-1; 1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty; -1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (-1; 1), \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a \in (-1; 1), \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow$ $a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a=1$. $\Rightarrow$ $a^n = 1$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a\in(-1;1)$. $\Rightarrow$ $|a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a=-1$. $\Rightarrow$ $a^{2k}=1,\ a^{2k+1}=-1$ pre všetky $k\in N$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \end{cases}$$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $$\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a=1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \end{cases}$$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a=1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a\in(-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a=-1$. $\Rightarrow a^{2k}=1,\ a^{2k+1}=-1$ pre všetky $k\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

[Hromadné hodnoty $E=\{-1,1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]

- $a\in(-\infty;-1)$.

- $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \\ \nexists & \text{pre } a=-1. \end{cases}$$

t. j. postupnosť $$\{a^n\}_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a=1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \\ \text{osciluje} & \text{pre } a=-1. \end{cases}$$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a=1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a\in(-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a=-1$. $\Rightarrow a^{2k} = 1,\ a^{2k+1} = -1$ pre všetky $k\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

  [Hromadné hodnoty $E=\{-1,1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]
- $a\in(-\infty;-1)$. $\Rightarrow a^{2k}\to\infty,\ a^{2k+1}\to-\infty$ pre všetky $k\in N$.

- $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \\ \nexists & \text{pre } a=-1. \end{cases}$$

  t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$
  $$\begin{cases} \longrightarrow\infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a=1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \\ \text{osciluje} & \text{pre } a=-1. \end{cases}$$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a \in (-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a = -1$. $\Rightarrow a^{2k} = 1,\ a^{2k+1} = -1$ pre všetky $k \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

  [Hromadné hodnoty $E = \{-1{,}1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]
- $a \in (-\infty;-1)$. $\Rightarrow a^{2k} \to \infty,\ a^{2k+1} \to -\infty$ pre všetky $k \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

  [Hromadné hodnoty $E = \{-\infty,\infty\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (-1;1), \\ \nexists & \text{pre } a \in (-\infty;-1\rangle. \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a \in (-1;1), \\ \text{osciluje} & \text{pre } a \in (-\infty;-1\rangle. \end{cases}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a,\ a \in R^*$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a,\ a \in R^*$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a,\ a \in R^*$.

- $a < 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$
- $a > 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a,\ a \in R^*$.

- $a < 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$
- $a > 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- $\{1\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$,

- $\{1\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ale:

- $\{1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$,
- $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,
- $\{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

[Postupnosti konvergujú.]

- $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a,\ a \in R^*$.

• $a < 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

• $a > 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a,\ a \in R^*$.

• $a < 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

• $a > 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ale:

• $\{1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$, • $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, • $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$. [Postupnosti konvergujú.]

• $\{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty$, • $\{n^2\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty$. [Postupnosti divergujú.]

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N.$ Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N.$ Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ existuje.

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ existuje.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N.$ Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ existuje.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$.

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0$.

- $a \neq 0$.

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = \dfrac{|a|^n}{n!} > 0.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = \dfrac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|}{n+1} = \dfrac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \dfrac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\dfrac{|a|}{k} < 1.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ pre $a\in R$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n\in N$ platí $|a_n| = \left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = \dfrac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|}{n+1} = \dfrac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \dfrac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k\in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\dfrac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n\in N$, $n > k$ platí
    $0 < |a_n| = \dfrac{|a|^n}{n!}$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

    $0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n}$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a\in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n\in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k\in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n\in N$, $n > k$ platí
    $0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{k^k}{k^k}\cdot\frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!}\cdot\left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} |a_n| \le \lim_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0.$$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a\in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a\neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n\in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k\in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n\in N$, $n>k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{k^k}{k^k}\cdot\frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!}\cdot\left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} |a_n| \le \lim_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!}\cdot\left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!}\cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k \cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Riešené príklady – Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R$, $a > 0$, $a \neq \mathrm{e}$.

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N.$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R$, $a > 0$, $a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R$, $a > 0$, $a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n}$$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}.$$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right]$$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$.

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ q > 0.$

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R$, $a>0$, $a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{matrix} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R$, $a>0$, $q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1$.
- $a\neq 1$.

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \dfrac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \dfrac{a}{\mathrm{e}}$. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ q > 0$.

Označme $a_n = \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.

- $a \neq 1$.

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}$. $\Rightarrow \left[\begin{matrix} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a<\mathrm{e}\end{matrix}\right] \Rightarrow$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.

- $a\neq 1$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}$.

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \dfrac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \dfrac{a}{\mathrm{e}}$. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.
- $a\neq 1$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n^q}{a^n}} = \dfrac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \dfrac{1^q}{a} = \dfrac{1}{a}$.

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ q > 0.$

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 1$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $a \neq 1$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} > 1 \text{ pre } a < 1 \\ \frac{1}{a} < 1 \text{ pre } a > 1 \end{array}\right]$$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n=\frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}=\frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{an^n}{(n+1)^n}=a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n=a\Bigg(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Bigg)^n=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

  $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{\mathrm{e}}.\Rightarrow \left[\begin{matrix}\frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e}\\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e}\end{matrix}\right]\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}\infty & \text{pre } a>\mathrm{e},\\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}.\end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n=\frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\Big\{\frac{n^q}{a^n}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1.\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} n^q=\infty.$
- $a\neq 1.\Rightarrow \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}}=\frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}.\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}=\frac{1^q}{a}=\frac{1}{a}.$

  $\Rightarrow \left[\begin{matrix}\frac{1}{a}>1 \text{ pre } a<1\\ \frac{1}{a}<1 \text{ pre } a>1\end{matrix}\right]\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}\infty & \text{pre } a<1,\\ 0 & \text{pre } a>1.\end{cases}$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = a\Bigg(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Bigg)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}.$ $\Rightarrow \left[\begin{matrix} \frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e}\end{matrix}\right] \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}.\end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0.$

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{\frac{n^q}{a^n}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$
- $a\neq 1. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}.$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \frac{1}{a}>1 \text{ pre } a<1 \\ \frac{1}{a}<1 \text{ pre } a>1\end{matrix}\right] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a<1, \\ 0 & \text{pre } a>1.\end{cases}$

Riešené príklady – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{bmatrix} \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $a\neq 1. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}.$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} > 1 \text{ pre } a<1 \\ \frac{1}{a} < 1 \text{ pre } a>1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a<1, \\ 0 & \text{pre } a>1. \end{cases} \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\leq 1, \\ 0 & \text{pre } a>1. \end{cases}$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in N$.

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$,

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity.

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$).

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3,$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$).

[Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N.$ (Indukčný predpoklad.)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N$.

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3,\quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1 + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$ pre $k + 1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6)$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N.$ (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1.$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí
$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6 = (a_n + 2)(a_n - 3) < 0.$$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N.$ (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1.$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0,\ a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6$

$$= (a_n + 2)(a_n - 3) < 0. \Rightarrow a_n^2 < a_{n+1}^2.$$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6$

$= (a_n + 2)(a_n - 3) < 0. \Rightarrow a_n^2 < a_{n+1}^2. \Rightarrow a_n < a_{n+1}.$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned} 0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\ &= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \end{aligned}$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned} 0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\ &= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\ &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array} \right]
\end{aligned}
$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}}
\end{aligned}
$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9}
\end{aligned}$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \Big(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\Big) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3} = \frac{7}{30}$.

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10\cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10\cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

Iné riešenie.

- $a = 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$
$$= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right]$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.$$

Iné riešenie.

- $a = 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots$
- $10a = 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$
$$= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right]$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.$$

Iné riešenie.

- $a = 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots$
- $10a = 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots$
- $100a = 23{,}\overline{3} = 23{,}3333\ldots$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10\cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\left.\begin{aligned}
a &= 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots \\
10a &= 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots \\
100a &= 23{,}\overline{3} = 23{,}3333\ldots
\end{aligned}\right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

Iné riešenie.

$$
\left.\begin{aligned}
a &= 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots \\
10a &= 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots \\
100a &= 23{,}\overline{3} = 23{,}3333\ldots
\end{aligned}\right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots = 23 - 2 = 21.
$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned} 0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\ &= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\ &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\ &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\left.\begin{array}{rcl} a = & 0{,}2\overline{3} = & 0{,}2333\ldots \\ 10a = & 2{,}\overline{3} = & 2{,}3333\ldots \\ 100a = & 23{,}\overline{3} = & 23{,}3333\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 100a - 10a &= 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots \\ &= 23 - 2 = 21. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 21 = 100a - 10a = 90a.$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3} = \frac{7}{30}$.

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\left.\begin{aligned}
\bullet\quad a &= 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots \\
\bullet\quad 10a &= 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots \\
\bullet\quad 100a &= 23{,}\overline{3} = 23{,}3333\ldots
\end{aligned}\right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots = 23 - 2 = 21.$$

$$\Rightarrow 21 = 100a - 10a = 90a. \Rightarrow \bullet\ a = \frac{21}{90} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 30} = \frac{7}{30}.$$

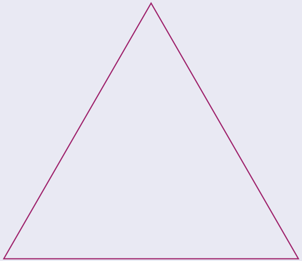
Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

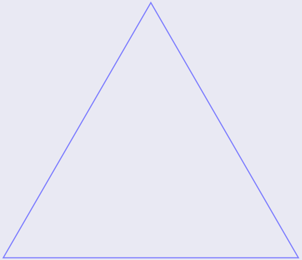
- Každú úsečku



Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

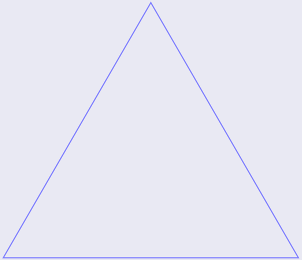
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.



Riešené príklady – Kochova vločka

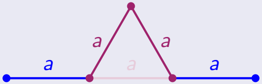
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek

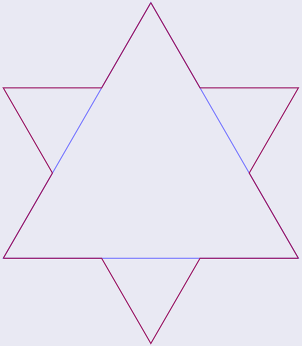


Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

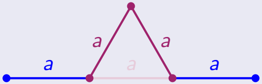


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.



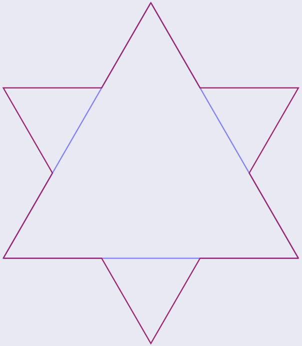
Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



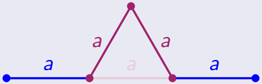
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.



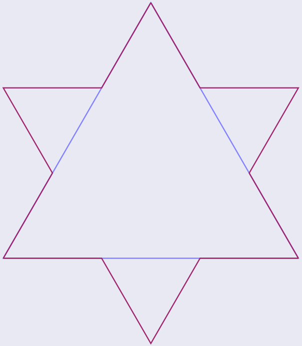
Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



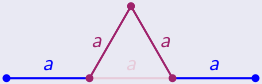
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.



Riešené príklady – Kochova vločka

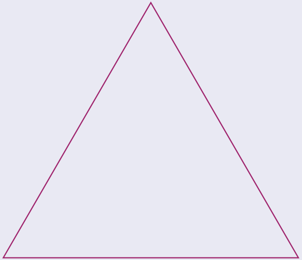
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

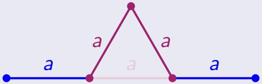
- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.



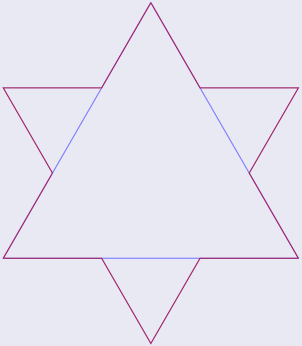
Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

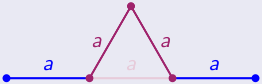
- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.



- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.

Riešené príklady – Kochova vločka

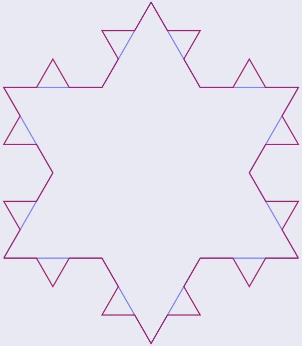
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

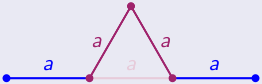
- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.



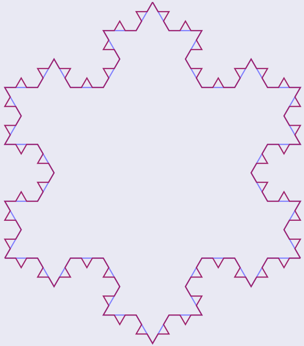
Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

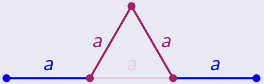


- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \to \infty$ môžeme vyjadriť obvod vločky v tvare

$$d = \lim_{n \to \infty} \left(\tfrac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$

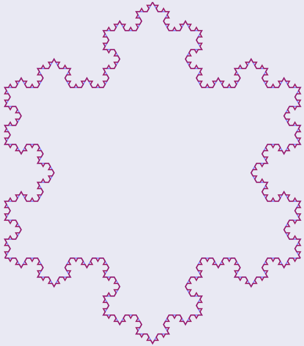
Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.



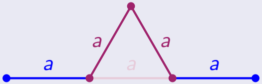
- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \to \infty$ môžeme vyjadriť obvod vločky v tvare

$$d = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$

[Postupnosť $\{(\frac{4}{3})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientom $\frac{4}{3} > 1$, t. j. platí $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{4}{3})^n = \infty$.]

Riešené príklady – Kochova vločka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

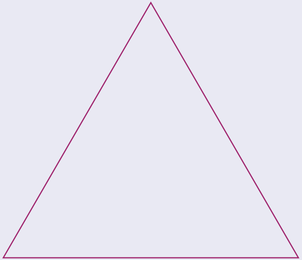


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \to \infty$ môžeme vyjadriť obvod vločky v tvare

$$d = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$



[Postupnosť $\{(\frac{4}{3})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientom $\frac{4}{3} > 1$, t. j. platí $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{4}{3})^n = \infty$.]

Koniec 2. časti

Ďakujem za pozornosť.