# Matematická analýza 1

## 2023/2024

## 8. Derivácia funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou získat e nápomoc.
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

beerb@frcatel.fri.uniza.sk 

# Obsah

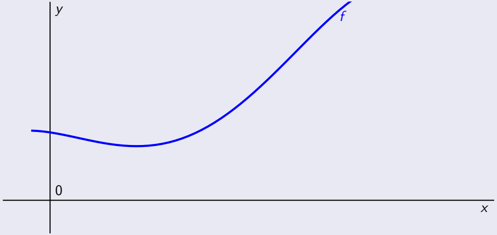
# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

**Smernica dotyčnice** ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

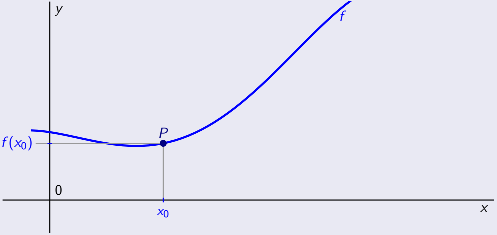
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.



# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P=[x_0; f(x_0)]$.

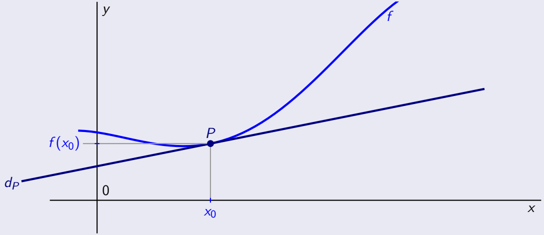
- Funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P=[x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.



# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

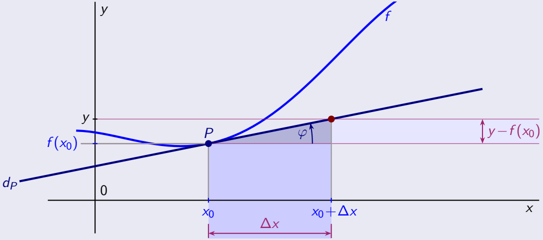
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar



# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P=[x_0; f(x_0)]$.

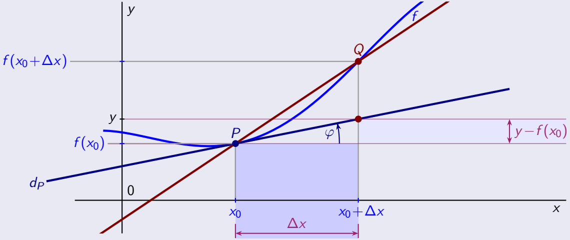
- Funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P=[x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar $d_P$: $y-f(x_0)=\operatorname{tg}\varphi(x_0+\Delta x-x_0)=\operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$.
- Smernica $d_P$ má tvar: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$.



# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P=[x_0; f(x_0)]$.

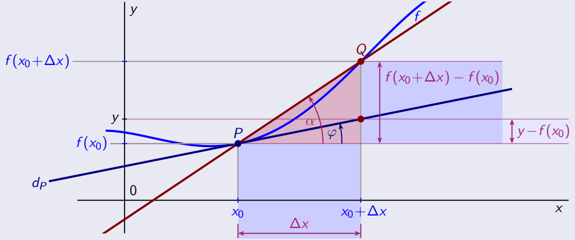
- Funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P=[x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar $d_P$: $y-f(x_0)=\operatorname{tg}\varphi(x_0+\Delta x-x_0)=\operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$.
- Priamka $PQ$, pričom bod $Q=[x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafe funkcie $f$.
- Smernica $d_P$ má tvar: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y-f(x_0)}{\Delta x}$.



# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

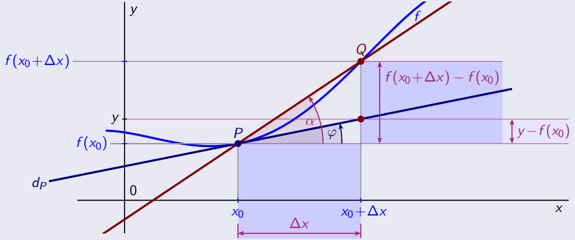
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar $d_P\colon\ y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi(x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$.
- Priamka $PQ$, pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie $f$.
- Smernica $d_P$ má tvar: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica $PQ$ má tvar $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar $d_P\colon y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi(x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$.
- Priamka $PQ$, pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie $f$.
- Smernica $d_P$ má tvar: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica $PQ$ má tvar $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

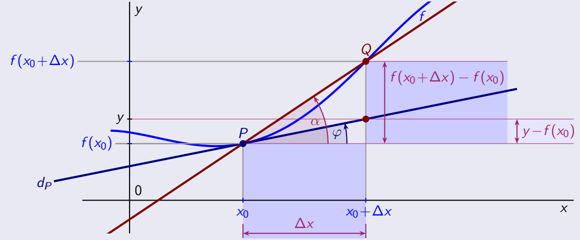



- $Q \to P. \Rightarrow PQ \to d_P$, $\Delta x \to 0$, $\alpha \to \varphi$.

# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P=[x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P=[x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar $d_P\colon\ y-f(x_0)=\operatorname{tg}\varphi(x_0+\Delta x-x_0)=\operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$.
- Priamka $PQ$, pričom bod $Q=[x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafe funkcie $f$.
- Smernica $d_P$ má tvar: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica $PQ$ má tvar $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

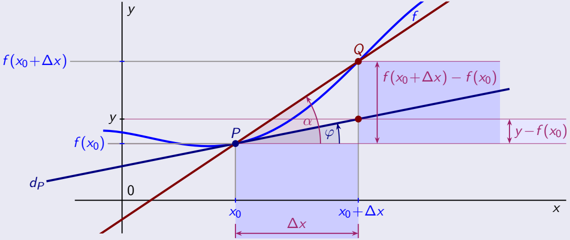



- $Q\to P. \Rightarrow PQ\to d_P,\ \Delta x\to 0,\ \alpha\to\varphi. \Rightarrow f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$.

# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P=[x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P=[x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar $d_P\colon\, y-f(x_0)=\operatorname{tg}\varphi(x_0+\Delta x-x_0)=\operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$.
- Priamka $PQ$, pričom bod $Q=[x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafe funkcie $f$.
- Smernica $d_P$ má tvar: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica $PQ$ má tvar $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

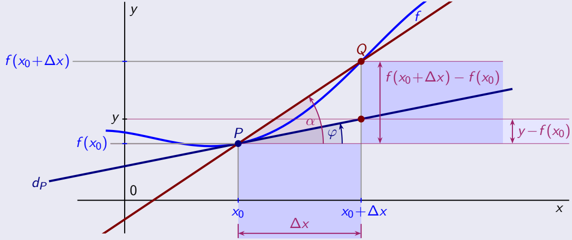



- $Q\to P. \Rightarrow PQ\to d_P,\ \Delta x\to 0,\ \alpha\to\varphi. \Rightarrow f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$.
- $\alpha\to\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\to\operatorname{tg}\varphi$,

# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P=[x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y=f(x),\ x\in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P=[x_0; f(x_0)]$ leží na grafe $f$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $P$ má tvar $d_P\colon\ y-f(x_0)=\operatorname{tg}\varphi(x_0+\Delta x-x_0)=\operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$.
- Priamka $PQ$, pričom bod $Q=[x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafe funkcie $f$.
- Smernica $d_P$ má tvar: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica $PQ$ má tvar $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.



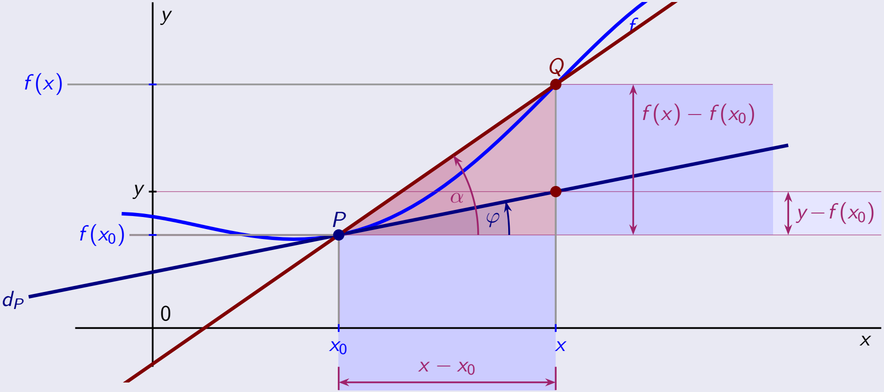

- $Q\to P. \Rightarrow PQ\to d_P,\ \Delta x\to 0,\ \alpha\to\varphi. \Rightarrow f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$.
- $\alpha\to\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\to\operatorname{tg}\varphi$, t. j. $\operatorname{tg}\varphi=\lim\limits_{\alpha\to\varphi}\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

[Smernica dotyčnice ku grafu funkcie $f$ v bode $P$.]

# Základné pojmy – 1. motivačný príklad

## Smernica dotyčnice ku grafu $f$ v bode $x_0$, t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- $Q \to P. \Rightarrow PQ \to d_P$, $x \to x_0$, $\alpha \to \varphi$. $\Rightarrow f(x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$, t. j. $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



# Základné pojmy – 2. motivačný príklad

**Okamžitá rýchlosť** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ a dráhe $s(t)$.

# Základné pojmy – 2. motivačný príklad

## Okamžitá rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu v čase $t$ a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.

# Základné pojmy – 2. motivačný príklad

## Okamžitá rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu v čase $t$ a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase $t$ popisuje funkcia $y = s(t)$.

# Základné pojmy – 2. motivačný príklad

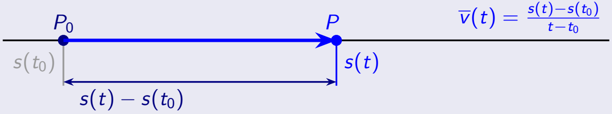
## Okamžitá rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu v čase $t$ a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Bod sa v čase $t_0$ nachádza na mieste $P_0$.
- Pohyb v čase $t$ popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase $t$ nachádza na mieste $P$.

# Základné pojmy – 2. motivačný príklad

## Okamžitá rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu v čase $t$ a dráhe $s(t)$.

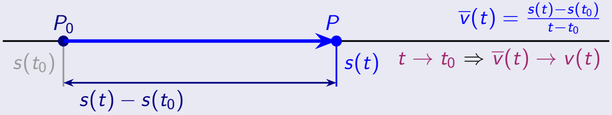
- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Bod sa v čase $t_0$ nachádza na mieste $P_0$.
- Pohyb v čase $t$ popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase $t$ nachádza na mieste $P$.
- V časovom intervale $\langle t_0; t\rangle$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$ priemernou rýchlosťou $\overline{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.



# Základné pojmy – 2. motivačný príklad

## Okamžitá rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu v čase $t$ a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase $t$ popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase $t_0$ nachádza na mieste $P_0$.
- Bod sa v čase $t$ nachádza na mieste $P$.
- V časovom intervale $\langle t_0; t\rangle$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$ priemernou rýchlosťou $\overline{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

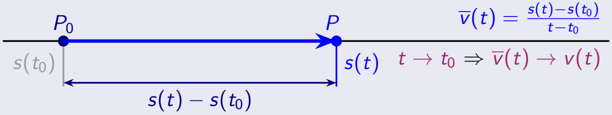



- $t \to t_0$. $\Rightarrow$ $\overline{v}(t) \to v(t_0)$, t. j. okamžitá rýchlosť v čase $t_0$.

# Základné pojmy – 2. motivačný príklad

## Okamžitá rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu v čase $t$ a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase $t$ popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase $t_0$ nachádza na mieste $P_0$.
- Bod sa v čase $t$ nachádza na mieste $P$.
- V časovom intervale $\langle t_0; t\rangle$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$ priemernou rýchlosťou $\overline{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.




- $t \to t_0. \Rightarrow \overline{v}(t) \to v(t_0)$, t. j. okamžitá rýchlosť v čase $t_0$.

---

- Priemerná rýchlosť v časovom intervale $\langle t_0; t\rangle$: $\overline{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.
- Okamžitá rýchlosť v čase $t_0$: $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \overline{v}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

# Základné pojmy – Definícia

Funkcia $f$ má deriváciu v bode $x_0 \in D(f)$,

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu v bode $x_0 \in D(f)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

# Základné pojmy – Definícia

Funkcia $f$ má **deriváciu** v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

# Základné pojmy – Definícia

Funkcia $f$ má **deriváciu** v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \left\{ \right.$$

# Základné pojmy – Definícia

Funkcia $f$ má **deriváciu** v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \\ & \end{cases}$$

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \end{cases}$$

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \qquad \text{[Konečné číslo.]} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \qquad \text{[Hodnota } \pm\infty\text{.]} \end{cases}$$

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu (obojstrannú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \end{cases}$$

[Konečné číslo.]

[Hodnota $\pm\infty$.]

**Jednostranné derivácie funkcie $f$ v bode $x_0 \in D(f)$:**

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu (obojstrannú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \end{cases}$$

[Konečné číslo.]

[Hodnota $\pm\infty$.]

**Jednostranné derivácie funkcie $f$ v bode $x_0 \in D(f)$:**

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia zľava.

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu (obojstrannú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \quad \text{[Konečné číslo.]} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \quad \text{[Hodnota } \pm\infty\text{.]} \end{cases}$$

**Jednostranné derivácie funkcie $f$ v bode $x_0 \in D(f)$:**

- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia sprava.

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu (obojstrannú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{l|l} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \qquad \text{[Konečné číslo.]} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \qquad \text{[Hodnota } \pm\infty.\text{]} \end{cases}$$

**Jednostranné derivácie funkcie $f$ v bode $x_0 \in D(f)$:**

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia zľava.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia sprava.

# Základné pojmy – Definícia

Funkcia $f$ má **deriváciu** (obojstrannú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \quad \text{[Konečné číslo.]} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \quad \text{[Hodnota } \pm\infty\text{.]} \end{cases}$$

**Jednostranné derivácie** funkcie $f$ v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia zľava.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia sprava.

$f'(x_0)$ existuje.

# Základné pojmy – Definícia

**Funkcia $f$ má deriváciu (obojstrannú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:**

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \end{cases}$$

[Konečné číslo.] [Hodnota $\pm\infty$.]

**Jednostranné derivácie funkcie $f$ v bode $x_0 \in D(f)$:**

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia zľava.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia sprava.

**$f'(x_0)$ existuje.**

$\Leftrightarrow$ • Existujú obe $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$

# Základné pojmy – Definícia

Funkcia $f$ má **deriváciu (obojstrannú)** v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- $f$ je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[ \begin{array}{c|c} h = x - x_0 & h \to 0 \\ x = x_0 + h & x \to x_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \end{cases}$$

[Konečné číslo.]

[Hodnota $\pm\infty$.]

**Jednostranné derivácie** funkcie $f$ v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia zľava.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva derivácia sprava.

$f'(x_0)$ existuje.

$\Leftrightarrow$ • Existujú obe $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a platí rovnosť $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná).

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Longrightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Longrightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$,**

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

- Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

- Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

- Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné,

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

- Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

- Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

- Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie $f$ na množine $A$ a označuje sa $f'\colon y = f'(x),\ x \in A$.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Longrightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Longrightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie $f$ na množine $A$ a označuje sa $f'\colon y = f'(x),\ x \in A$.

**Funkcia $f$ má (konečnú) deriváciu $f'$ na množine $A \subset D(f)$.**

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie $f$ na množine $A$ a označuje sa $f'\colon y = f'(x),\ x \in A$.

**Funkcia $f$ má (konečnú) deriváciu $f'$ na množine $A \subset D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá na množine $A$.

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie $f$ na množine $A$ a označuje sa $f'\colon y = f'(x),\ x \in A$.

**Funkcia $f$ má (konečnú) deriváciu $f'$ na množine $A \subset D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá na množine $A$.

[V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov myslíme jednostranné derivácie a jednostranné spojitosti.]

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie $f$ na množine $A$ a označuje sa $f'\colon y = f'(x),\ x \in A$.

**Funkcia $f$ má (konečnú) deriváciu $f'$ na množine $A \subset D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá na množine $A$.

[V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov myslíme jednostranné derivácie a jednostranné spojitosti.]

Označenie podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

# Základné pojmy – Základné vlastnosti

**Funkcia $f$ má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$.

---

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). $\Rightarrow$ • Funkcia $f$ môže byť spojitá v bode $x_0$.

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť $f$ v bode $x_0$.]

**Funkcia $f$ má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:**

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie $f$ na množine $A$ a označuje sa $f'\colon y = f'(x),\ x \in A$.

**Funkcia $f$ má (konečnú) deriváciu $f'$ na množine $A \subset D(f)$.**

$\Rightarrow$ • Funkcia $f$ je spojitá na množine $A$.

[V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov myslíme jednostranné derivácie a jednostranné spojitosti.]

Označenie podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

• $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x_0)\big] = \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$, resp. • $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A$.

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]'$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]'$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c-c}{h}$

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]'$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0$

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c = \text{košt.}$, $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

$[x^n]'$ pre $n \in N$, $x \in R$

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c = \text{košt.}$, $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

$[x^n]'$ pre $n \in N$, $x \in R$

$n = 1. \Rightarrow$ • $[x]'$ pre $x \in R$.

$n = 2. \Rightarrow$ • $[x^2]'$

pre $x \in R$.

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

$[x^n]'$ pre $n \in N$, $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$n = 1. \Rightarrow$ • $[x]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h}$ pre $x \in R.$

$n = 2. \Rightarrow$ • $[x^2]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

pre $x \in R.$

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

$[x^n]'$ pre $n \in N$, $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$

$n = 1. \Rightarrow$ • $[x]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h}$ pre $x \in R$.

$n = 2. \Rightarrow$ • $[x^2]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot(x+h+x)}{h}$

pre $x \in R$.

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

$[x^n]'$ pre $n \in N$, $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$

  $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$

$n = 1. \Rightarrow$ • $[x]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h}$ pre $x \in R$.

$n = 2. \Rightarrow$ • $[x^2]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot(x+h+x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot(2x+h)}{h}$ pre $x \in R$.

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

$[x^n]' = nx^{n-1}$ pre $n \in N$, $x \in R$

- $$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$
  $$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$
  $$= (x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2}x + \cdots + (x+0)x^{n-2} + x^{n-1}$$

$n = 1. \Rightarrow$ • $[x]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$ pre $x \in R$.

$n = 2. \Rightarrow$ • $[x^2]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot(x+h+x)}{h}$
$$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot(2x+h)}{h} = 2x + 0$$ pre $x \in R$.

# Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c =$ košt., $c \in R$ [Derivácia konštantnej funkcie.]

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

$[x^n]' = nx^{n-1}$ pre $n \in N$, $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$= (x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2}x + \cdots + (x+0)x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

---

$n = 1. \Rightarrow$ • $[x]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 = 1 \cdot x^0$ pre $x \in R$.

---

$n = 2. \Rightarrow$ • $[x^2]' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot(x+h+x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(2x+h)}{h} = 2x + 0 = 2x = 2 \cdot x^1 \text{ pre } x \in R.$$

# Základné pojmy – Príklady

$\left[e^{x}\right]'$ pre $x \in R$

# Základné pojmy – Príklady

$\left[e^x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$

# Základné pojmy – Príklady

$[e^x]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h}$

# Základné pojmy – Príklady

## $[e^x]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$

# Základné pojmy – Príklady

$[\mathrm{e}^x]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1$

# Základné pojmy – Príklady

## $\left[e^x\right]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

# Základné pojmy – Príklady

## $\left[e^x\right]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

## $\left[\sin x\right]'$ pre $x \in R$

## $\left[\cos x\right]'$ pre $x \in R$

# Základné pojmy – Príklady

$[e^x]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

$\left[\sin x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$\left[\cos x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

# Základné pojmy – Príklady

## $[e^x]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

## $\left[\sin x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$

## $\left[\cos x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$

# Základné pojmy – Príklady

$\left[e^x\right]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

$\left[\sin x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$\left[\cos x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \sin\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

# Základné pojmy – Príklady

## $[e^x]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

## $[\sin x]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

  $= \left[ \text{Subst. } t = \frac{h}{2} \,\middle|\, \begin{array}{l} h \to 0 \\ t \to 0 \end{array} \right]$

## $[\cos x]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \sin\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

  $= \left[ \text{Subst. } t = \frac{h}{2} \,\middle|\, \begin{array}{l} h \to 0 \\ t \to 0 \end{array} \right]$

# Základné pojmy – Príklady

## $[e^x]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

## $[\sin x]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

  $= \left[ \text{Subst. } t=\frac{h}{2} \,\middle|\, \begin{matrix} h\to 0 \\ t\to 0 \end{matrix} \right] = \cos x \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$

## $[\cos x]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \sin\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

  $= \left[ \text{Subst. } t=\frac{h}{2} \,\middle|\, \begin{matrix} h\to 0 \\ t\to 0 \end{matrix} \right] = -\sin x \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$

# Základné pojmy – Príklady

## $[e^x]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

## $\left[\sin x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$$= \left[\text{Subst. } t = \tfrac{h}{2} \,\middle|\, \begin{array}{l} h \to 0 \\ t \to 0 \end{array}\right] = \cos x \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \cos x \cdot 1$$

## $\left[\cos x\right]'$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \sin\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$$= \left[\text{Subst. } t = \tfrac{h}{2} \,\middle|\, \begin{array}{l} h \to 0 \\ t \to 0 \end{array}\right] = -\sin x \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = -\sin x \cdot 1$$

# Základné pojmy – Príklady

## $\left[e^x\right]' = e^x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

## $\left[\sin x\right]' = \cos x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$$= \left[\text{Subst. } t = \tfrac{h}{2} \;\middle|\; \begin{matrix} h \to 0 \\ t \to 0 \end{matrix}\right] = \cos x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

## $\left[\cos x\right]' = -\sin x$ pre $x \in R$

- $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \sin\frac{2x+h}{2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$$= \left[\text{Subst. } t = \tfrac{h}{2} \;\middle|\; \begin{matrix} h \to 0 \\ t \to 0 \end{matrix}\right] = -\sin x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{sin t}{t} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[c]' = 0$ | $x \in R,\ c \in R$ | $[x]' = 1$ | $x \in R$ |
| $[x^n]' = nx^{n-1}$ | $x \in R,\ n \in N$ | $[x^a]' = ax^{a-1}$ | $x > 0,\ a \in R$ |

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[e^x]' = e^x$ | $x \in R$ | $[a^x]' = a^x \ln a$ | $x \in R,\ a > 0$ |
| $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ | $x > 0$ | $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$ | $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ |
| $[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x}$ | $x \neq 0$ | $[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a}$ | $x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ |

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[\sin x]' = \cos x$<br>$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \in R$<br>$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z$ | $[\cos x]' = -\sin x$<br>$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $x \in R$<br>$x \neq k\pi,\ k \in Z$ |

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$<br>$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$ | $x \in (-1;1)$<br>$x \in R$ | $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$<br>$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $x \in (-1;1)$<br>$x \in R$ |

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[\sinh x]' = \cosh x$ | $x \in R$ | $[\cosh x]' = \sinh x$ | $x \in R$ |
| $[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ | $x \in R$ | $[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $x \neq 0$ |

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $x \in R$ | $[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x > 1$ |
| $[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ | $x \in (-1; 1)$ | $[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ | $x \in R - \langle -1; 1 \rangle$ |

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

## Derivácie základných elementárnych funkcií.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[c]' = 0$ | $x \in R,\ c \in R$ | $[x]' = 1$ | $x \in R$ |
| $[x^n]' = nx^{n-1}$ | $x \in R,\ n \in N$ | $[x^a]' = ax^{a-1}$ | $x > 0,\ a \in R$ |
| $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x$ | $x \in R$ | $[a^x]' = a^x \ln a$ | $x \in R,\ a > 0$ |
| $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ | $x > 0$ | $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$ | $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ |
| $[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x}$ | $x \neq 0$ | $[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a}$ | $x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ |
| $[\sin x]' = \cos x$ | $x \in R$ | $[\cos x]' = -\sin x$ | $x \in R$ |
| $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z$ | $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $x \neq k\pi,\ k \in Z$ |
| $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \in (-1; 1)$ | $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \in (-1; 1)$ |
| $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$ | $x \in R$ | $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $x \in R$ |
| $[\sinh x]' = \cosh x$ | $x \in R$ | $[\cosh x]' = \sinh x$ | $x \in R$ |
| $[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ | $x \in R$ | $[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $x \neq 0$ |
| $[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $x \in R$ | $[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x > 1$ |
| $[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ | $x \in (-1; 1)$ | $[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ | $x \in R - \langle -1; 1 \rangle$ |

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.

A platí: • $(cf)'(x) = cf'(x)$, • $(cf)' = cf'$,

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$
- Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.

---

A platí:
- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$

- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$

- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

---

A platí:

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

**Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.**

$\Rightarrow$
- Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.
- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

---

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.**

- $(fgh)'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$

- Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.
- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$
- Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.
- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:
- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c\in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)$.

$\Rightarrow$

- Existujú $(cf)'$, $(f\pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.
- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A-\{x\in A,\ g(x)\neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f\pm g)' = f'\pm g'$,
- $(fg)' = f'g+fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú deriváciu $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)\cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h+(fg)h' = (f'g+fg')h+fgh' = f'gh+fg'h+fgh'$.

Funkcia $f$ má deriváciu $f'$ na množine $A-\{x\in A,\ f(x)\neq 0\}$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcia $f$ má deriváciu $f'$ na množine $A - \{x \in A,\ f(x) \neq 0\}$.

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c\in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)$.

$\Rightarrow$
- Existujú $(cf)'$, $(f\pm g)'$, $(fg)'$ na $A$.
- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A-\{x\in A,\ g(x)\neq 0\}$.

A platí:
- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
- $(cf)' = cf'$,
- $(f\pm g)' = f'\pm g'$,
- $(fg)' = f'g+fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)\cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h+(fg)h' = (f'g+fg')h+fgh' = f'gh+fg'h+fgh'$.

Funkcia $f$ má deriváciu $f'$ na množine $A-\{x\in A,\ f(x)\neq 0\}$.

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1'\cdot f(x)-1\cdot f'(x)}{f^2(x)}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c\in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f\pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A-\{x\in A,\ g(x)\neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$, • $(cf)' = cf'$,
- $(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)$, • $(f\pm g)' = f'\pm g'$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, • $(fg)' = f'g+fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, • $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)\cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h+(fg)h' = (f'g+fg')h+fgh' = f'gh+fg'h+fgh'$.

Funkcia $f$ má deriváciu $f'$ na množine $A-\{x\in A,\ f(x)\neq 0\}$.

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1'\cdot f(x)-1\cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0-f'(x)}{f^2(x)}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie $f$, $g$ majú deriválcie $f'$, $g'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A,\ g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie $f$, $g$, $h$ majú deriválcie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcia $f$ má deriváciu $f'$ na množine $A - \{x \in A,\ f(x) \neq 0\}$.

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

**Konštanta $c\in R$, funkcie $f$, $g$ majú derivácie $f'$, $g'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)$.**

$\Rightarrow$ • Existujú $(cf)'$, $(f\pm g)'$, $(fg)'$ na $A$. • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A-\{x\in A,\ g(x)\neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

- $(cf)' = cf'$,
- $(f\pm g)' = f'\pm g'$,
- $(fg)' = f'g+fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

**Funkcie $f$, $g$, $h$ majú derivácie $f'$, $g'$, $h'$ na množine $A\subset D(f)\cap D(g)\cap D(h)$.**

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h+(fg)h' = (f'g+fg')h+fgh' = f'gh+fg'h+fgh'$.

**Funkcia $f$ má deriváciu $f'$ na množine $A-\{x\in A,\ f(x)\neq 0\}$.**

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1'\cdot f(x)-1\cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0-f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\dfrac{\sin x}{\cos x}\right]'$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\dfrac{\cos x}{\sin x}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\dfrac{\sin x}{\cos x}\right]' = \dfrac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\dfrac{\cos x}{\sin x}\right]' = \dfrac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\big[\operatorname{tg} x\big]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\big[\operatorname{cotg} x\big]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\big[x^{-n}\big]'$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$

$\left[\frac{1+x}{1-x}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq 1$

$\left[\frac{1-x}{1+x}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq -1$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$

$\left[\frac{1+x}{1-x}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq 1$

- $= \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2}$

$\left[\frac{1-x}{1+x}\right]'$ pre $x \in R,\ x \neq -1$

- $= \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$\left[\operatorname{tg} x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\left[\operatorname{cotg} x\right]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

- $= \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left[x^{-n}\right]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ pre $x \in R,\ x \neq 0,\ n \in N$

- $= \left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$

$\left[\frac{1+x}{1-x}\right]' = \frac{2}{(1-x)^2}$ pre $x \in R,\ x \neq 1$

- $= \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$

$\left[\frac{1-x}{1+x}\right]' = \frac{-2}{(1+x)^2}$ pre $x \in R,\ x \neq -1$

- $= \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,

v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

---

$\left[ f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[ \begin{array}{c|c} y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array} \right] = \lim_{y \to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} \right]$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

$$\left[\; f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{array}{l|l} y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array}\right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} \;\right]$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \left. \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \right|_{y_0 = f(x_0)}$.

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[ \begin{array}{l|l} y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array} \right] = \lim_{y \to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \dfrac{1}{[f^{-1}(y_0)]'}\Bigg|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{array}{l|l} y=f(x) & x\to x_0 \\ x=f^{-1}(y) & y\to y_0 \end{array}\right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\ln x\right]'$ pre $x > 0$

$\left[\ln x\right]'$ pre $x > 0$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \left.\frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'}\right|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{array}{l|l} y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array}\right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

## $[\ln x]'$ pre $x > 0$ [Pomocou inverznej funkcie.]

• $= \left[\begin{array}{l|l} y = \ln x & x > 0 \\ x = e^y & y \in R \end{array}\right]$

## $[\ln x]'$ pre $x > 0$ [Priamo z definície.]

• $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \left.\dfrac{1}{[f^{-1}(y_0)]'}\right|_{y_0 = f(x_0)}$.

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[ \begin{array}{l|l} y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array} \right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

## $\left[\ln x\right]'$ pre $x > 0$ [Pomocou inverznej funkcie.]

• $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \ln x & x > 0 \\ x = e^y & y \in R \end{array} \right] = \left.\dfrac{1}{(e^y)'}\right|_{y = \ln x}$

## $\left[\ln x\right]'$ pre $x > 0$ [Priamo z definície.]

• $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \ln \dfrac{x+h}{x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \dfrac{1}{[f^{-1}(y_0)]'}\Big|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{array}{l|l} y=f(x) & x\to x_0 \\ x=f^{-1}(y) & y\to y_0 \end{array}\right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$[\ln x]'$ pre $x > 0$ [Pomocou inverznej funkcie.]

• $$= \left[\begin{array}{l|l} y=\ln x & x>0 \\ x=e^y & y\in R \end{array}\right] = \frac{1}{(e^y)'}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x}$$

$[\ln x]'$ pre $x > 0$ [Priamo z definície.]

• $$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}}$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \dfrac{1}{[f^{-1}(y_0)]'}\Big|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{array}{c|c} y=f(x) & x\to x_0 \\ x=f^{-1}(y) & y\to y_0 \end{array}\right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

## $\big[\ln x\big]'$ pre $x > 0$ [Pomocou inverznej funkcie.]

• $= \left[\begin{array}{c|c} y=\ln x & x>0 \\ x=e^y & y\in R \end{array}\right] = \dfrac{1}{(e^y)'}\Big|_{y=\ln x} = \dfrac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}}$

## $\big[\ln x\big]'$ pre $x > 0$ [Priamo z definície.]

• $$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}}\right]$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \dfrac{1}{[f^{-1}(y_0)]'}\Big|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[ f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[ \begin{array}{l|l} y=f(x) & x\to x_0 \\ x=f^{-1}(y) & y\to y_0 \end{array} \right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

## $\left[\ln x\right]'$ pre $x > 0$ [Pomocou inverznej funkcie.]

• $$= \left[ \begin{array}{l|l} y=\ln x & x>0 \\ x=e^y & y\in R \end{array} \right] = \frac{1}{(e^y)'}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}}$$

## $\left[\ln x\right]'$ pre $x > 0$ [Priamo z definície.]

• $$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left[\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \left[\lim_{h\to 0} (1+\beta\cdot h)^{\frac{1}{h}} = e^{\beta}\right] = \ln e^{\frac{1}{x}}$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia $f$ je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie $f^{-1}$.

$\Rightarrow$

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \left.\dfrac{1}{[f^{-1}(y_0)]'}\right|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[\, f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{array}{l|l} y = f(x) & x \to x_0 \\ x = f^{-1}(y) & y \to y_0 \end{array}\right] = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \,\right]$$

$\left[\ln x\right]' = \dfrac{1}{x}$ pre $x > 0$ [Pomocou inverznej funkcie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} y = \ln x & x > 0 \\ x = \mathrm{e}^y & y \in R \end{array}\right] = \left.\frac{1}{(\mathrm{e}^y)'}\right|_{y=\ln x} = \left.\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right|_{y=\ln x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

$\left[\ln x\right]' = \dfrac{1}{x}$ pre $x > 0$ [Priamo z definície.]

- $$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \left[\lim_{h\to 0}(1+\beta\cdot h)^{\frac{1}{h}} = \mathrm{e}^{\beta}\right] = \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$[\arccos x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\arcsin x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right]$

## $[\arccos x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\arcsin x]'$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \arcsin x,\, x \in (-1;1) \\ x = \sin y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\sin y]'}$

## $[\arccos x]'$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \arccos x,\, x \in (-1;1) \\ x = \cos y,\, y \in (0; \pi) \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\cos y]'}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\arcsin x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \arcsin x,\, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\sin y]'} = \dfrac{1}{\cos y}$

## $[\arccos x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \arccos x,\, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y,\, y \in (0; \pi) \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\cos y]'} = \dfrac{1}{-\sin y}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arcsin x,\, x \in (-1;1) & y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ x = \sin y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arccos x,\, x \in (-1;1) & y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ x = \cos y,\, y \in (0; \pi) & \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arcsin x,\, x \in (-1;1) & y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ x = \sin y,\, y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

## $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arccos x,\, x \in (-1;1) & y \in (0;\pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ x = \cos y,\, y \in (0;\pi) & \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

## $[\operatorname{arctg} x]'$ pre $x \in R$

## $[\operatorname{arccotg} x]'$ pre $x \in R$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arcsin x,\, x \in (-1;1) & y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ x = \sin y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

## $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arccos x,\, x \in (-1;1) & y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ x = \cos y,\, y \in (0; \pi) & \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

## $[\operatorname{arctg} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{arctg} x,\, x \in R & \\ x = \operatorname{tg} y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \end{array} \right]$

## $[\operatorname{arccotg} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{arccotg} x,\, x \in R & \\ x = \operatorname{cotg} y,\, y \in (0; \pi) & \end{array} \right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arcsin x,\, x \in (-1;1) & y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ x = \sin y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

## $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arccos x,\, x \in (-1;1) & y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ x = \cos y,\, y \in (0; \pi) & \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

## $[\mathrm{arctg}\, x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \mathrm{arctg}\, x,\, x \in R & \\ x = \mathrm{tg}\, y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \end{array} \right] = \frac{1}{[\mathrm{tg}\, y]'}$

## $[\mathrm{arccotg}\, x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \mathrm{arccotg}\, x,\, x \in R & \\ x = \mathrm{cotg}\, y,\, y \in (0; \pi) & \end{array} \right] = \frac{1}{[\mathrm{cotg}\, y]'}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arcsin x,\, x \in (-1;1) & y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ x = \sin y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arccos x,\, x \in (-1;1) & y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ x = \cos y,\, y \in (0; \pi) & \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$[\mathrm{arctg}\, x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \mathrm{arctg}\, x,\, x \in R & \\ x = \mathrm{tg}\, y,\, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \end{array} \right] = \frac{1}{[\mathrm{tg}\, y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}$

$[\mathrm{arccotg}\, x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \mathrm{arccotg}\, x,\, x \in R & \\ x = \mathrm{cotg}\, y,\, y \in (0; \pi) & \end{array} \right] = \frac{1}{[\mathrm{cotg}\, y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arcsin x, x \in (-1;1) & y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \arccos x, x \in (-1;1) & y \in (0;\pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ x = \cos y, y \in (0;\pi) & \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(\cos\arccos x)^2} = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{x^2+1}$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{arctg} x, x \in R & y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \Rightarrow \cos^2 y > 0 \\ x = \operatorname{tg} y, y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}+1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y+1} = \frac{1}{(\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tg} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{x^2+1}.$

$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{x^2+1}$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{arccotg} x, x \in R & y \in (0;\pi) \Rightarrow \sin y > 0 \Rightarrow \sin^2 y > 0 \\ x = \operatorname{cotg} y, y \in (0;\pi) & \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}+1} = \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 y+1} = \frac{1}{(\operatorname{cotg}\operatorname{arccotg} x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{cotg} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{x^2+1}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$

- Existuje $F'(x_0) = \big[g(f(x_0))\big]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = \big[g(f(x_0))\big]'$

$$\left[\ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] \ \right]$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]'$

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \begin{bmatrix} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{bmatrix} = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right]$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0 = f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[ \begin{matrix} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{matrix} \right] = \lim_{u \to u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$

- Existuje $F'(x_0) = \big[g(f(x_0))\big]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}.$

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \begin{bmatrix} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{bmatrix} = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x \in (-1;1)$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \left[\begin{matrix} u=f(x) \\ u\to u_0 \end{matrix}\right] = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0)\cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x \in (-1; 1)$

• $= \left[ F: y = \sqrt{1-x^2} \quad x \in (-1;1) \;\middle|\; \right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F=g(f)$ je definovaná na množine $I\subset R$, bod $x_0\in I$ je vnútorný, bod $u_0=f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0)=\big[g(f(x_0))\big]'=g'(u_0)\cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$\left[F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=\left[\begin{array}{l}u=f(x)\\ u\to u_0\end{array}\right]=\lim\limits_{u\to u_0}\frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(u_0)\cdot f'(x_0)\text{ pre }u_0=f(x_0).\right]$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x\in(-1;1)$

• $=\left[\begin{array}{ll}F\colon y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{f(x)} & x\in(-1;1)\\ f\colon u=1-x^2,\ x\in(-1;1), & \end{array}\right|\qquad\Bigg]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0 = f(x_0)}$.

$\left[ F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[ \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[ \begin{array}{l} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{array} \right] = \lim\limits_{u \to u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$

$\left[\sqrt{1 - x^2}\right]'$ pre $x \in (-1; 1)$

• $= \left[ \begin{array}{l} F\colon y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)),\ x \in (-1; 1) \\ f\colon u = 1 - x^2,\ x \in (-1; 1), \quad g\colon y = \sqrt{u},\ u \in (0; 1) \end{array} \right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0 = f(x_0)}$.

$\left[ F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[ \begin{array}{c} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{array} \right] = \lim_{u \to u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$

$\left[\sqrt{1 - x^2}\right]'$ pre $x \in (-1; 1)$

• $= \left[ \begin{array}{l|l} F\colon y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)),\ x \in (-1; 1) & g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \\ f\colon u = 1 - x^2,\ x \in (-1; 1),\quad g\colon y = \sqrt{u},\ u \in (0; 1) & \end{array} \right]$

$$= g'(u) \qquad = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[ \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right] = \left[ \begin{matrix} u=f(x) \\ u \to u_0 \end{matrix} \right] = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0)\cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$[\sqrt{1-x^2}]'$ pre $x \in (-1;1)$

• $= \left[ \begin{matrix} F\colon y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)),\ x\in(-1;1) \\ f\colon u = 1-x^2,\ x\in(-1;1), \quad g\colon y=\sqrt{u},\ u\in(0;1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{matrix} \right]$

$$= g'(u)\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F=g(f)$ je definovaná na množine $I\subset R$, bod $x_0\in I$ je vnútorný, bod $u_0=f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0)=[g(f(x_0))]'=g'(u_0)\cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=\begin{bmatrix}u=f(x)\\ u\to u_0\end{bmatrix}=\lim_{u\to u_0}\frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(u_0)\cdot f'(x_0)\text{ pre } u_0=f(x_0).\right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x\in(-1;1)$

• $$=\left[\begin{array}{l|l} F\colon y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{f(x)}=g(f(x)),\ x\in(-1;1) & g'(u)=[u^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f\colon u=1-x^2,\ x\in(-1;1),\quad g\colon y=\sqrt{u},\ u\in(0;1) & f'(x)=[1-x^2]'=-2x \end{array}\right]$$

$$=g'(u)\cdot f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0 = f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \begin{bmatrix} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{bmatrix} = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

## $\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x \in (-1; 1)$

• $=\left[\begin{array}{l|l} F\colon y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)),\ x \in (-1;1) & g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f\colon u = 1-x^2,\ x \in (-1;1), \quad g\colon y = \sqrt{u},\ u \in (0;1) & f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array}\right]$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \left[\begin{matrix} u=f(x) \\ u \to u_0 \end{matrix}\right] = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0)\cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x \in (-1;1)$

• $= \left[ \begin{array}{l|l} F\colon y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)),\ x \in (-1;1) & g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f\colon u = 1-x^2,\ x\in(-1;1), \quad g\colon y=\sqrt{u},\ u \in (0;1) & f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$

$$= g'(u)\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

• $= \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,
v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \left[\begin{matrix} u=f(x) \\ u\to u_0 \end{matrix}\right] = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0)\cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x \in (-1;1)$

• $= \left[\begin{array}{l|l} F\colon y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{f(x)}=g(f(x)),\ x\in(-1;1) & g'(u)=[u^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f\colon u=1-x^2,\ x\in(-1;1),\quad g\colon y=\sqrt{u},\ u\in(0;1) & f'(x)=[1-x^2]'=-2x \end{array}\right]$

$$= g'(u)\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

• $= \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \left[\begin{array}{l} u=f(x) \\ u\to u_0 \end{array}\right] = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0)\cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x \in (-1;1)$

• $= \left[\begin{array}{l|l} F\colon y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)),\ x\in(-1;1) & g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f\colon u = 1-x^2,\ x\in(-1;1),\quad g\colon y=\sqrt{u},\ u\in(0;1) & f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array}\right]$

$$= g'(u)\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

• $= \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \left[\begin{array}{l} u=f(x) \\ u\to u_0 \end{array}\right] = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0)\cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]'$ pre $x \in (-1;1)$

• $= \left[\begin{array}{l|l} F\colon y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{f(x)}=g(f(x)),\ x\in(-1;1) & g'(u)=[u^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f\colon u=1-x^2,\ x\in(-1;1),\quad g\colon y=\sqrt{u},\ u\in(0;1) & f'(x)=[1-x^2]'=-2x \end{array}\right]$

$$= g'(u)\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

• $= \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$$= \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode $u_0$ existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode $x_0$ existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$\Rightarrow$

- Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(u_0) \cdot f'(x_0)\Big|_{u_0=f(x_0)}$.

$$\left[ F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[ \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right] = \left[ \begin{matrix} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{matrix} \right] = \lim_{u\to u_0} \frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$\left[\sqrt{1-x^2}\right]' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)),\ x\in(-1;1) & g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f: u = 1-x^2,\ x\in(-1;1), \quad g: y = \sqrt{u},\ u\in(0;1) & f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

- $= \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$$= \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin \sin x]'$ pre $x \in R$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin \sin x]'$ pre $x \in R$

- $= [\sin (\sin x)]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin \sin x]'$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x$.

$[\sin \sin \sin x]'$ pre $x \in R$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$[\sin \sin \sin x]'$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$**

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x$.

**$[\sin\sin\sin x]'$ pre $x \in R$**

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$

  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]'$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$

  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$

  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$**

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x$.

**$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$**

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[a^x]'$ pre $x \in R,\ a > 0$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[a^x]'$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x \ln a}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$**

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

**$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$**

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

**$[a^x]'$ pre $x \in R,\ a > 0$**

- $= \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot [x\ln a]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[a^x]'$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot [x \ln a]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot \ln a$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

### $[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x$.

### $[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$.

### $[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot [x\ln a]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x$.

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$.

$[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot [x \ln a]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$.

$[\log_a x]'$ pre $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot [x\ln a]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$

$[\log_a x]'$ pre $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$

$[\log_a x]'$ pre $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot [\ln x]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x\ln a}\right]' = e^{x\ln a} \cdot [x\ln a]' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$

$[\log_a x]'$ pre $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot [\ln x]' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sin\sin x]' = \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[\sin\sin\sin x]' = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$ pre $x \in R$

- $= [\sin(\sin(\sin x))]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x.$

$[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R,\ a > 0$

- $= \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot [x\ln a]' = \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$

$[\log_a x]' = \frac{1}{x\ln a}$ pre $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

- $= \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot [\ln x]' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]'$ pre $x \in R$

$[\cosh x]'$ pre $x \in R$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sinh x]'$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]'$

**$[\cosh x]'$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sinh x]'$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2}$

**$[\cosh x]'$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sinh x]'$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

**$[\cosh x]'$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

**$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

**$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

**$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$**

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

**$[\operatorname{tgh} x]'$ pre $x \in R$**

**$[\operatorname{cotgh} x]'$ pre $x \in R$**

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

$[\mathrm{tgh}\, x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]'$

$[\mathrm{cotgh}\, x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

$[\operatorname{tgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x}$

$[\operatorname{cotgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

## $[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

## $[\operatorname{tgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

## $[\operatorname{cotgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$

$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

$[\operatorname{tgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$
- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]'$

$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

## $[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

## $[\operatorname{tgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$

---

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

## $[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

$[\operatorname{tgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$
- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

$[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

$[\operatorname{tgh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$
- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]' = \frac{(e^x + e^{-x})\cdot(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})\cdot(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

  $= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

## $[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

## $[\mathrm{tgh}\, x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$
- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left[\frac{2}{(e^x + e^{-x})}\right]^2$$

## $[\mathrm{cotgh}\, x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

## $[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$

## $[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$
- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$
  $= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left[\frac{2}{(e^x + e^{-x})}\right]^2 = \frac{1}{\cosh^2 x}.$

## $[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \in R$

- $= \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

$[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R \\ x = \sinh y,\, y \in R \end{array} \qquad \right]$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) \end{array} \qquad \right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R \\ x = \sinh y,\, y \in R \end{array} \right| \qquad \left. \vphantom{\begin{array}{l} y \\ x \end{array}} \right] = \dfrac{1}{[\sinh y]'}$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1; \infty) \\ x = \sinh y,\, y \in (1; \infty) \end{array} \right| \qquad \left. \vphantom{\begin{array}{l} y \\ x \end{array}} \right] = \dfrac{1}{[\cosh y]'}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in R \\ x = \sinh y, y \in R \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\sinh y]'} = \dfrac{1}{\cosh y}$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \sinh y, y \in (1; \infty) \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\cosh y]'} = \dfrac{1}{\sinh y}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in R & \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+(\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

## $[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) & y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in R & \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+(\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\sinh y]'} = \dfrac{1}{\cosh y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right) \right]'$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) & y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\cosh y]'} = \dfrac{1}{\sinh y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2-1} \right) \right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in R & \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+(\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{\left[x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2+1}}$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) & y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \frac{\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2-1}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in R & \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+(\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\sinh y]'} = \dfrac{1}{\cosh y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \dfrac{\left[x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2+1}}$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) & y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\cosh y]'} = \dfrac{1}{\sinh y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \dfrac{\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in R & \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+(\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array}\right] = \dfrac{1}{[\sinh y]'} = \dfrac{1}{\cosh y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \dfrac{\left[x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[\begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) & y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} \end{array}\right] = \dfrac{1}{[\cosh y]'} = \dfrac{1}{\sinh y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \dfrac{\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R & y \in R \Rightarrow\ \cosh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in R & \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+(\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\sinh y]'} = \dfrac{1}{\cosh y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[ \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \right]' = \dfrac{\left[x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

## $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) & y > 0 \Rightarrow\ \sinh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} \end{array} \right] = \dfrac{1}{[\cosh y]'} = \dfrac{1}{\sinh y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[ \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \right]' = \dfrac{\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x,\, x \in R & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in R & \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+(\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right) \right]' = \frac{\left[ x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \right]'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

## $[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pre $x \in R$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x,\, x \in (1;\infty) & y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ x = \sinh y,\, y \in (1;\infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2-1} \right) \right]' = \frac{\left[ x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R \end{array} \quad \right]$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l|} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1; 1 \rangle \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} \end{array} \quad \right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R \end{array} \right| \qquad \left. \right] = \dfrac{1}{[\operatorname{tgh} y]'}$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1;1 \rangle \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} \end{array} \right| \qquad \left. \right]$

$= \dfrac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R \end{array} \right| \qquad \right] = \dfrac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}}$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1;1 \rangle \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} \end{array} \right| \qquad \right]$

$$= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}}$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R & \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1-(\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$

## $[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1;1 \rangle & y \in R - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} & \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} \end{array} \right]$

$$= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1;1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R & \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1-(\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right]'$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1;1 \rangle & y \in R - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} & \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} \end{array} \right]$

$$= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1-(\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right]' = \left[\, x \in (-1;1) \Rightarrow 1+x > 0,\ 1-x > 0 \,\right]$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1;1 \rangle \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in R - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} \end{array} \right]$

$$= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R & \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right]' = \left[\, x \in (-1;1) \Rightarrow 1+x > 0,\, 1-x > 0 \,\right] = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]'$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1; 1\rangle & y \in R - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} & \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} \end{array} \right]$

$$= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argtgh} x,\ x \in (-1;1) & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{tgh} y,\ y \in R & \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1-(\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right]' = \left[ x \in (-1;1) \Rightarrow 1+x > 0,\ 1-x > 0 \right] = \frac{1}{2} \left[ \ln (1+x) - \ln (1-x) \right]'$
  $= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right]$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcotgh} x,\ x \in R - \langle -1; 1 \rangle & y \in R - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{cotgh} y,\ y \in R - \{0\} & \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{-\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} \end{array} \right]$
  $= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{-2}{(x+1) \cdot (x-1)}$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

- $$= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $$= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right]' = \left[\, x \in (-1;1) \Rightarrow 1 + x > 0,\ 1 - x > 0 \,\right] = \frac{1}{2} \left[ \ln(1+x) - \ln(1-x) \right]'$$
$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right] = \frac{1}{2} \frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)\cdot(1-x)}$$

## $[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $$= \left[ \begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1;1 \rangle \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in R - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{-\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} \end{array} \right]$$
$$= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $$= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{-2}{(x+1)\cdot(x-1)}$$
$$= \frac{-1}{x^2-1}$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

## $[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in (-1; 1)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argtgh} x,\, x \in (-1;1) & y \in R \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{tgh} y,\, y \in R & \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-\operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1-(\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right]' = \left[ x \in (-1;1) \Rightarrow 1+x > 0,\, 1-x > 0 \right] = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]'$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)\cdot(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

## $[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcotgh} x,\, x \in R - \langle -1;1 \rangle & y \in R - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ x = \operatorname{cotgh} y,\, y \in R - \{0\} & \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} \end{array} \right]$

$$= \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

- $= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{-2}{(x+1)\cdot(x-1)}$

$$= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

**Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.**

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

**Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.**

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = e^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[e^{\ln f(x)}\right]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## $[x^x]'$ pre $x > 0$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## $[x^x]'$ pre $x > 0$

• $= \left[\begin{matrix}\text{Logaritmické} \\ \text{derivovanie}\end{matrix}\right]$

• $= \left[\begin{matrix} x > 0 \Rightarrow x^x > 0 \\ x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}\end{matrix}\right]$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## $[x^x]'$ pre $x > 0$

• $= \left[\begin{matrix}\text{Logaritmické}\\ \text{derivovanie}\end{matrix}\right] = x^x \cdot [\ln x^x]'$

• $= \left[\begin{matrix}x > 0 \Rightarrow x^x > 0\\ x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}\end{matrix}\right] = \left[\mathrm{e}^{x \ln x}\right]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## $[x^x]'$ pre $x > 0$

- $= \left[\begin{array}{c}\text{Logaritmické}\\ \text{derivovanie}\end{array}\right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]'$
- $= \left[\begin{array}{c}x > 0 \Rightarrow x^x > 0\\ x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}\end{array}\right] = \left[\mathrm{e}^{x \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot [x \ln x]'$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## $[x^x]'$ pre $x > 0$

• $= \left[\begin{matrix}\text{Logaritmické}\\ \text{derivovanie}\end{matrix}\right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})$

• $= \left[\begin{matrix}x > 0 \Rightarrow x^x > 0\\ x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}\end{matrix}\right] = \left[\mathrm{e}^{x \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})$

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## $[x^x]' = x^x(1 + \ln x)$ pre $x > 0$

• $= \left[\begin{matrix}\text{Logaritmické}\\ \text{derivovanie}\end{matrix}\right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x)$.

• $= \left[\begin{matrix}x > 0 \Rightarrow x^x > 0\\ x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}\end{matrix}\right] = \left[\mathrm{e}^{x \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x)$.

# Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou logaritmickej derivácie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ pre $x \in A$. $\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

## Derivovanie kladnej funkcie $f$ pomocou exponenciálnej funkcie.

Funkcia $f$, množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$ pre $x \in A$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ pre $x \in A$.

- Uvedené postupy sú prakticky rovnaké.

## $[x^x]' = x^x(1 + \ln x)$ pre $x > 0$

- $= \left[\begin{array}{c}\text{Logaritmické}\\ \text{derivovanie}\end{array}\right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x)$.
- $= \left[\begin{array}{l}x > 0 \Rightarrow x^x > 0\\ x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}\end{array}\right] = \left[\mathrm{e}^{x \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x)$.

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$,

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R,$

Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0)$

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

resp. $f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $\mathrm{d}f(x_0, h)$

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$,

# Diferenciál funkcie – Definícia

**Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:**

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.

---

- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva
  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

---

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$.

**Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$, ak:**

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R,$ resp. $f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R,$ resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h,\ h \in R.$

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

  [V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$],

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- **Diferenciál** funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

  [V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

  [V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita).

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.

- **Diferenciál** funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h,\ h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

  [V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x,\ x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- **Diferenciál** funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
  $\Rightarrow$ • $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$,

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

$\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}x$.

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- **Diferenciál** funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva
  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

  Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.
  [V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}x$.

[$\mathrm{d}x = h$, $h \in R$, resp. $\mathrm{d}x = x - x_0$, $x \in R$.]

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
  $\Rightarrow$ • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $dx$.
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.]

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $\mathrm{d}f(x_0,x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

  [V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0,x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}x$.

- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$,

[$\mathrm{d}x = h$, $h \in R$, resp. $\mathrm{d}x = x - x_0$, $x \in R$.]

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- **Diferenciál** funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}x$.
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}f(x_0)$.

[$\mathrm{d}x = h$, $h \in R$, resp. $\mathrm{d}x = x - x_0$, $x \in R$.]

# Diferenciál funkcie – Definícia

**Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:**

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.

- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

**Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$, ak:**

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
  $\Rightarrow$ • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $dx$.

- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • $df(x_0) = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$, označenie $df(x_0)$.

[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.] [$df(x_0) = f'(x_0)h$, $h \in R$, resp. $df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$.]

# Diferenciál funkcie – Definícia

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie $f$ v bode $x_0$.
- Diferenciál funkcie $f$ v bode $x_0$ sa nazýva

  lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

  Označenie $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia $f$ sa nazýva diferencovateľná na množine $A \subset D(f)$, ak:

- $f$ je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

  [V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t. j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0, x - x_0)$.]

- $f\colon y = x$, $x \in R$ (identita). $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}x$.

- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$, označenie $\mathrm{d}f(x_0)$.

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, t. j. $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$.

[$\mathrm{d}x = h$, $h \in R$, resp. $\mathrm{d}x = x - x_0$, $x \in R$.] [$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)h$, $h \in R$, resp. $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$.]

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:

- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0),\ x \in R.$ [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:

- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Longrightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x),\ x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R,\ c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0),\ x \in R.$ [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$
- Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0),\ x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$
- Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.
- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0),\ x \in R.$ [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$
- Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0),\ x \in R.$ [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:

- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

**Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.**

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0),\ x \in R.$ [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

**Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in O(1).$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in O(1).$
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h,\ h \in O(1).$
- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$
- $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h,\ h \in O(1).$

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

**Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.**

Označme:
- $p\colon y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$
- Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

**Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
- $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\operatorname{arctg}(1{,}1) = \operatorname{arctg}(1 + 0{,}1)$

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$
- Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
- $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\operatorname{arctg}(1{,}1) = \operatorname{arctg}(1 + 0{,}1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1$

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

## Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

## Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
- $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\operatorname{arctg}(1{,}1) = \operatorname{arctg}(1 + 0{,}1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \approx \frac{3{,}1416}{4} + 0{,}05$

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1 \approx 0{,}8354$.

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
- $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\operatorname{arctg}(1{,}1) = \operatorname{arctg}(1 + 0{,}1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \approx \frac{3{,}1416}{4} + 0{,}05 = 0{,}8354$.

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x),\ x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R,\ c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p\colon\ y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0),\ x \in R.$ [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0),\ x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1 \approx 0{,}8354.$ [Presná hodnota 0,8330 na 4 desatinné miesta,

- Označme $x_0 = 1,\ f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in O(1).$ [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1).$ $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h.$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in O(1).$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in O(1).$
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h,\ h \in O(1).$
- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$
- $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h,\ h \in O(1).$

- $\operatorname{arctg}(1{,}1) = \operatorname{arctg}(1 + 0{,}1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \approx \frac{3{,}1416}{4} + 0{,}05 = 0{,}8354.$

# Diferenciál funkcie – Aproximácia pomocou priamky

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme:
- $p$: $y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]
- $g$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$, t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia $f$ v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie $g$ (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie $f$ je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1{,}1 \approx 0{,}8354$. [Presná hodnota 0,8330 na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu 0,0024.]

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]
- Položme $x = 1{,}1 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = h = 0{,}1$, t. j. $1{,}1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
- $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\operatorname{arctg}(1{,}1) = \operatorname{arctg}(1 + 0{,}1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \approx \frac{3{,}1416}{4} + 0{,}05 = 0{,}8354$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$.

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

  - $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
  - $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

  - $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
  - $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

  - $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
  - $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
  - $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
  - $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
  - $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

  - $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
  - $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
  - $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, $x \in O(0)$.
  - $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
  - $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

---

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

---

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
- $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06}$

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
- $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06}$

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01$

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
- $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01$

# Diferenciál funkcie – Príklad

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$.**

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

**Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$.**

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
- $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$. [Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta,

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$. [Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta,

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
- $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$. [Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu 0,0002.]

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1{,}06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1{,}06 \in O(1)$. $\Rightarrow$ • $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06$.

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$. [Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu 0,0002.]

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0{,}06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0{,}06 \in O(0)$. $\Rightarrow$ • $x - x_0 = 0{,}06 - 0 = 0{,}06$.

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
- $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}06 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

# Diferenciál funkcie – Príklad

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, \ x > 0.$

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

# Diferenciál funkcie – Príklad

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x > 0$.
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x > 0$.

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

# Diferenciál funkcie – Príklad

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

# Diferenciál funkcie – Príklad

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x > 0$.
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x > 0$.

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x > 0$.
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x > 0$.

  - Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

    [Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

  - $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
  - $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(0)$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(1)$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

  - Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

    [Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]
  - $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$
  - $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h,\ h \in O(0).$
- $x = 1,06 \in O(1).$

- $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in O(1).$
- $x = 1,06 \in O(1).$

# Diferenciál funkcie – Príklad

## Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x > 0$.
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x > 0$.

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(0)$.
- $x = 1{,}06 \in O(1)$.
- $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0)$.

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(1)$.
- $x = 1{,}06 \in O(1)$.
- $x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0)$.

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h,\ h \in O(0).$
  - $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6},\ h \in O(0).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
  - $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in O(1).$
  - $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6},\ x \in O(1).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
  - $x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h,\ h \in O(0).$
  - $\sqrt[6]{1 + h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6},\ h \in O(0).$
  - $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06}$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
- $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in O(1).$
  - $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6},\ x \in O(1).$
  - $\sqrt[6]{1{,}06}$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
- $x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$.

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x > 0$.
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x > 0$.

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(0)$.
  - $x = 1{,}06 \in O(1)$.
  - $\sqrt[6]{1 + h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6}$, $h \in O(0)$.
  - $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0)$.
  - $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1 + 0{,}06} \approx \frac{6+0{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6}$

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(1)$.
  - $x = 1{,}06 \in O(1)$.
  - $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$, $x \in O(1)$.
  - $x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0)$.
  - $\sqrt[6]{1{,}06} \approx \frac{5+1{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6}$

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$.

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h,\ h \in O(0).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
  - $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6}\cdot h = \frac{6+h}{6},\ h \in O(0).$
  - $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$
  - $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1+0{,}06} \approx \frac{6+0{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6} = 1{,}01.$

- $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot (x-x_0),\ x \in O(1).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
  - $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6}\cdot (x-1) = \frac{5+x}{6},\ x \in O(1).$
  - $x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$
  - $\sqrt[6]{1{,}06} \approx \frac{5+1{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6} = 1{,}01.$

- $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01.$

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01$. [Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta,

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$.

  [Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h,\ h \in O(0).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6},\ h \in O(0).$
- $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$
- $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1+0{,}06} \approx \frac{6+0{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6} = 1{,}01.$

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in O(1).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
- $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6},\ x \in O(1).$
- $x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$
- $\sqrt[6]{1{,}06} \approx \frac{5+1{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6} = 1{,}01.$

---

- $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01.$
- $\sqrt[6]{1{,}06} = 1{,}0098.$

[Presná hodnota na 4 desatinné miesta.]

# Diferenciál funkcie – Príklad

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01.$ [Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu 0,0002.]

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}},\ x > 0.$
- $f'(x) = \left[x^{\frac{1}{6}}\right]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}},\ x > 0.$

---

- Položme $x_0 = 1$ a zvoľme okolie $O(1)$. [Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0;\infty)$ a $1{,}06 \in O(1)$.]
- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h,\ h \in O(0).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
  - $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6},\ h \in O(0).$
  - $h = x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$
  - $\sqrt[6]{1{,}06} = \sqrt[6]{1+0{,}06} \approx \frac{6+0{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6} = 1{,}01.$

---

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in O(1).$
- $x = 1{,}06 \in O(1).$
  - $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6},\ x \in O(1).$
  - $x - x_0 = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \in O(0).$
  - $\sqrt[6]{1{,}06} \approx \frac{5+1{,}06}{6} = \frac{6{,}06}{6} = 1{,}01.$

---

- $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1{,}01.$
- $\sqrt[6]{1{,}06} = 1{,}0098.$ [Presná hodnota na 4 desatinné miesta.]
- $1{,}01 - 1{,}0098 = 0{,}0002.$ [Chyba výpočtu.]

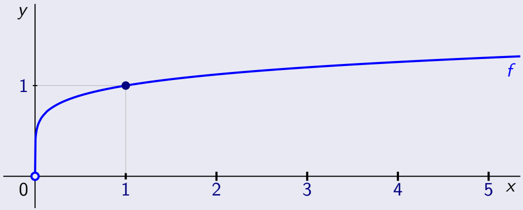
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

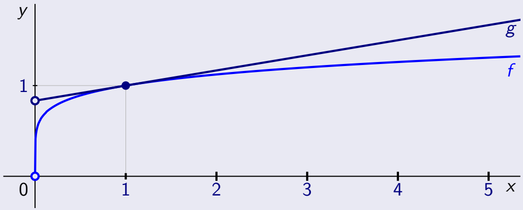
- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$



# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.



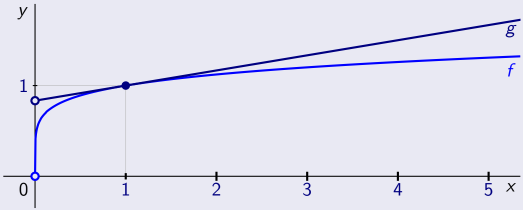
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| | | | |



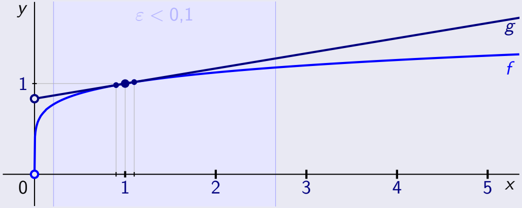
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $< 0{,}000\,750$ |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $< 0{,}000\,660$ |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| | | | |



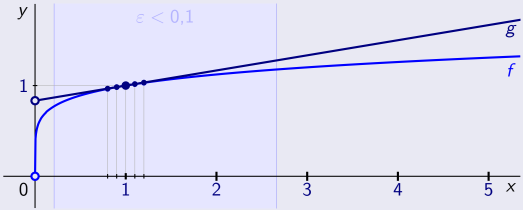
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $< 0{,}003\,174$ |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $< 0{,}000\,750$ |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $< 0{,}000\,660$ |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $< 0{,}002\,490$ |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|



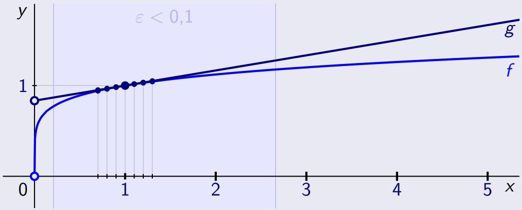
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $< 0{,}007\,713$ |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $< 0{,}003\,174$ |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $< 0{,}000\,750$ |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $< 0{,}000\,660$ |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $< 0{,}002\,490$ |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $< 0{,}005\,310$ |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| | | | |



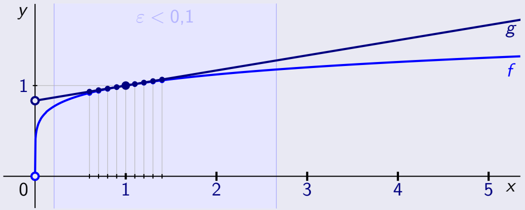
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $<$ 0,014 947 |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $<$ 0,007 713 |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $<$ 0,003 174 |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $<$ 0,000 750 |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $<$ 0,000 660 |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $<$ 0,002 490 |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $<$ 0,005 310 |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $<$ 0,008 986 |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|



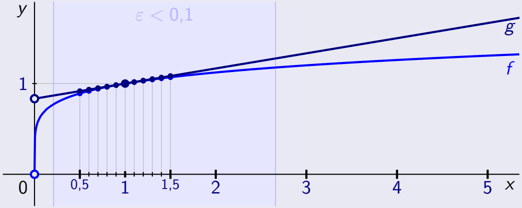
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 0,890 899 | 0,916 667 | $< 0{,}025\,770$ |
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $< 0{,}014\,947$ |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $< 0{,}007\,713$ |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $< 0{,}003\,174$ |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $< 0{,}000\,750$ |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $< 0{,}000\,660$ |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $< 0{,}002\,490$ |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $< 0{,}005\,310$ |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $< 0{,}008\,986$ |
| 1,5 | 1,069 913 | 1,083 333 | $< 0{,}013\,430$ |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|



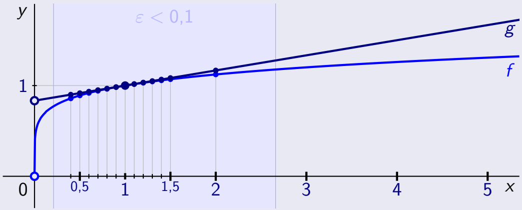
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,4 | 0,858 374 | 0,900 000 | $<$ 0,041 626 |
| 0,5 | 0,890 899 | 0,916 667 | $<$ 0,025 770 |
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $<$ 0,014 947 |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $<$ 0,007 713 |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $<$ 0,003 174 |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $<$ 0,000 750 |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $<$ 0,000 660 |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $<$ 0,002 490 |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $<$ 0,005 310 |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $<$ 0,008 986 |
| 1,5 | 1,069 913 | 1,083 333 | $<$ 0,013 430 |
| 2,0 | 1,122 462 | 1,166 667 | $<$ 0,044 210 |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| | | | |



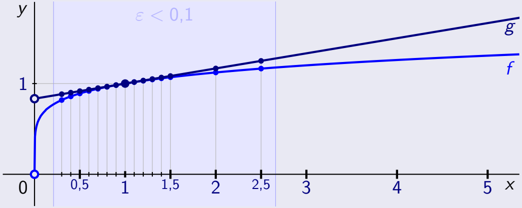
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,3 | 0,818 189 | 0,883 333 | $<$ 0,065 145 |
| 0,4 | 0,858 374 | 0,900 000 | $<$ 0,041 626 |
| 0,5 | 0,890 899 | 0,916 667 | $<$ 0,025 770 |
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $<$ 0,014 947 |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $<$ 0,007 713 |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $<$ 0,003 174 |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $<$ 0,000 750 |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $<$ 0,000 660 |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $<$ 0,002 490 |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $<$ 0,005 310 |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $<$ 0,008 986 |
| 1,5 | 1,069 913 | 1,083 333 | $<$ 0,013 430 |
| 2,0 | 1,122 462 | 1,166 667 | $<$ 0,044 210 |
| 2,5 | 1,164 993 | 1,250 000 | $<$ 0,085 007 |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| | | | |



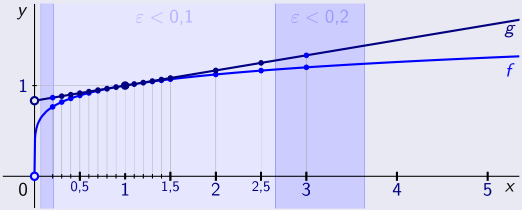
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu $1$. [Lokálna záležitosť.]

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,2 | 0,764 724 | 0,866 667 | $>$ 0,101 942 |
| 0,3 | 0,818 189 | 0,883 333 | $<$ 0,065 145 |
| 0,4 | 0,858 374 | 0,900 000 | $<$ 0,041 626 |
| 0,5 | 0,890 899 | 0,916 667 | $<$ 0,025 770 |
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $<$ 0,014 947 |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $<$ 0,007 713 |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $<$ 0,003 174 |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $<$ 0,000 750 |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $<$ 0,000 660 |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $<$ 0,002 490 |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $<$ 0,005 310 |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $<$ 0,008 986 |
| 1,5 | 1,069 913 | 1,083 333 | $<$ 0,013 430 |
| 2,0 | 1,122 462 | 1,166 667 | $<$ 0,044 210 |
| 2,5 | 1,164 993 | 1,250 000 | $<$ 0,085 007 |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 3,0 | 1,200 937 | 1,333 333 | $>$ 0,132 390 |



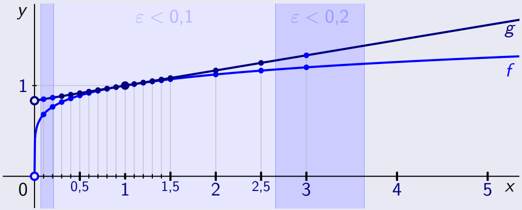
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu $1$. [Lokálna záležitosť.]

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,681 292 | 0,850 000 | $>$ 0,168 700 |
| 0,2 | 0,764 724 | 0,866 667 | $>$ 0,101 942 |
| 0,3 | 0,818 189 | 0,883 333 | $<$ 0,065 145 |
| 0,4 | 0,858 374 | 0,900 000 | $<$ 0,041 626 |
| 0,5 | 0,890 899 | 0,916 667 | $<$ 0,025 770 |
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $<$ 0,014 947 |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $<$ 0,007 713 |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $<$ 0,003 174 |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $<$ 0,000 750 |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $<$ 0,000 660 |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $<$ 0,002 490 |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $<$ 0,005 310 |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $<$ 0,008 986 |
| 1,5 | 1,069 913 | 1,083 333 | $<$ 0,013 430 |
| 2,0 | 1,122 462 | 1,166 667 | $<$ 0,044 210 |
| 2,5 | 1,164 993 | 1,250 000 | $<$ 0,085 007 |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 3,0 | 1,200 937 | 1,333 333 | $>$ 0,132 390 |



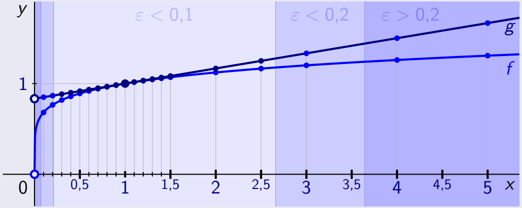
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu 1. [Lokálna záležitosť.]

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,681 292 | 0,850 000 | $>$ 0,168 700 |
| 0,2 | 0,764 724 | 0,866 667 | $>$ 0,101 942 |
| 0,3 | 0,818 189 | 0,883 333 | $<$ 0,065 145 |
| 0,4 | 0,858 374 | 0,900 000 | $<$ 0,041 626 |
| 0,5 | 0,890 899 | 0,916 667 | $<$ 0,025 770 |
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $<$ 0,014 947 |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $<$ 0,007 713 |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $<$ 0,003 174 |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $<$ 0,000 750 |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $<$ 0,000 660 |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $<$ 0,002 490 |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $<$ 0,005 310 |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $<$ 0,008 986 |
| 1,5 | 1,069 913 | 1,083 333 | $<$ 0,013 430 |
| 2,0 | 1,122 462 | 1,166 667 | $<$ 0,044 210 |
| 2,5 | 1,164 993 | 1,250 000 | $<$ 0,085 007 |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 3,0 | 1,200 937 | 1,333 333 | $>$ 0,132 390 |
| 4,0 | 1,259 921 | 1,500 000 | $>$ 0,240 079 |
| 5,0 | 1,307 661 | 1,666 667 | $>$ 0,359 000 |



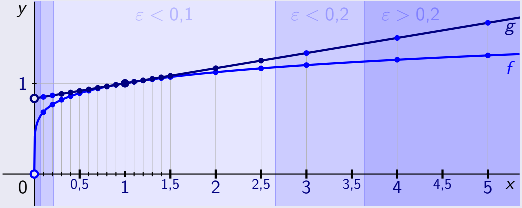
# Diferenciál funkcie – Príklad (chyby aproximácie)

## Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x-1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu 1. [Lokálna záležitosť.]
- Pri neuváženom použití, môže chyba $\varepsilon$ narásť do neprijateľných rozmerov.

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,681 292 | 0,850 000 | $>$ 0,168 700 |
| 0,2 | 0,764 724 | 0,866 667 | $>$ 0,101 942 |
| 0,3 | 0,818 189 | 0,883 333 | $<$ 0,065 145 |
| 0,4 | 0,858 374 | 0,900 000 | $<$ 0,041 626 |
| 0,5 | 0,890 899 | 0,916 667 | $<$ 0,025 770 |
| 0,6 | 0,918 386 | 0,933 333 | $<$ 0,014 947 |
| 0,7 | 0,942 287 | 0,950 000 | $<$ 0,007 713 |
| 0,8 | 0,963 492 | 0,966 667 | $<$ 0,003 174 |
| 0,9 | 0,982 593 | 0,983 333 | $<$ 0,000 750 |
| 1,1 | 1,016 012 | 1,016 667 | $<$ 0,000 660 |
| 1,2 | 1,030 853 | 1,033 333 | $<$ 0,002 490 |
| 1,3 | 1,044 698 | 1,050 000 | $<$ 0,005 310 |
| 1,4 | 1,057 681 | 1,066 667 | $<$ 0,008 986 |
| 1,5 | 1,069 913 | 1,083 333 | $<$ 0,013 430 |
| 2,0 | 1,122 462 | 1,166 667 | $<$ 0,044 210 |
| 2,5 | 1,164 993 | 1,250 000 | $<$ 0,085 007 |

| $x$ | $f(x) = \sqrt[6]{x}$ | $g(x) = \frac{5+x}{6}$ | Chyba $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 3,0 | 1,200 937 | 1,333 333 | $>$ 0,132 390 |
| 4,0 | 1,259 921 | 1,500 000 | $>$ 0,240 079 |
| 5,0 | 1,307 661 | 1,666 667 | $>$ 0,359 000 |
| 10,0 | 1,467 799 | 2,500 000 | $>$ 1,032 200 |
| 20,0 | 1,647 549 | 4,166 667 | $>$ 2,519 110 |
| 64,0 | 2,000 000 | 11,500 000 | $=$ 9,500 000 |



# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

**Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.**

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

---

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

---

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

**Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.**

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

---

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

---

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

---

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

---

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

**Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.**

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100\cdot\Delta x}{x}\,\%$ (v percentách) .

---

  - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
  - Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

---

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100\cdot\Delta y}{y}\,\%$ (v percentách) .

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

---

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

---

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

---

  - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
  - Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

---

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

Určte chybu pre objem gule $V$, ak sme jej polomer $r$ namerali s chybou $\Delta r$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

  - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
  - Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

Určte chybu pre objem gule $V$, ak sme jej polomer $r$ namerali s chybou $\Delta r$.

- Polomer $r > 0$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100\cdot\Delta x}{x}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

---

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

---

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100\cdot\Delta y}{y}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

Určte chybu pre objem gule $V$, ak sme jej polomer $r$ namerali s chybou $\Delta r$.

- Polomer $r > 0$.
- Absolútna chyba $\Delta r > 0$.
- Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100\cdot\Delta x}{x}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

  - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
  - Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100\cdot\Delta y}{y}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

Určte chybu pre objem gule $V$, ak sme jej polomer $r$ namerali s chybou $\Delta r$.

- Polomer $r > 0$.
- Absolútna chyba $\Delta r > 0$.
- Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.

- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

---

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

---

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

Určte chybu pre objem gule $V$, ak sme jej polomer $r$ namerali s chybou $\Delta r$.

- Polomer $r > 0$.
- Absolútna chyba $\Delta r > 0$.
- Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.

---

- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$. $\Rightarrow$
- $V'(r) = 4\pi r^2$.

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]

- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100\cdot\Delta x}{x}\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

  - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
  - Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100\cdot\Delta y}{y}\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

Určte chybu pre objem gule $V$, ak sme jej polomer $r$ namerali s chybou $\Delta r$.

- Polomer $r > 0$.
- Absolútna chyba $\Delta r > 0$.
- Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.

- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$. $\Rightarrow$
- $V'(r) = 4\pi r^2$.
  - $\Delta V = V'(r)\cdot\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$.

[Absolútna chyba objemu.]

# Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f\colon y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny $y$ od veličiny $x$.

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu $x$ a nazýva sa absolútna chyba veličiny $x$.

  [Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny $x$ je menší alebo rovný $\Delta x$.]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $x$.

  - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
  - Pre aproximáciu funkcie $f$ v okolí $O(x)$ platí $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x,\Delta x)$.

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x,\Delta x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny $y$.
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y}\,\%$ (v percentách) sa nazýva relatívna (pomerná) chyba veličiny $y$.

Určte chybu pre objem gule $V$, ak sme jej polomer $r$ namerali s chybou $\Delta r$.

- Polomer $r > 0$.
- Absolútna chyba $\Delta r > 0$.
- Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.

- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$. $\Rightarrow$
- $V'(r) = 4\pi r^2$.
  - $\Delta V = V'(r) \cdot \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$.

    [Absolútna chyba objemu.]
  - $\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r$.

    [Relatívna chyba objemu.]

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y = f(x),\ x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y = f(x),\ x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f),\ A \neq \emptyset$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]

  sa nazýva derivácia 1. rádu (prvá derivácia) funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva derivácia 1. rádu (prvá derivácia) funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 2. rádu (druhá derivácia) funkcie $f$, označenie $f'' = f^{(2)}$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y = f(x),\ x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f),\ A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A,\ A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva derivácia 1. rádu (prvá derivácia) funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1,\ A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 2. rádu (druhá derivácia) funkcie $f$, označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f'''\colon y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2,\ A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 3. rádu (tretia derivácia) funkcie $f$, označenie $f''' = f^{(3)}$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y = f(x),\ x \in D(f)$. • Prirodzené číslo $n \in N$. • Neprázdna množina $A \subset D(f),\ A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A,\ A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1,\ A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f'''\colon y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2,\ A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie $f$, označenie $f''' = f^{(3)}$.

. . .

- Funkcia $f^{(n)}\colon y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1},\ A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
  sa nazýva **derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f^{(n)}$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$

- Funkcia $f\colon y=f(x),\ x\in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n\in N$.
- Neprázdna množina $A\subset D(f),\ A\neq\emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y=f'(x)$, kde $x\in A_1\subset A,\ A_1\neq\emptyset$ [Pre všetky $x\in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva derivácia 1. rádu (prvá derivácia) funkcie $f$, označenie $f'=f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y=[f'(x)]'$, kde $x\in A_2\subset A_1,\ A_2\neq\emptyset$ [Pre všetky $x\in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 2. rádu (druhá derivácia) funkcie $f$, označenie $f''=f^{(2)}$.
- Funkcia $f'''\colon y=[f''(x)]'$, kde $x\in A_3\subset A_2,\ A_3\neq\emptyset$ [Pre všetky $x\in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 3. rádu (tretia derivácia) funkcie $f$, označenie $f'''=f^{(3)}$.

$\dots$

- Funkcia $f^{(n)}\colon y=[f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x\in A_n\subset A_{n-1},\ A_n\neq\emptyset$ [Pre všetky $x\in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
  sa nazýva derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$, označenie $f^{(n)}$.

---

Špeciálne:
- Funkcia $f^{(0)}\colon y=f(x)$, kde $x\in A$
  sa nazýva derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia) funkcie $f$, označenie $f=f^{(0)}$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$ na množine $A_n$, $n \in N$.

- Funkcia $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva derivácia 1. rádu (prvá derivácia) funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 2. rádu (druhá derivácia) funkcie $f$, označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f'''\colon y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 3. rádu (tretia derivácia) funkcie $f$, označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

- Funkcia $f^{(n)}\colon y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
  sa nazýva derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$, označenie $f^{(n)}$.

---

Špeciálne:
- Funkcia $f^{(0)}\colon y = f(x)$, kde $x \in A$
  sa nazýva derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia) funkcie $f$, označenie $f = f^{(0)}$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$ na množine $A_n$, $n \in N$.

- Funkcia $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f'''\colon y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie $f$, označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

- Funkcia $f^{(n)}\colon y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
  sa nazýva **derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f^{(n)}$.

---

Špeciálne:
- Funkcia $f^{(0)}\colon y = f(x)$, kde $x \in A$
  sa nazýva **derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f = f^{(0)}$.

---

- Hodnota $f^{(n)}(x_0) \in A_n$

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$ na množine $A_n$, $n \in N$.

- Funkcia $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f'''\colon y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
  sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie $f$, označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

- Funkcia $f^{(n)}\colon y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
  sa nazýva **derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f^{(n)}$.

---

Špeciálne:
- Funkcia $f^{(0)}\colon y = f(x)$, kde $x \in A$
  sa nazýva **derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia)** funkcie $f$, označenie $f = f^{(0)}$.

---

- Hodnota $f^{(n)}(x_0) \in A_n$ sa nazýva **derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia)** funkcie $f$ v bode $x_0$.

# Derivácie vyšších rádov – Definícia

## Derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$ na množine $A_n$, $n \in N$.

- Funkcia $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in N$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

---

- Funkcia $f'\colon y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
  sa nazýva derivácia 1. rádu (prvá derivácia) funkcie $f$, označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f''\colon y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 2. rádu (druhá derivácia) funkcie $f$, označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f'''\colon y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
  sa nazýva derivácia 3. rádu (tretia derivácia) funkcie $f$, označenie $f''' = f^{(3)}$.

. . .

- Funkcia $f^{(n)}\colon y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
  sa nazýva derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$, označenie $f^{(n)}$.

---

Špeciálne:
- Funkcia $f^{(0)}\colon y = f(x)$, kde $x \in A$
  sa nazýva derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia) funkcie $f$, označenie $f = f^{(0)}$.

---

- Hodnota $f^{(n)}(x_0) \in A_n$ sa nazýva derivácia $n$-tého rádu ($n$-tá derivácia) funkcie $f$ v bode $x_0$.

[Z definície derivácie vyplýva, že funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom $O(x_0)$.]

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie $f$ podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie $f$ podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. 
- $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie $f$ podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. • $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. • $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie **derivácií vyšších rádov** funkcie $f$ podľa **Leibniza** (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. • $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. • $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. • $f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie **derivácií vyšších rádov** funkcie $f$ podľa **Leibniza** (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. $f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

  $\ldots$
- $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n,\ n \in N,$ resp. $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie $f$ podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. • $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. • $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. • $f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

  . . .
- $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n,\ n \in N,$ resp. • $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n.$

- $f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[f(x_0)\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}$ označuje hodnotu $f^{(n)}$ v bode $x_0 \in A_n,\ n \in N.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie $f$ podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. • $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. • $f'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \dfrac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. • $f''' = \dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

  $\ldots$
- $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n,\ n \in N,$ resp. • $f^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n.$

- $f^{(n)}(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x_0)] = \dfrac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} = \dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}$ označuje hodnotu $f^{(n)}$ v bode $x_0 \in A_n,\ n \in N.$

Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie **derivácií vyšších rádov** funkcie $f$ podľa **Leibniza** (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. • $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. • $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. • $f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

  ...
- $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n,\ n \in N,$ resp. • $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n.$

- $f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[f(x_0)\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}$ označuje hodnotu $f^{(n)}$ v bode $x_0 \in A_n,\ n \in N.$

**Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f'(x) = \left[\mathrm{e}^x\right]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie **derivácií vyšších rádov** funkcie $f$ podľa **Leibniza** (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. $f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

$\ldots$

- $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n,\ n \in N,$ resp. $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n.$

- $f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x_0)] = \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}$ označuje hodnotu $f^{(n)}$ v bode $x_0 \in A_n,\ n \in N.$

Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f'(x) = \left[\mathrm{e}^x\right]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''(x) = \left[\mathrm{e}^x\right]'' = \left[(\mathrm{e}^x)'\right]' = \left[\mathrm{e}^x\right]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie $f$ podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. $f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

  ...
- $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n,\ n \in N,$ resp. $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n.$

- $f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[f(x_0)\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} = \left.\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}$ označuje hodnotu $f^{(n)}$ v bode $x_0 \in A_n,\ n \in N.$

**Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f'(x) = \left[\mathrm{e}^x\right]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''(x) = \left[\mathrm{e}^x\right]'' = \left[(\mathrm{e}^x)'\right]' = \left[\mathrm{e}^x\right]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$

  ...
- $f^{(n)}(x) = \left[\mathrm{e}^x\right]^{(n)} = \left[(\mathrm{e}^x)^{(n-1)}\right]' = \left[\mathrm{e}^x\right]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R$ pre $n \in N.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie $f$ podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x),\ x \in A_1,$ resp. • $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ x \in A_1.$
- $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2,$ resp. • $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ x \in A_2.$
- $f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{(\mathrm{d}x)^3} = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3,$ resp. • $f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\ x \in A_3.$

  ...
- $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n,\ n \in N,$ resp. • $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ x \in A_n.$

- $f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x_0)] = \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} = \left.\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}$ označuje hodnotu $f^{(n)}$ v bode $x_0 \in A_n,\ n \in N.$

**Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f'(x) = [\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''(x) = [\mathrm{e}^x]'' = [(\mathrm{e}^x)']' = [\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R.$

  ...
- $f^{(n)}(x) = [\mathrm{e}^x]^{(n)} = [(\mathrm{e}^x)^{(n-1)}]' = [\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x,\ x \in R$ pre $n \in N.$

$\Rightarrow$ • $[\mathrm{e}^x]^{(0)} = [\mathrm{e}^x]' = [\mathrm{e}^x]'' = \cdots = [\mathrm{e}^x]^{(n-1)} = [\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x,$ pre všetky $x \in R,\ n \in N.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k,\ x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.
- $f'(x) = \left[x^k\right]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

---

- $f'(x) = \left[x^k\right]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.
- $f''(x) = \left[x^k\right]'' = k(k-1)x^{k-2}$ , $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

---

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$ , $x \in R$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ , $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

**Funkcia $f(x) = x^k,\ x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.**

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

---

- $f'(x) = \left[x^k\right]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.
- $f''(x) = \left[x^k\right]'' = k(k-1)x^{k-2}$ , $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[x^k\right]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ , $x \in R$.

  $\ldots$
- $f^{(k-2)}(x) = \left[x^k\right]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2$ , $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

---

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$ , $x \in R$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ , $x \in R$.

  $\ldots$
- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2$ , $x \in R$.
- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2x$ , $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

---

- $f'(x) = \left[x^k\right]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.
- $f''(x) = \left[x^k\right]'' = k(k-1)x^{k-2}$ , $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[x^k\right]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ , $x \in R$.

...

- $f^{(k-2)}(x) = \left[x^k\right]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2$ , $x \in R$.
- $f^{(k-1)}(x) = \left[x^k\right]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2x$ , $x \in R$.
- $f^{(k)}(x) = \left[x^k\right]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$ , $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

---

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$ , $x \in R$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ , $x \in R$.

  $\ldots$
- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2$ , $x \in R$.
- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2x$ , $x \in R$.
- $f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$ , $x \in R$.

---

- $f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0$, $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$ , $x \in R$.

---

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$ , $x \in R$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$ , $x \in R$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ , $x \in R$.

  $\ldots$
- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2$ , $x \in R$.
- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2x$ , $x \in R$.
- $f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$ , $x \in R$.

---

- $f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0$, $x \in R$.

  $\ldots$
- $f^{(k+i)}(x) = [x^k]^{(k+i)} = 0$, $x \in R$ pre všetky $i \in N$. [Všetky nasledujúce derivácie sú nulové.]

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{k!}$, $x \in R$.

---

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1} \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{(k-1)!}$, $x \in R$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2} \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{(k-2)!}$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3} \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{(k-3)!}$, $x \in R$.

. . .

- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2 \qquad = \frac{k!x^2}{2!}$, $x \in R$.
- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2x \qquad = \frac{k!x^1}{1!}$, $x \in R$.
- $f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k! = \frac{k!x^0}{0!}$, $x \in R$.

---

- $f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0$, $x \in R$.

. . .

- $f^{(k+i)}(x) = [x^k]^{(k+i)} = 0$, $x \in R$ pre všetky $i \in N$. [Všetky nasledujúce derivácie sú nulové.]

---

$\Rightarrow$ • $[x^k]^{(n)} = \frac{k!x^{k-n}}{(k-n)!}$ pre $n = 0, 1, \ldots, k$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{k!}$, $x \in R$.

---

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1} \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{(k-1)!}$, $x \in R$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2} \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{(k-2)!}$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3} \qquad = \frac{k!x^{k-1}}{(k-3)!}$, $x \in R$.

$\ldots$

- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2 \qquad = \frac{k!x^2}{2!}$, $x \in R$.
- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2x \qquad = \frac{k!x^1}{1!}$, $x \in R$.
- $f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k! \qquad = \frac{k!x^0}{0!}$, $x \in R$.

---

- $f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0$, $x \in R$.

$\ldots$

- $f^{(k+i)}(x) = [x^k]^{(k+i)} = 0$, $x \in R$ pre všetky $i \in N$. [Všetky nasledujúce derivácie sú nulové.]

---

$\Rightarrow$ • $[x^k]^{(n)} = \frac{k!x^{k-n}}{(k-n)!}$ pre $n = 0, 1, \ldots, k$. • $[x^k]^{(n)} = 0$ pre $n = k+1, k+2, \ldots$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

**Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \left[\sin x\right]' = \cos x.$

**Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \left[\cos x\right]' = -\sin x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

**Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$

**Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x$.
- $f^{(1)}(x) = \left[\sin x\right]' = \cos x$.
- $f^{(2)}(x) = \left[\sin x\right]'' = -\sin x$.
- $f^{(3)}(x) = \left[\sin x\right]''' = -\cos x$.
- $f^{(4)}(x) = \sin x$.
- $f^{(5)}(x) = \cos x$.
- $f^{(6)}(x) = -\sin x$.

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x$.
- $f^{(1)}(x) = \left[\cos x\right]' = -\sin x$.
- $f^{(2)}(x) = \left[\cos x\right]'' = -\cos x$.
- $f^{(3)}(x) = \left[\cos x\right]''' = \sin x$.
- $f^{(4)}(x) = \cos x$.
- $f^{(5)}(x) = -\sin x$.
- $f^{(6)}(x) = -\cos x$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

**Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(7)}(x) = -\cos x.$

**Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(7)}(x) = \sin x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

**Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R$, rád derivácie $n \in N$.**

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(7)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(8)}(x) = \sin x.$
- $f^{(9)}(x) = \cos x.$
- $f^{(10)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(11)}(x) = -\cos x.$

**Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R$, rád derivácie $n \in N$.**

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(7)}(x) = \sin x.$
- $f^{(8)}(x) = \cos x.$
- $f^{(9)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(10)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(11)}(x) = \sin x.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(7)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(8)}(x) = \sin x.$
- $f^{(9)}(x) = \cos x.$
- $f^{(10)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(11)}(x) = -\cos x.$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(7)}(x) = \sin x.$
- $f^{(8)}(x) = \cos x.$
- $f^{(9)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(10)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(11)}(x) = \sin x.$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(7)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(8)}(x) = \sin x.$
- $f^{(9)}(x) = \cos x.$
- $f^{(10)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(11)}(x) = -\cos x.$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)}$ pričom $i \in N$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(7)}(x) = \sin x.$
- $f^{(8)}(x) = \cos x.$
- $f^{(9)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(10)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(11)}(x) = \sin x.$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)}$ pričom $i \in N$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(8)}(x) = \sin x.$
- $\cdots$
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(10)}(x) = -\sin x.$
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin x & \text{pre } n = 2k, \\ & \end{cases}$ pričom $k, i \in N,\ x \in R.$

Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(8)}(x) = \cos x.$
- $\cdots$
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(10)}(x) = -\cos x.$
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos x & \text{pre } n = 2k, \\ & \end{cases}$ pričom $k, i \in N,\ x \in R.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

**Funkcia $f(x) = \sin x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(9)}(x) = \cos x.$
- $\cdots$
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x.$
- $f^{(7)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(11)}(x) = -\cos x.$
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)} = \Big\{ (-1)^{k+1} \cdot \cos x$ pre $n = 2k-1,$ pričom $k, i \in N,\ x \in R.$

**Funkcia $f(x) = \cos x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$**

- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(9)}(x) = -\sin x.$
- $\cdots$
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x.$
- $f^{(7)}(x) = \sin x.$
- $f^{(11)}(x) = \sin x.$
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)} = \Big\{ (-1)^{k} \cdot \sin x$ pre $n = 2k-1,$ pričom $k, i \in N,\ x \in R.$

# Derivácie vyšších rádov – Príklady

## Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x$.
- $f^{(1)}(x) = \big[\sin x\big]' = \cos x$.
- $f^{(2)}(x) = \big[\sin x\big]'' = -\sin x$.
- $f^{(3)}(x) = \big[\sin x\big]''' = -\cos x$.
- $f^{(4)}(x) = \sin x$.
- $f^{(5)}(x) = \cos x$.
- $f^{(6)}(x) = -\sin x$.
- $f^{(7)}(x) = -\cos x$.
- $f^{(8)}(x) = \sin x$.
- $f^{(9)}(x) = \cos x$.
- $f^{(10)}(x) = -\sin x$.
- $f^{(11)}(x) = -\cos x$.
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin x & \text{pre } n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \cdot \cos x & \text{pre } n = 2k-1, \end{cases}$ pričom $k, i \in N$, $x \in R$.

## Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x$.
- $f^{(1)}(x) = \big[\cos x\big]' = -\sin x$.
- $f^{(2)}(x) = \big[\cos x\big]'' = -\cos x$.
- $f^{(3)}(x) = \big[\cos x\big]''' = \sin x$.
- $f^{(4)}(x) = \cos x$.
- $f^{(5)}(x) = -\sin x$.
- $f^{(6)}(x) = -\cos x$.
- $f^{(7)}(x) = \sin x$.
- $f^{(8)}(x) = \cos x$.
- $f^{(9)}(x) = -\sin x$.
- $f^{(10)}(x) = -\cos x$.
- $f^{(11)}(x) = \sin x$.
- $\cdots$

$\Rightarrow$ • $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos x & \text{pre } n = 2k, \\ (-1)^k \cdot \sin x & \text{pre } n = 2k-1, \end{cases}$ pričom $k, i \in N$, $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

[Leibnizov vzorec.]

---

[Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv'$ [Leibnizov vzorec.]

---

- $(u+v)^1 = u + v$ [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]

---

- $(u+v)^1 = u + v = u^1 v^0 + u^0 v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $$[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'') = u''v + 2u'v' + uv''$$

---

- $(u+v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
  $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.

---

- $(u+v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
  $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
  $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

---

- $(u+v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
  $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
  $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.

---

- $(u+v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

[Leibnizov vzorec.]

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$.
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'') = u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''') = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.

$\ldots$

- $[uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$

---

[Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

- $(u+v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$.
- $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.

$\ldots$

- $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$ $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$ $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.

. . .

- $[uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}v^{(k)}$ $= u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}$.

---

- $(u+v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.

. . .

- $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k}v^k = u^nv^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \cdots + nu^1v^{n-1} + u^0v^n$.

# Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie $u, v$ majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
  $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
  $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.

  $\ldots$
- $[uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}v^{(k)}$
  $= u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}$.

---

- $(u+v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.

  $\ldots$
- $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k}v^k = u^nv^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \cdots + nu^1v^{n-1} + u^0v^n$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 e^x\right]' = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x$, $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 \mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 \mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 \mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$.

[Leibnizov vzorec.]

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 \mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

---

- Označme $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$. [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[\mathrm{e}^x\right]^{(k)} = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 \mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

---

- Označme $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$. [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[\mathrm{e}^x\right]^{(k)} = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ pre $k = 0,1,2,\ldots$.
  - $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3,4,5,\ldots$.

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f'(x) = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

---

- Označme $u(x) = \mathrm{e}^x,\ v(x) = x^2,\ x \in R.$ [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[\mathrm{e}^x\right]^{(k)} = \mathrm{e}^x,\ x \in R$ pre $k = 0,1,2,\ldots.$
  - $v^{(0)} = x^2,\ v^{(1)}(x) = 2x,\ v^{(2)}(x) = 2,\ x \in R$ a $v^{(k)} = 0,\ x \in R$ pre $k = 3,4,5,\ldots.$

---

- $\left[x^2\mathrm{e}^x\right]^{(n)} = \left[\mathrm{e}^x \cdot x^2\right]^{(n)} = \left[uv\right]^{(n)}$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 \mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$. [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[\mathrm{e}^x\right]^{(k)} = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$.
  - $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \ldots$.

- $\left[x^2\mathrm{e}^x\right]^{(n)} = \left[\mathrm{e}^x \cdot x^2\right]^{(n)} = \left[uv\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\mathrm{e}^x\right]^{(n-k)} \cdot \left[x^2\right]^{(k)}$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2 e^x\right]' = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2+2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)e^x\right]' = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)e^x\right]' = (2x+4)e^x + (x^2+4x+2)e^x = (x^2+6x+6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)e^x\right]' = (2x+6)e^x + (x^2+6x+6)e^x = (x^2+8x+12)e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$. [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[e^x\right]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0,1,2,\ldots$.
  - $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3,4,5,\ldots$.

- $$\left[x^2 e^x\right]^{(n)} = \left[e^x \cdot x^2\right]^{(n)} = [uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[e^x\right]^{(n-k)} \cdot \left[x^2\right]^{(k)}$$
  $$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} e^x \cdot \left[x^2\right]^{(k)}$$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2\mathrm{e}^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f'(x) = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

---

- Označme $u(x) = \mathrm{e}^x,\ v(x) = x^2,\ x \in R.$ [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[\mathrm{e}^x\right]^{(k)} = \mathrm{e}^x,\ x \in R$ pre $k = 0,1,2,\ldots.$
  - $v^{(0)} = x^2,\ v^{(1)}(x) = 2x,\ v^{(2)}(x) = 2,\ x \in R$ a $v^{(k)} = 0,\ x \in R$ pre $k = 3,4,5,\ldots.$

---

- $\left[x^2\mathrm{e}^x\right]^{(n)} = \left[\mathrm{e}^x \cdot x^2\right]^{(n)} = \left[uv\right]^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\mathrm{e}^x\right]^{(n-k)} \cdot \left[x^2\right]^{(k)}$

  $= \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \mathrm{e}^x \cdot \left[x^2\right]^{(k)} = \binom{n}{0}\mathrm{e}^x \cdot x^2 + \binom{n}{1}\mathrm{e}^x \cdot 2x + \binom{n}{2}\mathrm{e}^x \cdot 2$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x,\ x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x\right]' = (2x+6)\mathrm{e}^x + (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x = (x^2+8x+12)\mathrm{e}^x,\ x \in R.$

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

---

- Označme $u(x) = \mathrm{e}^x,\ v(x) = x^2,\ x \in R.$ [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[\mathrm{e}^x\right]^{(k)} = \mathrm{e}^x,\ x \in R$ pre $k = 0,1,2,\ldots$.
  - $v^{(0)} = x^2,\ v^{(1)}(x) = 2x,\ v^{(2)}(x) = 2,\ x \in R$ a $v^{(k)} = 0,\ x \in R$ pre $k = 3,4,5,\ldots$.

---

- $$\left[x^2\mathrm{e}^x\right]^{(n)} = \left[\mathrm{e}^x \cdot x^2\right]^{(n)} = \left[uv\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\mathrm{e}^x\right]^{(n-k)} \cdot \left[x^2\right]^{(k)}$$
  $$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \mathrm{e}^x \cdot \left[x^2\right]^{(k)} = \binom{n}{0}\mathrm{e}^x \cdot x^2 + \binom{n}{1}\mathrm{e}^x \cdot 2x + \binom{n}{2}\mathrm{e}^x \cdot 2$$
  $$= 1 \cdot x^2\mathrm{e}^x + n \cdot 2x\mathrm{e}^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2\mathrm{e}^x$$

# Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x,\ x \in R,$ rád derivácie $n \in N.$

- $f'(x) = \left[x^2 e^x\right]' = 2xe^x + x^2 e^x = (x^2+2x)e^x,\ x \in R.$
- $f''(x) = \left[(x^2+2x)e^x\right]' = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x,\ x \in R.$
- $f'''(x) = \left[(x^2+4x+2)e^x\right]' = (2x+4)e^x + (x^2+4x+2)e^x = (x^2+6x+6)e^x,\ x \in R.$
- $f''''(x) = \left[(x^2+6x+6)e^x\right]' = (2x+6)e^x + (x^2+6x+6)e^x = (x^2+8x+12)e^x,\ x \in R.$

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x,\ v(x) = x^2,\ x \in R.$ [Leibnizov vzorec.]
  - $u^{(k)} = \left[e^x\right]^{(k)} = e^x,\ x \in R$ pre $k = 0,1,2,\ldots.$
  - $v^{(0)} = x^2,\ v^{(1)}(x) = 2x,\ v^{(2)}(x) = 2,\ x \in R$ a $v^{(k)} = 0,\ x \in R$ pre $k = 3,4,5,\ldots.$

- $$\left[x^2 e^x\right]^{(n)} = \left[e^x \cdot x^2\right]^{(n)} = \left[uv\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[e^x\right]^{(n-k)} \cdot \left[x^2\right]^{(k)}$$
  $$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} e^x \cdot \left[x^2\right]^{(k)} = \binom{n}{0} e^x \cdot x^2 + \binom{n}{1} e^x \cdot 2x + \binom{n}{2} e^x \cdot 2$$
  $$= 1 \cdot x^2 e^x + n \cdot 2xe^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2e^x = \left[x^2 + 2nx + n(n-1)\right]e^x,\ x \in R \text{ pre } n \in N.$$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:

- $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:

- $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:

- $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)}$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:

- $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$y = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\ ,\ t \in J.$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t)$,
$y = \psi(t),\ t \in J$.

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]

$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J$. [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:

- $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$y = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$y = \dfrac{\chi'(t)}{\varphi'(t)}$ $,\ t \in J.$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)},\ t \in J.$$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:
- $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)},\ t \in J.$$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0; \infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0;\infty).$

• $f'\colon x = \sqrt{t^3},$ $\quad , t \in (0;\infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y=f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x=\varphi(t),$
$y=\psi(t),\ t\in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d\psi(t)}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\varphi(t)}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t\in J.$

$\Rightarrow$ • $f'\colon x=\varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\chi(t),\ t\in J.$$

[Označenie $\chi(t)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x=\varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y=\frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t\in J.$$

Funkcia $y=f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x=\sqrt{t^3}=t^{\frac{3}{2}},\ y=t^2,\ t\in(0;\infty).$

• $f'\colon x=\sqrt{t^3},\ y=\dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'}$ $,\ t\in(0;\infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

$\left[\text{Označenie } \chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.\right]$

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0; \infty).$

• $f'\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}$ $,\ t \in (0; \infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0;\infty).$

• $f'\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3}t^{\frac{1}{2}},\ t \in (0;\infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:
- $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0; \infty).$

- $f'\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{2t}{\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3} t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{t},\ t \in (0; \infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:

- $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0; \infty).$

- $f'\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{2t}{\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3} t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{t},\ t \in (0; \infty).$

- $f''\colon x = \sqrt{t^3},$ $\qquad , \ t \in (0; \infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0; \infty).$

• $f'\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{2t}{\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3} t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{t},\ t \in (0; \infty).$

• $f''\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{\left(\frac{4}{3} t^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'}$ $,\ t \in (0; \infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y=f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x=\varphi(t),$
$y=\psi(t),\ t\in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t\in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x=\varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\chi(t),\ t\in J.$$

[Označenie $\chi(t)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x=\varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y=\frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t\in J.$$

Funkcia $y=f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x=\sqrt{t^3}=t^{\frac{3}{2}},\ y=t^2,\ t\in(0;\infty).$

- $f'\colon x=\sqrt{t^3},\ y=\dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'}=\dfrac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{t},\ t\in(0;\infty).$
- $f''\colon x=\sqrt{t^3},\ y=\dfrac{\left(\frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'}=\dfrac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}\qquad,\ t\in(0;\infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$ • $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$ • $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0; \infty).$

- $f'\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{2t}{\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3} t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{t},\ t \in (0; \infty).$
- $f''\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{\left(\frac{4}{3} t^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{9} t^{-1},\ t \in (0; \infty).$

# Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \varphi(t),$
$y = \psi(t),\ t \in J.$

Pre deriváciu platí:

- $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

$\Rightarrow$

- $f'\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t),\ t \in J.$$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

$\Rightarrow$

- $f''\colon x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]

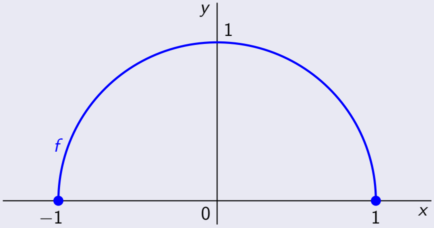
$$y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J.$$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f\colon x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}},\ y = t^2,\ t \in (0;\infty).$

- $f'\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{(t^2)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3}t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{t},\ t \in (0;\infty).$
- $f''\colon x = \sqrt{t^3},\ y = \dfrac{\left(\frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \dfrac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{9}t^{-1} = \dfrac{4}{9t},\ t \in (0;\infty).$

# Na záver – Príklad

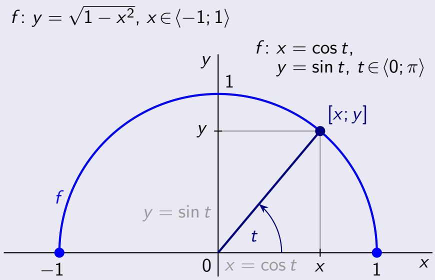
Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.



# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]

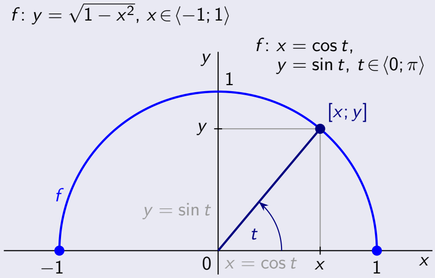



- $f\colon x = \cos t$,
  $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$. [Parametrický tvar.]

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x),\ y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}},\ x \in \langle -1; 1 \rangle.$ [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$

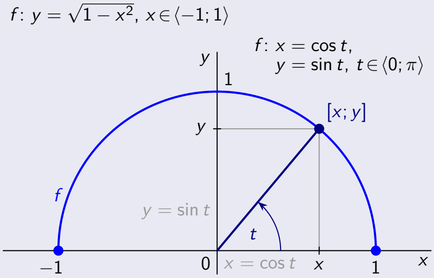



- $f\colon x = \cos t,$
  $y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi \rangle.$ [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t,$
  $y = \dfrac{[\sin t]'}{[\cos t]'}$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x),\ y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}},\ x \in \langle -1; 1\rangle.$ [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

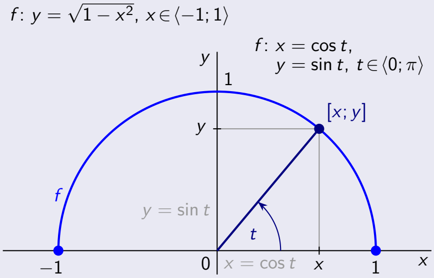



- $f\colon x = \cos t,$ [Parametrický tvar.]
  $y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi\rangle.$
- $f'\colon x = \cos t,$
  $y = \dfrac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\dfrac{\cos t}{\sin t}$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

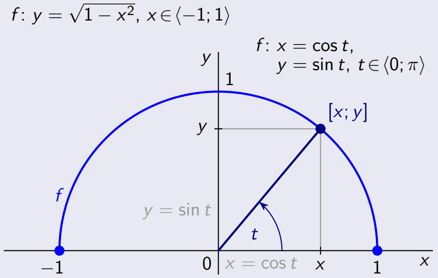



- $f\colon x = \cos t$, [Parametrický tvar.]
  $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$.
- $f'\colon x = \cos t$,
  $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{cotg} t$,
  $t \in (0; \pi)$.

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$



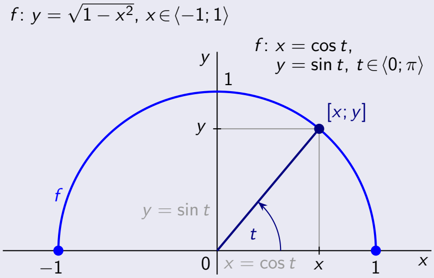

- $f\colon x = \cos t,$ [Parametrický tvar.]
  $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$.
- $f'\colon x = \cos t,$
  $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{cotg} t,$
  $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t,$
  $y = \frac{[-\operatorname{cotg} t]'}{[\cos t]'}$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

---

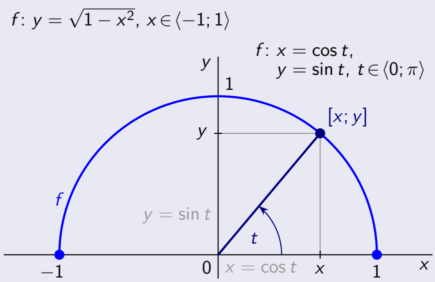



- $f\colon x = \cos t$, [Parametrický tvar.]
  $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$.
- $f'\colon x = \cos t$,
  $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{cotg} t$,
  $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$,
  $y = \frac{[-\operatorname{cotg} t]'}{[\cos t]'} = \frac{-(-\frac{1}{\sin^2 t})}{-\sin t}$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$
  $= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.




- $f\colon x = \cos t$,
  $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$. [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t$,
  $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{cotg} t$,
  $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$,
  $y = \frac{[-\operatorname{cotg} t]'}{[\cos t]'} = \frac{-(-\frac{1}{\sin^2 t})}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$,
  $t \in (0; \pi)$.

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x),\ y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1.$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]

---

- $f\colon x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi \rangle$. [Parametrický tvar.]

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle -1; 1 \rangle.$ [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1).$

---

- $f\colon x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi \rangle.$ [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t,\ y = -\frac{\cos t}{\sin t},\ t \in (0; \pi).$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

---

- $f\colon x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$. [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

# Na záver – Príklad

## Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

---

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$.

---

- $f\colon x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$. [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

---

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$,

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

  - Funkčné hodnoty v bode $x = 0$.

- $f\colon x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$. [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

  - Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. $\Rightarrow$ • $f(0) = 1$.

- $f\colon x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$. [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

  $\Rightarrow$ • $f(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. $\Rightarrow$ • $f(0) = 1$. • $f'(0) = 0$.

- $f\colon x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$. [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

  $\Rightarrow$ • $f(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. • $f'(0) = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = 0$.

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x),\ y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1-x^2},\ x \in \langle -1; 1\rangle.$ [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1).$
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\ x \in (-1; 1).$

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. $\Rightarrow$ • $f(0) = 1$. • $f'(0) = 0$. • $f''(0) = -1$.

- $f\colon x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi\rangle.$ [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t,\ y = -\frac{\cos t}{\sin t},\ t \in (0; \pi).$
- $f''\colon x = \cos t,\ y = -\frac{1}{\sin^3 t},\ t \in (0; \pi).$

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0,\ t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

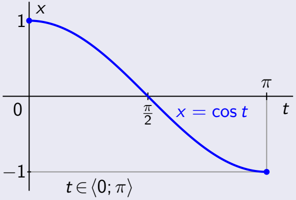
  $\Rightarrow$ • $f(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. • $f'(0) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$. • $f''(0) = -\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{2}} = -1$.

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x),\ y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

[Explicitný tvar.]

- $f\colon x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi \rangle.$ [Parametrický tvar.]



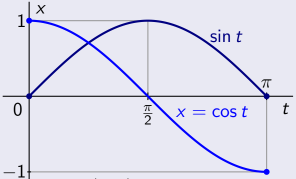

- $\cos t = x,\ t \in \langle 0; \pi \rangle,$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

[Explicitný tvar.]

- $f\colon x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi \rangle.$ [Parametrický tvar.]




$t \in \langle 0; \pi \rangle \Rightarrow \sin t \geq 0$

$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$

- $\cos t = x,\ t \in \langle 0; \pi \rangle,$

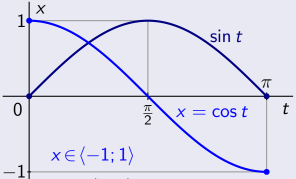
$\Rightarrow$ • $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}.$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$. [Explicitný tvar.]

- $f\colon x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$. [Parametrický tvar.]




$t \in \langle 0; \pi\rangle \Rightarrow \sin t \geq 0$

$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$

- $\cos t = x$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$,

$\Rightarrow$ • $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$.

- $f\colon y = \sin t = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$.

# Na záver – Príklad

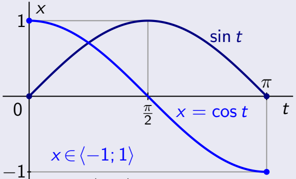
Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle -1; 1\rangle.$ [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1).$

---

- $f\colon x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi\rangle.$ [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t,\ y = -\frac{\cos t}{\sin t},\ t \in (0; \pi).$

---




$t \in \langle 0; \pi\rangle \Rightarrow \sin t \geq 0$

$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$

- $\cos t = x,\ t \in \langle 0; \pi\rangle,\ \sin 0 = \sin \pi = 0.$

  $\Rightarrow$ • $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}.$

---

- $f\colon y = \sin t = \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle -1; 1\rangle.$
- $f'\colon y = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1).$

# Na záver – Príklad

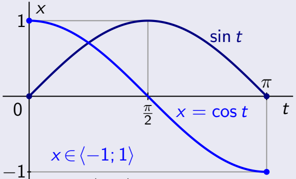
Nezáporná polkružnica $y = f(x),\ y \geq 0$ so stredom v bode $[0;0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f\colon y = \sqrt{1-x^2},\ x \in \langle -1;1\rangle.$ [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1;1).$
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\ x \in (-1;1).$

---

- $f\colon x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0;\pi\rangle.$ [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t,\ y = -\frac{\cos t}{\sin t},\ t \in (0;\pi).$
- $f''\colon x = \cos t,\ y = -\frac{1}{\sin^3 t},\ t \in (0;\pi).$

---




$t \in \langle 0;\pi\rangle \Rightarrow \sin t \geq 0$

$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}$

- $\cos t = x,\ t \in \langle 0;\pi\rangle,\ \sin 0 = \sin\pi = 0.$

$\Rightarrow$ • $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}.$

- $f\colon y = \sin t = \sqrt{1-x^2},\ x \in \langle -1;1\rangle.$
- $f'\colon y = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1;1).$
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sin^3 t} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\ x \in (-1;1).$

# Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

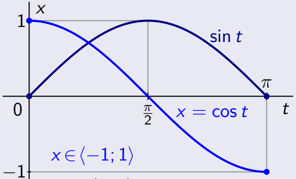
- $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f'\colon y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. $\Rightarrow$ • $f(0) = 1$. • $f'(0) = 0$. • $f''(0) = -1$.

- $f\colon x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$. [Parametrický tvar.]
- $f'\colon x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.
- $f''\colon x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

  $\Rightarrow$ • $f(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. • $f'(0) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$. • $f''(0) = -\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{2}} = -1$.




$t \in \langle 0; \pi\rangle \Rightarrow \sin t \geq 0$

$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$

- $\cos t = x$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$, $\sin 0 = \sin\pi = 0$.

  $\Rightarrow$ • $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$.

- $f\colon y = \sin t = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1\rangle$.
- $f'\colon y = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.
- $f''\colon y = -\frac{1}{\sin^3 t} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

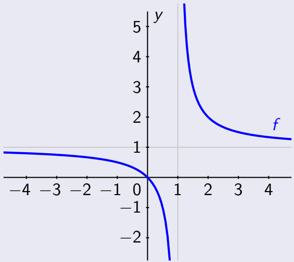
# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

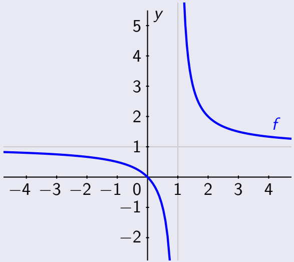
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1},\ x\in R-\{1\}.$
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2},\ x\in R-\{1\}.$



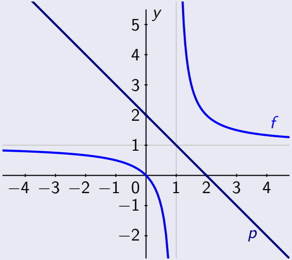
# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.



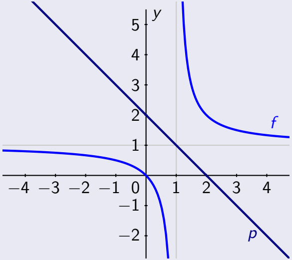
# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

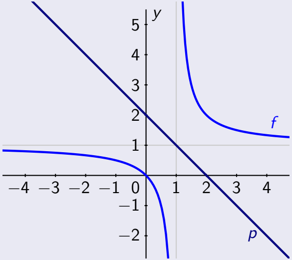
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné,



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y=2-x$.

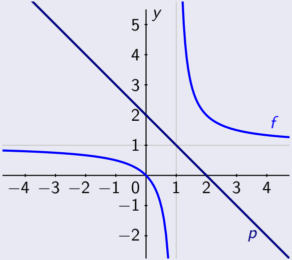
- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1},\ x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2},\ x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1=f'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-1)^2}$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

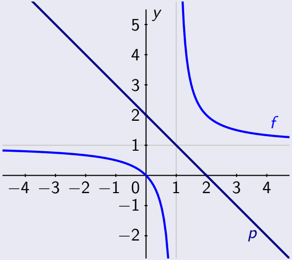
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

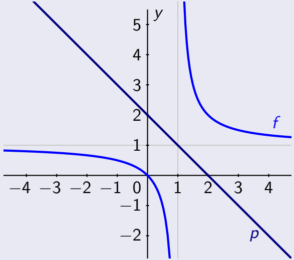
- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1=f'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2}=-1$, t. j. $(x_0-1)^2=1$ má dve riešenia:

---

- $x_0-1=-1$.

---

- $x_0-1=+1$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

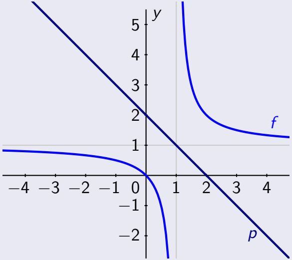
- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

---

- $x_0 - 1 = -1.$ $\Rightarrow$ • $x_0 = 0.$

---

- $x_0 - 1 = +1.$



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

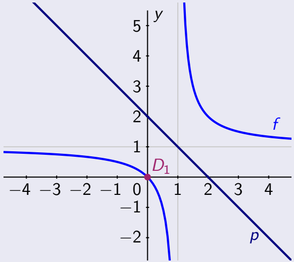
- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

---

- $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$
  - $x_0 = 0.$
  - Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.

---

- $x_0 - 1 = +1.$



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

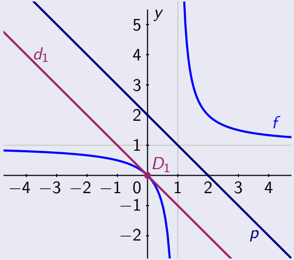
- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1=f'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2}=-1$, t. j. $(x_0-1)^2=1$ má dve riešenia:

---

- $x_0-1=-1$. $\Rightarrow$
  - $x_0=0$.
  - Dotykový bod $D_1=[0; f(0)]=[0; 0]$.
- Dotyčnica $d_1\colon y=0+(-1)\cdot(x-0)=-x$, $x\in R$.

---

- $x_0-1=+1$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

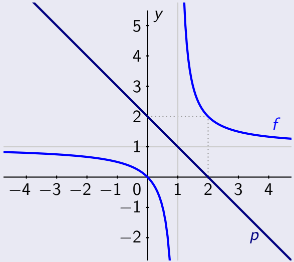
- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

---

- $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$
  - $x_0 = 0$.
  - Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.
- Dotyčnica $d_1\colon y = 0 + (-1)\cdot(x - 0) = -x$, $x \in R$.

---

- $x_0 - 1 = +1. \Rightarrow$
  - $x_0 = 2$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

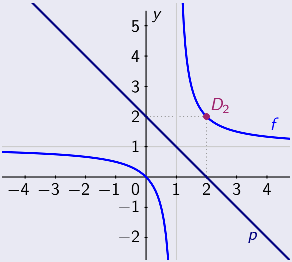
- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

---

- $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$
  - $x_0 = 0.$
  - Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.
- Dotyčnica $d_1\colon y = 0 + (-1) \cdot (x - 0) = -x$, $x \in R$.

---

- $x_0 - 1 = +1. \Rightarrow$
  - $x_0 = 2.$
  - Dotykový bod $D_2 = [2; f(2)] = [2; 2]$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

---

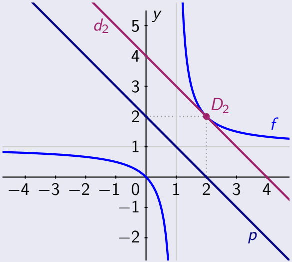
- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

---

- $x_0 - 1 = -1$. $\Rightarrow$
  - $x_0 = 0$.
  - Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.
- Dotyčnica $d_1\colon y = 0 + (-1)\cdot(x - 0) = -x$, $x \in R$.

---

- $x_0 - 1 = +1$. $\Rightarrow$
  - $x_0 = 2$.
  - Dotykový bod $D_2 = [2; f(2)] = [2; 2]$.
- Dotyčnica $d_2\colon y = 2 + (-1)\cdot(x - 2) = 4 - x$, $x \in R$.



# Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p\colon y = 2 - x$.

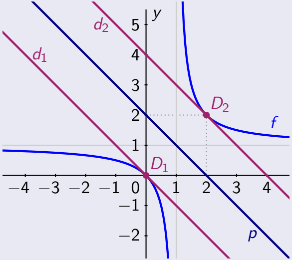
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

  - Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $-1$.
  - Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

- Priamky $p$, $d$ sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

  - $x_0 - 1 = -1$. $\Rightarrow$
    - $x_0 = 0$.
    - Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.
  - Dotyčnica $d_1\colon y = 0 + (-1) \cdot (x - 0) = -x$, $x \in R$.

  - $x_0 - 1 = +1$. $\Rightarrow$
    - $x_0 = 2$.
    - Dotykový bod $D_2 = [2; f(2)] = [2; 2]$.
  - Dotyčnica $d_2\colon y = 2 + (-1) \cdot (x - 2) = 4 - x$, $x \in R$.



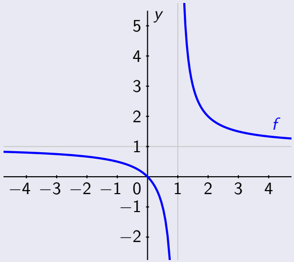
# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y = 2 - x$.

# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y = 2 - x$.

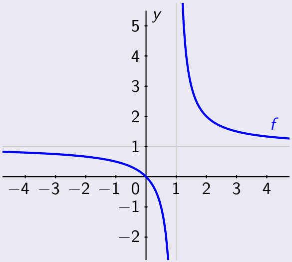
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},\ x \in R - \{1\}.$
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2},\ x \in R - \{1\}.$



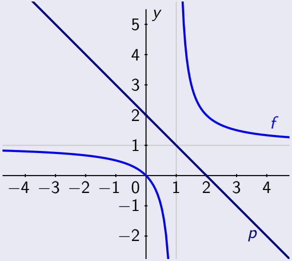
# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1},\ x\in R-\{1\}.$
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2},\ x\in R-\{1\}.$

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.



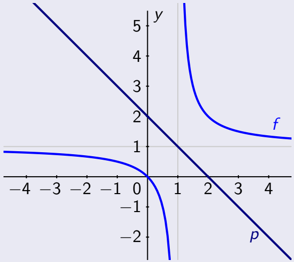
# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$



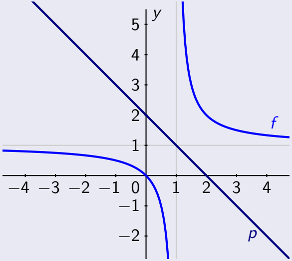
# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
  smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y = 2 - x$.

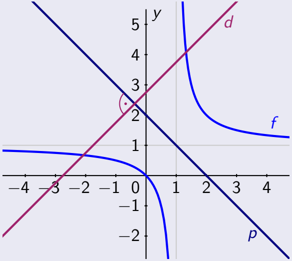
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$
  smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé,



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

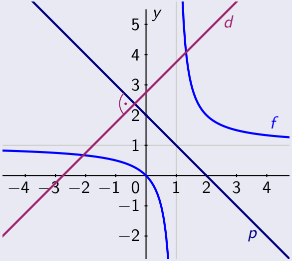
- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1},\ x\in R-\{1\}.$
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2},\ x\in R-\{1\}.$

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
  smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p,v_d)=((1;s_p),(1;s_d))=0$.



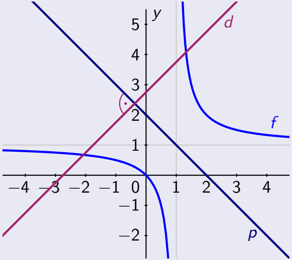
# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

  - Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
  - Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
    smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p,v_d)=((1;s_p),(1;s_d))=0$.
- Potom platí: $0=((1;s_p),(1;s_d))=((1;-1),(1;f'(x_0)))$



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

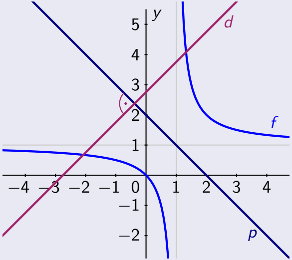
---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
  smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p,v_d)=((1;s_p),(1;s_d))=0$.
- Potom platí: $0=((1;s_p),(1;s_d))=((1;-1),(1;f'(x_0)))$

$$=1\cdot 1+(-1)\cdot f'(x_0)=1-f'(x_0)=1-\frac{-1}{(x_0-1)^2}.$$



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je **kolmá** na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

  smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

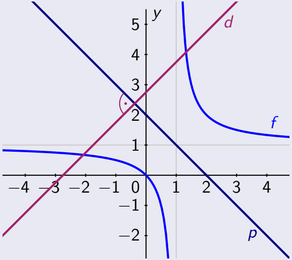
---

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p,v_d)=((1;s_p),(1;s_d))=0$.
- Potom platí: $0=((1;s_p),(1;s_d))=((1;-1),(1;f'(x_0)))$

$$=1\cdot 1+(-1)\cdot f'(x_0)=1-f'(x_0)=1-\frac{-1}{(x_0-1)^2}.$$

---

Pre všetky $x_0\in R$, $x_0\neq 1$ platí $(x_0-1)^2>0$.



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

  smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

---

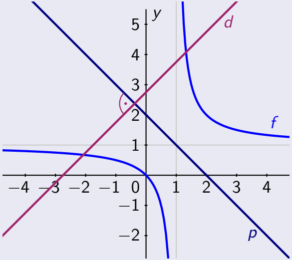
- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p,v_d)=((1;s_p),(1;s_d))=0$.
- Potom platí: $0=((1;s_p),(1;s_d))=((1;-1),(1;f'(x_0)))$

  $$=1\cdot 1+(-1)\cdot f'(x_0)=1-f'(x_0)=1-\frac{-1}{(x_0-1)^2}.$$

---

Pre všetky $x_0\in R$, $x_0\neq 1$ platí $(x_0-1)^2>0$.

$\Rightarrow$ • $1-f'(x_0)=1+\frac{1}{(x_0-1)^2}>1+0=1$.



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in R - \{1\}$.

---

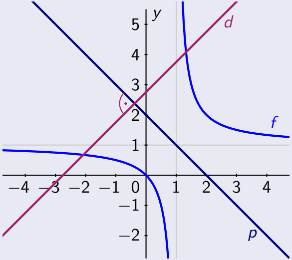
- Priamka $p\colon y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.
- Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$

$$= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f'(x_0) = 1 - f'(x_0) = 1 - \frac{-1}{(x_0-1)^2}.$$




---

Pre všetky $x_0 \in R$, $x_0 \neq 1$ platí $(x_0 - 1)^2 > 0$.

$\Rightarrow$ • $1 - f'(x_0) = 1 + \frac{1}{(x_0-1)^2} > 1 + 0 = 1$.

$\Rightarrow$ • Rovnica $0 = 1 - f'(x_0)$ nemá reálne riešenie

# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

  smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p,v_d)=((1;s_p),(1;s_d))=0$.
- Potom platí: $0=((1;s_p),(1;s_d))=((1;-1),(1;f'(x_0)))$

$$=1\cdot 1+(-1)\cdot f'(x_0)=1-f'(x_0)=1-\frac{-1}{(x_0-1)^2}.$$

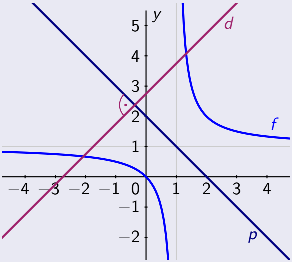
---

Pre všetky $x_0\in R$, $x_0\neq 1$ platí $(x_0-1)^2>0$.

$\Rightarrow$ • $1-f'(x_0)=1+\frac{1}{(x_0-1)^2}>1+0=1$.

$\Rightarrow$ • Rovnica $0=1-f'(x_0)$ nemá reálne riešenie

a dotyčnica $d$ s danými vlastnosťami neexistuje.



# Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice $d$ ku grafu funkcie $f\colon y=\frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p\colon y=2-x$.

- $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$.
- $f'(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]'=0+\frac{0-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, $x\in R-\{1\}$.

---

- Priamka $p\colon y=2-x$ má smernicu $s_p=-1$ a smerový vektor $v_p=(1;s_p)=(1;-1)$.
- Dotyčnica k funkcii $f$ v bode $[x_0;f(x_0)]$ má tvar $d\colon y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
  smernicu $s_d=f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d=(1;s_d)=(1;f'(x_0))=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

---

- Priamky $p$, $d$ sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p,v_d)=((1;s_p),(1;s_d))=0$.
- Potom platí: $0=((1;s_p),(1;s_d))=((1;-1),(1;f'(x_0)))$
  $$=1\cdot 1+(-1)\cdot f'(x_0)=1-f'(x_0)=1-\frac{-1}{(x_0-1)^2}.$$

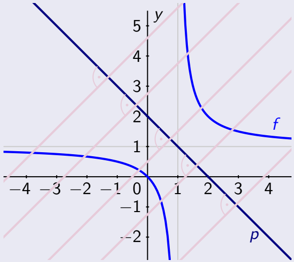
---

Pre všetky $x_0\in R$, $x_0\neq 1$ platí $(x_0-1)^2>0$.

$\Rightarrow$ • $1-f'(x_0)=1+\frac{1}{(x_0-1)^2}>1+0=1$.

$\Rightarrow$ • Rovnica $0=1-f'(x_0)$ nemá reálne riešenie

a dotyčnica $d$ s danými vlastnosťami **neexistuje.**



# Koniec 8. časti

Ďakujem za pozornosť.