Matematická analýza 1

2023/2024

6. Limita funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

1. Definícia limity funkcie
2. Vlastnosti limít
3. Jednostranné limity
4. Asymptotické vlastnosti funkcie
5. Riešené príklady
6. Neurčité výrazy

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$,

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 4$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$

- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c+2$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c+2$.
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c+2$.
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.

Položme (dodefinujme) $f(2) = 4$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x+2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c+2$.
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.

Položme (dodefinujme) $f(2) = 4$. $\Rightarrow$ Funkcia f bude definovaná pre všetky $x \in R$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in R$.

Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \to 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \to x+2 = g(x) \to 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c+2$.
- Ľubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.

Položme (dodefinujme) $f(2) = 4$. $\Rightarrow$ Funkcia f bude definovaná pre všetky $x \in R$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = g(x)$ bude platiť pre všetky $x \in R$.

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$,

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$,

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\left[\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ x_n \in D(f), \ x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b. \right.$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)-\{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\left[\, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n\in D(f),\ x_n\neq a \text{ pre } n\in N. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b. \right.$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\Big[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a$ pre $n \in N. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$ To znamená $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.\Big]$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\left[\lim_{n \to \infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b. \right.$ To znamená $\left. \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b. \right]$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\Big[\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a$ pre $n \in N. \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b.$ To znamená $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b. \Big]$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \longrightarrow \begin{cases} b \in R. \\ b = \pm\infty. \end{cases}$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)-\{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\Big[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n\in D(f),\ x_n\neq a$ pre $n\in N. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$ To znamená $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.\Big]$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b. \longrightarrow \begin{cases} b\in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \\ b = \pm\infty. \end{cases}$$

[Konečná limita b.]

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

[$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in N$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.]

$$\lim_{x\to a} f(x) = b. \longrightarrow \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \end{cases}$$

[Konečná limita b.]
[Nekonečná limita $\pm\infty$.]

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$, označenie $\lim_{x\to a} f(x)=b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)-\{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow b$.

[$\lim_{n\to\infty} x_n=a$, $x_n\in D(f)$, $x_n\neq a$ pre $n\in N$. $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$. To znamená $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$.]

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

$$\begin{cases} b\in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \quad \text{[Konečná limita } b.] \\ b=\pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \quad \text{[Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\in R. \\ a=\pm\infty. \end{cases}$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\Big[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a$ pre $n \in N. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$ To znamená $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.\Big]$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$

$\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \end{cases}$ [Konečná limita b.] [Nekonečná limita $\pm\infty$.]

$\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} \\ a = \pm\infty. & \end{cases}$ [Limita v konečnom bode a.]

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

[$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in N$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.]

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

$\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \end{cases}$ [Konečná limita b.] [Nekonečná limita $\pm\infty$.]

$\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} \end{cases}$ [Limita v konečnom bode a.] [Limita v nekonečnom bode $\pm\infty$.]

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

[$\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in N$. $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$.]

$\lim_{x \to a} f(x) = b.$

$\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \end{cases}$ [Konečná limita b.] [Nekonečná limita $\pm\infty$.]

$\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} \end{cases}$ [Limita v konečnom bode a.] [Limita v nekonečnom bode $\pm\infty$.]

Z definície limity vyplýva:

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.\quad \text{To znamená } \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.\right]$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

$\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \end{cases}$ [Konečná limita b.] [Nekonečná limita $\pm\infty$.]

$\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} \end{cases}$ [Limita v konečnom bode a.] [Limita v nekonečnom bode $\pm\infty$.]

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in D(f),\ x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.\right.$ To znamená $\left.\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.\right]$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

$$\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \quad [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \quad [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} \quad [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} \quad [\text{Limita v nekonečnom bode } \pm\infty.] \end{cases}$$

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

- Ak existujú dve postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$$

$$\{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

[$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in N$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.]

$$\lim_{x\to a} f(x) = b. \longrightarrow \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \quad [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} \quad [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$$

$$a \longrightarrow \begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} \quad [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} \quad [\text{Limita v nekonečnom bode } \pm\infty.] \end{cases}$$

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

- Ak existujú dve postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ a hodnoty $b_1 \neq b_2$ také, že:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \text{ a } \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b_1.$$

$$\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \text{ a } \{f(x'_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b_2.$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

[$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in N$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.]

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$

$b \in R. \Rightarrow$ Vlastná limita. [Konečná limita b.]

$b = \pm\infty. \Rightarrow$ Nevlastná limita. [Nekonečná limita $\pm\infty$.]

$a \in R. \Rightarrow$ Limita vo vlastnom bode. [Limita v konečnom bode a.]

$a = \pm\infty. \Rightarrow$ Limita v nevlastnom bode. [Limita v nekonečnom bode $\pm\infty$.]

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

- Ak existujú dve postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ a hodnoty $b_1 \neq b_2$ také, že:

$$\left.\begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \text{ a } \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b_1. \\ \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \text{ a } \{f(x'_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b_2. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x\to a} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x \to a} x^2$

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \to a} x^2$

- Označme $f(x) = x^2$.

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \to a} x^2$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to a} x^2$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to a} x^2$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to a} x^2$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \cdot a = a^2.$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \cdot a = a^2$.

[Priamo dosadíme.]

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a\in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a\in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a\cdot a = a^2$.

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x\to 0} \chi(x)$$

[$\chi(x) = 1$ pre $x\in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x\in I$.]

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \cdot a = a^2$.

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x\to 0} \chi(x)$$

[$\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in I$.]

- Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a\in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a\in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\cdot a = a^2$.

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x\to 0} \chi(x)$$

[$\chi(x) = 1$ pre $x\in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x\in I$.]

- Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.
- Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset R-\{0\}$ a pre všetky $n\in N$ platí

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \cdot a = a^2$.

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x\to 0} \chi(x)$$

$[\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in I$.$]$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.
- Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ a pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{n} \neq 0$,

$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, $\frac{1}{n} \in Q$, t. j. $\chi(\frac{1}{n}) = 1$. $\Rightarrow$ $\{\chi(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a\in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a\in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x\to a} x^2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a\cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x\to 0} \chi(x)$$

[$\chi(x) = 1$ pre $x\in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in I$.]

- Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.
- Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset R-\{0\}$ a pre všetky $n\in N$ platí $\frac{1}{n}\neq 0$, $\frac{\pi}{n}\neq 0$.

$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, $\frac{1}{n}\in Q$, t. j. $\chi(\frac{1}{n}) = 1$. $\Rightarrow \{\chi(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

$\{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, $\frac{\pi}{n}\notin Q$, t. j. $\chi(\frac{\pi}{n}) = 0$. $\Rightarrow \{\chi(\frac{\pi}{n})\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a\in R, \\ \infty & \text{pre } a=\pm\infty. \end{cases}$$

- Označme $f(x)=x^2$. Každý bod $a\in R^*$ je hromadným bodom $D(f)=R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R-\{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x\to a} x^2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a\cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje. [$\chi(x)=1$ pre $x\in Q$, $\chi(x)=0$ pre $x\in I$.]

- Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi)=R$.
- Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty}\subset R-\{0\}$ a pre všetky $n\in N$ platí $\frac{1}{n}\neq 0$, $\frac{\pi}{n}\neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0,\ \frac{1}{n}\in Q, \text{ t. j. } \chi(\frac{1}{n})=1. \Rightarrow \{\chi(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 1. \\ \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0,\ \frac{\pi}{n}\notin Q, \text{ t. j. } \chi(\frac{\pi}{n})=0. \Rightarrow \{\chi(\frac{\pi}{n})\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x\to 0}\chi(x) \text{ neexistuje.}$$

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$.

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$,

  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0.$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0.$$

$$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1.$$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f)=R-\{0\}$.
- Označme $\alpha_n=\frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n\pi)=0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\tfrac{\pi}{2}+2n\pi)=1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x)=\sin x$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$$\Rightarrow \qquad -\lim_{n\to\infty} |x_n| \leq \lim_{n\to\infty} \sin x_n \leq \lim_{n\to\infty} |x_n|$$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$$\Rightarrow 0 = -\lim_{n\to\infty} |x_n| \leq \lim_{n\to\infty} \sin x_n \leq \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{aligned}\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0.\\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1.\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$\Rightarrow 0 = -\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0.$ $\Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = 0.$

Definícia limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0.$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$\Rightarrow 0 = -\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0. \Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = 0.$

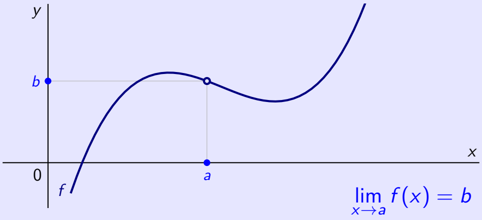
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

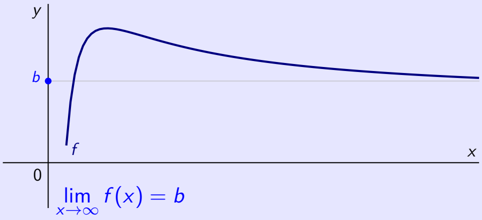
- $\lim_{x \to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ a,b \in R^*$ práve vtedy, ak:



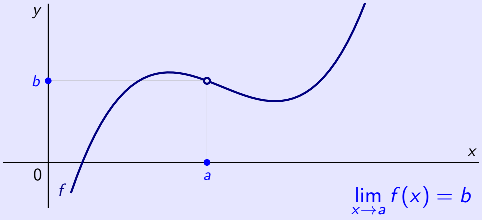


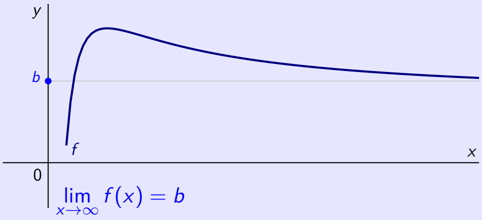
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ a,b \in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.



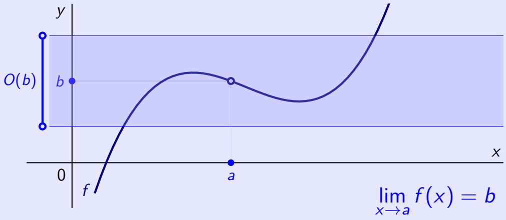


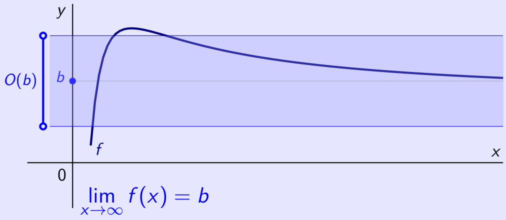
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $a, b \in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$



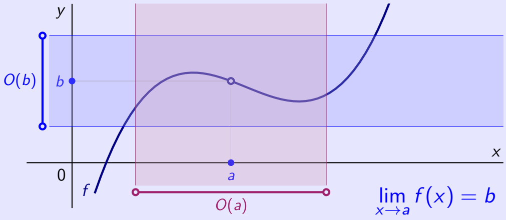


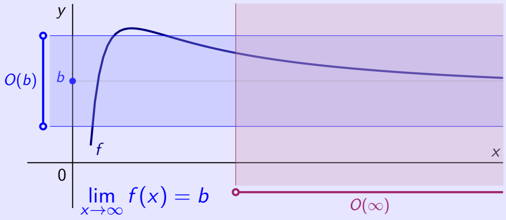
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ a,b \in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$



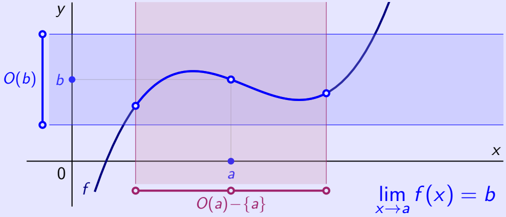


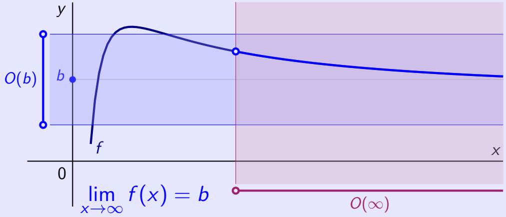
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ a,b\in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x\in O(a)\cap D(f),\ x\neq a$



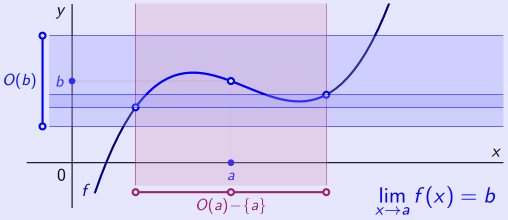


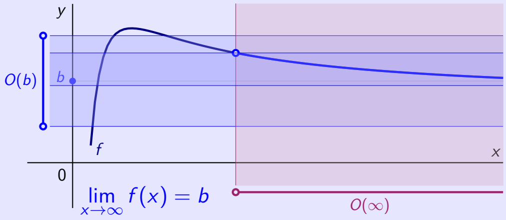
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ a,b \in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.



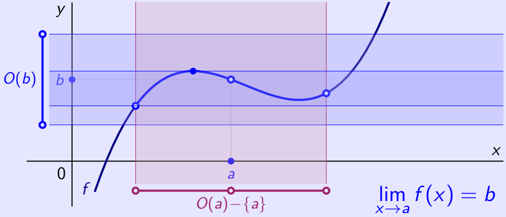


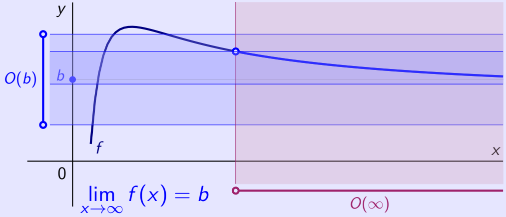
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ a,b \in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.





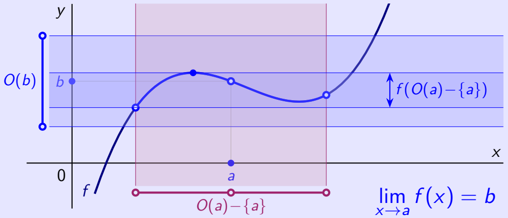
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

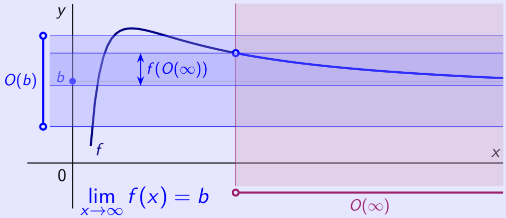
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ a,b \in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

[Pre všetky $O(b)$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a)-\{a\}) \subset O(b)$.]





Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

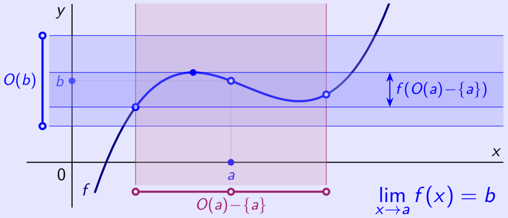
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

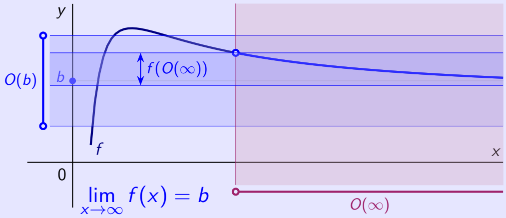
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ a,b\in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x\in O(a)\cap D(f)$, $x\neq a$ platí $f(x)\in O(b)$.

[Pre všetky $O(b)$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a)-\{a\})\subset O(b)$.]

Ak označíme δ, ε polomery okolí $O(a)$, $O(b)$, môžeme druhé tvrdenie symbolicky zapísať:





Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

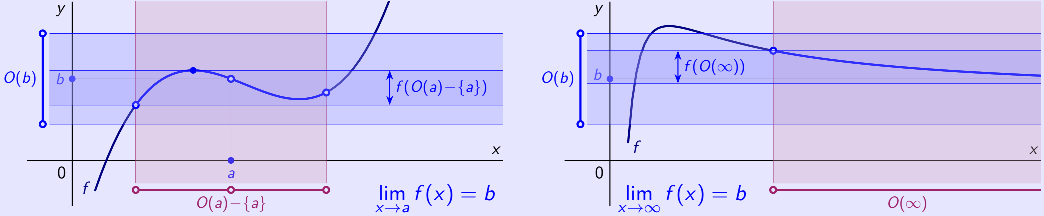
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ a,b \in R^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

[Pre všetky $O(b)$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a)-\{a\}) \subset O(b)$.]

Ak označíme δ, ε polomery okolí $O(a)$, $O(b)$, môžeme druhé tvrdenie symbolicky zapísať:

- Ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta(a)$ také, že pre všetky $x \in O_\delta(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.



Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R-\{0\}$ funkcie $y=\frac{1}{x}$.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\tfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \quad \Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty.$$

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R-\{0\}$ funkcie $y=\frac{1}{x}$.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\tfrac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0. \quad\Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}=\{n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow\infty.$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{-\tfrac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}=\{-n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow-\infty.$$

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R-\{0\}$ funkcie $y=\frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \quad \Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

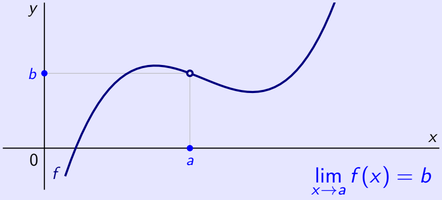
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

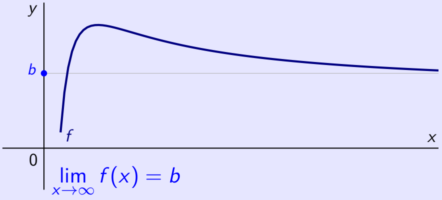
- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R-\{0\}$ funkcie $y=\frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\tfrac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \quad \Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-\tfrac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

$a\in R^*,\ b\in R,\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (konečná limita).





Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

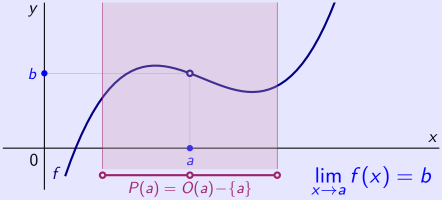
- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R-\{0\}$ funkcie $y=\frac{1}{x}$.

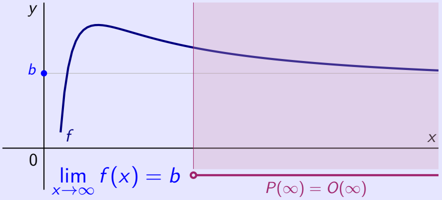
$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \quad \Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

$a\in R^*$, $b\in R$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (konečná limita).

$\Rightarrow$ • Existuje prstencové okolie $P(a) = O(a)-\{a\}$,





Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

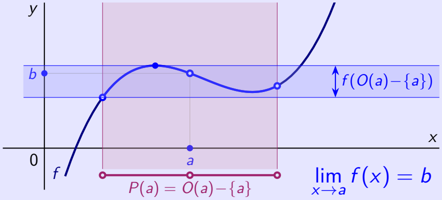
- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R-\{0\}$ funkcie $y=\frac{1}{x}$.

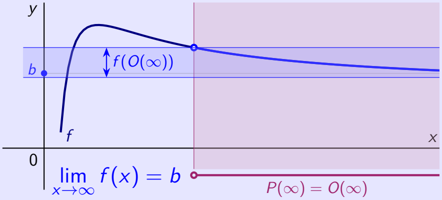
$$\left.\begin{matrix} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

$a\in R^*$, $b\in R$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (konečná limita).

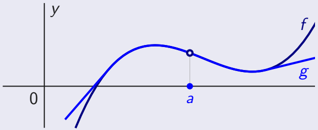
$\Rightarrow$ • Existuje prstencové okolie $P(a) = O(a)-\{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.





Definícia limity – Rovnosť limít

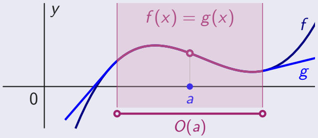
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.



Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

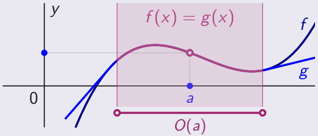


Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \to a} g(x)$ existuje.



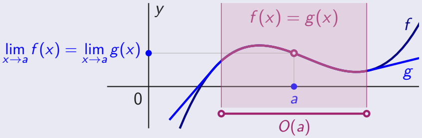
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existuje.

• $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



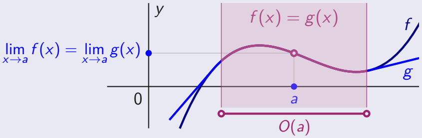
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

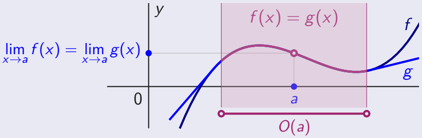
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existuje.

• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

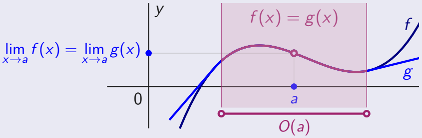
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existuje.

• $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

- Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

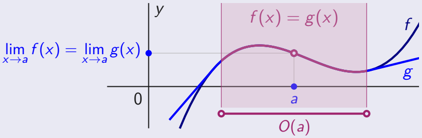
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existuje.

• $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

- Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.
- 2 je hromadný bod $D(f) = R - \{2\}$ a tiež $D(g) = R$.

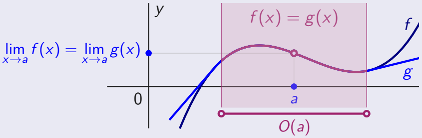
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existuje.

• $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4.$

• Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

• 2 je hromadný bod $D(f) = R - \{2\}$ a tiež $D(g) = R$.

• $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4.$

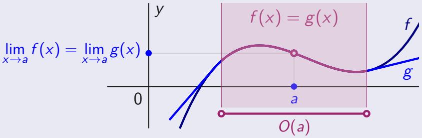
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existuje.

• $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4.$

- Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 = g(x)$.
- 2 je hromadný bod $D(f) = R - \{2\}$ a tiež $D(g) = R$.
- $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4$.

V praxi sa výpočet zapisuje priamo (rovnaké výrazy sa vykrátia):

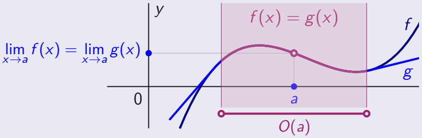
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existuje.

• $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4.$

• Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

• 2 je hromadný bod $D(f) = R - \{2\}$ a tiež $D(g) = R$.

• $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4$.

V praxi sa výpočet zapisuje priamo (rovnaké výrazy sa vykrátia):

• $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4.$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

  a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}}$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array} \right]$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x-1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}.$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept. [Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$

[Od tohto miesta už počítame limitu úplne inej funkcie.]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x-1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}. \Rightarrow \bullet\ ? = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \infty.$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$ [Od tohto miesta už počítame limitu úplne inej funkcie.]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x-1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}. \Rightarrow \bullet\ ? = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array} \right]$$

[Od tohto miesta už počítame limitu úplne inej funkcie.]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x-1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}. \Rightarrow \bullet\ ? = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1+\frac{1}{x})}{x\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in O(a)$, $x\neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}}=\left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1\end{array}\right]$ [Od tohto miesta už počítame limitu úplne inej funkcie.]

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\infty}{1+0}=\infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x>1$ platí $x-1>0$, $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$:

$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}=\frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}}<\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}.\ \Rightarrow\ \bullet\ ?=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}=\infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x-1+\frac{1}{x})}{x\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$

[Od tohto miesta už počítame limitu úplne inej funkcie.]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x-1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}. \Rightarrow \bullet\ ? = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1+\frac{1}{x})}{x\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\infty-1+0}{1+\sqrt{0+0}}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in O(a)$, $x\neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}}=\left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1\end{array}\right]$

[Od tohto miesta už počítame limitu úplne inej funkcie.]

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\infty}{1+0}=\infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x>1$ platí $x-1>0$, $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$:

$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}=\frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}}<\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}.\ \Rightarrow\ \bullet\ ?=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+\sqrt{x}}=\infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x-1+\frac{1}{x})}{x\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\infty-1+0}{1+\sqrt{0+0}}=\frac{\infty}{1}$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$." je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x+\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to\infty & 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 1 \\ \frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0 & 1+\frac{1}{x}\to 1 \end{array}\right]$$

[Od tohto miesta už počítame limitu úplne inej funkcie.]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x-1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

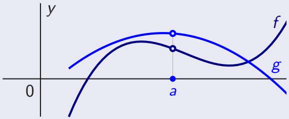
$$\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-(x-1)}{x+\sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x+\sqrt{x}}. \Rightarrow \bullet\ ? = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1+\frac{1}{x})}{x\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\infty-1+0}{1+\sqrt{0+0}} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

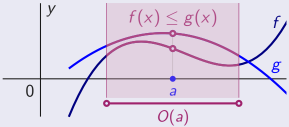


Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$,

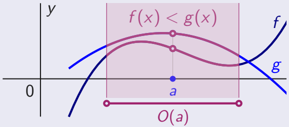


Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.



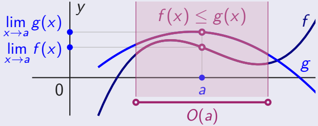
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



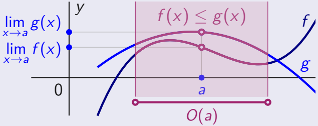
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

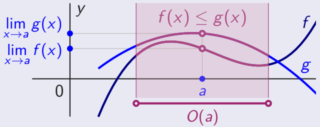
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.
- Ale pre limity platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

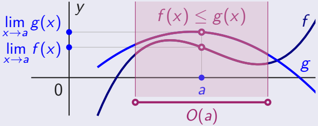
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.
- Ale pre limity platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje ostrú nerovnosť $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.]

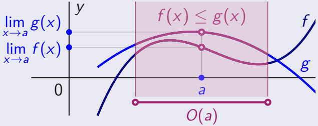
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.
- Ale pre limity platí $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje ostrú nerovnosť $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.]

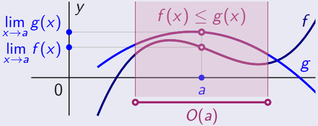
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.
- Ale pre limity platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje ostrú nerovnosť $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.]

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

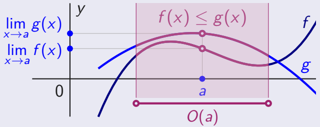
Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$.

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.
- Ale pre limity platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje ostrú nerovnosť $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.]

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$.

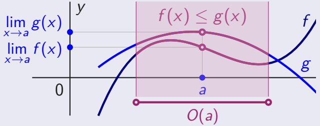
Potom platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



- Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.
- Ale pre limity platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje ostrú nerovnosť $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.]

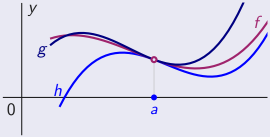
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$.

Potom platí:
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

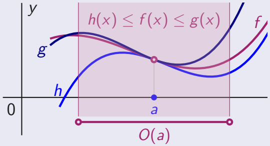
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.



Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

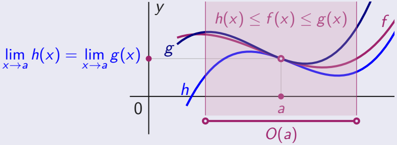


Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \in R^*$.



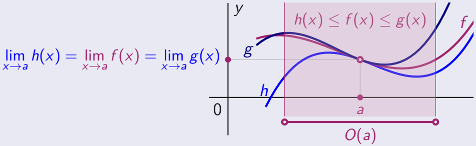
Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$. [Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



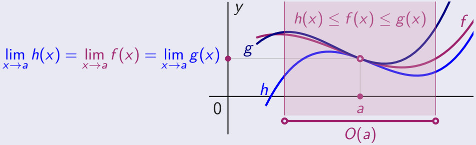
Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$. [Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \in R^*$.

$\Rightarrow$
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in R$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in Q, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin Q. \end{cases}$

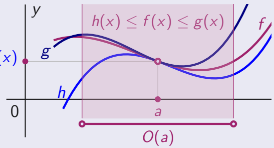
Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$. [Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in R$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in Q, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin Q. \end{cases}$

- Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

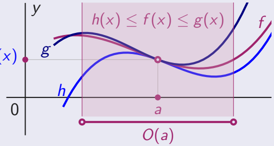
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$. [Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

$\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$



Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in R$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in Q, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin Q. \end{cases}$

- Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = R$.

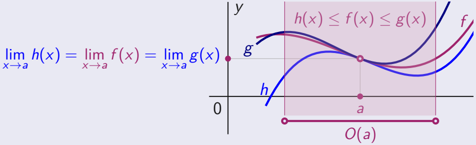
Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$. [Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in R^*$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in R$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in Q, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin Q. \end{cases}$

- Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = R$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $0 = h(x) \leq f(x) \leq g(x) = \frac{1}{x}$.

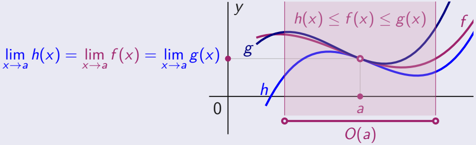
Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$. [Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in R$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in Q, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin Q. \end{cases}$

- Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = R$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $0 = h(x) \leq f(x) \leq g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x\to 0} h(x) \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

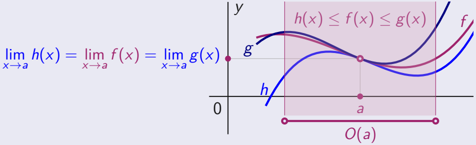
Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$. [Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \in R^*$.

$\Rightarrow$
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in R$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in Q, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin Q. \end{cases}$

- Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = R$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $0 = h(x) \leq f(x) \leq g(x) = \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x \to 0} h(x) \leq \lim\limits_{x \to 0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0.$ $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a)-\{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Existuje okolie } O(a) - \{a\}, \text{ v ktorom je funkcia } f \text{ ohraničená.} \\ \bullet \text{ Existuje } \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm\frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0;\infty)$ a $y = \pm\frac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$.
- Pre všetky $x \in (0;\infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$,

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm\frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0;\infty)$ a $y = \pm\frac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$.
- Pre všetky $x \in (0;\infty)$ platí $-1 \le \sin x \le 1$, t. j. $\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{x} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Iné riešenie.

- $y = \frac{\sin x}{x} = f(x)\cdot g(x)$, $x \in (0;\infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm\dfrac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-1}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Iné riešenie.

- $y = \dfrac{\sin x}{x} = f(x) \cdot g(x)$, $x \in (0; \infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je ohraničená.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm\frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Iné riešenie.

- $y = \frac{\sin x}{x} = f(x) \cdot g(x)$, $x \in (0; \infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je ohraničená.
- $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm\frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Iné riešenie.

- $y = \frac{\sin x}{x} = f(x) \cdot g(x)$, $x \in (0; \infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je ohraničená.
- $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1 \leq n \leq x < n+1$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$.

$a=0$.

$a\neq 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$.

$a=0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}1^x=1=e^0.$ [Splnené triviálne.]

$a\neq 0.$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \le n \le x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$.

$a = 0.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} 1^x = 1 = e^0.$ [Splnené triviálne.]

$a \neq 0.$ $\Rightarrow$ • $a > 0.$ $\Rightarrow$ $0 < \frac{a}{n+1} \le \frac{a}{x} \le \frac{a}{n}.$

• $a < 0.$ $\Rightarrow$ $0 > \frac{a}{n+1} \ge \frac{a}{x} \ge \frac{a}{n}.$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$.

$a=0.\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}1^x=1=\mathrm{e}^0$. [Splnené triviálne.]

$a\neq 0.\Rightarrow$ • $a>0.\Rightarrow 0<\frac{a}{n+1}\le\frac{a}{x}\le\frac{a}{n}.\Rightarrow 1<1+\frac{a}{n+1}\le 1+\frac{a}{x}\le 1+\frac{a}{n}$ pre všetky $n\in N$.

• $a<0.\Rightarrow 0>\frac{a}{n+1}\ge\frac{a}{x}\ge\frac{a}{n}$.

$\Rightarrow 1>1+\frac{a}{n+1}\ge 1+\frac{a}{x}\ge 1+\frac{a}{n}\ge 0$ pre všetky $n\in N$, $n\ge -a$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$.

$a=0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}1^x=1=\mathrm{e}^0$. [Splnené triviálne.]

$a\neq 0.$ $\Rightarrow$ • $a>0.$ $\Rightarrow 0<\frac{a}{n+1}\leq\frac{a}{x}\leq\frac{a}{n}.$ $\Rightarrow 1<1+\frac{a}{n+1}\leq 1+\frac{a}{x}\leq 1+\frac{a}{n}$ pre všetky $n\in N$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n\leq\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}$.

• $a<0.$ $\Rightarrow 0>\frac{a}{n+1}\geq\frac{a}{x}\geq\frac{a}{n}.$

$\Rightarrow 1>1+\frac{a}{n+1}\geq 1+\frac{a}{x}\geq 1+\frac{a}{n}\geq 0$ pre všetky $n\in N$, $n\geq -a$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}\leq\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$.

$a=0.\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}1^x=1=\mathrm{e}^0$. [Splnené triviálne.]

$a\ne 0.\Rightarrow$ • $a>0.\Rightarrow 0<\frac{a}{n+1}\le\frac{a}{x}\le\frac{a}{n}.\Rightarrow 1<1+\frac{a}{n+1}\le 1+\frac{a}{x}\le 1+\frac{a}{n}$ pre všetky $n\in N$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}$.

• $a<0.\Rightarrow 0>\frac{a}{n+1}\ge\frac{a}{x}\ge\frac{a}{n}$.

$\Rightarrow 1>1+\frac{a}{n+1}\ge 1+\frac{a}{x}\ge 1+\frac{a}{n}\ge 0$ pre všetky $n\in N$, $n\ge -a$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n$.

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$.

$a=0.\ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}1^x=1=\mathrm{e}^0.$ [Splnené triviálne.]

$a\neq 0.\ \Rightarrow$ • $a>0.\ \Rightarrow 0<\frac{a}{n+1}\le\frac{a}{x}\le\frac{a}{n}.\ \Rightarrow 1<1+\frac{a}{n+1}\le 1+\frac{a}{x}\le 1+\frac{a}{n}$ pre všetky $n\in N$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}.$

• $a<0.\ \Rightarrow 0>\frac{a}{n+1}\ge\frac{a}{x}\ge\frac{a}{n}.$

$\Rightarrow 1>1+\frac{a}{n+1}\ge 1+\frac{a}{x}\ge 1+\frac{a}{n}\ge 0$ pre všetky $n\in N$, $n\ge -a$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n.$

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right]$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$.

$a=0.\Rightarrow$ • $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}1^x=1=\mathrm{e}^0$. [Splnené triviálne.]

$a\neq 0.\Rightarrow$ • $a>0.\Rightarrow 0<\frac{a}{n+1}\le\frac{a}{x}\le\frac{a}{n}.\Rightarrow 1<1+\frac{a}{n+1}\le 1+\frac{a}{x}\le 1+\frac{a}{n}$ pre všetky $n\in N$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}$.

• $a<0.\Rightarrow 0>\frac{a}{n+1}\ge\frac{a}{x}\ge\frac{a}{n}$.

$\Rightarrow 1>1+\frac{a}{n+1}\ge 1+\frac{a}{x}\ge 1+\frac{a}{n}\ge 0$ pre všetky $n\in N$, $n\ge -a$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}\le\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\le\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n$.

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right]=\mathrm{e}^a\cdot(1+0)^{-1}=\mathrm{e}^a\cdot 1=\mathrm{e}^a$.
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]=\mathrm{e}^a\cdot(1+0)=\mathrm{e}^a\cdot 1=\mathrm{e}^a$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$.

$a=0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}1^x=1=\mathrm{e}^0$. [Splnené triviálne.]

$a\neq 0$. $\Rightarrow$ • $a>0$. $\Rightarrow 0<\frac{a}{n+1}\leq\frac{a}{x}\leq\frac{a}{n}$. $\Rightarrow 1<1+\frac{a}{n+1}\leq 1+\frac{a}{x}\leq 1+\frac{a}{n}$ pre všetky $n\in N$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n\leq\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}$.

• $a<0$. $\Rightarrow 0>\frac{a}{n+1}\geq\frac{a}{x}\geq\frac{a}{n}$.

$\Rightarrow 1>1+\frac{a}{n+1}\geq 1+\frac{a}{x}\geq 1+\frac{a}{n}\geq 0$ pre všetky $n\in N$, $n\geq -a$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}\leq\left(1+\frac{a}{n}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x\leq\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n$.

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

• $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right]=\mathrm{e}^a\cdot(1+0)^{-1}=\mathrm{e}^a\cdot 1=\mathrm{e}^a$.

• $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]=\mathrm{e}^a\cdot(1+0)=\mathrm{e}^a\cdot 1=\mathrm{e}^a$.

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^a\leq\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\leq\mathrm{e}^a.$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$ pre všetky $a\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$.

$a=0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1^x = 1 = \mathrm{e}^0$. [Splnené triviálne.]

$a\neq 0$. $\Rightarrow$ • $a>0$. $\Rightarrow 0<\frac{a}{n+1}\le\frac{a}{x}\le\frac{a}{n}$. $\Rightarrow 1<1+\frac{a}{n+1}\le 1+\frac{a}{x}\le 1+\frac{a}{n}$ pre všetky $n\in N$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x \le \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{a}{n}\right)^x \le \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1}$.

• $a<0$. $\Rightarrow 0>\frac{a}{n+1}\ge\frac{a}{x}\ge\frac{a}{n}$.

$\Rightarrow 1>1+\frac{a}{n+1}\ge 1+\frac{a}{x}\ge 1+\frac{a}{n}\ge 0$ pre všetky $n\in N$, $n\ge -a$.

$\Rightarrow$ • $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1} \le \left(1+\frac{a}{n}\right)^x \le \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{a}{n+1}\right)^x \le \left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n$.

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right] = \mathrm{e}^a\cdot(1+0)^{-1} = \mathrm{e}^a\cdot 1 = \mathrm{e}^a. \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)\right] = \mathrm{e}^a\cdot(1+0) = \mathrm{e}^a\cdot 1 = \mathrm{e}^a. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathrm{e}^a \le \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \le \mathrm{e}^a$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$.

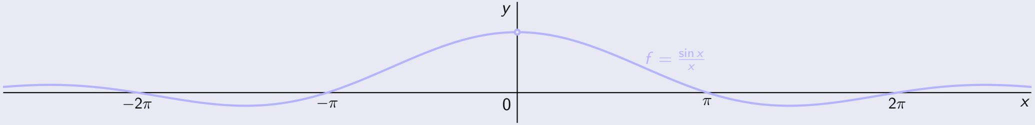
Vlastnosti limít – Príklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

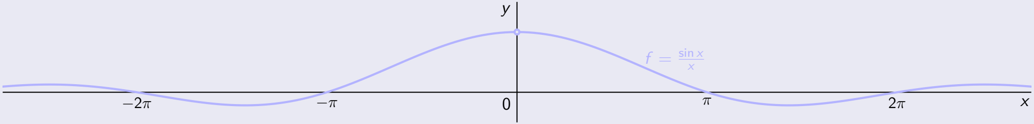
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.



Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

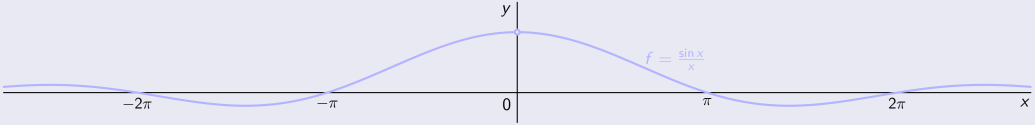
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.



Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

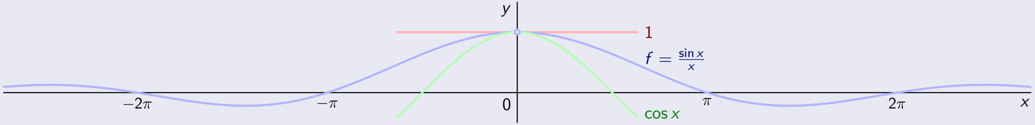


Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$. $\Rightarrow$

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$



Vlastnosti limít – Príklad

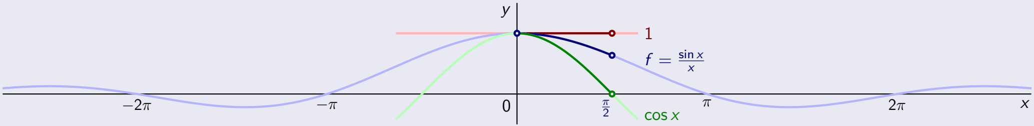
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$. $\Big\} \Rightarrow$

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$\Rightarrow$

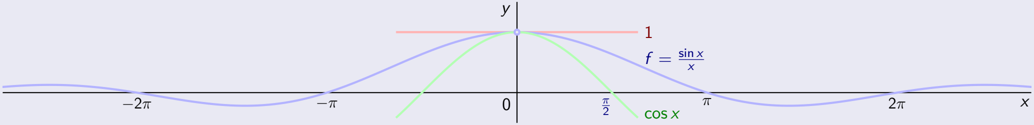
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

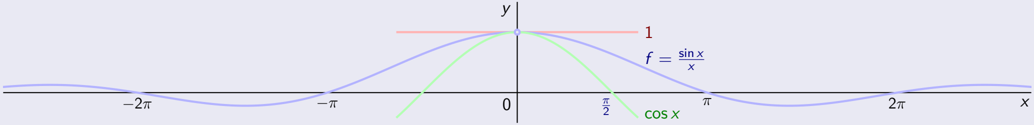
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$.



Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x. \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

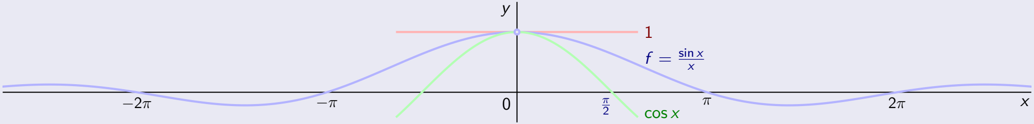


Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x. \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}.$ $\Big\} \Rightarrow$

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$



Vlastnosti limít – Príklad

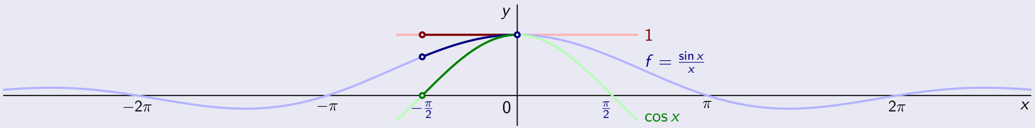
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x. \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}.$ $\Big\} \Rightarrow$

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$\Rightarrow$ $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

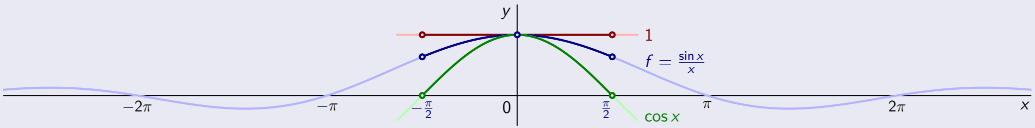
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.
- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ platí $1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$\Rightarrow$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



Vlastnosti limít – Príklad

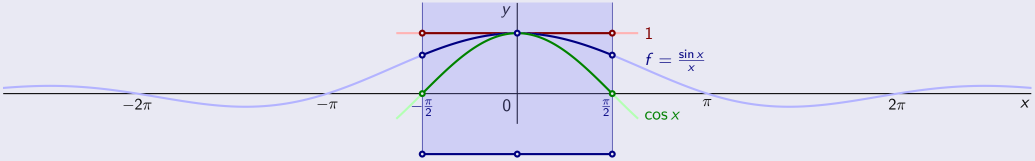
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.
- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$. $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ platí $1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ platí $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.



Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

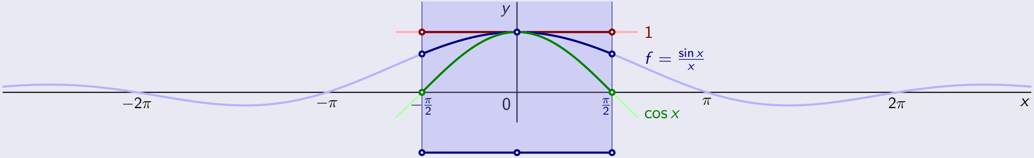
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}.$
- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x. \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}.$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}),\ x \neq 0$ platí $1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}),\ x \neq 0$ platí $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$

$\Rightarrow$ • $1 = \lim\limits_{x\to 0} \cos x \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ (veta o zovretí).



Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

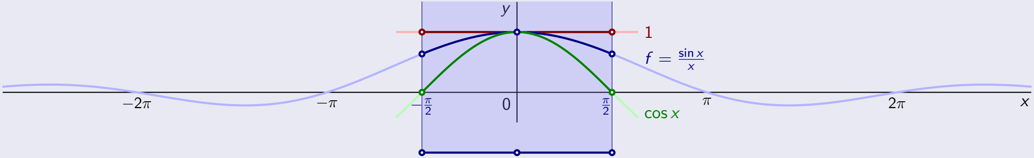
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}.$
- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x. \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}.$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ platí $1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ platí $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$

$\Rightarrow$ • $1 = \lim\limits_{x\to 0} \cos x \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ (veta o zovretí). $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$



Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

$\Rightarrow$
- Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

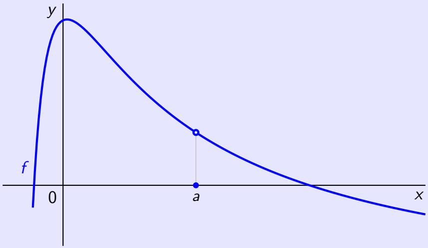
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

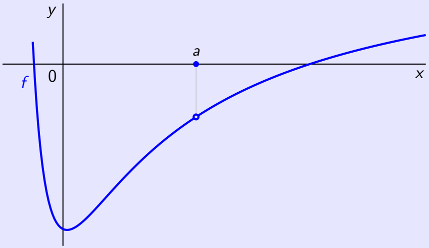
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.





Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

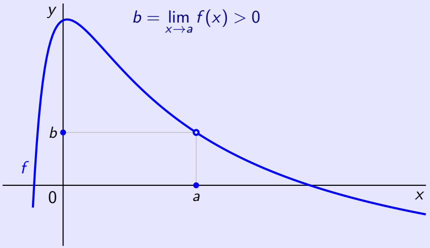
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

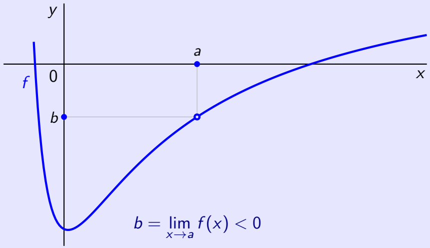
- Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$.





Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

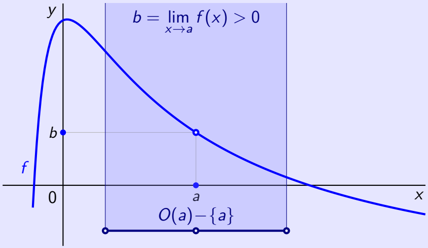
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

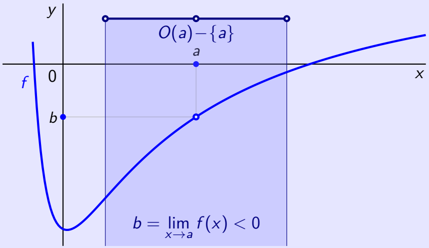
- Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$





Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

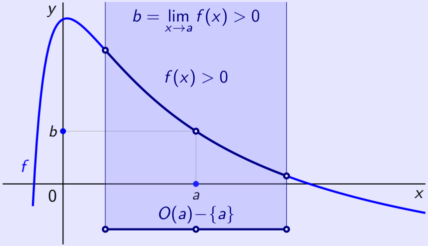
$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

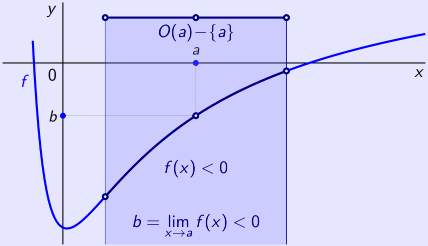
- Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

  $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) > 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) < 0$.





Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$,

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$,

Potom platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in R$ je reálne číslo.

Potom platí:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in R$ je reálne číslo.

Potom platí:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in R$ je reálne číslo.

Potom platí:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|.$ [Opačné tvrdenie neplatí.]

$f(x) = 1 - x.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in R$ je reálne číslo.

Potom platí:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$
- $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$

- $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|.$ [Opačné tvrdenie neplatí.]

$f(x) = 1-x.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to 2} |f(x)| = \lim_{x\to 2} |1-x| = 1.$ • $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (1-x) = -1.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in R$ je reálne číslo.

Potom platí:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|.$ [Opačné tvrdenie neplatí.]

$f(x) = 1-x.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)| = \lim\limits_{x\to 2} |1-x| = 1.$ • $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (1-x) = -1.$

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in R$ je reálne číslo.

Potom platí:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$
- $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$
- $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|.$ [Opačné tvrdenie neplatí.]

$f(x) = 1-x.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to 2} |f(x)| = \lim_{x\to 2} |1-x| = 1.$ • $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (1-x) = -1.$

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.
Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) > 0$.

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.
Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) < 0$.

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in R$ je reálne číslo.

Potom platí:
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$
- $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$

- $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|.$ [Opačné tvrdenie neplatí.]

$f(x) = 1-x.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to 2} |f(x)| = \lim_{x\to 2} |1-x| = 1.$ • $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (1-x) = -1.$

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.
Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) > 0$.

Potom platí:
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

$a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.
Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) < 0$.

Potom platí:
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a,b,c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u \to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A

- A $g(b) = c$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

- A $g(b) = c$.
- B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u \to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

A $g(b) = c$. B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} F(x) = \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u \to b} g(u) = c$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

- A $g(b) = c$.
- B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u\to b} g(u) = c$.

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow$ • Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

- A $g(b) = c$.
- B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u\to b} g(u) = c.$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow$ • Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b.]

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u \to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

- A $g(b) = c$.
- B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} F(x) = \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u \to b} g(u) = c$.

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow$ • Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b.]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u \to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov Ⓐ alebo Ⓑ.

Ⓐ $g(b) = c$. Ⓑ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} F(x) = \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u \to b} g(u) = c$.

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow$ • Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b.]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.
- Ak platí predpoklad Ⓐ, potom platí $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u \to b} g(u) = c = g(b) = g\Big(\lim\limits_{x \to a} f(x)\Big)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

A $g(b) = c$. B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c$.

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow$ • Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b.]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.
- Ak platí predpoklad A, potom platí $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c = g(b) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$.
- Predpoklad B je splnený napr., ak existuje $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ a funkcia f je prostá v nejakom okolí $O(a)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

- A $g(b) = c$. B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u\to b} g(u) = c$.

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow$ • Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b.]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.
- Ak platí predpoklad A, potom platí $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u\to b} g(u) = c = g(b) = g\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)$.
- Predpoklad B je splnený napr., ak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a funkcia f je prostá v nejakom okolí $O(a)$.
- Substitúcia $x = h + a$ pri výpočte $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g, pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a existuje $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in R^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

- A $g(b) = c$.
- B Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u\to b} g(u) = c$.

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow$ • Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b.]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.
- Ak platí predpoklad A, potom platí $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{u\to b} g(u) = c = g(b) = g\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)$.
- Predpoklad B je splnený napr., ak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a funkcia f je prostá v nejakom okolí $O(a)$.
- Substitúcia $x = h + a$ pri výpočte $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. $\Rightarrow$ • $h \to 0$ a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(h+a)$.

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right)$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right)$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1)$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \right)$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln(x+1) = \ln 2.$

- $= \ln\left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1)\right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right]$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$

Vlastnosti limít – Príklady

$$\lim_{x\to1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

- $= \lim_{x\to1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x\to1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x\to2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim_{z\to0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

Vlastnosti limít – Príklady

$$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \Big) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\big)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 2 \\ z = x-2 & z\to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \Big) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to 1 \\ x = z^3 & z \to 1 \end{array} \right]$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) \right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin (x-2)}{x-2} = 1.$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to 1 \\ x = z^3 & z \to 1 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1}$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \Big) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\big)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin (x-2)}{x-2} = 1.$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 1 \\ x = z^3 & z \to 1 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z-1}$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) \right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 2 \\ z = x-2 & z\to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 1 \\ x = z^3 & z\to 1 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z-1} = \left[a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) \text{ pre } a,b\in R \right]$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Big) = \ln \Big(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \Big) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 1 \\ x = z^3 & z \to 1 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z-1} = \left[a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) \text{ pre } a,b\in R \right]$
  $= \lim\limits_{z\to 1} \frac{(z-1)\cdot(z^2+z+1)}{z-1}$

Vlastnosti limít – Príklady

$$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

- $= \lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 2 \\ z = x-2 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 1 \\ x = z^3 & z \to 1 \end{array} \right] = \lim_{z\to 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z-1} = \left[a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) \text{ pre } a,b\in R \right]$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)\cdot(z^2+z+1)}{z-1} = \lim_{z\to 1} (z^2+z+1)$$

Vlastnosti limít – Príklady

$\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$

- $= \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \ln (x+1) = \ln 2.$

- $= \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim\limits_{x\to 1} (x+1) \right) = \ln 2.$

[Využili sme rovnosť $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 2 \\ z = x-2 & z\to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 3.$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 1 \\ x = z^3 & z\to 1 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z-1} = \left[a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) \text{ pre } a,b\in R \right]$
  $= \lim\limits_{z\to 1} \frac{(z-1)\cdot(z^2+z+1)}{z-1} = \lim\limits_{z\to 1} (z^2+z+1) = 3.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x \to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to a} f(x) \right| = |b|.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} \left[r \cdot f(x)\right] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x \to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x \to a} \left[r \cdot f(x) \right] = r \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \cdot c.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b,c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} \left[r \cdot f(x)\right] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje.

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim_{x\to\infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty - \infty$

[Postup nemôžeme použiť,

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \Big|\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $$\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Longrightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0$. $\Rightarrow$

- $a > 1$.
- $a = 1$.
- $a < 1$.
- $a = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0$. $\Rightarrow$
- $a > 1$. $\Rightarrow$ $1 < a^n \leq a^x$.
- $a = 1$.
- $a < 1$.
- $a = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0$. $\Rightarrow$

- $a > 1$. $\Rightarrow 1 < a^n \leq a^x$. $\Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} a^n \leq \lim\limits_{x\to\infty} a^x$.

  [Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

- $a = 1$.

- $a < 1$.

- $a = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0$. $\Rightarrow$ • $a > 1$. $\Rightarrow$ $1 < a^n \leq a^x$. $\Rightarrow$ $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a^n \leq \lim\limits_{x\to\infty} a^x$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

• $a = 1$.

• $a < 1$.

• $a = 0$.

• $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0.$

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0. \Rightarrow$ • $a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} a^n \leq \lim\limits_{x\to\infty} a^x. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty.$

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

• $a = 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$ [Splnené triviálne.]

• $a < 1.$

• $a = 0.$

• $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0.$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\leq n\leq x$.

$a\geq 0. \Rightarrow$ • $a>1. \Rightarrow 1<a^n\leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} a^n \leq \lim\limits_{x\to\infty} a^x. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty.$

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

• $a=1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$ [Splnené triviálne.]

• $a<1. \Rightarrow$ Označme $b=\frac{1}{a}>1.$

• $a=0.$

• $$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{pre } a=1, \\ \infty & \text{pre } a\in(1;\infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0$. $\Rightarrow$ • $a > 1$. $\Rightarrow 1 < a^n \leq a^x$. $\Rightarrow \infty = \lim_{n\to\infty} a^n \leq \lim_{x\to\infty} a^x$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$.

[Limita $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

• $a = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} 1^x = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$. [Splnené triviálne.]

• $a < 1$. $\Rightarrow$ Označme $b = \frac{1}{a} > 1$. $\Rightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}$.

• $a = 0$.

• $$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0. \Rightarrow$ • $a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} a^n \leq \lim\limits_{x\to\infty} a^x. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

• $a = 1. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$. [Splnené triviálne.]

• $a < 1. \Rightarrow$ Označme $b = \frac{1}{a} > 1. \Rightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} b^x} = \frac{1}{\infty} = 0$.

• $a = 0$.

• $$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pre } a \in (0;1), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1;\infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ pre $a \geq 0$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$a \geq 0$. $\Rightarrow$ • $a > 1$. $\Rightarrow 1 < a^n \leq a^x$. $\Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} a^n \leq \lim\limits_{x\to\infty} a^x$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

• $a = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$. [Splnené triviálne.]

• $a < 1$. $\Rightarrow$ Označme $b = \frac{1}{a} > 1$. $\Rightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} b^x} = \frac{1}{\infty} = 0$.

• $a = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 0^x = 0$. [Splnené triviálne.]

• $$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pre } a \in \langle 0; 1), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q \in R$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim_{x\to\infty} x^q$ pre $q \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$q > 0$.

$q = 0$.

$q < 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \le n \le x$.

$q > 0$. $\Rightarrow$ $1 < n^q \le x^q$.

$q = 0$.

$q < 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q\in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \le n \le x$.

$q > 0$. $\Rightarrow 1 < n^q \le x^q$. $\Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} n^q \le \lim\limits_{x\to\infty} x^q$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$q = 0$.

$q < 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q\in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \le n \le x$.

$q > 0$. $\Rightarrow 1 < n^q \le x^q. \Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} n^q \le \lim\limits_{x\to\infty} x^q. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$q = 0$.

$q < 0$.

• $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} \\ \infty \text{ pre } q > 0. \end{cases}$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x$.

$q>0$. $\Rightarrow 1<n^q\le x^q. \Rightarrow \infty=\lim\limits_{n\to\infty} n^q\le \lim\limits_{x\to\infty} x^q. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q=\infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n^q=\infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$q=0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q=\lim\limits_{x\to\infty} x^0=\lim\limits_{x\to\infty} 1=1$.

[Splnené triviálne.]

$q<0$.

• $$\lim_{x\to\infty} x^q=\begin{cases} 1 & \text{pre } q=0,\\ \infty & \text{pre } q>0.\end{cases}$$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \leq n \leq x$.

$q > 0$. $\Rightarrow$ $1 < n^q \leq x^q$. $\Rightarrow$ $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} n^q \leq \lim\limits_{x\to\infty} x^q$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$q = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \lim\limits_{x\to\infty} x^0 = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$. [Splnené triviálne.]

$q < 0$. $\Rightarrow$ Označme $r = -q > 0$.

• $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q \in R$.

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in N$. • $1 \le n \le x$.

$q > 0$. $\Rightarrow$ $1 < n^q \le x^q$. $\Rightarrow$ $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} n^q \le \lim\limits_{x\to\infty} x^q$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$q = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \lim\limits_{x\to\infty} x^0 = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$. [Splnené triviálne.]

$q < 0$. $\Rightarrow$ Označme $r = -q > 0$. $\Rightarrow$ $x^q = x^{-r} = \frac{1}{x^r}$.

• $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$

Vlastnosti limít – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty} x^q$ pre $q\in R$.

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor$. $\Rightarrow$ • $n\in N$. • $1\le n\le x$.

$q>0$. $\Rightarrow 1<n^q\le x^q. \Rightarrow \infty=\lim\limits_{n\to\infty} n^q \le \lim\limits_{x\to\infty} x^q. \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q=\infty$.

[Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n^q=\infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$q=0$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q=\lim\limits_{x\to\infty} x^0=\lim\limits_{x\to\infty} 1=1$. [Splnené triviálne.]

$q<0$. $\Rightarrow$ Označme $r=-q>0. \Rightarrow x^q=x^{-r}=\frac{1}{x^r}$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} x^r}=\frac{1}{\infty}=0$.

• $$\lim_{x\to\infty} x^q=\begin{cases}0 & \text{pre } q<0,\\ 1 & \text{pre } q=0,\\ \infty & \text{pre } q>0.\end{cases}$$

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x \to a} f(x),\ a \in R^*$ (pokiaľ existuje)

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $a \in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a \in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a)\cap D(f)-\{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in Q,\\ 0 & \text{pre } x\in I.\end{cases}$

Označme zúženia $f(x)=\chi|_Q(x)=1,\ x\in Q$ a $g(x)=\chi|_I(x)=0,\ x\in I$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a \in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1,\ x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0,\ x \in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$ neexistuje,

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a)\cap D(f)-\{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in Q,\\ 0 & \text{pre } x\in I.\end{cases}$

Označme zúženia $f(x)=\chi|_Q(x)=1,\ x\in Q$ a $g(x)=\chi|_I(x)=0,\ x\in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a \in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I.]

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a \in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1,\ x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0,\ x \in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0.$

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I.]

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a)\cap D(f)-\{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in Q,\\ 0 & \text{pre } x\in I.\end{cases}$

Označme zúženia $f(x)=\chi|_Q(x)=1,\ x\in Q$ a $g(x)=\chi|_I(x)=0,\ x\in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I.]

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$ vzhľadom na množinu $A\subset D(f)$,

ak:

- $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x)=b$

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a)\cap D(f)-\{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in Q,\\ 0 & \text{pre } x\in I.\end{cases}$

Označme zúženia $f(x)=\chi|_Q(x)=1,\ x\in Q$ a $g(x)=\chi|_I(x)=0,\ x\in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I.]

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$ vzhľadom na množinu $A\subset D(f)$,

ak:

- $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x)=b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$),

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a)\cap D(f)-\{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in Q,\\ 0 & \text{pre } x\in I.\end{cases}$

Označme zúženia $f(x)=\chi|_Q(x)=1,\ x\in Q$ a $g(x)=\chi|_I(x)=0,\ x\in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I.]

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$ vzhľadom na množinu $A\subset D(f)$,

ak:

- $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x)=b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$), t. j. ak:

- a je hromadným bodom množiny A.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a)\cap D(f)-\{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in Q,\\ 0 & \text{pre } x\in I.\end{cases}$

Označme zúženia $f(x)=\chi|_Q(x)=1,\ x\in Q$ a $g(x)=\chi|_I(x)=0,\ x\in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I.]

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$ vzhľadom na množinu $A\subset D(f)$,

ak:

- $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x)=b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$), t. j. ak:

- a je hromadným bodom množiny A.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A-\{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow b$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a)\cap D(f)-\{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in Q,\\ 0 & \text{pre } x\in I.\end{cases}$

Označme zúženia $f(x)=\chi|_Q(x)=1$, $x\in Q$ a $g(x)=\chi|_I(x)=0$, $x\in I$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I.]

Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu $b\in R^*$ vzhľadom na množinu $A\subset D(f)$,

označenie $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$, resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $x\in A$, ak:

- $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x)=b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$), t. j. ak:

- a je hromadným bodom množiny A.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A-\{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow b$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

  platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

  platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A \subset D(f)$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A \subset D(f)$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b\in R^*$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $b \in R^*$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

  platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$
- Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \in R^*$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

  platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b\in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A\subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$.

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x\in R$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A\subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$.

Funkcia $f(x)=\sin x$, $x\in R$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A\subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$.

Funkcia $f(x)=\sin x$, $x\in R$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

$$\left[\begin{array}{l}\text{Pre postupnosť } \{2n\pi\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow\infty \text{ platí } \{\sin(2n\pi)\}_{n=1}^{\infty}=\{0\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0.\\ \text{Pre postupnosť } \{\frac{\pi}{2}+2n\pi\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow\infty \text{ platí } \{\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\}_{n=1}^{\infty}=\{1\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 1.\end{array}\right]$$

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A\subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$.

Funkcia $f(x)=\sin x$, $x\in R$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

[Pre postupnosť $\{2n\pi\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow\infty$ platí $\{\sin(2n\pi)\}_{n=1}^{\infty}=\{0\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0$.]

- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \sin x = 0$ pre $A=\{k\pi;\ k\in Z\}$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A\subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$.

Funkcia $f(x)=\sin x$, $x\in R$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

[Pre postupnosť $\{\frac{\pi}{2}+2n\pi\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow\infty$ platí $\{\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\}_{n=1}^{\infty}=\{1\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 1$.]

- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \sin x=0$ pre $A=\{k\pi;\ k\in Z\}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \sin x=1$ pre $A=\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in Z\}$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f. Množina $A\subset D(f)$. Bod $a\in R^*$ je hromadným bodom množiny A.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b\in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A\subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$.

Funkcia $f(x)=\sin x$, $x\in R$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

$\Big[$ Pre postupnosť $\{2n\pi\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow\infty$ platí $\{\sin(2n\pi)\}_{n=1}^{\infty}=\{0\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 0$.
Pre postupnosť $\{\frac{\pi}{2}+2n\pi\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow\infty$ platí $\{\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\}_{n=1}^{\infty}=\{1\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow 1$. $\Big]$

- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \sin x=0$ pre $A=\{k\pi;\ k\in Z\}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \sin x=1$ pre $A=\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in Z\}$.

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme: • $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\, x < a\}$,

---

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme: • $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\ x < a\}$,
- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A;\ x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\ x < a\}$,
- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A;\ x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in R$,

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in R$,

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:
- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\ x < a\}$,
- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A;\ x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:
- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in R$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a,

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in R$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a,

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\ x < a\}$,
- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A;\ x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in R$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a, t. j. limitu funkcie f_a^- v bode a.

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in R$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a, t. j. limitu funkcie f_a^+ v bode a.

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\ x < a\}$,
- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A;\ x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in R$, označenie $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a, t. j. limitu funkcie f_a^- v bode a.

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in R$, označenie $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a, t. j. limitu funkcie f_a^+ v bode a.

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\ x < a\}$,
- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A;\ x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in R$, označenie $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a,

- $\displaystyle \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\in D(f)_a^-}} f(x)$

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in R$, označenie $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a,

- $\displaystyle \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\in D(f)_a^+}} f(x)$

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset R$ a bod $a \in R$ označme:
- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A;\ x < a\}$,
- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A;\ x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in R$ označme:
- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in R$, označenie $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a, t. j. limitu funkcie f_a^- v bode a.

- $$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D(f)_a^-}} f(x) = \lim_{x\to a} f_a^-(x) = \lim_{x\to a} f(x)|_{D(f)_a^-}.$$

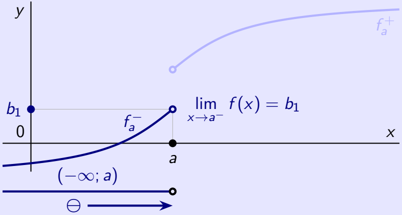
Limitou sprava funkcie f v bode $a \in R$, označenie $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$,

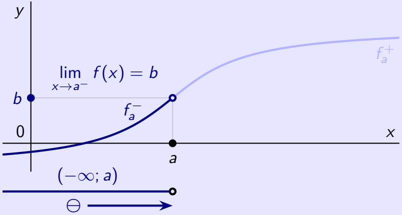
nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a, t. j. limitu funkcie f_a^+ v bode a.

- $$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D(f)_a^+}} f(x) = \lim_{x\to a} f_a^+(x) = \lim_{x\to a} f(x)|_{D(f)_a^+}.$$

Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

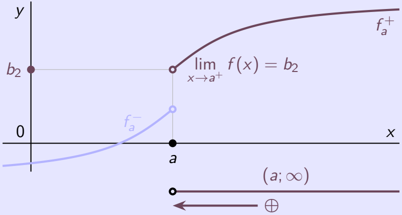
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in R$)

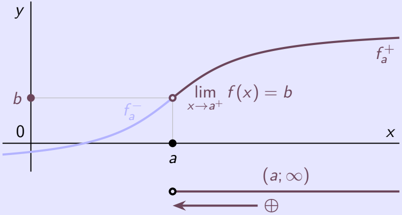




Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in R$)

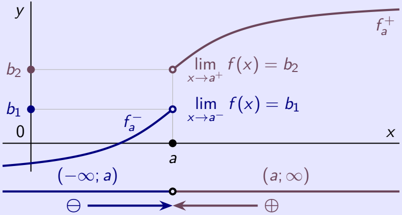


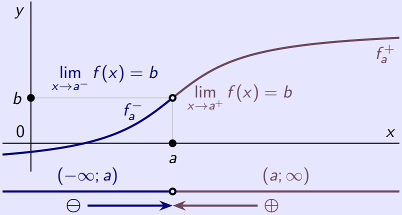


Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a\in R$)
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a\in R$)

sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a.



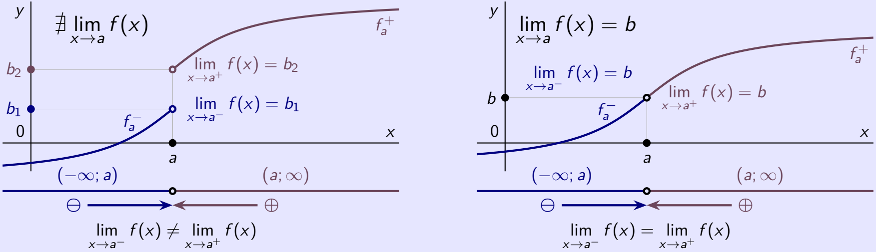


Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a\in R$)
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a\in R$)

sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a\in R$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a.

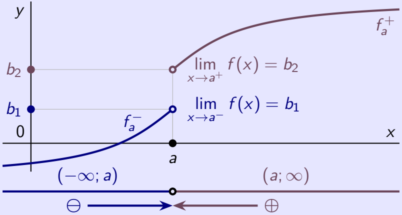


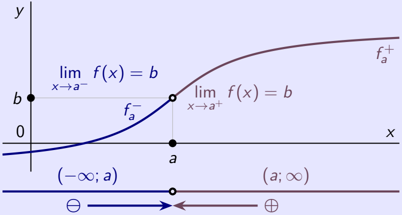
Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a\in R$)
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a\in R$)

sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a\in R$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a.





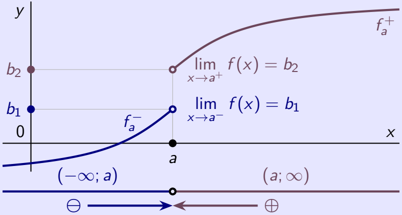
Funkcia f, bod $a\in R$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b\in R^*$.

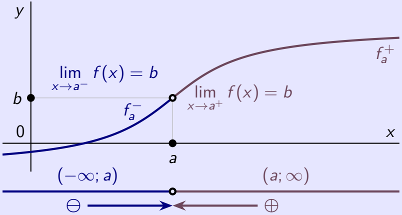
Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a\in R$)
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a\in R$)

sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a\in R$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a.





Funkcia f, bod $a\in R$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b\in R^*$.

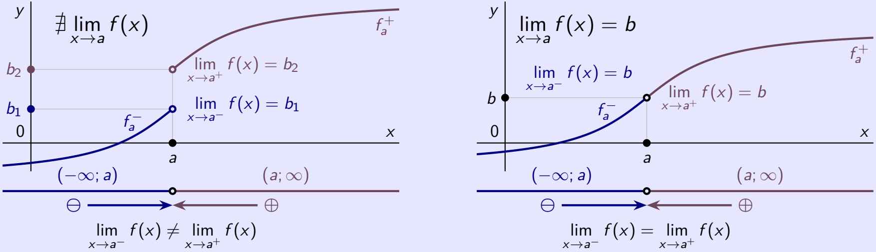
Potom platí:

Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a\in R$)
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a\in R$)

sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a\in R$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a.



Funkcia f, bod $a\in R$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b\in R^*$.

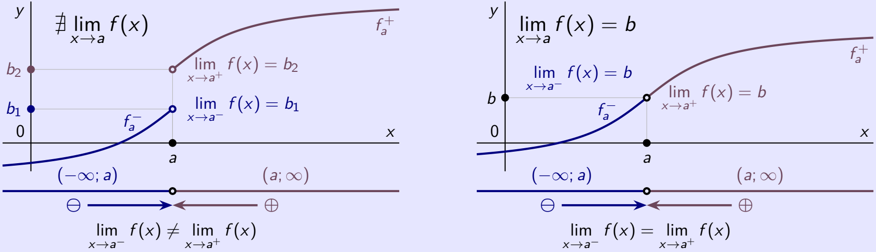
Potom platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b.$

Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a\in R$)
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a\in R$)

sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a\in R$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a.



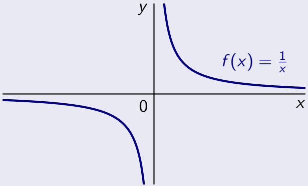
Funkcia f, bod $a\in R$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b\in R^*$.

Potom platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b.$

[Obojstranná limita funkcie f v bode $a\in R$ existuje práve vtedy, ak existujú jednostranné limity funkcie f v bode a a rovnajú sa.]

Jednostranné limity – Príklady

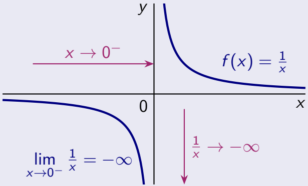
$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}.$



Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}.$

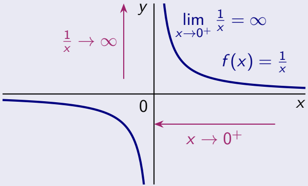
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$



Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$



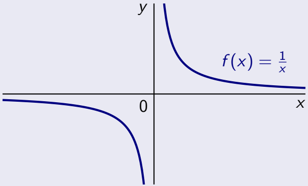
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}.$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

$\Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.



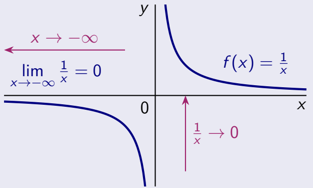
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}.$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$



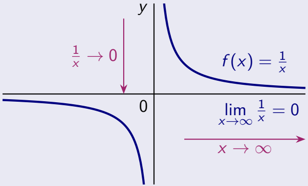
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}.$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty.$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$

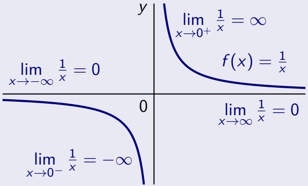


Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.



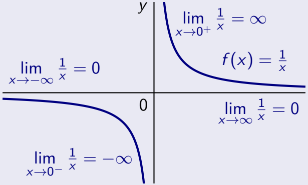
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$.

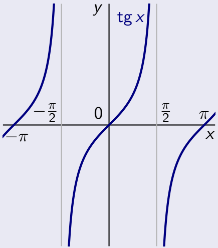
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty.$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.



- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$

$f\colon y=\operatorname{tg}x,\ x\in R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$.



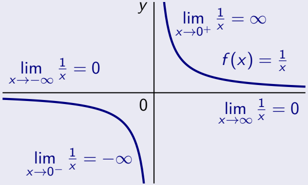
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty.$

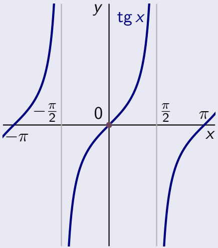
$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$



$f\colon y=\operatorname{tg}x,\ x\in R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x=0.$



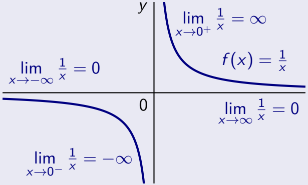
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty.$

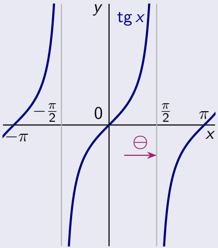
$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$ • $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$



$f\colon y=\operatorname{tg}x,\ x\in R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x=0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x=\infty.$



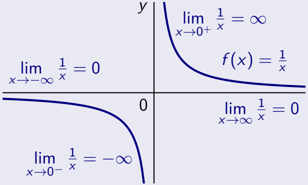
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

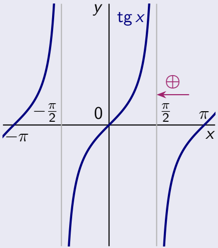
$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$



$f\colon y = \operatorname{tg} x,\ x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$



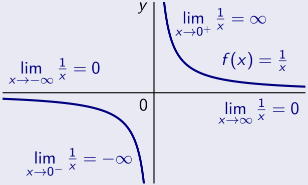
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty.$

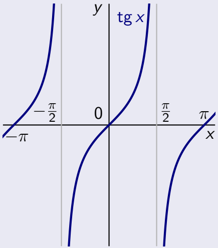
$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$



$f\colon y=\operatorname{tg}x,\ x\in R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x=0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg}x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x$ neexistuje.

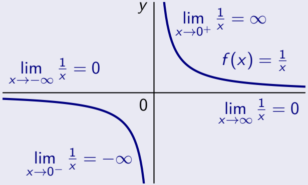


Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty.$

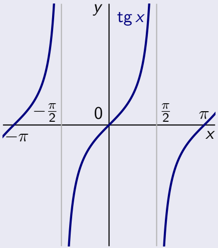
$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.



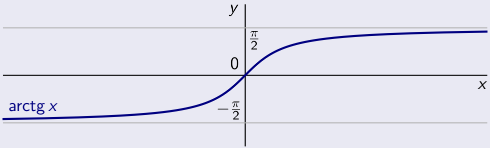
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$

$f\colon y=\operatorname{tg}x,\ x\in R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x=0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg}x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x$ neexistuje.



$f\colon y=\operatorname{arctg}x,\ x\in R$.



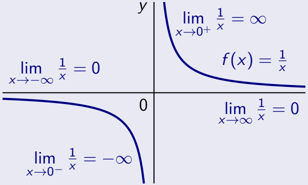
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

$\Rightarrow$

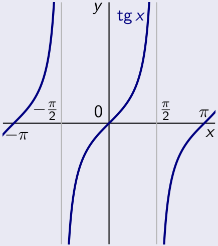
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.



- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

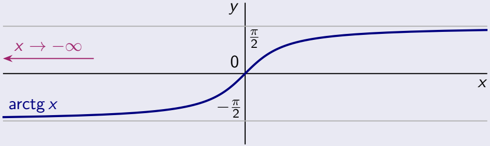
$f\colon y = \operatorname{tg} x,\ x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ neexistuje.



$f\colon y = \operatorname{arctg} x,\ x \in R$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$



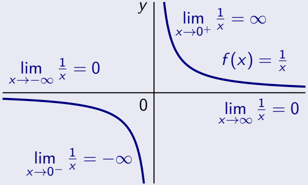
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y = \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

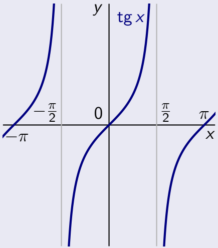
$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$



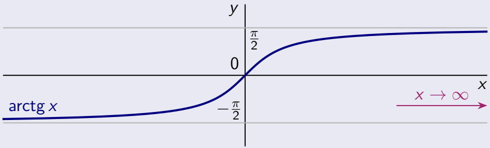
$f\colon y = \operatorname{tg} x,\ x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ neexistuje.



$f\colon y = \operatorname{arctg} x,\ x \in R$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$



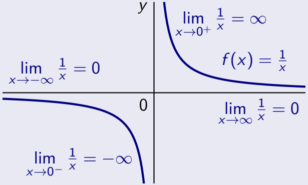
Jednostranné limity – Príklady

$f\colon y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty.$

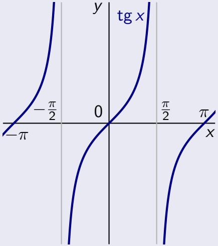
$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$



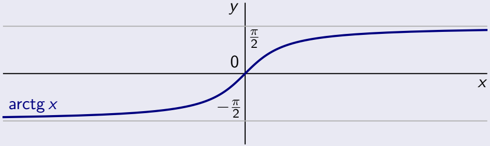
$f\colon y=\operatorname{tg} x,\ x\in R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x=0.$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg} x=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg} x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x$ neexistuje.



$f\colon y=\operatorname{arctg} x,\ x\in R$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}.$



Jednostranné limity – Príklady

$\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a \in R$.

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right]$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a\in R$.

- $\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$
- $\lim_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right]$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a \in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a\in R$.

- $\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$
- $\lim_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1}$$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a \in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to\infty} \left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim\limits_{z\to\infty} \left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [\mathrm{e}^{-a}]^{-1}$$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty\end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty\end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = \left[e^{-a}\right]^{-1} = e^a.$$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim\limits_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = \left[\mathrm{e}^{-a}\right]^{-1} = \mathrm{e}^a.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a.$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\, x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = e^a.$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\, x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^a$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.}\ \ z=\frac{1}{x} & x\to 0^+\\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z=\mathrm{e}^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.}\ \ z=-\frac{1}{x} & x\to 0^-\\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$=\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1}=[\mathrm{e}^{-a}]^{-1}=\mathrm{e}^a.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^a.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

- $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+1)$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a \in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty} \left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim_{z\to\infty} \left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [\mathrm{e}^{-a}]^{-1} = \mathrm{e}^a.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{x}}\right]$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \mathrm{e}^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [\mathrm{e}^{-a}]^{-1} = \mathrm{e}^a.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\mathrm{e}$

Jednostranné limity – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a\in R$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\frac{1}{x} & x\to 0^+ \\ x\to 0,\ x>0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=-\frac{1}{x} & x\to 0^- \\ x\to 0,\ x<0 & z\to\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z}$

$$= \lim\limits_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a, ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva rádu $o(g(x))$ v bode a, ak platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- f sa nazýva rádu $O(g(x))$ v bode a, resp. v okolí $P(a)$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva rádu $o(g(x))$ v bode a, ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- f sa nazýva rádu $O(g(x))$ v bode a, resp. v okolí $P(a)$,

  ak existuje $c \in R$, $c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a, ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Označenie $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$.

- f sa nazýva **rádu $O(g(x))$** v bode a, resp. v okolí $P(a)$,

  ak existuje $c \in R$, $c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$.

  Označenie $f(x) = O(g(x)),\ x \to a$, resp. $f(x) = O(g(x)),\ x \in P(a)$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva rádu $o(g(x))$ v bode a, ak platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Označenie $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

- f sa nazýva rádu $O(g(x))$ v bode a, resp. v okolí $P(a)$,

  ak existuje $c \in R$, $c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$.

  Označenie $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, resp. $f(x) = O(g(x))$, $x \in P(a)$.

- Symboly o, O sa používajú často, zaviedol ich nemecký matematik Edmund Landau (1877 – 1938).

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a, ak $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a, ak $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a, ak $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a, ak platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Označenie $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$.

- f sa nazýva **rádu $O(g(x))$** v bode a, resp. v okolí $P(a)$,

  ak existuje $c \in R$, $c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$.

  Označenie $f(x) = O(g(x)),\ x \to a$, resp. $f(x) = O(g(x)),\ x \in P(a)$.

- Symboly o, O sa používajú často, zaviedol ich nemecký matematik Edmund Landau (1877 – 1938).
- Pre $a = \pm\infty$ platí $P(-\infty) = O(-\infty) = (-\infty; r)$ a $P(\infty) = O(\infty) = (r; \infty)$, kde $r \in R$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in N$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a, ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva nekonečne malá rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a, ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a,
  ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a, ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a, ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0.$

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0.$
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\sin x = o(x)$, $x \to \pi$, pretože $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a,
  ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = 0.$

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0.$
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1} = 0.$
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
- $\sin x = o(x)$, $x \to \pi$, pretože $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

Pre všetky $a \in R^*$ platí:

- $\sin x = O(1)$, $x \to a$,
- $\sin x = O(x)$, $x \to a$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a,
ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x)$, $x \to \pi$, pretože $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in R^*$ platí:

- $\sin x = O(1)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a,
  ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x)$, $x \to \pi$, pretože $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in R^*$ platí:

- $\sin x = O(1)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \langle -1; 1\rangle$ platí:

- $x^2 = O(x)$, $x \to a$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a, ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x)$, $x \to \pi$, pretože $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in R^*$ platí:

- $\sin x = O(1)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \langle -1; 1\rangle$ platí:

- $x^2 = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in \langle -1; 1\rangle$ platí $|x^2| \leq |x|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a, ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x)$, $x \to \pi$, pretože $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in R^*$ platí:

- $\sin x = O(1)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \langle -1; 1 \rangle$ platí:

- $x^2 = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$ platí $|x^2| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in R - (-1; 1)$ platí:

- $x = O(x^2)$, $x \to a$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x-a)^n$ stupňa $n \in N$.

Bod $a \in R^*$, funkcia f.

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in N$ v bode a, ak $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, t. j. ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \to 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x)$, $x \to \pi$, pretože $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in R^*$ platí:

- $\sin x = O(1)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in R$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \langle -1; 1\rangle$ platí:

- $x^2 = O(x)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in \langle -1; 1\rangle$ platí $|x^2| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in R - (-1; 1)$ platí:

- $x = O(x^2)$, $x \to a$, pretože pre všetky $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$ platí $|x| \leq |x^2|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$.
- $b \in R - \{0\}$.
- $b = \pm\infty$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$.
- $b \in R - \{0\}$.
- $b = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
- $b \in R - \{0\}$.
- $b = \pm\infty$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
- $b \in R - \{0\}$.
- $b = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
- $b = \pm\infty$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
- $b = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a pomalšie ako funkcia g.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a pomalšie ako funkcia g.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rýchlejšie ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako funkcia g.]
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a pomalšie ako funkcia g.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rýchlejšie ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne veľká nižšieho rádu ako funkcia g.]
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a pomalšie ako funkcia g.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
  [Funkcia f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako funkcia g.]
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
  [Funkcia f je v bode a nekonečne malá rovnakého rádu ako funkcia g.]
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a pomalšie ako funkcia g.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rýchlejšie ako funkcia g.
  [Funkcia f je v bode a nekonečne veľká nižšieho rádu ako funkcia g.]
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.
  [Funkcia f je v bode a nekonečne veľká rovnakého rádu ako funkcia g.]
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a pomalšie ako funkcia g.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rýchlejšie ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako funkcia g.]

- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne malá rovnakého rádu ako funkcia g.]

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (konverguje) k nule v bode a pomalšie ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne malá nižšieho rádu ako funkcia g.]

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rýchlejšie ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne veľká nižšieho rádu ako funkcia g.]

- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a rovnako rýchlo ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne veľká rovnakého rádu ako funkcia g.]

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa blíži (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a pomalšie ako funkcia g.

  [Funkcia f je v bode a nekonečne veľká vyššieho rádu ako funkcia g.]

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa **asymptoticky rovná** funkcii g v bode a,

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

  ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Označenie $f \sim g$, $x \to a$.

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

  ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g$, $x \to a$.

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x$, $x \to 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g,\ x \to a.$

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a, ak platí $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Označenie $f \sim g$, $x \to a$.

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

  ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g$, $x \to a$.

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

  ak platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g$, $x \to a$.

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in R$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a, ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g,\ x \to a.$

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in R$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$. [Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice grafu funkcie f,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

  ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g,\ x \to a.$

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in R$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$. [Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá) grafu funkcie f,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a,

  ak platí $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Označenie $f \sim g$, $x \to a$.

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in R$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$. [Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá) grafu funkcie f,

  ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ je nevlastná.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa **asymptoticky rovná** funkcii g (f, g sa **asymptoticky rovnajú**) v bode a,

ak platí $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g,\ x \to a.$

- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in R$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$. [Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá)** grafu funkcie f,

ak aspoň jedna z jednostranných limít $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x)$ je nevlastná.

[Aspoň jedna z jednostranných limít musí byť nevlastná,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa **asymptoticky rovná** funkcii g (f, g sa **asymptoticky rovnajú**) v bode a,

  ak platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g,\ x \to a.$

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in R$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$. [Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá)** grafu funkcie f,

  ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ je nevlastná.

[Aspoň jedna z jednostranných limít musí byť nevlastná, druhá jednostranná limita môže byť vlastná, nevlastná alebo nemusí existovať.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa **asymptoticky rovná** funkcii g (f, g sa **asymptoticky rovnajú**) v bode a, ak platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ Označenie $f \sim g,\ x \to a.$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x,\ x \to 1.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in R$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$. [Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá)** grafu funkcie f, ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ je nevlastná.

[Aspoň jedna z jednostranných limít musí byť nevlastná, druhá jednostranná limita môže byť vlastná, nevlastná alebo nemusí existovať.]

- Priamka $x = 0$ je ABS grafu funkcie $f\colon y = \frac{1}{x}$, pretože $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon\ y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou k grafu funkcie f,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou k grafu funkcie f, ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon\ y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou k grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon\ y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva horiontálna (vodorovná).

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon\, y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon\, y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou k grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva horiontálna (vodorovná).

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$
- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou k grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva horiontálna (vodorovná).

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}\colon y = kx + q$ je ASS.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$
- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - (kx+q)] = 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f, ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a}[f(x) - kx - q] = 0.$
- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to a}[f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}\colon y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = q.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f, ak platí podmienka $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x\to a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} [f(x) - (kx+q)] = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q$.

$\Rightarrow$ • $0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-kx-q}{x}$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$

$\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-kx-q}{x} = \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{q}{x}\right]$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** k grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x\to a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$

$\Rightarrow$ • $0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-kx-q}{x} = \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} - k - 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) - p(x)] = \lim_{x\to a}[f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $\displaystyle k = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$ a $\displaystyle q = \lim_{x\to a}[f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = q.$

$\Rightarrow$ • $\displaystyle 0 = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-kx-q}{x} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} - k - 0.$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} = k.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a=\pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y=kx+q$, kde $k,q\in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-p(x)]=\lim\limits_{x\to a}[f(x)-kx-q]=0.$
- ASS $p\colon y=q$ (ASS so smernicou $k=0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x\to-\infty$ a jednu pre $x\to+\infty$.]

Bod $a=\pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y=kx+q$, kde $k,q\in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x}$ a $q=\lim\limits_{x\to a}[f(x)-kx]$, pričom $k,q\in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y=kx+q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-(kx+q)]=0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=q.$

$\Rightarrow$ • $0=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-kx-q}{x}=\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{q}{x}\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x}-k-0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x}=k.$

$PP_{\Leftarrow}$: $k,q\in R.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a=\pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y=kx+q$, kde $k,q\in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-p(x)]=\lim\limits_{x\to a}[f(x)-kx-q]=0.$

- ASS $p\colon y=q$ (ASS so smernicou $k=0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x\to-\infty$ a jednu pre $x\to+\infty$.]

Bod $a=\pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y=kx+q$, kde $k,q\in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$ a $q=\lim\limits_{x\to a}[f(x)-kx]$, pričom $k,q\in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y=kx+q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-(kx+q)]=0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=q.$

$\Rightarrow$ • $0=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-kx-q}{x}=\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{q}{x}\right]=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}-k-0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}=k.$

$PP_{\Leftarrow}$: $k,q\in R.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-(kx+q)]$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k, q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in R$.

Dôkaz.

$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$

$\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-kx-q}{x} = \lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} - k - 0.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = k.$

$PP_{\Leftarrow}$: $k, q \in R.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - (kx+q)] = \lim\limits_{x\to a} [f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to a} q$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k,q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f,

  ak platí podmienka $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) - p(x)] = \lim_{x\to a}[f(x) - kx - q] = 0.$

- ASS $p\colon y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horiontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f.

- Priamka $p\colon y = kx + q$, kde $k,q \in R$, je ASS grafu f.

  $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $\displaystyle k = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$ a $\displaystyle q = \lim_{x\to a}[f(x) - kx]$, pričom $k,q \in R$.

Dôkaz.

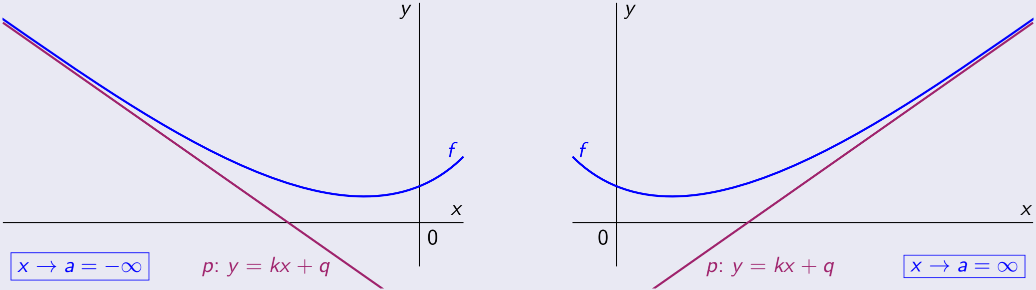
$NP_{\Rightarrow}$: $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = q.$

$\Rightarrow$ • $\displaystyle 0 = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-kx-q}{x} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} - k - 0.$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} = k.$

$PP_{\Leftarrow}$: $k,q \in R.$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to a}[f(x) - kx] - \lim_{x\to a} q = q - q = 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

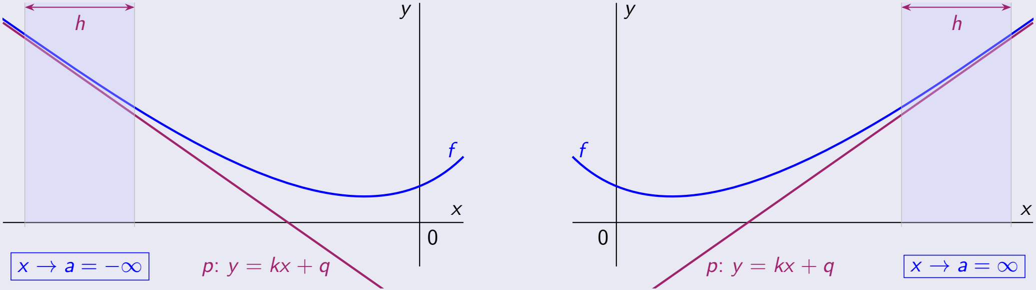
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.

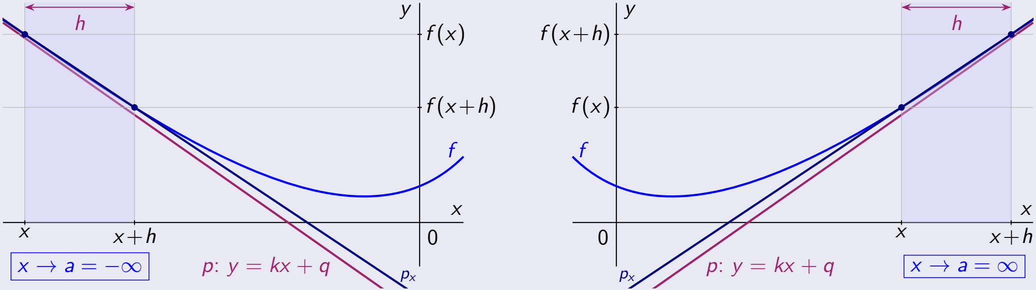
Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

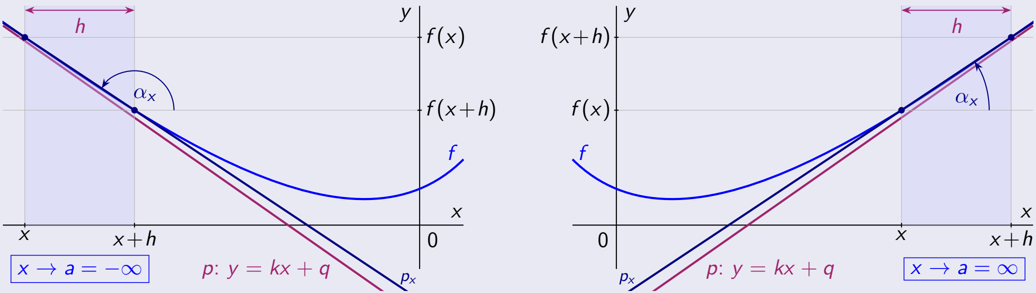


Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

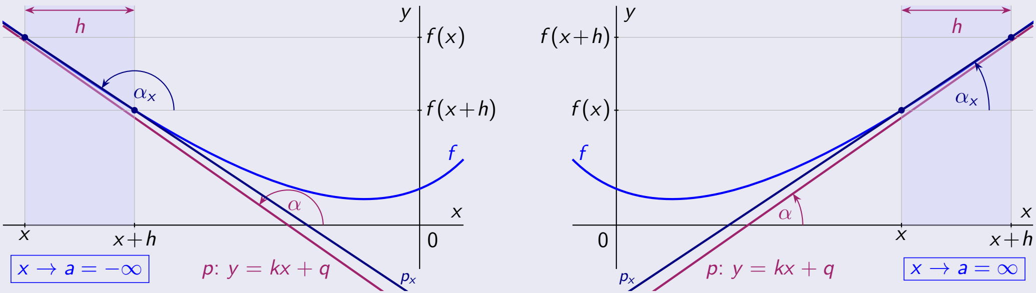
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x.

[$x \to a = -\infty$; $x \to a = \infty$]



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

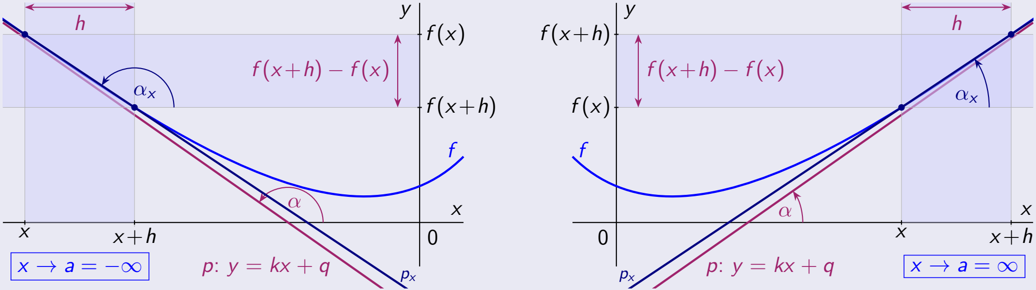
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. [$x \to a = -\infty$, $x \to a = \infty$]

- $\operatorname{tg}\alpha_x = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$



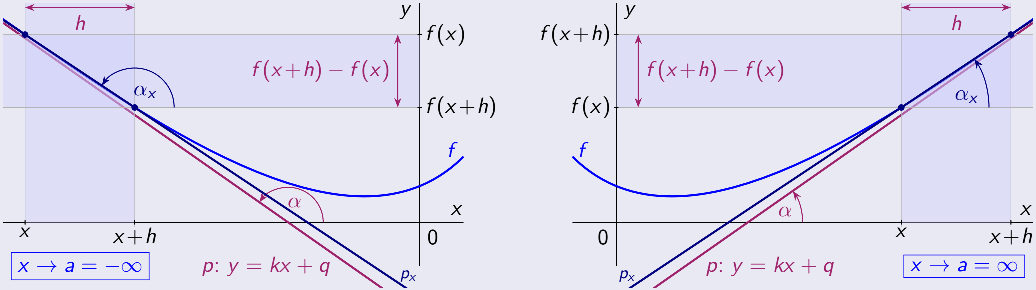
Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. $[x \to a = -\infty;\ x \to a = \infty]$
- Pre $x \to a$ platí $\alpha_x \to \alpha$.
  - $\operatorname{tg}\alpha_x = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

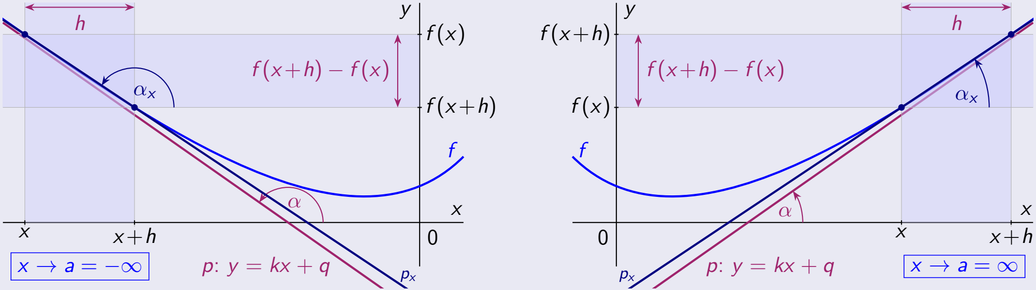
Bod $a=\pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y=kx+q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h\in R$, $h\neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x;f(x)]$, $[x+h;f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k=\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. [$x\to a=-\infty$, $x\to a=\infty$]
- Pre $x\to a$ platí $\alpha_x\to\alpha$.

$$\Rightarrow \bullet\ \operatorname{tg}\alpha_x=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to\operatorname{tg}\alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

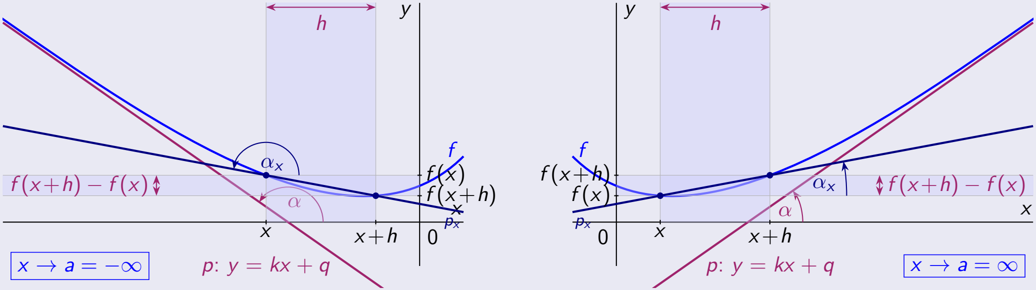
Bod $a=\pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y=kx+q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h\in R$, $h\neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k=\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. $[x\to a=-\infty; x\to a=\infty]$
- Pre $x\to a$ platí $\alpha_x\to\alpha$.

$$\Rightarrow \bullet\ \operatorname{tg}\alpha_x=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to\operatorname{tg}\alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

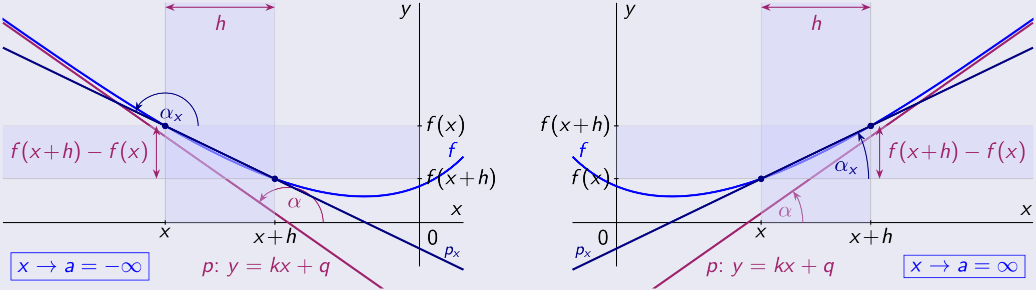
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon\ y = kx + q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h \in R,\ h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)],\ [x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. [$x \to a = -\infty$, $x \to a = \infty$]
- Pre $x \to a$ platí $\alpha_x \to \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet\ \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \operatorname{tg}\alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

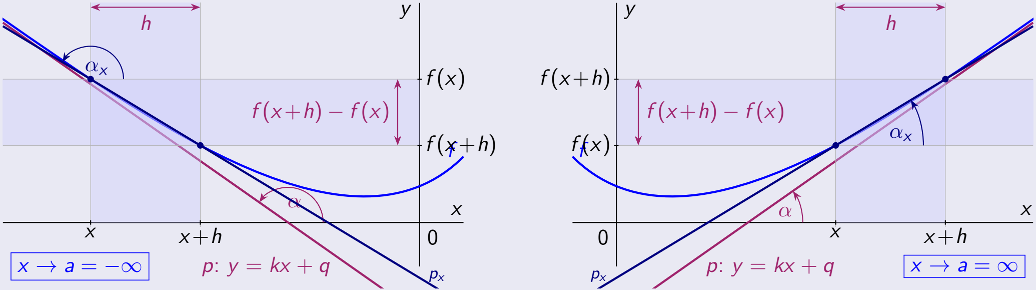
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka p: $y = kx + q$ je ASS grafu f.

Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. $[x \to a = -\infty, x \to a = \infty]$
- Pre $x \to a$ platí $\alpha_x \to \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet\ \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \operatorname{tg}\alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

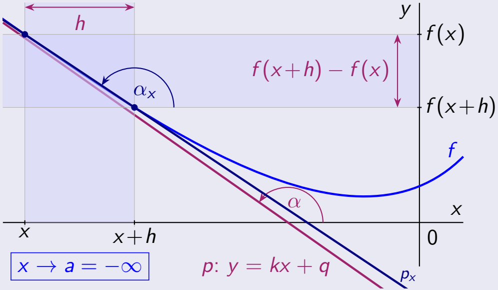
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y = kx + q$ je ASS grafu f.

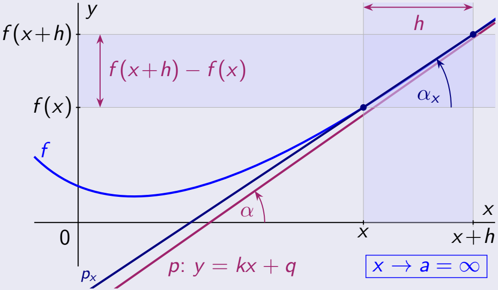
Zvoľme $h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. $[x \to a = -\infty, x \to a = \infty]$
- Pre $x \to a$ platí $\alpha_x \to \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet\ \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \operatorname{tg}\alpha.$$





Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

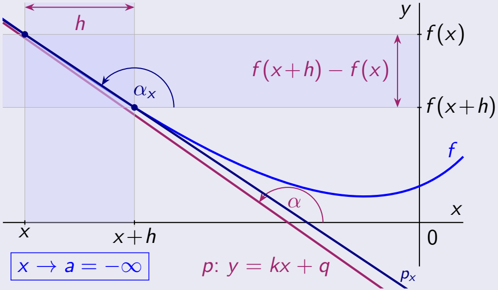
Bod $a=\pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, priamka $p\colon y=kx+q$ je ASS grafu f.

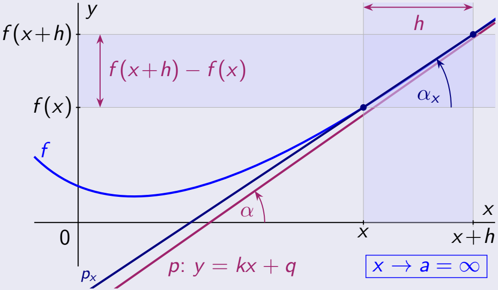
Zvoľme $h\in R$, $h\neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x.

- Smernica asymptoty $k=\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x. $[x\to a=-\infty; x\to a=\infty]$
- Pre $x\to a$ platí $\alpha_x\to\alpha$.

$$\Rightarrow \bullet\ \operatorname{tg}\alpha_x=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to\operatorname{tg}\alpha. \Rightarrow \bullet\ \lim_{x\to a}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}.$$





Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to a} [f(x+1) - f(x)]$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to a} [f(x+1)-f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h\in R,\ h\neq 0$ (pevné dané číslo), $a=\pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=b\in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}=b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h=1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to a}[f(x+1)-f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

- Ak $N\subset D(f)$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

- Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to a} [f(x+1)-f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

- Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to a} [f(x+1)-f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

- Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

- Existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} [a_{n+1} - a_n]$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to a} [f(x+1)-f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

- Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

- Existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} [a_{n+1} - a_n]$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in R$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = b$.

- Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať. [Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

- Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to a} [f(x+1)-f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

- Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

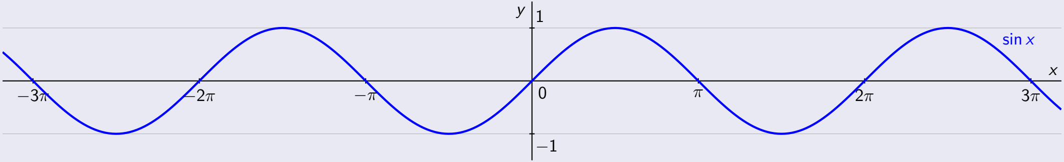
[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

- Existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} [a_{n+1} - a_n]$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ a platí • $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} [a_{n+1} - a_n]$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

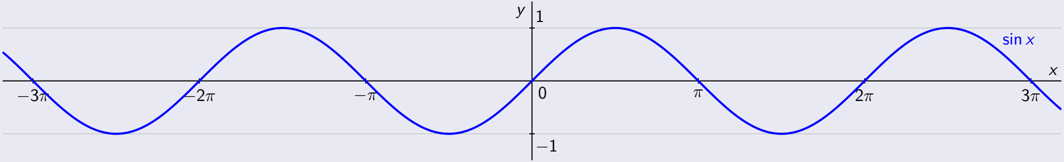
Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$

Pre koeficienty ASS platí:



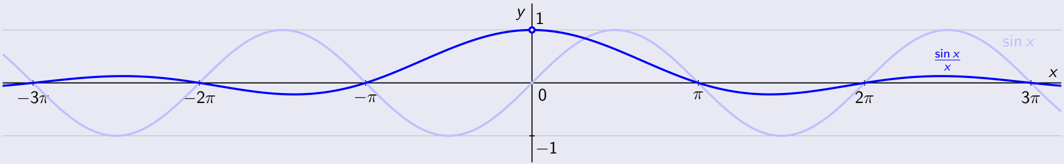
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

$\left[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \right.$ existuje,



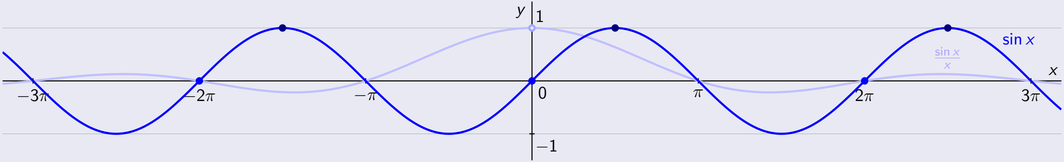
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

$\Big[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ existuje,



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

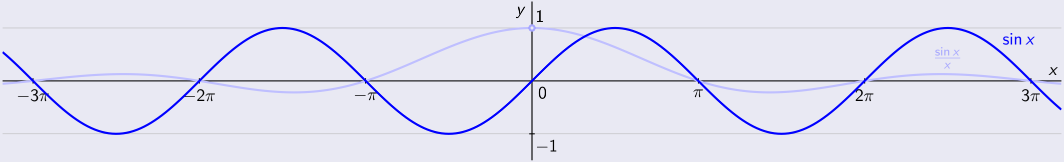
Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

$\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

$\left[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\right.$ existuje, ASS neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$ nemá ASS.

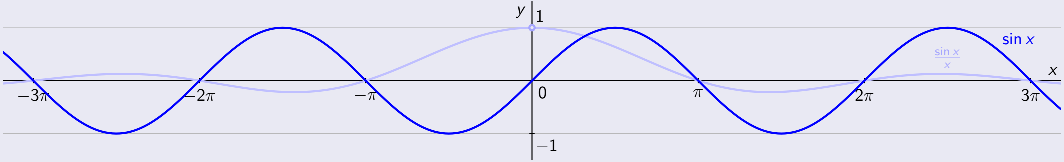
Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

$\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

Pre $h \in R$, $h \neq 0$ platí:

$\Big[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ existuje, ASS neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

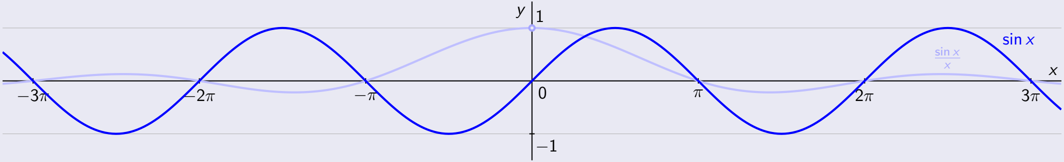
- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

$\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

Pre $h \in R$, $h \neq 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$\left[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\right.$ existuje, ASS neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

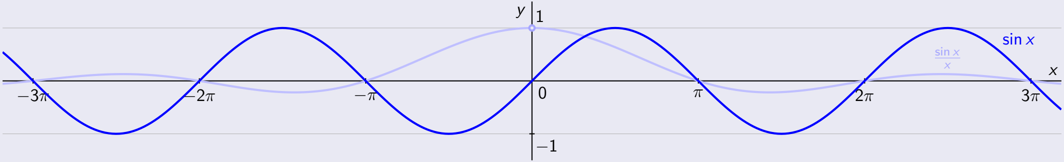
- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

$\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

Pre $h \in R$, $h \neq 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}$

$\left[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\right.$ existuje, ASS neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

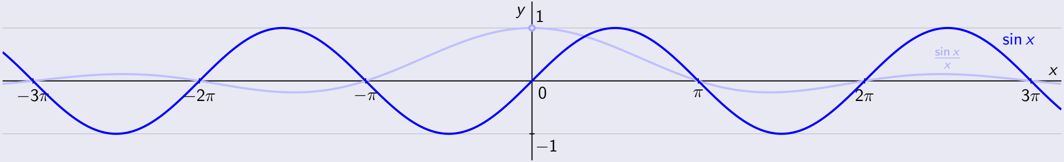
$\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

Pre $h \in R,\ h \neq 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$\left[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\right.$ existuje, ASS neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

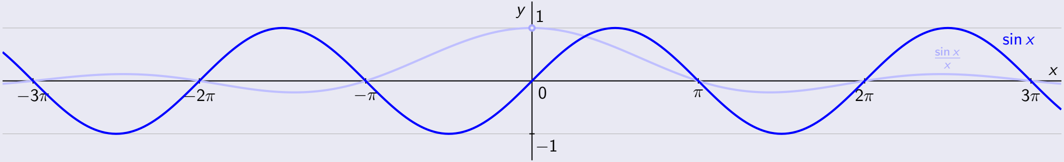
$\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

Pre $h \in R$, $h \neq 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}$

$$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{2}{h}\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$\Big[\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ existuje, ASS neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f\colon y = \sin x,\ x \in R$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\sin x - k\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ neexistuje.

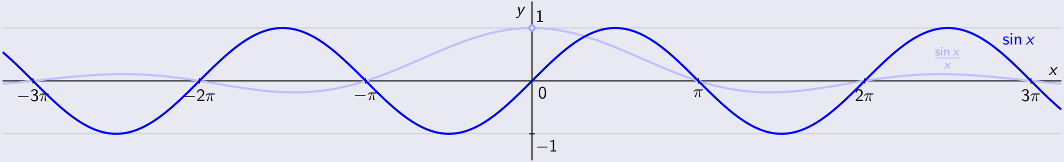
$\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

Pre $h \in R,\ h \neq 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}$

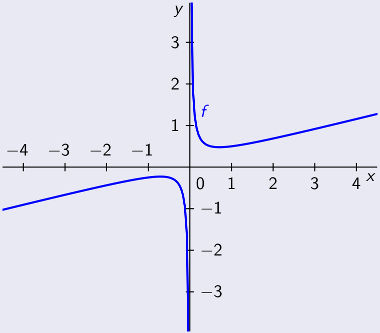
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{2}{h}\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$ neexistuje.

$\left[\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\right.$ existuje, ASS neexistuje, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ neexistuje.$\left.\right]$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

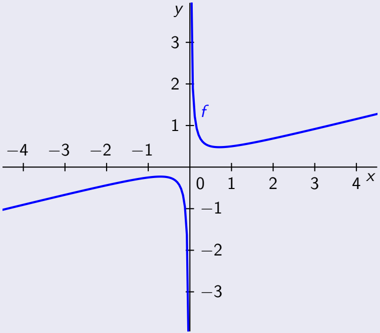
Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

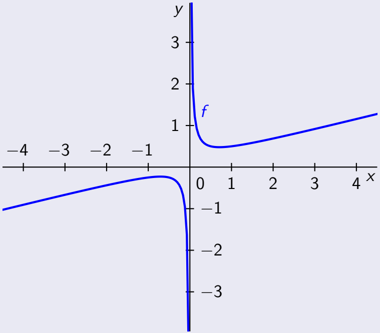
- $D(f) = R - \{0\}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.



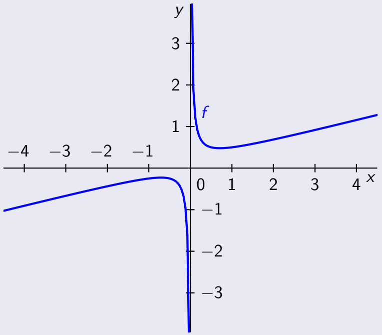
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right]$$



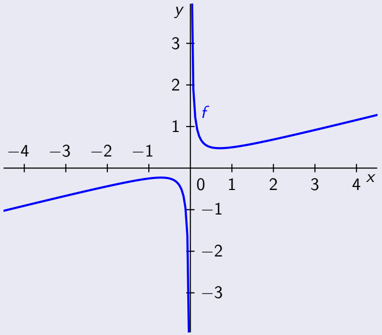
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\frac{1}{8}-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\frac{1}{8}+\infty$$



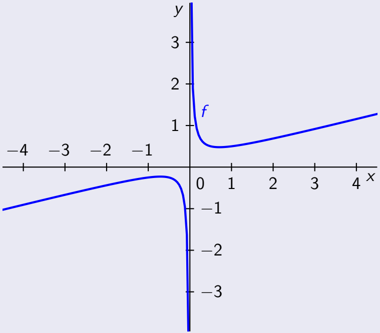
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\frac{1}{8}-\infty = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\frac{1}{8}+\infty = +\infty.$$



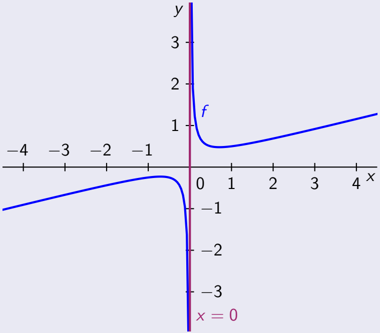
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\frac{1}{8}-\infty = -\infty. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\frac{1}{8}+\infty = +\infty. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

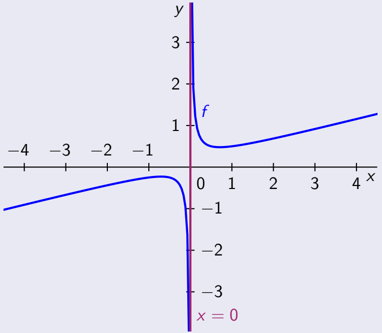
Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\tfrac{1}{8}-\infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\tfrac{1}{8}+\infty = +\infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

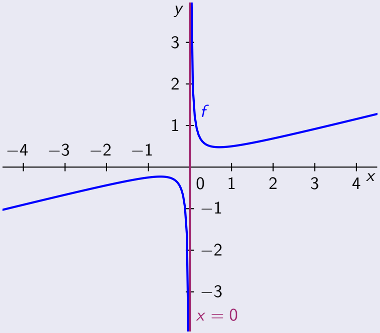
- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\frac{1}{8}-\infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\frac{1}{8}+\infty = +\infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

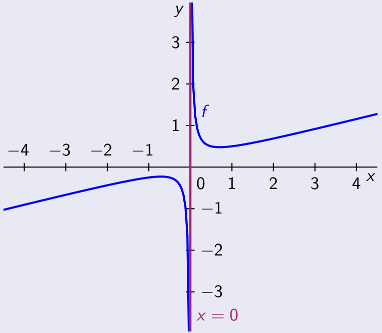
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\tfrac{1}{8}-\infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\tfrac{1}{8}+\infty = +\infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8x}+\frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4}+0+0$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

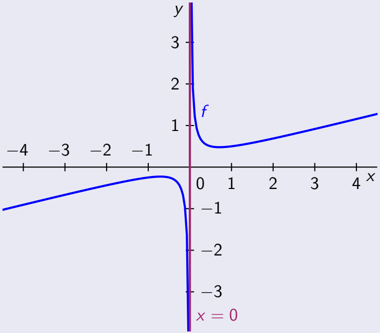
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\tfrac{1}{8}-\infty = -\infty.\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\tfrac{1}{8}+\infty = +\infty.\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8x}+\frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4}+0+0 = \frac{1}{4}.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}.$

- $D(f) = R - \{0\}.$ $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0.$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot0^-} = 0+\tfrac{1}{8}-\infty = -\infty.\\ \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot0^+} = 0+\tfrac{1}{8}+\infty = +\infty.\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

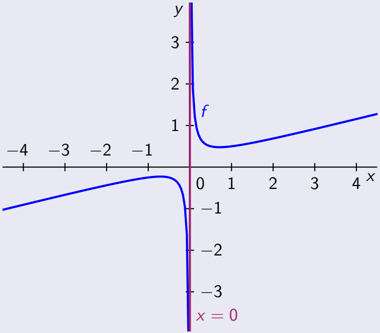
- ABS je $x = 0.$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8x}+\frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4}+0+0 = \frac{1}{4}.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\frac{1}{8}-\infty = -\infty.\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\frac{1}{8}+\infty = +\infty.\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.

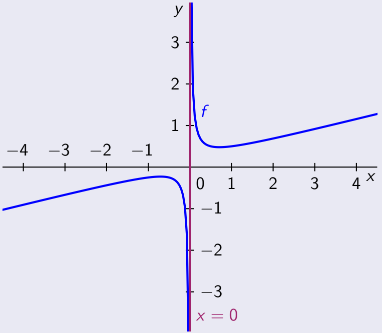
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8x}+\frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4}+0+0 = \frac{1}{4}.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}-\frac{x}{4}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot(\pm\infty)} = \frac{1}{8}+0$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\tfrac{1}{8}-\infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = 0+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\tfrac{1}{8}+\infty = +\infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.

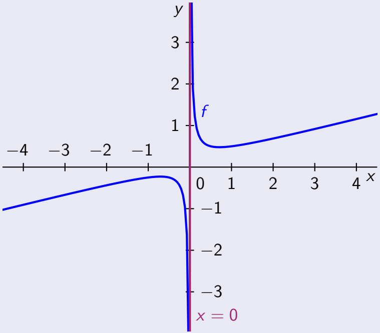
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8x}+\tfrac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4}+0+0 = \frac{1}{4}.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\tfrac{x}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x} - \tfrac{x}{4}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot(\pm\infty)} = \frac{1}{8}+0 = \frac{1}{8}.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^-} = 0+\frac{1}{8}-\infty = -\infty.\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^+} = 0+\frac{1}{8}+\infty = +\infty.\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- ABS je $x = 0$.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

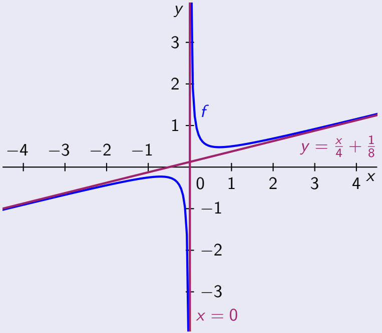
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8x}+\frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4}+0+0 = \frac{1}{4}.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}-\frac{x}{4}\right]$$

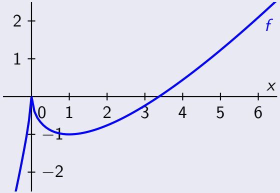
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot(\pm\infty)} = \frac{1}{8}+0 = \frac{1}{8}.$$

$\Rightarrow$ • ASS je $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

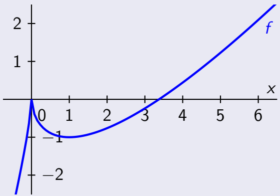
Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

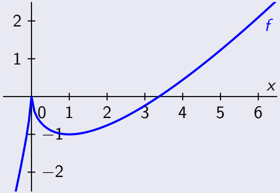
- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode).



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon\, y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

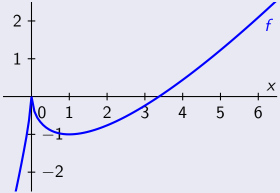
- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$
- ABS neexistujú.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon\, y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$
- ABS neexistujú.



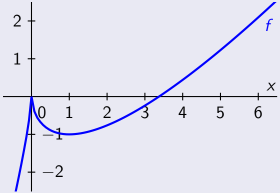
- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $X \to -\infty$ platí:

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $X \to \infty$ platí:

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Longrightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)$$

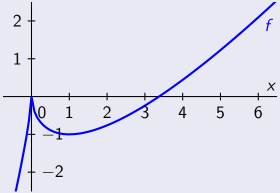
- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Longrightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

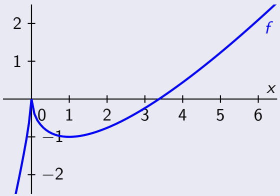
Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Longrightarrow$ • ABS neexistujú.

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right)$$



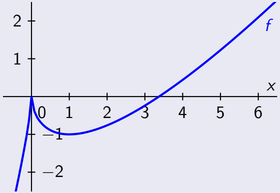
- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Longrightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2.$$

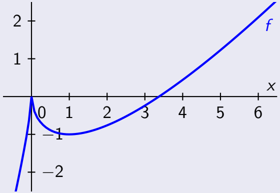
- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Longrightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right) = \lim_{z\to\infty}\left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2.$$

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

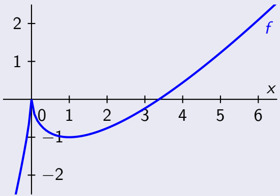
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

- Pre $x \to \pm\infty$ platí:

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2.$$

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

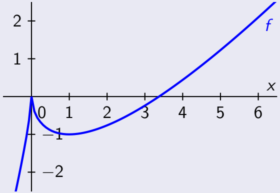
- Pre $x \to \pm\infty$ platí:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right]$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Longrightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right) = \lim_{z\to\infty}\left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2.$$

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

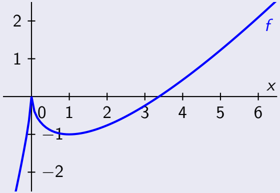
- Pre $x \to \pm\infty$ platí:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-3\sqrt[3]{x^2}\right]$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Longrightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2.$$

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

- Pre $x \to \pm\infty$ platí:

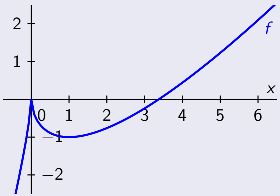
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-3\sqrt[3]{x^2}\right]$$

$$= -3 \cdot \infty = -\infty.$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f\colon y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.



- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right) = \lim_{z\to\infty}\left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}\right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2.$$

- Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \to \infty$ platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

- Pre $x \to \pm\infty$ platí:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-3\sqrt[3]{x^2}\right]$$

$$= -3\cdot\infty = -\infty.$$ $\Rightarrow$ • ASS neexistujú.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in R,\ a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in R,\ a \in (1; \infty). \end{cases}$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in R,\ a \in (0;1), \\ 0 & \text{pre } q \in R,\ a \in (1;\infty). \end{cases}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in R,\ a \in (0;1), \\ \infty & \text{pre } q \in R,\ a \in (1;\infty). \end{cases}$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{a}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a\in R$.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{a}{x})^x = \lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a\in R$.
- $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in R,\ a \in (0;1), \\ 0 & \text{pre } q \in R,\ a \in (1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in R,\ a \in (0;1), \\ \infty & \text{pre } q \in R,\ a \in (1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in R,\ a \in (0;1), \\ 0 & \text{pre } q \in R,\ a \in (1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in R,\ a \in (0;1), \\ \infty & \text{pre } q \in R,\ a \in (1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \ln \mathrm{e} = 1.$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{a}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a\in R$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \ln \mathrm{e} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(a^{\frac{1}{x}} - 1\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\big(\sqrt[x]{a} - 1\big) = \ln a$ pre $a > 0$.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{a}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ pre $a\in R$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \ln \mathrm{e} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(a^{\frac{1}{x}} - 1\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\big(\sqrt[x]{a} - 1\big) = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\big(\sqrt[x]{\mathrm{e}} - 1\big) = 1$.

Riešené príklady – Príklad

$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x}$ $\qquad$ $L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$ $\qquad$ $[q \in R,\ a > 0,\ a \neq 0.]$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in R,\ a > 0,\ a \neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva:

- $\lim_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in R,\ a > 0,\ a \neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva:

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva:

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$.

Riešené príklady – Príklad

$L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x}$ $\qquad$ $L_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$ $\qquad$ $[q \in R,\ a > 0,\ a \neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in N$. $\Rightarrow$ • $1 \leq n \leq x < n+1$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in R,\ a > 0,\ a \neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in N$. $\Rightarrow$ • $1 \leq n \leq x < n+1$.

- $a \in (1; \infty)$.

- $a \in (0; 1)$.

Riešené príklady – Príklad

$L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x}$ $\qquad$ $L_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$ $\qquad$ $[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$.

- $a\in(1;\infty)$.
  - $q>0$.
  - $q=0$.
  - $q<0$.
- $a\in(0;1)$.
  - $q<0$.
  - $q=0$.
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x}$ $\quad$ $L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$ $\quad$ $[q \in R,\ a > 0,\ a \neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ • $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0;1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \to \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in N$. $\Rightarrow$ • $1 \leq n \leq x < n+1$.

- $a \in (1;\infty)$. • $1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$.
  - $q > 0$.
  - $q = 0$.
  - $q < 0$.
- $a \in (0;1)$. • $1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$.
  - $q < 0$.
  - $q = 0$.
  - $q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor \in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$.

- $a\in(1;\infty)$. • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$.
  - $q>0$.
  - $q=0$.
  - $q<0$.
- $a\in(0;1)$. • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$.
  - $q<0$.
  - $q=0$.
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$. • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.
  - $q>0$.
  - $q=0$.
  - $q<0$.
- $a\in(0;1)$. • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.
  - $q<0$.
  - $q=0$.
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$.

  • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.

  - $q>0$. $\Rightarrow 0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$
  - $q=0$.
  - $q<0$.

- $a\in(0;1)$.

  • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.

  - $q<0$. $\Rightarrow L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$
  - $q=0$.
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$.

  • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.

  - $q>0$. $\Rightarrow$ $0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}$
  - $q=0$.
  - $q<0$.

- $a\in(0;1)$.

  • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.

  - $q<0$. $\Rightarrow$ $L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}$
  - $q=0$.
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x}$ $\qquad$ $L_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$ $\qquad$ $[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$. • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.
  - $q>0$. $\Rightarrow 0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot 0 = 0.$
  - $q=0$.
  - $q<0$.
- $a\in(0;1)$. • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.
  - $q<0$. $\Rightarrow L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot\infty=\infty.$
  - $q=0$.
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x}$ $\quad L_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$ $\quad [q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor \in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$. • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.
  - $q>0$. $\Rightarrow$ $0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot 0 = 0.$ $\Rightarrow$ $L_1 = 0$.
  - $q=0$.
  - $q<0$.
- $a\in(0;1)$. • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.
  - $q<0$. $\Rightarrow$ $L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot\infty = \infty.$ $\Rightarrow$ $L_1 = \infty$.
  - $q=0$.
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in R,\ a > 0,\ a \neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor \in N$. $\Rightarrow$ • $1\le n\le x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\le n^q\le x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\ge n^q\ge x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$.

  • $1<a\le a^n\le a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\le\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.

  - $q>0$. $\Rightarrow 0\le L_1\le a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot 0 = 0. \Rightarrow L_1 = 0.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1=\frac{1}{\infty}=0.$
  - $q<0$.

- $a\in(0;1)$.

  • $1>a\ge a^n\ge a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.

  - $q<0$. $\Rightarrow L_1\ge a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot\infty=\infty. \Rightarrow L_1=\infty.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1=\frac{1}{0^+}=\infty.$
  - $q>0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$.

  • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.

  - $q>0$. $\Rightarrow 0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot 0 = 0. \Rightarrow L_1 = 0.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{\infty} = 0.$
  - $q<0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{0}{\infty} = 0.$

- $a\in(0;1)$.

  • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.

  - $q<0$. $\Rightarrow L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot\infty = \infty. \Rightarrow L_1 = \infty.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{0^+} = \infty.$
  - $q>0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{\infty}{0^+} = \infty.$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$.

  • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.

  - $q>0$. $\Rightarrow 0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}=a\cdot 0=0. \Rightarrow L_1=0.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1=\frac{1}{\infty}=0.$
  - $q<0$. $\Rightarrow L_1=\frac{0}{\infty}=0.$
  - $q\in R$. $\Rightarrow L_2=\frac{1}{L_1}$

- $a\in(0;1)$.

  • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.

  - $q<0$. $\Rightarrow L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}=a\cdot\infty=\infty. \Rightarrow L_1=\infty.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1=\frac{1}{0^+}=\infty.$
  - $q>0$. $\Rightarrow L_1=\frac{\infty}{0^+}=\infty.$
  - $q\in R$. $\Rightarrow L_2=\frac{1}{L_1}$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} \infty & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$.

  • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.

  - $q>0$. $\Rightarrow 0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot 0 = 0. \Rightarrow L_1 = 0.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{\infty} = 0.$
  - $q<0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{0}{\infty} = 0.$
  - $q\in R$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

- $a\in(0;1)$.

  • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.

  - $q<0$. $\Rightarrow L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n} = a\cdot\infty = \infty. \Rightarrow L_1 = \infty.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{0^+} = \infty.$
  - $q>0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{\infty}{0^+} = \infty.$
  - $q\in R$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q\in R,\ a\in(0;1), \\ \infty & \text{pre } q\in R,\ a\in(1;\infty). \end{cases}$$

$[q\in R,\ a>0,\ a\neq 0.]$

Z príkladov 02-Pr IV a 02-Pr V vyplýva: • $\lim\limits_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(0;1). \end{cases}$

Pre $x>1$, $x\to\infty$ označme $n=\lfloor x\rfloor\in N$. $\Rightarrow$ • $1\leq n\leq x<n+1$. $\Rightarrow$ • $1\leq n^q\leq x^q<(n+1)^q$ pre $q>0$. • $1\geq n^q\geq x^q>(n+1)^q>0$ pre $q<0$.

- $a\in(1;\infty)$. • $1<a\leq a^n\leq a^x<a^{n+1}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{x^q}{a^x}<\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q>0$.
  - $q>0$. $\Rightarrow 0\leq L_1\leq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}=a\cdot 0=0. \Rightarrow L_1=0.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1=\frac{1}{\infty}=0.$
  - $q<0$. $\Rightarrow L_1=\frac{0}{\infty}=0.$
  - $q\in R$. $\Rightarrow L_2=\frac{1}{L_1}=\frac{1}{0^+}=\infty.$
- $a\in(0;1)$. • $1>a\geq a^n\geq a^x>a^{n+1}>0$. $\Rightarrow$ • $0<\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow$ • $\frac{x^q}{a^x}>\frac{(n+1)^q}{a^n}=a\cdot\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q<0$.
  - $q<0$. $\Rightarrow L_1\geq a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}=a\cdot\infty=\infty. \Rightarrow L_1=\infty.$
  - $q=0$. $\Rightarrow L_1=\frac{1}{0^+}=\infty.$
  - $q>0$. $\Rightarrow L_1=\frac{\infty}{0^+}=\infty.$
  - $q\in R$. $\Rightarrow L_2=\frac{1}{L_1}=\frac{1}{\infty}=0.$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a>0,\ a\neq 1$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 \\ z + 1 = a^x & z \to 0 \end{array} \quad \right]$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a > 0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right]$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=a^x-1 & x\to 0 & \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1=a^x & z\to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=a^x-1 & x\to 0 & \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1=a^x & z\to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)}$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=a^x-1 & x\to 0 & \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1=a^x & z\to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ pre $a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1}$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $$= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r|c|l} z = a^x - 1 & x\to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x\ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z\to 0 & \end{array} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z\to 0} \frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=a^x-1 & x\to 0 & \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1=a^x & z\to 0 & \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\mathrm{e}^x-1 & z+1=\mathrm{e}^x & x\to 0 \\ & \ln(z+1)=x & z\to 0 \end{array}\right]$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z = \mathrm{e}^x - 1 & z+1 = \mathrm{e}^x & x \to 0 \\ & \ln(z+1) = x & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z + 1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = \mathrm{e}^x - 1 & z + 1 = \mathrm{e}^x & x \to 0 \\ & \ln(z+1) = x & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = \mathrm{e}^x - 1 & z+1 = \mathrm{e}^x & x \to 0 \\ & \ln(z+1) = x & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \text{ pre } a>0,\ a\neq 1$$

- $= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r} z=a^x-1 \\ z+1=a^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x\to 0 \\ z\to 0 \end{array} \middle| \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$$

- $= \left[\text{Subst. } z=\mathrm{e}^x-1 \middle| \begin{array}{l} z+1=\mathrm{e}^x \\ \ln(z+1)=x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x\to 0 \\ z\to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$

$$= \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{1}$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z + 1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z = \mathrm{e}^x - 1 & z+1 = \mathrm{e}^x & x \to 0 \\ & \ln(z+1) = x & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$

$$= \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=a^x-1 & x\to 0 & \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1=a^x & z\to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=e^x-1 & z+1=e^x & x\to 0 \\ & \ln(z+1)=x & z\to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$

$$= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{3^x-1}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=a^x-1 & x\to 0 & \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1=a^x & z\to 0 & \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=\mathrm{e}^x-1 & z+1=\mathrm{e}^x & x\to 0 \\ & \ln(z+1)=x & z\to 0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$

$$= \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{x}{3^x-1}\right)$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z=a^x-1 & x\to 0 & \ln(z+1)=\ln a^x = x\ln a \Rightarrow x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1=a^x & z\to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z\ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\mathrm{e}^x-1 & z+1=\mathrm{e}^x & x\to 0 \\ & \ln(z+1)=x & z\to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$

$$= \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{3^x-1}$

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2^x-1}{x} \cdot \frac{x}{3^x-1} \right) = \ln 2 \cdot \frac{1}{\ln 3}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a>0,\ a\neq 1$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \to 0 & \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \\ z+1 = a^x & z \to 0 & \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)}$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z = \mathrm{e}^x - 1 & z+1 = \mathrm{e}^x & x \to 0 \\ & \ln(z+1) = x & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$

$$= \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{3^x-1} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2^x-1}{x} \cdot \frac{x}{3^x-1} \right) = \ln 2 \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$$

Riešené príklady – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x \to 0 & \\ z = \sin^2 x & z \to 0 & \end{array} \right]$

- $= \left[x \to 0 \Rightarrow \cos x - 1 \to 0 \right]$

Riešené príklady – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x \to 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ z = \sin^2 x & z \to 0 & \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right]$

- $= \left[x \to 0 \Rightarrow \cos x - 1 \to 0 \right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot (\cos x - 1)} \right]^{\operatorname{cotg}^2 x}$

Riešené príklady – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & x\in O(0) \Rightarrow \cos x>0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z=\sin^2 x & z\to 0 & \sin^2 x+\cos^2 x = 1 \text{ pre } x\in R & \end{array} \right]$

$$= \lim_{z\to 0} (1-z)^{\frac{1}{2}}$$

- $= \left[x\to 0 \Rightarrow \cos x - 1 \to 0 \right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)} \right]^{\operatorname{cotg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} \right]^{(\cos x-1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & x\in O(0) \Rightarrow \cos x>0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z=\sin^2 x & z\to 0 & \sin^2 x+\cos^2 x = 1 \text{ pre } x\in R & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-z}{z} \end{array}\right]$

$$= \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}}$$

- $= \left[x\to 0 \Rightarrow \cos x - 1 \to 0 \right] = \lim_{x\to 0} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)}\right]^{\operatorname{cotg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{(\cos x-1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x} = \mathrm{e}$$

- $\lim_{x\to 0} (1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 0 \\ z=\cos x-1 & z\to 0 \end{array}\right] = \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & x\in O(0)\Rightarrow \cos x>0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z=\sin^2 x & z\to 0 & \sin^2 x+\cos^2 x = 1 \text{ pre } x\in R & x\in O(0)-\{0\}\Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-z}{z} \end{array}\right]$

$$= \lim_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}}$$

- $= \left[\, x\to 0 \Rightarrow \cos x - 1 \to 0 \,\right] = \lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}\cdot(\cos x - 1)}\right]^{\operatorname{cotg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right]^{(\cos x - 1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x} = \mathrm{e}$$

- $\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 0 \\ z=\cos x - 1 & z\to 0 \end{array}\right] = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$
- $\lim_{x\to 0}(\cos x - 1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x = \lim_{x\to 0}(\cos x - 1)\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(\cos x - 1)\cdot\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & x\in O(0)\Rightarrow \cos x>0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z=\sin^2 x & z\to 0 & \sin^2 x+\cos^2 x = 1 \text{ pre } x\in R & x\in O(0)-\{0\}\Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-z}{z} \end{array}\right]$

$$= \lim_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}} = (\mathrm{e}^{-1})^{\frac{1-0}{2}}$$

- $= \left[\, x\to 0 \Rightarrow \cos x - 1 \to 0 \,\right] = \lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)}\right]^{\operatorname{cotg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{(\cos x-1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

- $\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 0 \\ z=\cos x-1 & z\to 0 \end{array}\right] = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$

- $\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x = \lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+\cos x} = -\frac{\cos^2 0}{1+\cos 0} = -\frac{1^2}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & x\in O(0) \Rightarrow \cos x>0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z=\sin^2 x & z\to 0 & \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ pre } x\in R & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-z}{z} \end{array} \right]$

$$= \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}} = \left(e^{-1}\right)^{\frac{1-0}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

- $= \left[x\to 0 \Rightarrow \cos x - 1 \to 0 \right] = \lim_{x\to 0} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)}\right]^{\operatorname{cotg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{(\cos x-1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

- $\lim_{x\to 0} (1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 0 \\ z=\cos x-1 & z\to 0 \end{array} \right] = \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$

- $\lim_{x\to 0} (\cos x-1)\cdot\operatorname{cotg}^2 x = \lim_{x\to 0} (\cos x-1)\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} (\cos x-1)\cdot\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} (\cos x-1)\cdot\frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} = -\frac{\cos^2 0}{1+\cos 0} = -\frac{1^2}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} & \\ z = \cos^2 2x & z \to 0 & \end{array} \right]$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right]$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} & \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) \\ z = \cos^2 2x & z \to 0 & \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array}\right]$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \to \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t}$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2 2x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} & \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) & x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1-\cos^2 2x} = (1-\cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z = \cos^2 2x & z \to 0 & \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R & \end{array} \right]$

$$= \lim_{z\to 0} (1-z)^{\frac{1}{2}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\mathrm{tg}^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}\cdot(\sin t - 1)} \right]^{\mathrm{tg}^2 t}$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2 2x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x\to\frac{\pi}{4} & \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4})=(0;\frac{\pi}{2}) & x\in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x>0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1-\cos^2 2x} = (1-\cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z=\cos^2 2x & z\to 0 & \sin^2 2x+\cos^2 2x = 1 \text{ pre } x\in R & x\in O(\frac{\pi}{4})-\{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \mathrm{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-z}{z} \end{array}\right]$

$$= \lim_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to\frac{\pi}{4} \\ t=2x & t\to\frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\mathrm{tg}^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t-1)^{\frac{1}{\sin t-1}\cdot(\sin t-1)}\right]^{\mathrm{tg}^2 t}$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t-1)^{\frac{1}{\sin t-1}}\right]^{(\sin t-1)\cdot\mathrm{tg}^2 t} = \mathrm{e}$$

- $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin t-1)^{\frac{1}{\sin t-1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & t\to\frac{\pi}{2} \\ z=\sin t-1 & z\to 0 \end{array}\right] = \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} & \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) & x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1-\cos^2 2x} = (1-\cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z = \cos^2 2x & z \to 0 & \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R & x \in O(\frac{\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-z}{z} \end{array} \right]$

$$= \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1-z}{2}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}\cdot(\sin t - 1)} \right]^{\operatorname{tg}^2 t}$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \right]^{(\sin t - 1)\cdot\operatorname{tg}^2 t} = \mathrm{e}$$

- $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & t \to \frac{\pi}{2} \\ z = \sin t - 1 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$
- $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t - 1)\cdot\operatorname{tg}^2 t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t - 1)\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t - 1)\cdot\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2 2x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x\to\frac{\pi}{4} & \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4})=(0;\frac{\pi}{2}) & x\in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x>0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1-\cos^2 2x} = (1-\cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z=\cos^2 2x & z\to 0 & \sin^2 2x+\cos^2 2x = 1 \text{ pre } x\in R & x\in O(\frac{\pi}{4})-\{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \mathrm{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-z}{z} \end{array} \right]$

$$= \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}} = \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{\frac{1-0}{2}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to\frac{\pi}{4} \\ t=2x & t\to\frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\mathrm{tg}^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t-1)^{\frac{1}{\sin t-1}\cdot(\sin t-1)}\right]^{\mathrm{tg}^2 t}$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t-1)^{\frac{1}{\sin t-1}}\right]^{(\sin t-1)\cdot\mathrm{tg}^2 t} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

- $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin t-1)^{\frac{1}{\sin t-1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & t\to\frac{\pi}{2} \\ z=\sin t-1 & z\to 0 \end{array} \right] = \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$
- $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t-1)\cdot\mathrm{tg}^2 t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t-1)\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t-1)\cdot\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t-1)\cdot\frac{\sin^2 t}{(1-\sin t)\cdot(1+\sin t)} = -\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+\sin t} = -\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{1^2}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} & \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) & x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1-\cos^2 2x} = (1-\cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}} \\ z = \cos^2 2x & z \to 0 & \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R & x \in O(\frac{\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \mathrm{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-z}{z} \end{array} \right]$

$$= \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1-z}{2}} = \lim_{z\to 0} \left[(1-z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1-z}{2}} = \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{\frac{1-0}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \to \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\mathrm{tg}^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}\cdot(\sin t - 1)} \right]^{\mathrm{tg}^2 t}$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \right]^{(\sin t - 1)\cdot \mathrm{tg}^2 t} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

- $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & t \to \frac{\pi}{2} \\ z = \sin t - 1 & z \to 0 \end{array} \right] = \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$

- $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t - 1)\cdot \mathrm{tg}^2 t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t - 1)\cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t - 1)\cdot \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\sin t - 1)\cdot \frac{\sin^2 t}{(1-\sin t)\cdot(1+\sin t)} = -\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+\sin t} = -\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{1+\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{1^2}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $= \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ pre všetky $a \in R - \{k\pi, k \in Z\}$.

- $= \lim\limits_{x\to a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $= \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$

$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$ pre všetky $a\in R-\{k\pi,\, k\in Z\}$.

- $$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$$
$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = e^{\frac{1}{\sin a}}$$

- $$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right] = \lim_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $= \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$

$$= \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a}$$

- $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right] = \lim\limits_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}.$
- $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right] = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0\end{array}\right]$

$$= \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $= \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$

$$= \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}}$$

- $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right] = \lim\limits_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$

- $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right] = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0\end{array}\right]$

$$= \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\operatorname{cotg} a}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $= \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$
$$= \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\operatorname{cotg} a}.$$

- $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right] = \lim\limits_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$
- $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right] = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0\end{array}\right]$
$$= \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\operatorname{cotg} a}$ pre všetky $a \in R - \{k\pi, k \in Z\}$.

- $$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$$
$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\operatorname{cotg} a}.$$

- $$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to 0 \\ z=\sin x-\sin a & z\to 0 \end{array}\right] = \lim_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$
- $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right] = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x\to a \\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

Bod $a \in R^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a) - \{a\}$, existuje limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\operatorname{cotg} a}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$$
$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\operatorname{cotg} a}.$$

- $$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right] = \lim_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

- $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right] = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0\end{array}\right]$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

Bod $a\in R^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a)-\{a\}$, existuje limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a}\left[1\pm f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$$
$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a} = \mathrm{e}^{\frac{\cos a}{\sin a}} = \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}.$$

- $$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right] = \lim_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}.$$
- $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right] = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0\end{array}\right]$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

Bod $a\in R^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a)-\{a\}$, existuje limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

$\Rightarrow$
- $$\lim_{x\to a}\left[1\pm f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=f(x) & z\to 0\end{array}\right]$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi, k\in Z\}$.

- $$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$$
$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a} = \mathrm{e}^{\frac{\cos a}{\sin a}} = \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}.$$

- $$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right] = \lim_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}.$$
- $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right] = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0\end{array}\right]$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

Bod $a\in R^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a)-\{a\}$, existuje limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

$\Rightarrow$ • $$\lim_{x\to a}\left[1\pm f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}} = \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=f(x) & z\to 0\end{array}\right] = \lim_{z\to 0}(1\pm z)^{\frac{1}{z}}$$

Riešené príklady – Príklady

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}$ pre všetky $a\in R-\{k\pi,\, k\in Z\}$.

- $$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}=\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}\right]^{\cos a}=\mathrm{e}^{\frac{\cos a}{\sin a}}=\mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}.$$

- $$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot(\sin x-\sin a)\right)^{\frac{1}{\sin x-\sin a}}=\left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to 0\\ z=\sin x-\sin a & z\to 0\end{array}\right]=\lim_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{\sin a}\cdot z\right)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin a}}.$$
- $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right]=\left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=\frac{x-a}{2} & z\to 0\end{array}\right]$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=1\cdot\cos\frac{a+a}{2}=\cos a.$$

Bod $a\in R^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a)-\{a\}$, existuje limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

$\Rightarrow$ • $$\lim_{x\to a}\left[1\pm f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=\left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.} & x\to a\\ z=f(x) & z\to 0\end{array}\right]=\lim_{z\to 0}(1\pm z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}^{\pm 1}.$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

  a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin x}{x}$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít
  a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right]$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right]$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

  a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \arcsin x}{\sin x}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \arcsin x}{\sin x}$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{\sin x}$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x = x\end{array}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\arcsin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$

- $\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x = x\end{array}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\arcsin x}{\sin x} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$
  - Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

- $$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\sin 1}$$
  - V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$
  - Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin 1}$
  - V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x}{x}$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept. [Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$
  - Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin 1}$
  - V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } x=\sin z & x\to0\\ z=\arcsin x & z\to0\end{array}\right]$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } x=\sin z & x\to1\\ z=\arcsin x & z\to\frac{\pi}{2}\end{array}\right]$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov" ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
  - Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$
  - V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad x = \sin z & x \to 0 \\ z = \arcsin x & z \to 0 \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\sin z}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad x = \sin z & x \to 1 \\ z = \arcsin x & z \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to \frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin z}$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept. [Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{matrix}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x = x\end{matrix}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\arcsin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$$
  - Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

- $$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{matrix}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x = x\end{matrix}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\arcsin x}{\sin x} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$$
  - V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\quad x=\sin z & x\to 0\\ z=\arcsin x & z\to 0\end{array}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1.$$

- $$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\quad x=\sin z & x\to 1\\ z=\arcsin x & z\to \frac{\pi}{2}\end{array}\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z}{\sin z} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít

  a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$
  - Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x=x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin 1}\approx 1{,}188\,395.$
  - V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\quad x=\sin z & x\to 0\\ z=\arcsin x & z\to 0\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=1.$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\quad x=\sin z & x\to 1\\ z=\arcsin x & z\to \frac{\pi}{2}\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{z}{\sin z}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{1}=\dfrac{\pi}{2}\approx 1{,}570\,796.$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limít a mnohé „zaručené kuchárske recepty tzv. matematických géniov“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x = x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$
  - Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{Kalerábové sínusovanie}\\ \sin\arcsin x = x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\arcsin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin 1}\approx 1{,}188\,395.$
  - V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } x=\sin z & x\to 0\\ z=\arcsin x & z\to 0\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } x=\sin z & x\to 1\\ z=\arcsin x & z\to \frac{\pi}{2}\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{z}{\sin z}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{1}=\dfrac{\pi}{2}\approx 1{,}570\,796.$

[V tomto prípade stačí dosadiť príslušné hodnoty: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{x}=\frac{\arcsin 1}{1}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$.
- $\pm\infty \cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$.
- $\pm\infty \cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením,

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty-\infty$.
- $\pm\infty\cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$.
- $\pm\infty \cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov neurčitý výraz je z vecného hľadiska nevhodný.

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty-\infty$.
- $\pm\infty\cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$.
- $\pm\infty \cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$.
- $\pm\infty \cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

[Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$.
- $\pm\infty \cdot 0$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{1}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- 0^0.
- $0^{\pm\infty}$.
- $1^{\pm\infty}$.
- $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

  [Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje.**

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$. • $\pm\infty \cdot 0$. • $\frac{0}{0}$. • $\frac{1}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. • 0^0. • $0^{\pm\infty}$. • $1^{\pm\infty}$. • $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

  [Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje.**

$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a \in R$.

$\lim_{x\to \infty} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a \in R$.

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty-\infty$. • $\pm\infty\cdot 0$. • $\frac{0}{0}$. • $\frac{1}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. • 0^0. • $0^{\pm\infty}$. • $1^{\pm\infty}$. • $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

  [Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje.**

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a\in R$.

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & \end{array} \right]$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a\in R$.

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & \end{array} \right]$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty-\infty$. • $\pm\infty\cdot 0$. • $\frac{0}{0}$. • $\frac{1}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. • 0^0. • $0^{\pm\infty}$. • $1^{\pm\infty}$. • $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov neurčitý výraz je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako limity zodpovedajúcich funkcií v daných bodoch.

[Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]

- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto limita vôbec existuje.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a\in R$.

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{a}{\ln x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{a}{\ln x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^a. \end{array}\right]$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a\in R$.

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{a}{\ln x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{a}{\ln x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^a. \end{array}\right]$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty-\infty$. • $\pm\infty\cdot 0$. • $\frac{0}{0}$. • $\frac{1}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. • 0^0. • $0^{\pm\infty}$. • $1^{\pm\infty}$. • $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

  [Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje.**

$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a\in R$.

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{a}{\ln x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{a}{\ln x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^a. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^a$

$\lim_{x\to \infty} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a\in R$.

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{a}{\ln x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{a}{\ln x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^a. \end{array}\right] = \lim_{x\to \infty}\mathrm{e}^a$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

- $\infty - \infty$. • $\pm\infty \cdot 0$. • $\frac{0}{0}$. • $\frac{1}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. • 0^0. • $0^{\pm\infty}$. • $1^{\pm\infty}$. • $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamemým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limít.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

[Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]

- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje.**

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a$ pre všetky $a \in R$.

- $$= \left[\begin{array}{c|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{a}{\ln x}}\right)} = e^{\frac{a}{\ln x}\cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^a = e^a.$$

$\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a$ pre všetky $a \in R$.

- $$= \left[\begin{array}{c|l} x \to \infty & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{a}{\ln x}}\right)} = e^{\frac{a}{\ln x}\cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right] = \lim_{x\to \infty} e^a = e^a.$$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & \end{array} \right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = \mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = \mathrm{e}^{\ln x \cdot \ln x} = \mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array} \right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[\, x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \,\right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = \mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = \mathrm{e}^{\ln x \cdot \ln x} = \mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$

  $= \mathrm{e}^{(-\infty)^2}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = \mathrm{e}^{\ln \left(x^{\ln x}\right)} = \mathrm{e}^{\ln x \cdot \ln x} = \mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
$= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = \mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = \mathrm{e}^{\ln x \cdot \ln x} = \mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = \mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = \mathrm{e}^{\ln x \cdot \ln x} = \mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$

$= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & \end{array} \right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}=\mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \,\right]$
$= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln \left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= e^{\frac{-\infty}{0^+}}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x\cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$

$$= e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}=\mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \,\right]$
  $= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \,\right]$
  $= \mathrm{e}^{\frac{-\infty}{0^+}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = \frac{1}{\infty}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}=\mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= \mathrm{e}^{\frac{-\infty}{0^+}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \right]$
  $= e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}=\mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \right]$
  $= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \right]$
  $= \mathrm{e}^{\frac{-\infty}{0^+}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & \end{array} \right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}=\mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \,\right]$
$= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \,\right]$
$= \mathrm{e}^{\frac{-\infty}{0^+}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{r|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{\ln x\cdot\ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \,\right]$
$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x \to -\infty. \,\right]$
$= e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{c|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right] = \lim_{x\to \infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}=\mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\ln^2 x}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \,\right]$
  $= \mathrm{e}^{(-\infty)^2} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right] = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \,\right]$
  $= \mathrm{e}^{\frac{-\infty}{0^+}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array}\right] = \lim_{x\to \infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{0}$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\ln x & x\to\infty \\ x=\mathrm{e}^z & z\to\infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{\mathrm{e}^z} = \left[\, \text{VIP limity, resp. 05-Pr I: } L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \text{ pre } q\in R, a\in(1;\infty). \,\right] = 0.$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\ln x}>0. \Rightarrow x^{\ln x}=e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}=e^{\ln x\cdot\ln x}=e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \,\right]$
  $= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0^+ & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[\, x\to 0^+. \Rightarrow \ln x\to -\infty. \,\right]$
  $= e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to \infty & \text{Pre } f(x)>0 \text{ platí } f(x)=e^{\ln f(x)}. \\ x>0 & x^{\frac{1}{x}}>0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=\ln x & x\to\infty \\ x=e^z & z\to\infty \end{array} \right] = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{e^z} = \left[\, \text{VIP limity, resp. 05-Pr I: } L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \text{ pre } q\in R, a\in(1;\infty). \,\right] = 0.$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim_{x\to 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \lim_{x\to 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}}$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

- $= \lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{c|l} x\to 0 & \text{05-Pr V:} \quad \lim_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \end{array}\right]$

$$= e^{-1}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

- $= \lim_{x\to 0} \left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x \to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x \to 0 & \text{VIP limity:} & \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right]$

$$= \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{1}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x \to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x \to 0 & \text{VIP limity:} & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right]$

$$= (\mathrm{e}^{-1})^{1} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Neurčité výrazy – Príklady

$$\lim_{x\to 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

- $= \lim_{x\to 0} \left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x\to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} [1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x \to 0 & \text{VIP limity:} & \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right]$

  $= (\mathrm{e}^{-1})^{1} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim_{x\to 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim_{x\to 0} \left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} x \to 0 & \text{05-Pr V:} \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x \to 0 & \text{VIP limity:} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right]$

$= (\mathrm{e}^{-1})^1 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x \to 0 \Rightarrow \cos x \to 1 \Rightarrow 1-\cos x \to 0 & x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1-\cos x > 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \end{array} \right]$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 & \text{05-Pr V:} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \end{array}\right]$
  $= (\mathrm{e}^{-1})^{1} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x\to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \end{array}\right]$

  $= (\mathrm{e}^{-1})^{1} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

  $= \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)}$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$

- $= \lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 & \text{05-Pr V:} \quad \lim_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[1\pm f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right]$

$$= (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^+ \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array}\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[\, x\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to -\infty\cdot(-\infty) = +\infty \,\right]$$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 & \text{05-Pr V:} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left[1\pm f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \end{array}\right]$

$$= (\mathrm{e}^{-1})^{1} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^{+} \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[\begin{array}{l} x\to 0^{-} \Rightarrow \frac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to -\infty\cdot(-\infty)=+\infty \\ \end{array}\right]$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{+\infty} & \text{pre } x\to 0^{-}, \\ & \end{cases}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 & \text{05-Pr V:} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left[1\pm f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right]$

  $= (\mathrm{e}^{-1})^1 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^+ \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

  $= \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[\begin{array}{l} \\ x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to +\infty\cdot(-\infty) = -\infty \end{array}\right]$

  $= \{$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0} \left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x\to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x \to 0 & \text{VIP limity:} & \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right]$

$$= (\mathrm{e}^{-1})^1 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^+ \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to +\infty\cdot(-\infty) = -\infty \right]$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{-\infty} & \text{pre } x\to 0^+. \end{cases}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x\to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \end{array}\right]$

$$= (\mathrm{e}^{-1})^{1} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^{+} \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[\begin{array}{l} x\to 0^{-} \Rightarrow \frac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to -\infty\cdot(-\infty)=+\infty \\ x\to 0^{+} \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to +\infty\cdot(-\infty)=-\infty \end{array}\right]$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{+\infty} & \text{pre } x\to 0^{-}, \\ \mathrm{e}^{-\infty} & \text{pre } x\to 0^{+}. \end{cases}$$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x\to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right]$

$$= (\mathrm{e}^{-1})^1 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^+ \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[\begin{array}{l} x\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to -\infty\cdot(-\infty) = +\infty \\ x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to +\infty\cdot(-\infty) = -\infty \end{array}\right]$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{+\infty} = \infty & \text{pre } x\to 0^-, \\ \mathrm{e}^{-\infty} & \text{pre } x\to 0^+. \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{+\infty} = \infty.$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x\to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right]$

$$= (\mathrm{e}^{-1})^1 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^+ \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[\begin{array}{l} x\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to -\infty\cdot(-\infty) = +\infty \\ x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to +\infty\cdot(-\infty) = -\infty \end{array}\right]$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{+\infty} = \infty & \text{pre } x\to 0^-, \\ \mathrm{e}^{-\infty} = 0 & \text{pre } x\to 0^+. \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{+\infty} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Neurčité výrazy – Príklady

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

- $= \lim\limits_{x\to 0}\Big[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\Big]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|ll} x\to 0 & \text{05-Pr V:} & \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\pm 1} \\ \sin x\to 0 & \text{VIP limity:} & \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right]$

$$= (\mathrm{e}^{-1})^1 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$ neexistuje.

- $= \left[\begin{array}{l|l} x\to 0 \Rightarrow \cos x\to 1 \Rightarrow 1-\cos x\to 0 & x\in O(0)-\{0\} \Rightarrow 1>\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \Rightarrow 1-\cos x\to 0^+ \Rightarrow \ln(1-\cos x)\to -\infty \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)} = \left[\begin{array}{l} x\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to -\infty\cdot(-\infty) = +\infty \\ x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln(1-\cos x)\to +\infty\cdot(-\infty) = -\infty \end{array}\right]$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{+\infty} = \infty & \text{pre } x\to 0^-, \\ \mathrm{e}^{-\infty} = 0 & \text{pre } x\to 0^+. \end{cases} \Rightarrow \bullet\ \lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}\ \nexists.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{+\infty} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$$

- $h\colon\ y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$,

---

- $=$ [Tvrdenie 02 NL III:]

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- h: $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k\in Z$.

- $=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$,]

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- $h\colon\ y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi \right\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$.

- $=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.]

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- $h\colon\ y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow$ $0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow$ $0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$

- $=$ $\Big[$ Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0$. $\Big]$

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- $h\colon\ y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow$ $0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow$ $0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $=$ $\Big[$ Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0$. $\Big]$

  - Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je ohraničená.

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- $h\colon\ y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k\in Z$.
- $x\in D(h)$. $\Rightarrow$ $0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow$ $0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $=$ $\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a)-\{a\},\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0.\right]$

- Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je ohraničená.
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = 0.$

- $h\colon\ y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle,\ k \in Z$.
- $x \in D(h). \Rightarrow 0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1. \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0.$] $= 0.$

- Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je ohraničená.
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- h: $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow$ $0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow$ $0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \to 0^-$.

- $x \to 0^+$.

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- h: $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow$ $0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow$ $0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ $L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$.

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ $L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- $h\colon y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k\in Z$.
- $x\in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$.

  $\Rightarrow x < 0$.

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

  $\Rightarrow x > 0$.

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- h: $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$.

  $\Rightarrow x < 0$. $\Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x$.

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

  $\Rightarrow x > 0$. $\Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x$.

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- h: $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$.

  $\Rightarrow x < 0$. $\Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x$. $\Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$.

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

  $\Rightarrow x > 0$. $\Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x$. $\Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

- h: $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$.

  $\Rightarrow x < 0$. $\Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x$. $\Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$. $\Rightarrow$ • $L^- = 0$.

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

  $\Rightarrow x > 0$. $\Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x$. $\Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. $\Rightarrow$ • $L^+ = 0$.

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = 0.$

- $h\colon y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi \rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1.$ $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x \to 0^-.\ \Rightarrow L^- = \lim\limits_{x \to 0^-} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x). \\ \quad \Rightarrow x < 0.\ \Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x.\ \Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0.\ \Rightarrow \bullet\ L^- = 0. \\ \bullet\ x \to 0^+.\ \Rightarrow L^+ = \lim\limits_{x \to 0^+} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x). \\ \quad \Rightarrow x > 0.\ \Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x.\ \Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0.\ \Rightarrow \bullet\ L^+ = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ L = 0.$$

Neurčité výrazy – Príklad

$L = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = 0.$

- h: $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos\frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$, $k \in Z$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1.$ $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x).$

  $\Rightarrow x < 0.$ $\Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x.$ $\Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0.$ $\Rightarrow$ • $L^- = 0.$

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x).$

  $\Rightarrow x > 0.$ $\Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x.$ $\Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0.$ $\Rightarrow$ • $L^+ = 0.$

$\Rightarrow$ • $L = 0.$

- $=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0.$] $= 0.$

- Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je ohraničená.
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

- $x \to 0^-$.

- $x \to 0^+$.

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to -\infty & z<0 \end{array}\right]$

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to \infty & z>0 \end{array}\right]$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to -\infty & z<0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to -\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z}$

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to \infty & z>0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to \infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z}$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$$

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c}\text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to-\infty & z<0\end{array}\right] = \lim_{z\to-\infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z < 0. \Rightarrow z-1 \leq \lfloor z\rfloor \leq z < 0.$

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c}\text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to\infty & z>0\end{array}\right] = \lim_{z\to\infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z > 1. \Rightarrow 0 < z-1 \leq \lfloor z\rfloor \leq z.$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to -\infty & z<0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to -\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z<0$. $\Rightarrow$ $z-1 \le \lfloor z\rfloor \le z < 0$. $\Rightarrow$ $1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \ge \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \ge \frac{z}{z} = 1$.

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to \infty & z>0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to \infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z>1$. $\Rightarrow$ $0 < z-1 \le \lfloor z\rfloor \le z$. $\Rightarrow$ $1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \le \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \le \frac{z}{z} = 1$.

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

- $x\to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to-\infty & z<0\end{array}\right] = \lim\limits_{z\to-\infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z<0.$ $\Rightarrow$ $z-1\leq\lfloor z\rfloor\leq z<0.$ $\Rightarrow$ $1-\frac{1}{z}=\frac{z-1}{z}\geq\frac{\lfloor z\rfloor}{z}\geq\frac{z}{z}=1.$

    $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{z\to-\infty}(1-\frac{1}{z})\geq\lim\limits_{z\to-\infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z}\geq 1.$

- $x\to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to\infty & z>0\end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z>1.$ $\Rightarrow$ $0<z-1\leq\lfloor z\rfloor\leq z.$ $\Rightarrow$ $1-\frac{1}{z}=\frac{z-1}{z}\leq\frac{\lfloor z\rfloor}{z}\leq\frac{z}{z}=1.$

    $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{z\to\infty}(1-\frac{1}{z})\leq\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z}\leq 1.$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

- $x\to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to -\infty & z<0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to-\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z<0.$ $\Rightarrow$ $z-1\leq \lfloor z\rfloor \leq z<0.$ $\Rightarrow$ $1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$

  $\Rightarrow$ • $1 = 1-0 = \lim\limits_{z\to-\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right) \geq \lim\limits_{z\to-\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \geq 1.$

- $x\to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to \infty & z>0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z}$
  - $z>1.$ $\Rightarrow$ $0<z-1\leq \lfloor z\rfloor \leq z.$ $\Rightarrow$ $1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$

  $\Rightarrow$ • $1 = 1-0 = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right) \leq \lim\limits_{z\to\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \leq 1.$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to -\infty & z<0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to -\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} = 1.$
  - $z<0. \Rightarrow z-1 \leq \lfloor z\rfloor \leq z < 0. \Rightarrow 1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$

    $\Rightarrow$ • $1 = 1-0 = \lim\limits_{z\to -\infty} (1-\frac{1}{z}) \geq \lim\limits_{z\to -\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \geq 1.$

- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to \infty & z>0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to \infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} = 1.$
  - $z>1. \Rightarrow 0 < z-1 \leq \lfloor z\rfloor \leq z. \Rightarrow 1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$

    $\Rightarrow$ • $1 = 1-0 = \lim\limits_{z\to \infty} (1-\frac{1}{z}) \leq \lim\limits_{z\to \infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \leq 1.$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

- $x\to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to -\infty & z<0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to -\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} = 1.$
  - $z<0. \Rightarrow z-1\leq \lfloor z\rfloor \leq z<0. \Rightarrow 1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$

    $\Rightarrow$ • $1 = 1-0 = \lim\limits_{z\to -\infty} (1-\frac{1}{z}) \geq \lim\limits_{z\to -\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \geq 1.$
- $x\to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to \infty & z>0 \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to \infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} = 1.$
  - $z>1. \Rightarrow 0<z-1\leq \lfloor z\rfloor \leq z. \Rightarrow 1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$

    $\Rightarrow$ • $1 = 1-0 = \lim\limits_{z\to \infty} (1-\frac{1}{z}) \leq \lim\limits_{z\to \infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \leq 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor.$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1.$$

- $x \to 0^-$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0^- & x<0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to -\infty & z<0 \end{array}\right] = \lim_{z\to -\infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} = 1.$
  - $z<0.$ $\Rightarrow z-1 \le \lfloor z\rfloor \le z < 0.$ $\Rightarrow 1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \ge \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \ge \frac{z}{z} = 1.$

    $\Rightarrow$ • $\displaystyle 1 = 1-0 = \lim_{z\to -\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right) \ge \lim_{z\to -\infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z} \ge 1.$
- $x \to 0^+$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x\to 0^+ & x>0 \\ z=\frac{1}{x} & z\to \infty & z>0 \end{array}\right] = \lim_{z\to \infty} \frac{\lfloor z\rfloor}{z} = 1.$
  - $z>1.$ $\Rightarrow 0 < z-1 \le \lfloor z\rfloor \le z.$ $\Rightarrow 1-\frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \le \frac{\lfloor z\rfloor}{z} \le \frac{z}{z} = 1.$

    $\Rightarrow$ • $\displaystyle 1 = 1-0 = \lim_{z\to \infty}\left(1-\frac{1}{z}\right) \le \lim_{z\to \infty}\frac{\lfloor z\rfloor}{z} \le 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor.$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1.$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=\left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ [Pre všetky $x, y \in R$ platí $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$]

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ $\left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

Neurčité výrazy – Príklad

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$

- $=$ [Pre všetky $x,y\in R$ platí $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$]

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$=$ [Tvrdenie 02 NL III:]

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ [Pre všetky $x,y\in R$ platí $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$]

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$,]

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ [Pre všetky $x,y\in R$ platí $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$]

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim_{x\to a} g(x)=0.$]

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ $\left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a)-\{a\},\ \lim_{x\to a} g(x)=0. \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0.\right]$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ $\left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a)-\{a\},\ \lim_{x\to a} g(x)=0. \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0.\right]$$

- Funkcia $f(x) = \cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\le f(x)\le 1$.

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ [Pre všetky $x,y\in R$ platí $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$]

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim_{x\to a}g(x)=0.\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0.$]

- Funkcia $f(x)=\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\le f(x)\le 1.$

- $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ $\left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a)-\{a\},\ \lim_{x\to a} g(x)=0.\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0.\right]$$

- Funkcia $f(x)=\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\leq f(x)\leq 1.$

- $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ [Pre všetky $x,y\in R$ platí $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$]

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim_{x\to a}g(x)=0.\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0.$]

- Funkcia $f(x)=\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\leq f(x)\leq 1.$

- $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(x+1)-(x-1)}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=\left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a)-\{a\},\ \lim_{x\to a}g(x)=0.\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0.\right]$$

- Funkcia $f(x)=\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\le f(x)\le 1$.

- $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(x+1)-(x-1)}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=\frac{2}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $= \left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a)-\{a\},\ \lim_{x\to a} g(x)=0.\ \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0.\right]$$

- Funkcia $f(x)=\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\leq f(x)\leq 1$.

- $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(x+1)-(x-1)}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \frac{2}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2} = \lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \sin\frac{1}{\infty} = \sin 0 = 0.$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)$$

- $=$ [Pre všetky $x,y\in R$ platí $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$]

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$=$ [Tvrdenie 02 NL III: f je ohraničená v okolí $O(a)-\{a\}$, $\lim_{x\to a} g(x)=0.\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0.$] $=2\cdot 0$

- Funkcia $f(x)=\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\leq f(x)\leq 1.$

- $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(x+1)-(x-1)}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=\frac{2}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\sin\frac{1}{\infty}=\sin 0=0.$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}\right)=0$$

- $= \left[\text{Pre všetky } x,y\in R \text{ platí } \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a)-\{a\},\ \lim_{x\to a}g(x)=0.\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0.\right] = 2\cdot 0 = 0.$$

- Funkcia $f(x)=\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x\in R$ platí $-1\leq f(x)\leq 1$.

- $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(x+1)-(x-1)}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \frac{2}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}g(x) = \lim_{x\to\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2} = \lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \sin\frac{1}{\infty} = \sin 0 = 0.$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n \in N$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n \in N$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}}$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n \in N$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n \in N$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right]$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\big((nx)^n+1\big)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad \text{pre } n\in N$$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)x\big(1+\frac{1}{x^2}\big)x^2\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)x^n}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n \in N$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\big((nx)^n+1\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n\in N$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)x\big(1+\frac{1}{x^2}\big)x^2\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)x^n}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\big(1+\frac{1}{\infty^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{\infty^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{\infty^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{pre } n\in N$$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\big((nx)^n+1\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n\in N$

- $$=\lim_{x\to\infty}\frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)x\big(1+\frac{1}{x^2}\big)x^2\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)x^n}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\big(1+\frac{1}{\infty^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{\infty^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{\infty^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{\infty}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{\infty}\big)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\big((nx)^n+1\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$ pre $n \in N$

- $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}\quad \text{pre } n\in N$$

- $$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n\in N$$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $n = 2.$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}\ \text{pre}\ n\in N$$

- $$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $n=2.\ \Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$ pre $n\in N$

- $$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $n=2.\ \Rightarrow$ • $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$ pre $n \in N$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $n = 2. \Rightarrow$
- $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\big((nx)^n+1\big)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n\in N$$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)x\big(1+\frac{1}{x^2}\big)x^2\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)x^n}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\big(1+\frac{1}{\infty^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{\infty^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{\infty^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{\infty}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{\infty}\big)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $n=2. \Rightarrow$ • $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdot x^3}{\big(4+\frac{1}{x^2}\big)^{\frac{3}{2}}\cdot(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)}{\big(4+\frac{1}{x^2}\big)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \left[x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0,\ \frac{1}{x^2}\to 0\right]$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\big((nx)^n+1\big)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n\in N$$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{Aritmetický rad}\\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{matrix}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $n=2. \Rightarrow$ • $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \left[x\to\infty \Rightarrow \tfrac{1}{x}\to 0,\ \tfrac{1}{x^2}\to 0\right] = \frac{(1+0)(1+0)}{(2^2+0)^{\frac{3}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\big((nx)^n+1\big)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{pre } n\in N$$

- $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)x\big(1+\frac{1}{x^2}\big)x^2\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)x^n}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.\end{array}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{x^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{x^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\big(1+\frac{1}{\infty^2}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{\infty^n}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{\infty^n}\big)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\big(1+\frac{1}{\infty}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{\infty}\big)}{\big(n^n+\frac{1}{\infty}\big)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $n=2.$ $\Rightarrow$ • $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\cdot x^3}{\big(4+\frac{1}{x^2}\big)^{\frac{3}{2}}\cdot(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x^2}\big)}{\big(4+\frac{1}{x^2}\big)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \left[x\to\infty \Rightarrow \tfrac{1}{x}\to 0,\ \tfrac{1}{x^2}\to 0\right] = \frac{(1+0)(1+0)}{(2^2+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^3} = 8.$$

Koniec 6. časti

Ďakujem za pozornosť.