

Matematická analýza 1

2023/2024

9. Priebeh funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Monotónnosť a extrémny funkcie
- 2 Konvexnosť a konkávnosť funkcie
- 3 Asymptotické vlastnosti funkcií
- 4 Vyšetrenie priebehu funkcie

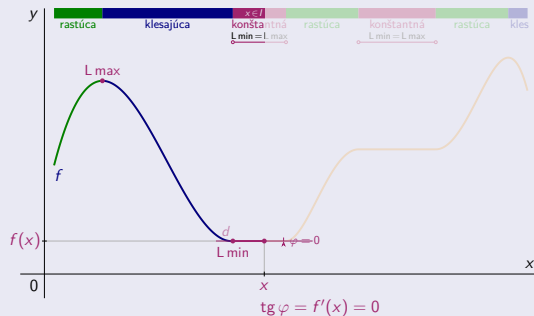
Monotónnosť a extrémny funkcie – Monotónnosť

Spojité funkcie f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Monotónnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I :
 • konštantná. \Leftrightarrow Pre všetky $x \in I$ platí: • $f'(x) = 0$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Monotónnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

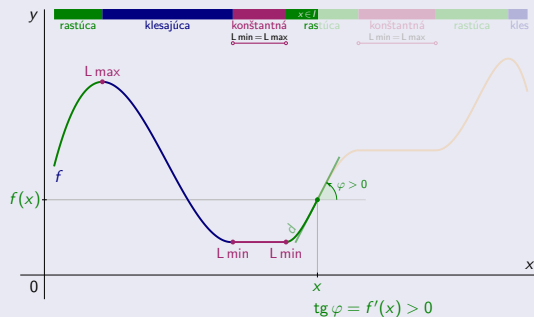
Funkcia f je na intervale I :

Pre všetky $x \in I$ platí:

● rastúca.

\Leftrightarrow

● $f'(x) > 0$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Monotónnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

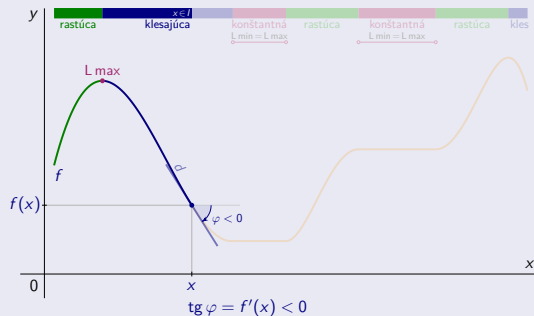
Funkcia f je na intervale I :

Pre všetky $x \in I$ platí:

• klesajúca.

\Leftrightarrow

• $f'(x) < 0$.



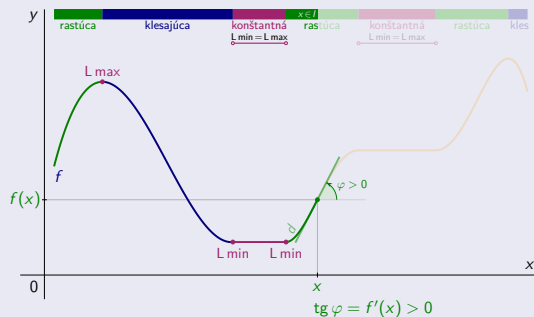
Monotónnosť a extrémny funkcie – Monotónnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

Pre všetky $x \in I$ platí:

- rastúca. \Leftrightarrow ● $f'(x) > 0$.
- neklesajúca. \Leftrightarrow ● $f'(x) \geq 0$.



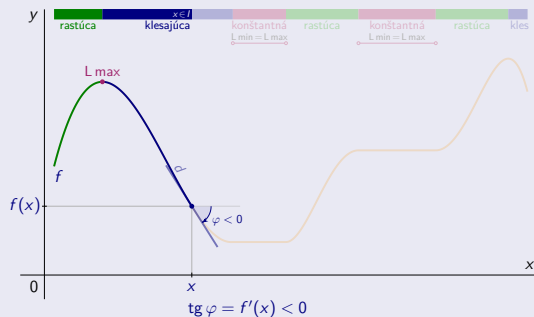
Monotónnosť a extrémny funkcie – Monotónnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

Pre všetky $x \in I$ platí:

- klesajúca. \Leftrightarrow • $f'(x) < 0$.
- nerastúca. \Leftrightarrow • $f'(x) \leq 0$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Monotónnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

• konštantná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f'(x) = 0$.
• rastúca.	\Leftrightarrow		• $f'(x) > 0$.
• neklesajúca.	\Leftrightarrow		• $f'(x) \geq 0$.
• klesajúca.	\Leftrightarrow		• $f'(x) < 0$.
• nerastúca.	\Leftrightarrow		• $f'(x) \leq 0$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

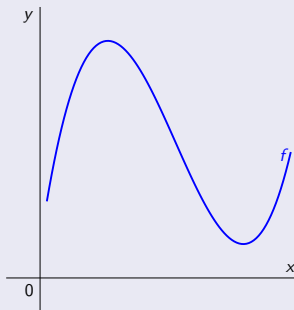
Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode



Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

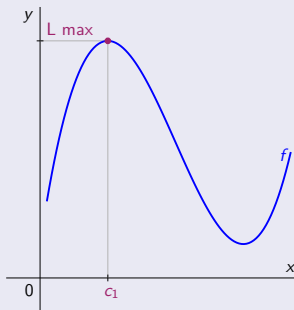
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,



Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

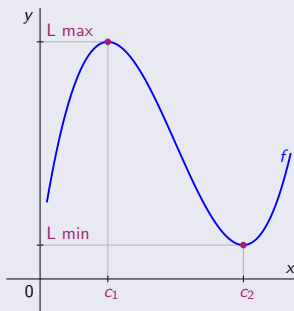
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

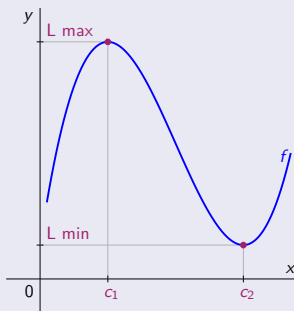
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .



Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

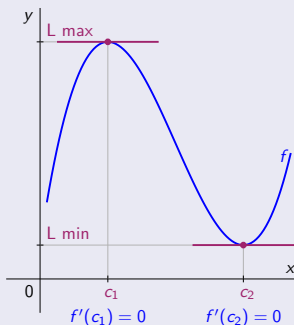
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- \Rightarrow • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]



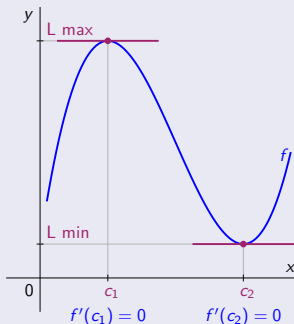
Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- \Rightarrow • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

[Viď PrI.]



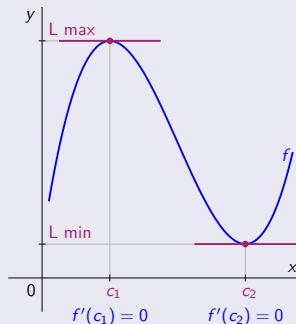
Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- $$\left. \right\} \Rightarrow \bullet f'(c) = 0. \quad [\text{Nulová derivácia.}]$$

• Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému. [Vid' PrI.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať. [Vid' PrI.]



Monotónnosť a extrémny funkcie – NP \Rightarrow existencie lokálneho extrémnu

Nutná podmienka existencie lokálneho extrémnu funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- $$\left. \right\} \Rightarrow \bullet f'(c) = 0. \quad [\text{Nulová derivácia.}]$$

• Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrémnu. [Vid' Pr I.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať. [Vid' Pr I.]



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow • $f'(c) = 0$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.

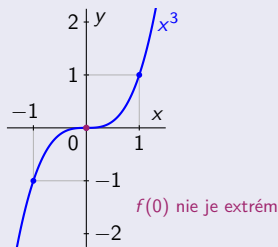
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrém funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f(0) = 0$.

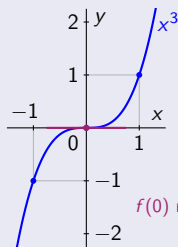
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrém funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

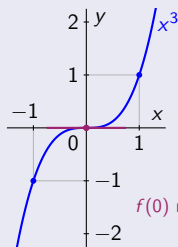
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



$f(0)$ nie je extrém

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

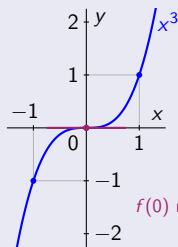
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



$f(0)$ nie je extrém

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

- To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. \Rightarrow Platí $f'(c) = 0$.

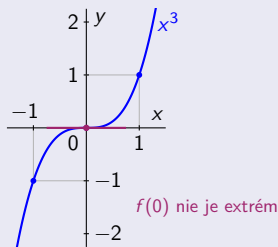
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

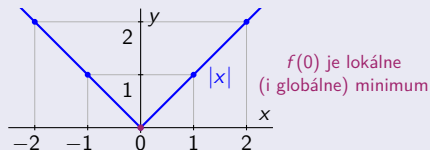
- $f(x) = x^3$. • $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 3x^2$. • $f'(0) = 0$.

• Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.

• To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. \Rightarrow Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

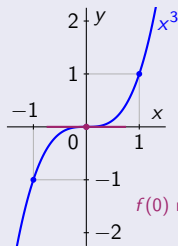
- $f(0) = 0$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

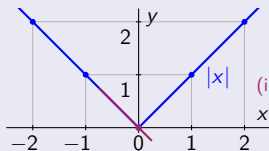
- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

• Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.

• To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. \Rightarrow Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.

- $f(0) = 0$.

$$x \in (-\infty; 0)$$

- $f'(x) = [-x]' = -1$.

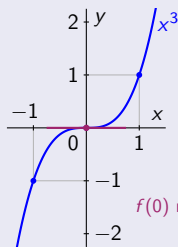
- $f'_-(0) = -1$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

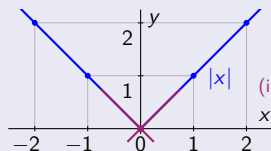
- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

• Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.

• To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. \Rightarrow Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$.

$x \in \langle -\infty; 0 \rangle$

$x \in \langle 0; \infty \rangle$

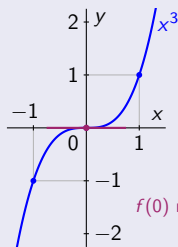
- $f'(x) = [-x]' = -1$.
- $f'_-(0) = -1$.
- $f'(x) = [x]' = 1$.
- $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



$f(0)$ nie je extrém

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

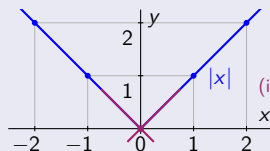
- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

• Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.

• To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. \Rightarrow Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



$f(0)$ je lokálne
(i globálne) minimum

- $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$.

$x \in (-\infty; 0)$

$x \in (0; \infty)$

- $f'(x) = [-x]' = -1$.
- $f'(x) = [x]' = 1$.
- $f'_-(0) = -1$.
- $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém

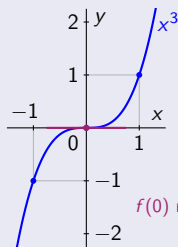
a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. \Rightarrow $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

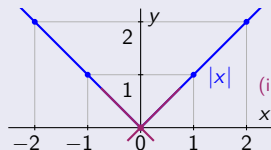
- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

• Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.

• To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. \Rightarrow Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$.

$x \in (-\infty; 0)$

$x \in (0; \infty)$

- $f'(x) = [-x]' = -1$.
- $f'_-(0) = -1$.
- $f'(x) = [x]' = 1$.
- $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém

a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

• To znamená, že pri hľadani lokálnych extrémov

musíme overiť aj všetky body, v ktorých derivácia neexistuje.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f ,



Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f



Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.
- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:



Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.
- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body)

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.
- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body)
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.
- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body)
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje
 - Určiť všetky hraničné body $c \in D(f)$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.
- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
 - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémny

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémny a porovnať ich medzi sebou.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f znamená určiť všetky jej **lokálne extrémny** a porovnať ich medzi sebou.

[Globálne extrémny (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset \mathbb{R}$.

[Rastúca resp. klesajúca.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojité ale aj nespojité.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f znamená určiť všetky jej **lokálne extrémny** a porovnať ich medzi sebou.

[Globálne extrémny (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je spojité a rýdzo monotónna na intervale $I \subset \mathbb{R}$.

[Rastúca resp. klesajúca.]

\Rightarrow • Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f znamená určiť všetky jej **lokálne extrémny** a porovnať ich medzi sebou.

[Globálne extrémny (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je **spojitá** a **rýdzo monotónna** na intervale $I \subset \mathbb{R}$.

[Rastúca resp. klesajúca.]

- ⇒
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.
 - Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f znamená určiť všetky jej **lokálne extrémny** a porovnať ich medzi sebou.

[Globálne extrémny (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je **spojitá** a **rýdzo monotónna** na intervale $I \subset \mathbb{R}$.

[Rastúca resp. klesajúca.]

- ⇒
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.
 - Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f , ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémny** funkcie f znamená:

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

[V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]

- Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

[V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]

- Určiť všetky **hraničné** body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

[V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť **globálne extrémny** funkcie f znamená určiť všetky jej **lokálne extrémny** a porovnať ich medzi sebou.

[Globálne extrémny (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je **spojitá** a **rýdzo monotónna** na intervale $I \subset \mathbb{R}$.

[Rastúca resp. klesajúca.]

- \Rightarrow
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.
 - Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval. Potom by bola funkcia na tomto podintervale konštantná a nie rýdzomonotónna.] [Vid Mon.]

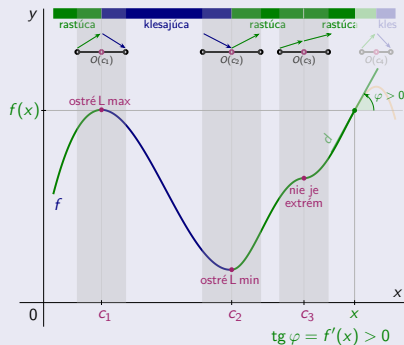
Monotónnosť a extrémny funkcie – PP \leftarrow existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Monotónnosť a extrémny funkcie – PP \Leftarrow existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

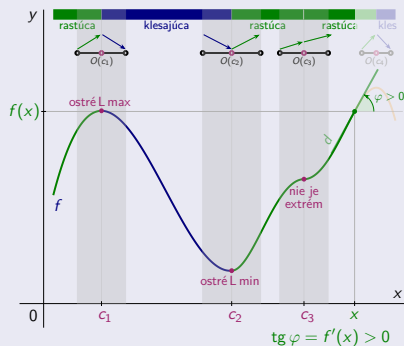
Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$,



Monotónnosť a extrémny funkcie – PP \Leftarrow existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

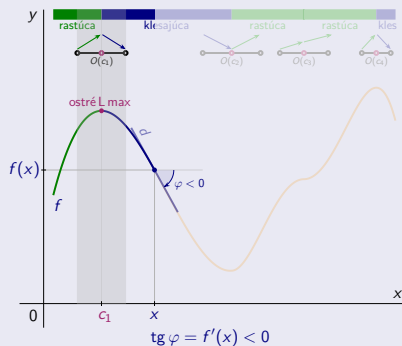


Monotónnosť a extrémny funkcie – PP \Leftarrow existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: $\bullet f'(x) > 0$ a pre $c < x$: $\bullet f'(x) < 0$. $\Rightarrow \bullet f(c)$ je ostré lokálne maximum.

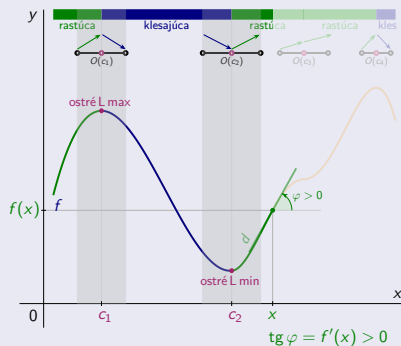


Monotónnosť a extrémny funkcie – PP \leftarrow existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: $\bullet f'(x) > 0$ a pre $c < x$: $\bullet f'(x) < 0 \Rightarrow \bullet f(c)$ je ostré lokálne maximum.
 $\bullet f'(x) < 0$ $\bullet f'(x) > 0 \Rightarrow \bullet f(c)$ je ostré lokálne minimum.



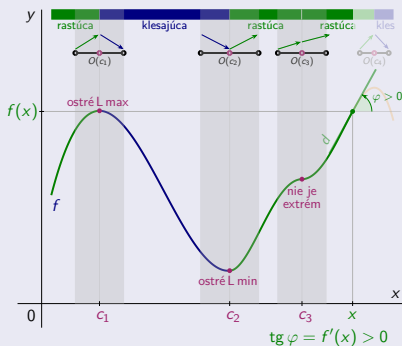
Monotónnosť a extrémny funkcie – PP \Leftarrow existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: $\bullet f'(x) > 0$ a pre $c < x$: $\bullet f'(x) < 0$. \Rightarrow $\bullet f(c)$ je ostré lokálne maximum.
 $\bullet f'(x) < 0$ $\bullet f'(x) > 0$. \Rightarrow $\bullet f(c)$ je ostré lokálne minimum.

Pre $x \neq c$: $\bullet f'(x) > 0$, resp. $\bullet f'(x) < 0$. \Rightarrow $\bullet f(c)$ nie je lokálny extrém.



Monotónnosť a extrémny funkcie – PP \Leftarrow existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: $\bullet f'(x) > 0$ a pre $c < x$: $\bullet f'(x) < 0. \Rightarrow \bullet f(c)$ je ostré lokálne maximum.
 $\bullet f'(x) < 0$ $\bullet f'(x) > 0. \Rightarrow \bullet f(c)$ je ostré lokálne minimum.

Pre $x \neq c$: $\bullet f'(x) > 0$, resp. $\bullet f'(x) < 0. \Rightarrow \bullet f(c)$ nie je lokálny extrém.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

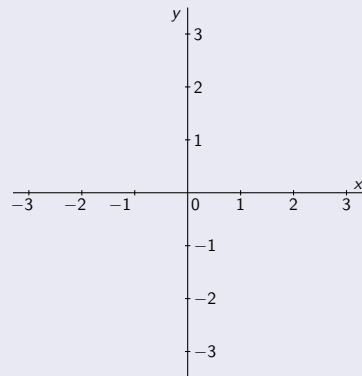
[Vid 02-PrII.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

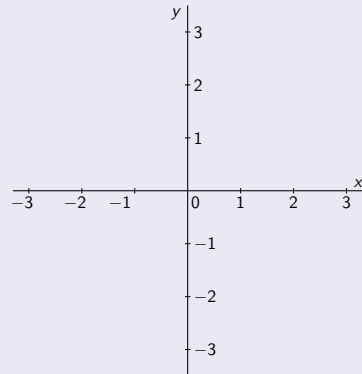


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

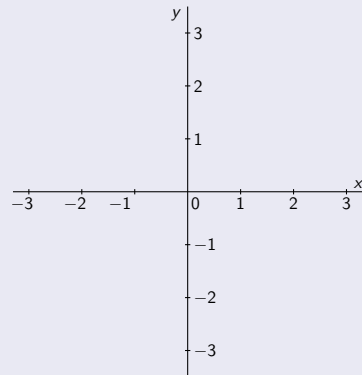


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.
-
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

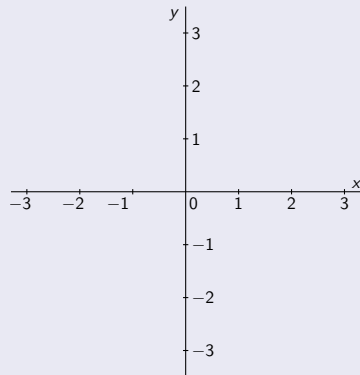
$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

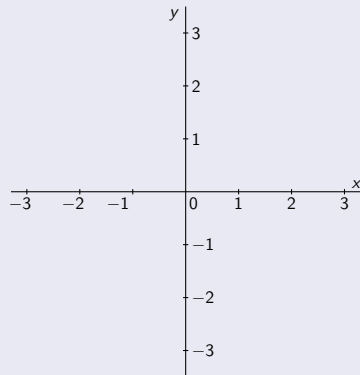
• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$

[$x = 0$, resp. $x = -2$.]

• f' je spojitá na $D(f)$,

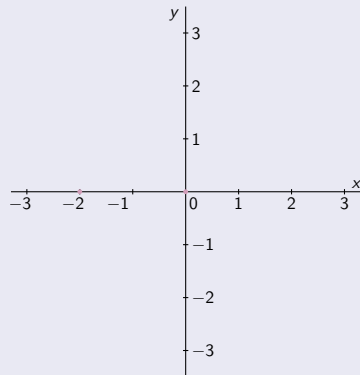


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.
-
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
 - f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

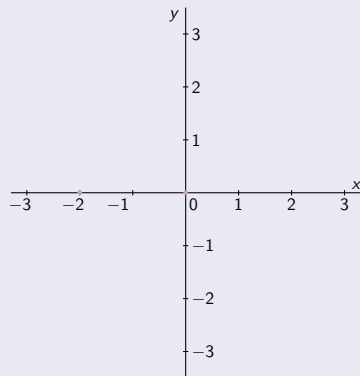
• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

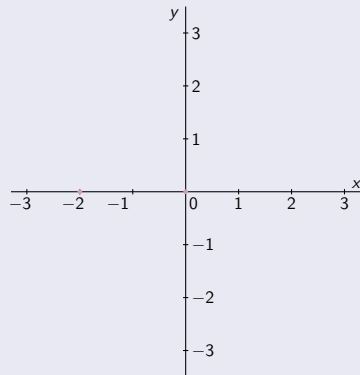
• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

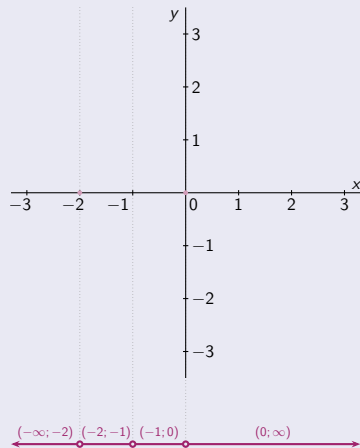
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$

$x \in (-2; -1)$

$x \in (-1; 0)$

$x \in (0; \infty)$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]

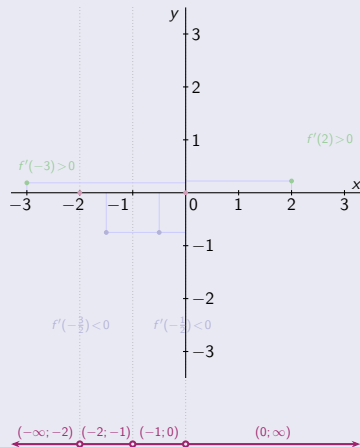
• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
-----------------------	------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0. \quad f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0. \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0. \quad f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-PrII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
-----------------------	------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0, \quad f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$$

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f'(x) < 0.$$

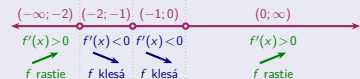
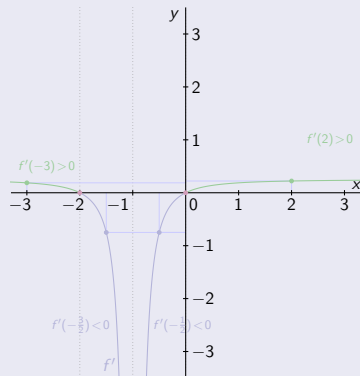
f klesá.

$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

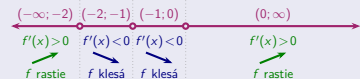
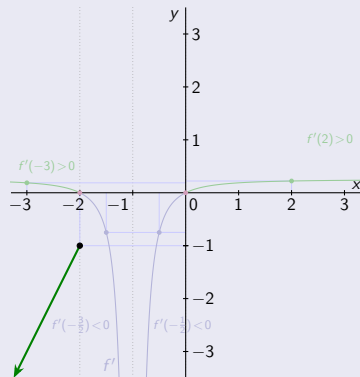
\Rightarrow • Funkcia f' nemá znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x} + 4} = -\infty.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
-----------------------	------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0, \quad f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$$

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

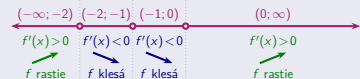
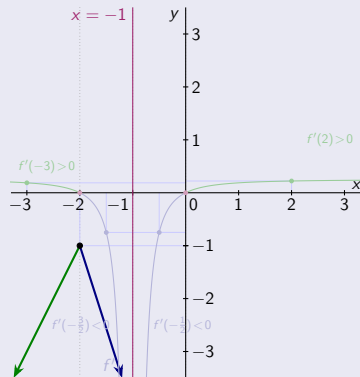
$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
-----------------------	------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0, \quad f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$$

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

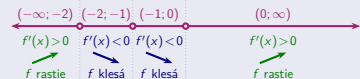
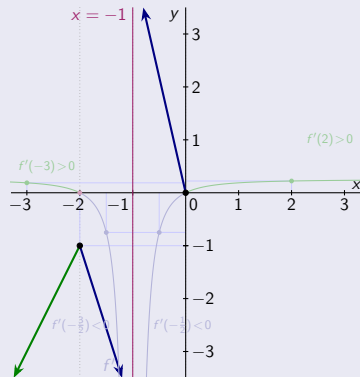
$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
-----------------------	------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0, \quad f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$$

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

$$f'(x) < 0.$$

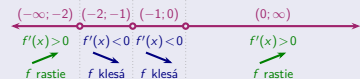
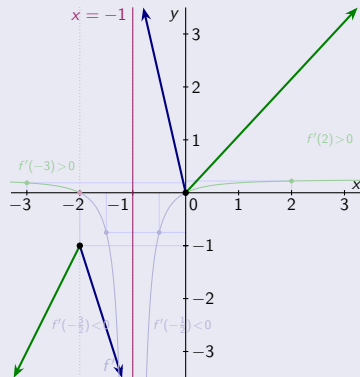
f klesá.

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+4} = \infty.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemá znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
-----------------------	------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0, \quad f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0, \quad f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$$

$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

$$f'(x) < 0.$$

f klesá.

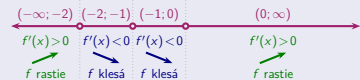
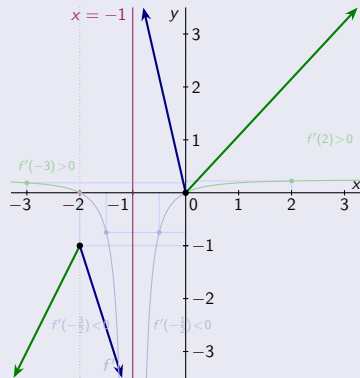
$$f'(x) > 0.$$

f rastie.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

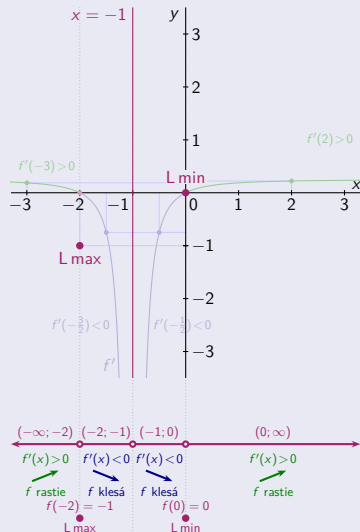
\Rightarrow • Funkcia f' nemá znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.
$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1$	$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$	$f(0) = \frac{0}{4-0} = 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = -\infty$			$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = \infty$

• $f(-2) = -1$ je lokálne max.

• $f(0) = 0$ je lokálne min.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemá znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

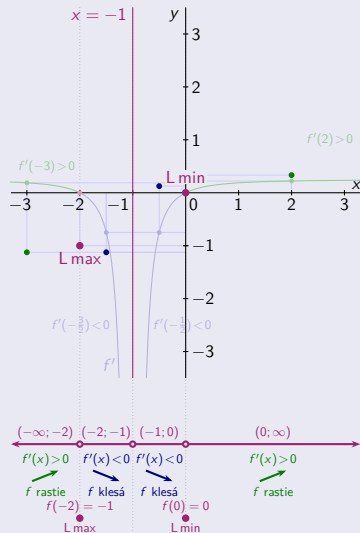
$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = \infty.$$

$$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}, \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}, \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}, \quad f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$$

• $f(-2) = -1$ je lokálne max.

• $f(0) = 0$ je lokálne min.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemá znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = -\infty.$$

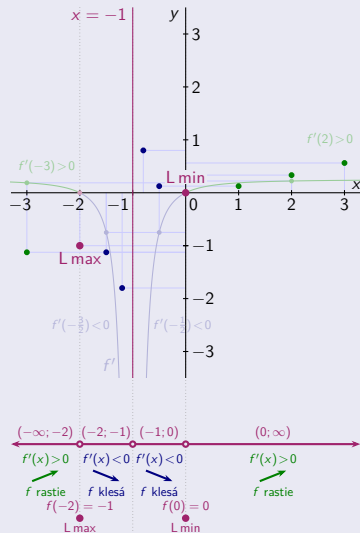
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = \infty.$$

$$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}, \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}, \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}, \quad f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$$

$$f(-\frac{6}{5}) = \frac{\frac{36}{25}}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}, \quad f(-\frac{4}{5}) = \frac{\frac{16}{25}}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}, \quad f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}, \quad f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$$

• $f(-2) = -1$ je lokálne max.

• $f(0) = 0$ je lokálne min.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 02-Pr II.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$]

• f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemá znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

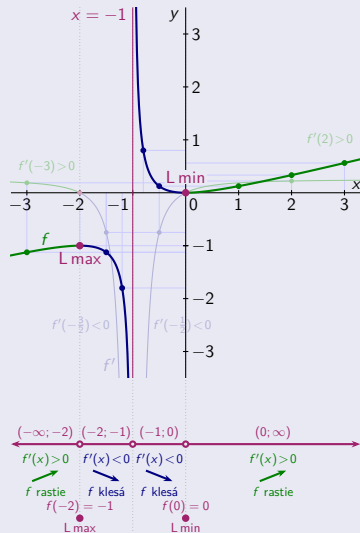
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4}+4} = \infty.$$

$$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}, \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}, \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}, \quad f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$$

$$f(-\frac{6}{5}) = \frac{\frac{36}{25}}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}, \quad f(-\frac{4}{5}) = \frac{\frac{16}{25}}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}, \quad f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}, \quad f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$$

• $f(-2) = -1$ je lokálne max. • $f(0) = 0$ je lokálne min.

A na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

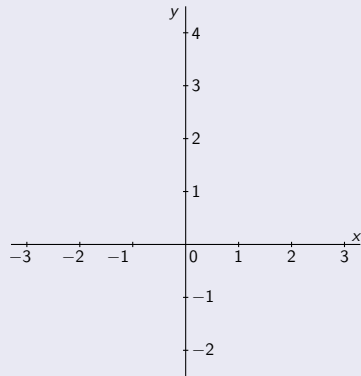
[Viď 02-PrIII.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

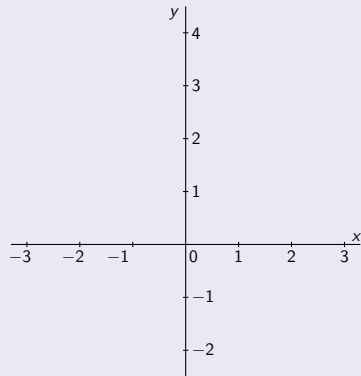


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

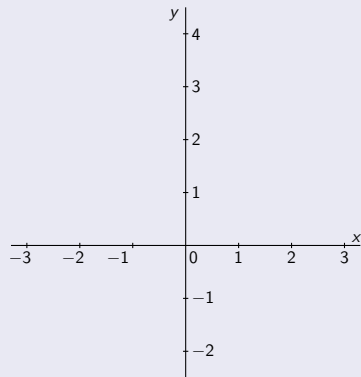


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$

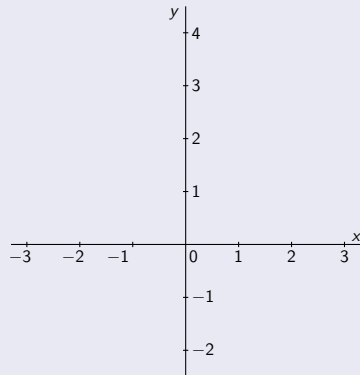


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]

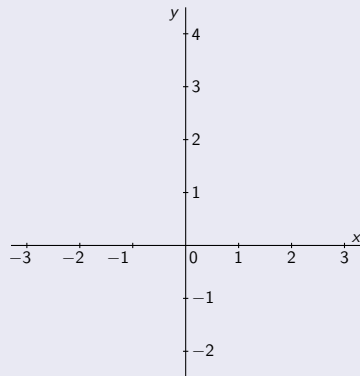


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.
-
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1.]$
 - f' je spojitá na $D(f)$,



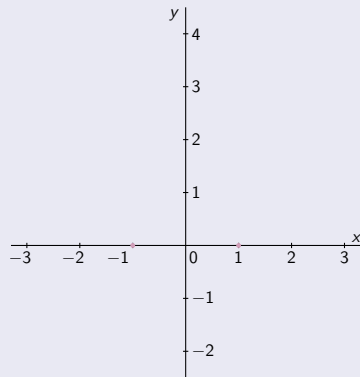
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

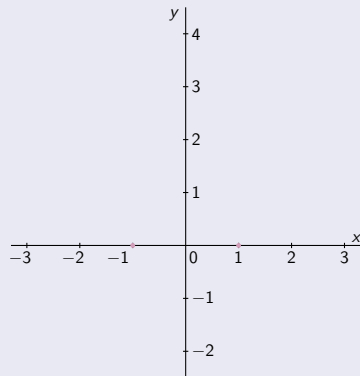


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.
-
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
 - f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.
- \Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

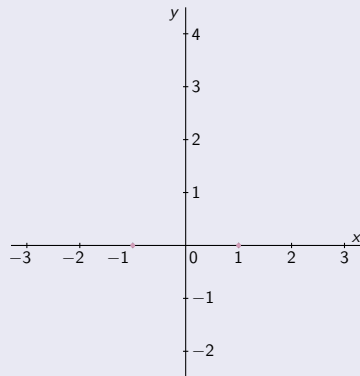


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.
-
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1.]$
 - f' je spojitá na $D(f)$, $\bullet f'(-1) = 0, \bullet f'(1) = 0.$
- $\Rightarrow \bullet$ Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1), (-1; 1)$ a $(0; \infty)$.
 [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

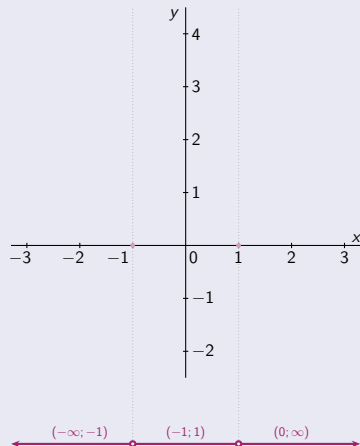
$$\bullet f'(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1.]$$

$$\bullet f' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f'(-1) = 0, \bullet f'(1) = 0.$$

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
-----------------------	-----------------	---------------------



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

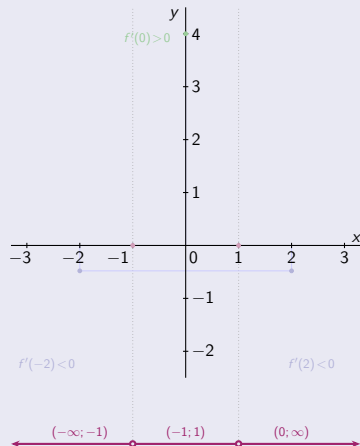
$$\bullet f'(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1.]$$

$$\bullet f' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f'(-1) = 0, \bullet f'(1) = 0.$$

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-4}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

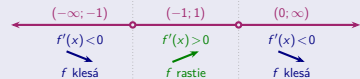
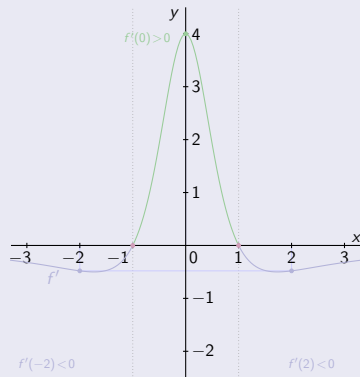
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0$. [$x = -1$, resp. $x = 1$.]

- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0$.	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0$.	$f'(2) = \frac{4-4}{25} = -\frac{12}{25} < 0$.
$f'(x) < 0$.	$f'(x) > 0$.	$f'(x) < 0$.
f klesá.	f rastie.	f klesá.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1]$$

- f' je spojitá na $D(f)$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$.

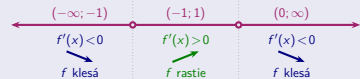
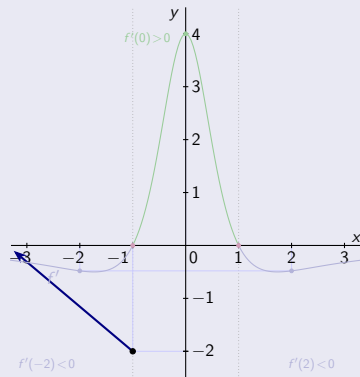
\Rightarrow Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-4}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

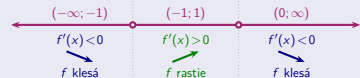
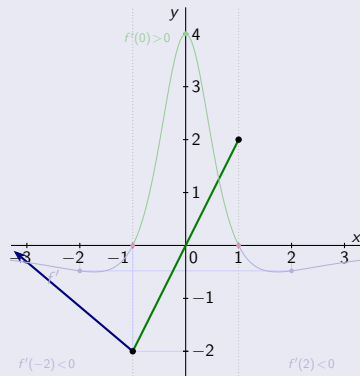
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0$. [$x = -1$, resp. $x = 1$.]

- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

\Rightarrow • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0$.	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0$.	$f'(2) = \frac{4-\frac{16}{4}}{25} = -\frac{12}{25} < 0$.
$f'(x) < 0$.	$f'(x) > 0$.	$f'(x) < 0$.
f klesá.	f rastie.	f klesá.
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$.		$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1]$$

- f' je spojitá na $D(f)$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$.

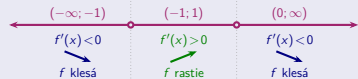
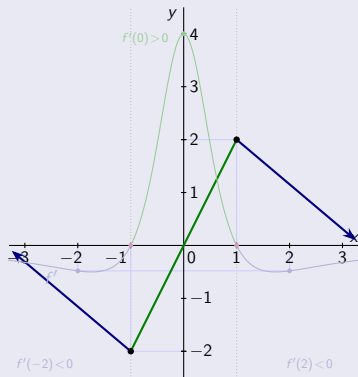
\Rightarrow Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{4}}{25} = -\frac{12}{25} < 0$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

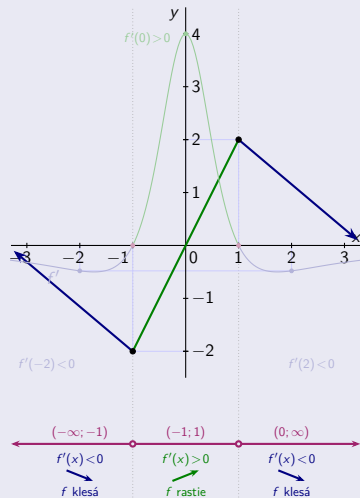
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1]$$

- f' je spojitá na $D(f)$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$.

\Rightarrow Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{4}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$	



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1]$$

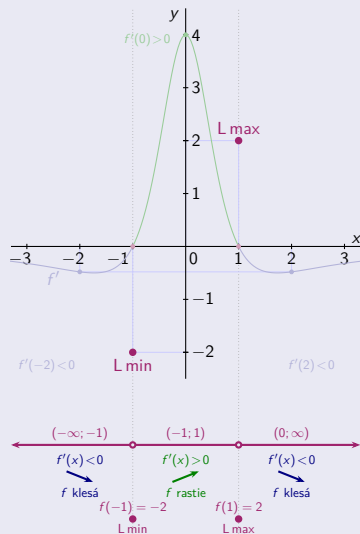
- f' je spojitá na $D(f)$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$.

\Rightarrow Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-4}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$	

- $f(-1) = -2$ je lokálne min.
- $f(1) = 2$ je lokálne max.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1]$$

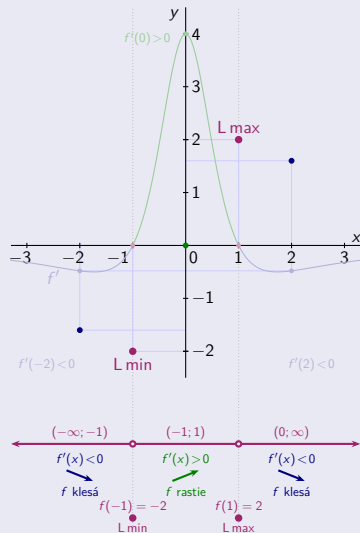
- f' je spojitá na $D(f)$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$.

\Rightarrow Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4-4}{25} = -\frac{12}{25} < 0$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
f klesá.	f rastie.	f klesá.
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0$	
$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}$	$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$	$f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}$

- $f(-1) = -2$ je lokálne min.
- $f(1) = 2$ je lokálne max.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1]$$

- f' je spojitá na $D(f)$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$.

\Rightarrow Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4-4}{25} = -\frac{12}{25} < 0$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

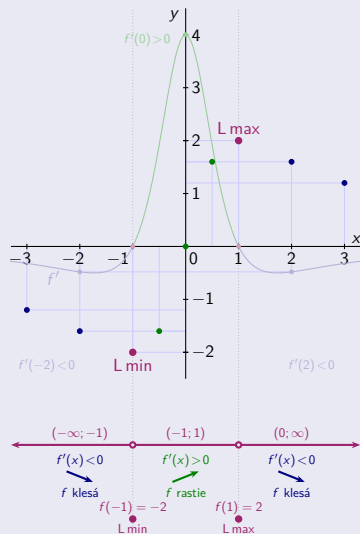
$$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$$

$$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

$$f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$$

$$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}. \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}. \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}. \quad f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

- $f(-1) = -2$ je lokálne min.
- $f(1) = 2$ je lokálne max.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0. \quad [x = -1, \text{ resp. } x = 1.]$$

$$f' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f'(-1) = 0, \bullet f'(1) = 0.$$

\Rightarrow Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-4}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$$

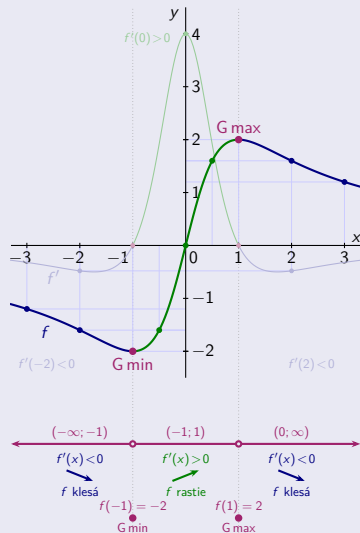
$$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

$$f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$$

$$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}. \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}. \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}. \quad f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

- $f(-1) = -2$ je lokálne min.
- $f(1) = 2$ je lokálne max.

Tieto extrémny sú súčasne aj globálne a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

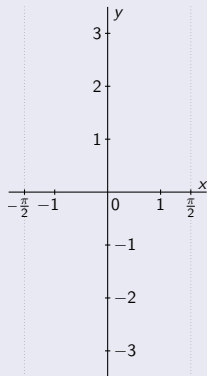
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

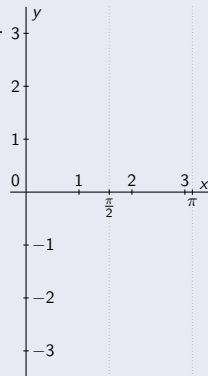
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

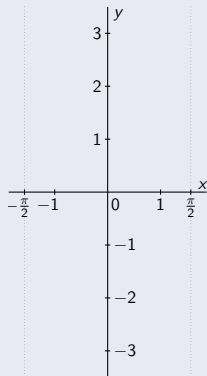
- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

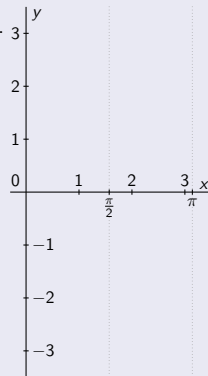
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

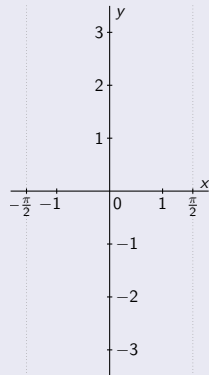
- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

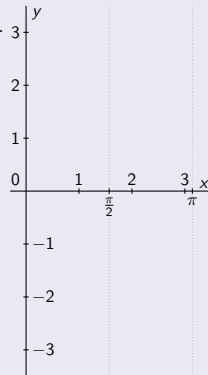
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

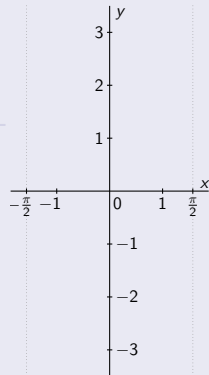
- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

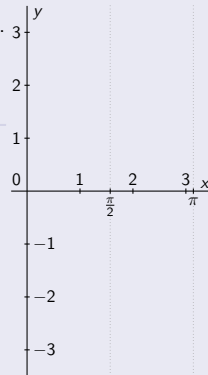
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

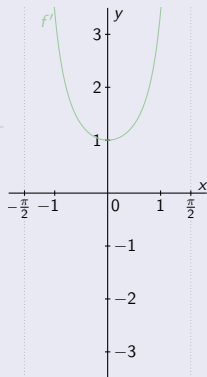
- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

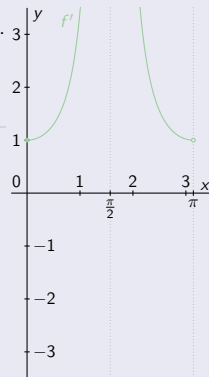
$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

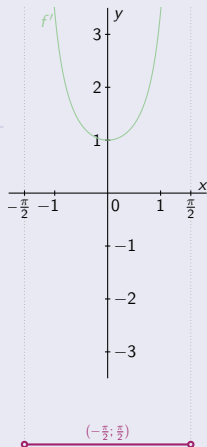
- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

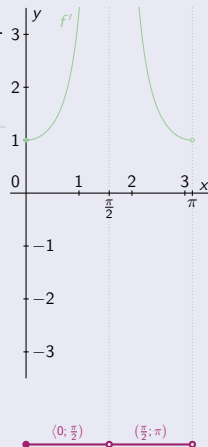
$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je otvorená súvislá množina.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

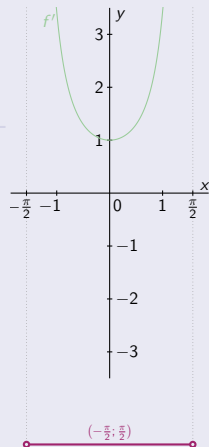


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

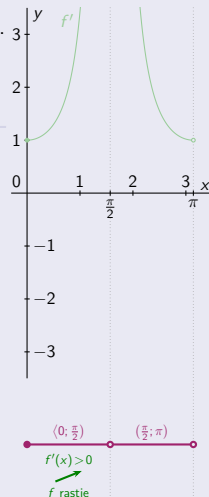
⇒ • f rastie



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

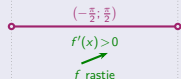
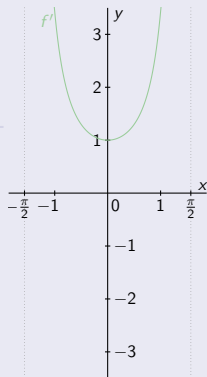
⇒ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

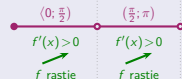
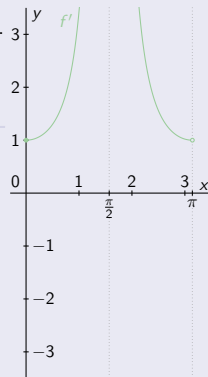
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je otvorená súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.
- ⇒ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$.

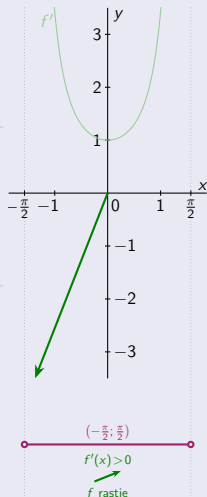


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je otvorená súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty,$$

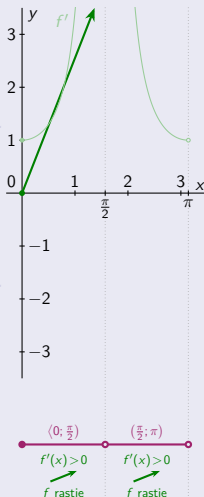


$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.
- ⇒ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$$f(0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty,$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- f je spojitá na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

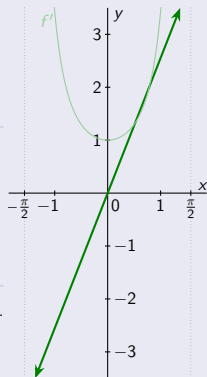
- f' je spojitá na $D(f)$.

- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty.$$



$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

- f je spojitá na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.

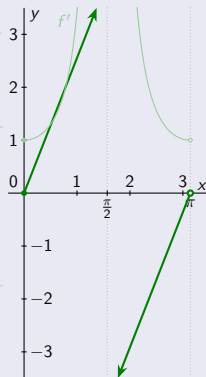
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. $\pi \notin D(f)$.

⇒ f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$$



$$\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- f je spojitá na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.

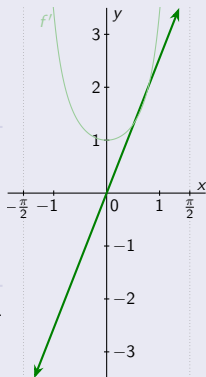
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty.$$

⇒ Na $D(f)$ neexistujú extrémny.



$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

- f je spojitá na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.

- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

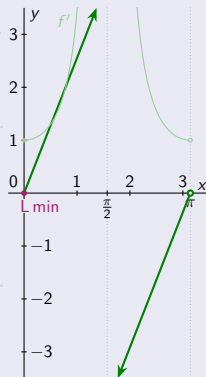
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. $\pi \notin D(f)$.

⇒ f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$.

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$$

⇒ $f(0) = 0$ je lokálne min
a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$f(0) = 0$
L min

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- f je spojitá na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.

- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

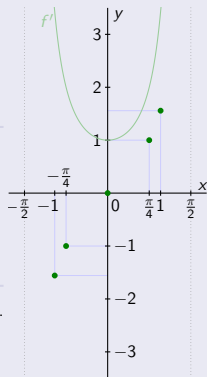
⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty.$$

$$f(0) = 0. \quad f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1.$$

$$f(\pm 1) = \operatorname{tg}(\pm 1) \approx \pm 1,5574.$$

⇒ Na $D(f)$ neexistujú extrémny.



$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

- f je spojitá na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.

- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. $\pi \notin D(f)$.

⇒ f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$$f(0) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0.$$

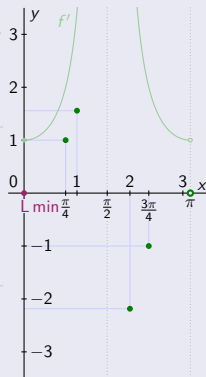
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \quad f(1) = \operatorname{tg} 1 \approx 1,5574.$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1. \quad f(2) = \operatorname{tg} 2 \approx -2,1850.$$

⇒ $f(0) = 0$ je lokálne min

a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$f(0) = 0$$

L min

$$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- f je spojité na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojité na $D(f)$.

- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

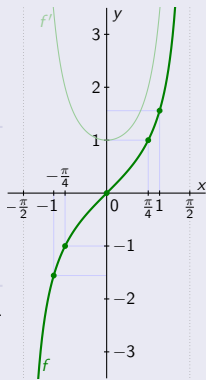
⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty.$$

$$f(0) = 0. \quad f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1.$$

$$f(\pm 1) = \operatorname{tg}(\pm 1) \approx \pm 1,5574.$$

⇒ Na $D(f)$ neexistujú extrémny.



$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle 0; \pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

- f je spojité na celom $D(f)$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojité na $D(f)$.

- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. $\pi \notin D(f)$.

⇒ f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

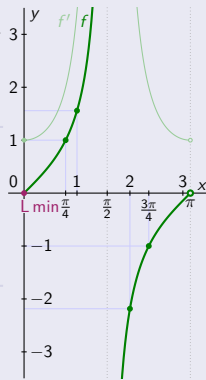
$$f(0) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \quad f(1) = \operatorname{tg} 1 \approx 1,5574.$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1. \quad f(2) = \operatorname{tg} 2 \approx -2,1850.$$

⇒ $f(0) = 0$ je lokálne min
a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$$f'(x) > 0$$

f rastie

$f(0) = 0$
L min

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

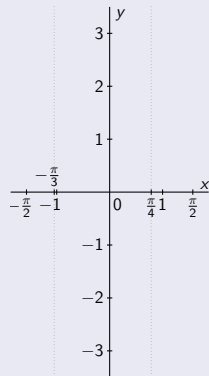
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

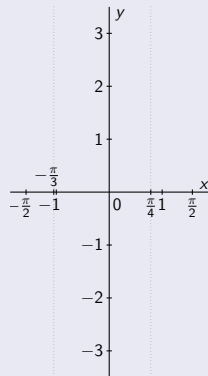
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

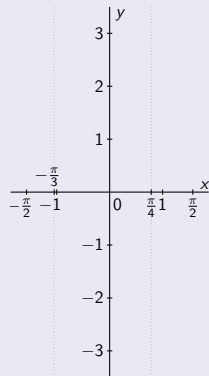
- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

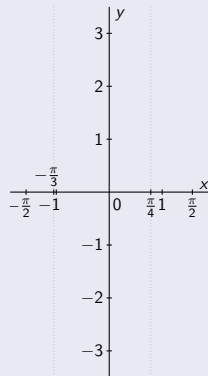
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

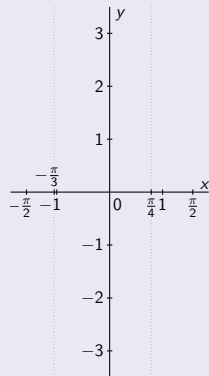
- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

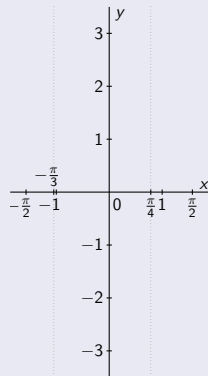
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

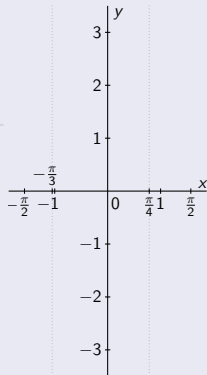
- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

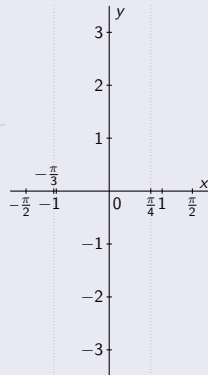
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

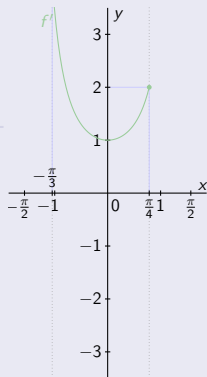
- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

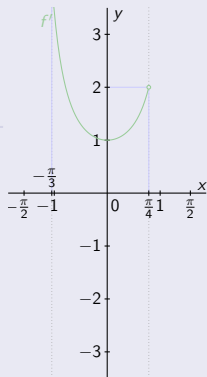
$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

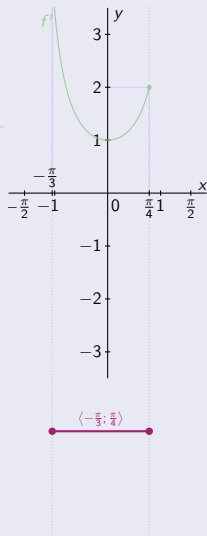
- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

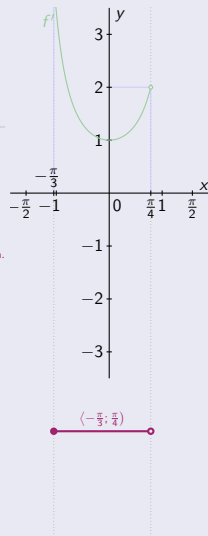
$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

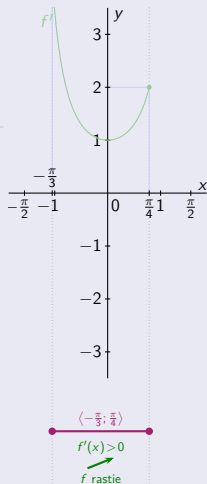
- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

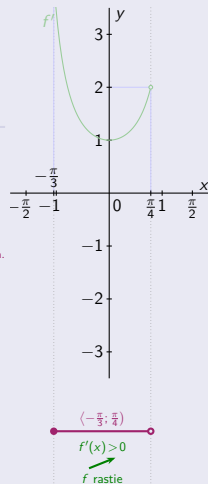
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.

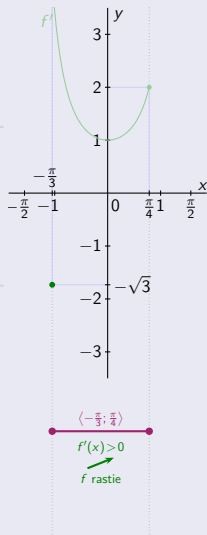


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.

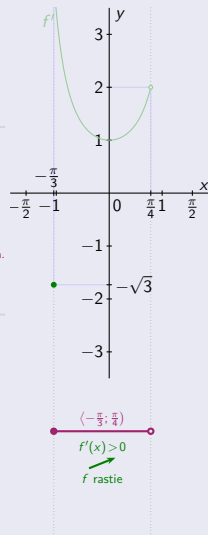
$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

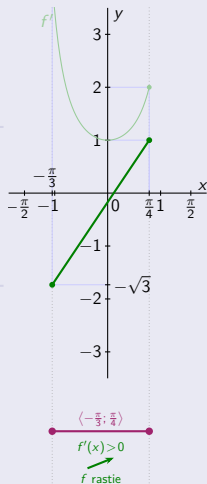


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.

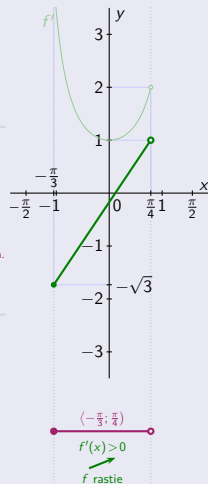
$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$



$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.
- ⇒ • f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$



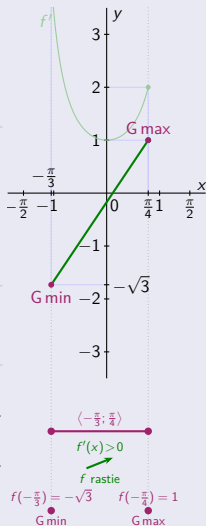
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.
- ⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

- ⇒ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min.
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je globálne (aj lokálne) max.

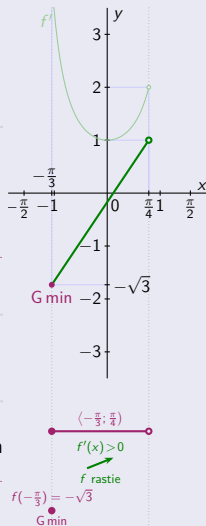


$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.
- ⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

- ⇒ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

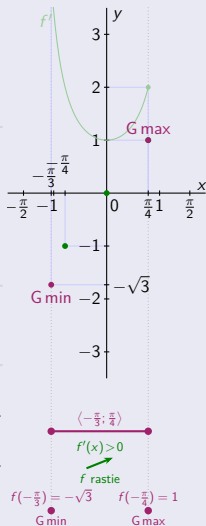
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.
- ⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$f(0) = 0. \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

- ⇒ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min.
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je globálne (aj lokálne) max.



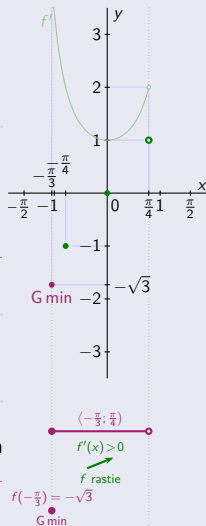
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.
- ⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$f(0) = 0. \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

- ⇒ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

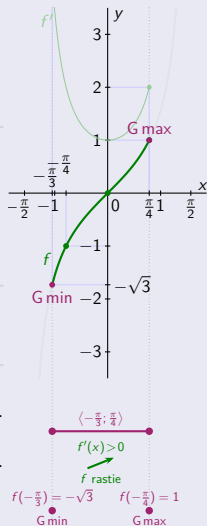
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.
- ⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$f(0) = 0, \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

- ⇒ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min.
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je globálne (aj lokálne) max.



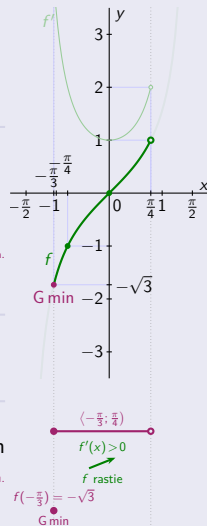
$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
 - f je spojitá na celom $D(f)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.
- ⇒ f rastie na celom $D(f)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$f(0) = 0, \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

- ⇒ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



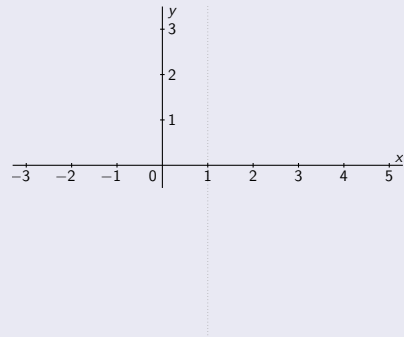
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.

• Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

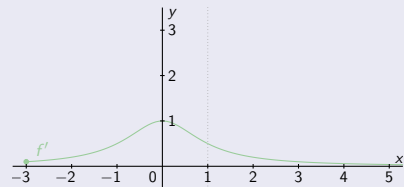
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- f' je spojitá na $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
-
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.



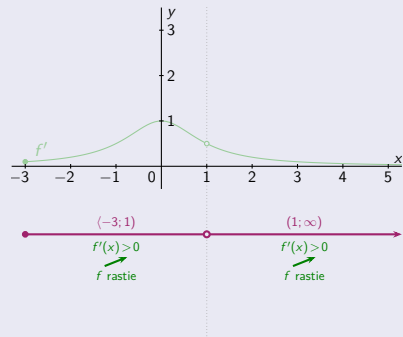
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

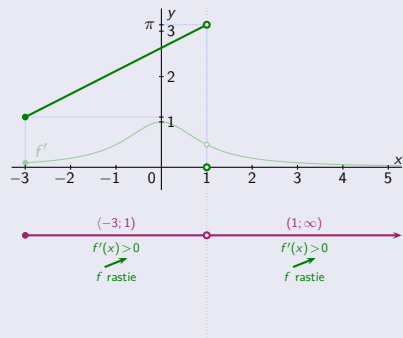
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

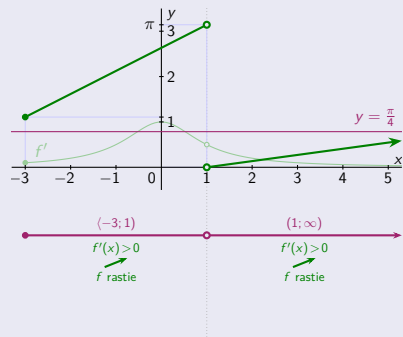
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

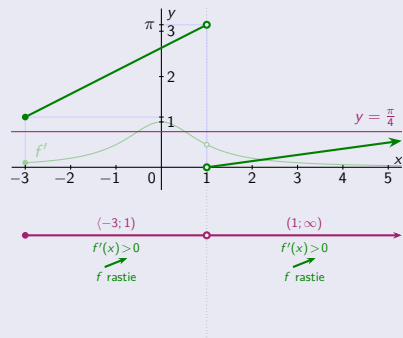
$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

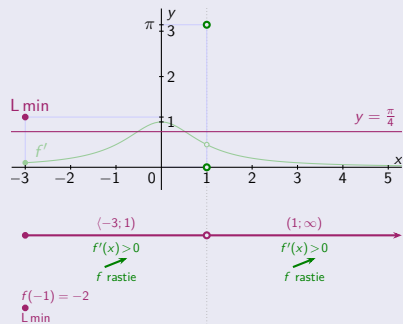
$$x \in (1; \infty)$$

$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

\Rightarrow • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

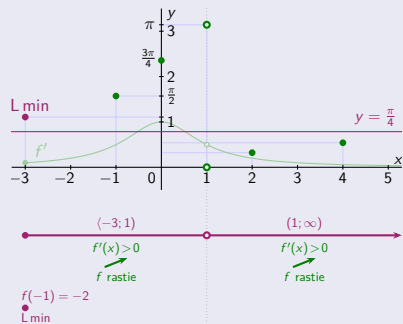
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} (-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg} (-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

\Rightarrow • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

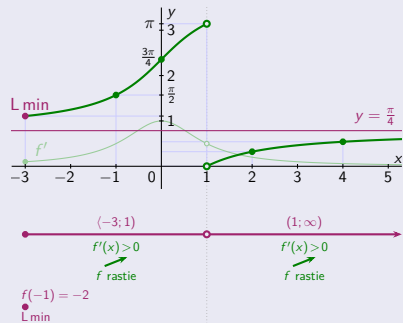
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} (-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg} (-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

\Rightarrow • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

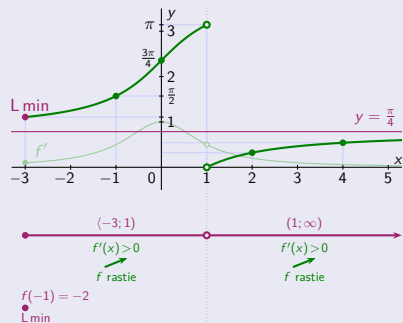
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} (-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg} (-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

\Rightarrow $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(\frac{x+1}{x-1})^2} = \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

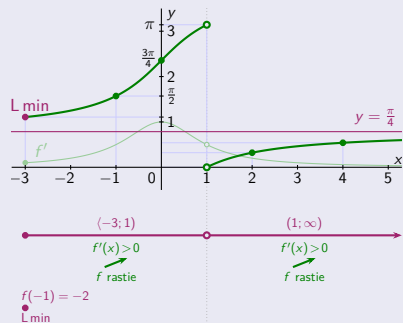
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

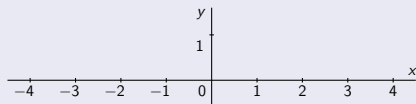
\Rightarrow $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

$$D(\chi) = \mathbb{R}.$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
 - $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

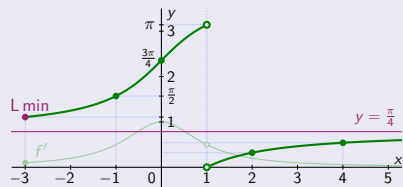
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

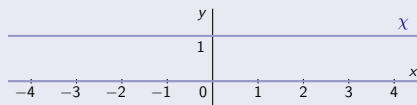
\Rightarrow $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = \mathbb{R}$.
- Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(\frac{x+1}{x-1})^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} (-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg} (-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

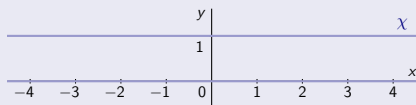
\Rightarrow • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = \mathbb{R}$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$,



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(\frac{x+1}{x-1})^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

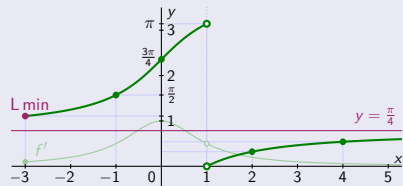
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0} = \operatorname{arccotg} (-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg} (-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

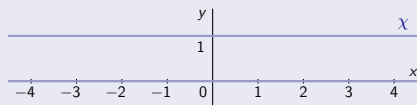
\Rightarrow • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = \mathbb{R}$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémny pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojité na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
 - Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(\frac{x+1}{x-1})^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
 - f' je spojité na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

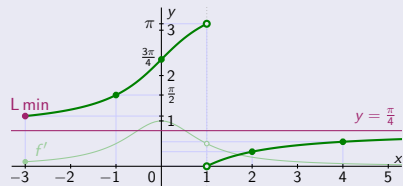
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0} = \operatorname{arccotg} (-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg} (-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

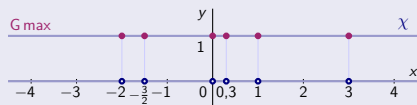
\Rightarrow • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = \mathbb{R}$. • Funkcia χ nie je spojité v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémny pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.
- $\chi(x) = 1$ pre všetky $x \in \mathbb{Q}$ je globálne (aj lokálne) max.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojité na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- f' je spojité na $D(f)$. $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. $1 \notin D(f)$.
 \Rightarrow f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

\Rightarrow $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.

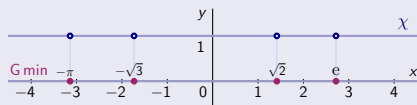


$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = \mathbb{R}$. Funkcia χ nie je spojité v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémny pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.

$\chi(x) = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ je globálne (aj lokálne) min.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \langle -3; \infty \rangle.$$

- Funkcia f je spojité na $D(f) = \langle -3; 1 \rangle \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(\frac{x+1}{x-1})^2}$
 $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- f' je spojité na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.
 \Rightarrow • f rastie na intervale $\langle -3; 1 \rangle$ a na intervale $(1; \infty)$.

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$x \in (1; \infty)$$

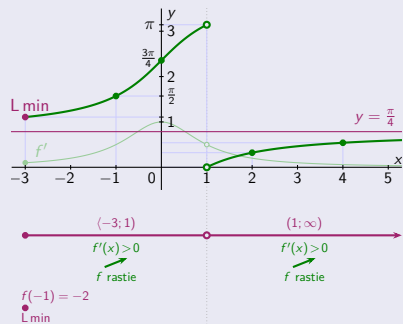
$$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1,1071.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0} = \operatorname{arccotg} (-\infty) = \pi. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} 0 = 0.$$

$$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}. \quad f(0) = \operatorname{arccotg} (-1) = \frac{3\pi}{4}. \quad f(2) = \operatorname{arccotg} 3. \quad f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$$

\Rightarrow • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



$$\chi(x) = 1 \text{ pre racionálne } x \in \mathbb{Q} \text{ a } \chi(x) = 0 \text{ pre iracionálne } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

[Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = \mathbb{R}$. • Funkcia χ nie je spojité v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémny pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.
- $\chi(x) = 1$ pre všetky $x \in \mathbb{Q}$ je globálne (aj lokálne) max.
 • $\chi(x) = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ je globálne (aj lokálne) min.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$.

[$f''(c) < 0$. \Rightarrow \forall bode c je ostré lokálne max.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

⇒

- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$.

[$f''(c) > 0$. ⇒ V bode c je ostré lokálne min.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

- \Rightarrow
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$.
 - $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$.

[$f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

[$f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$.

[$f''(c) < 0$. \Rightarrow \forall bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$.

[$f''(c) > 0$. \Rightarrow \forall bode c je ostré lokálne min.]

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$.

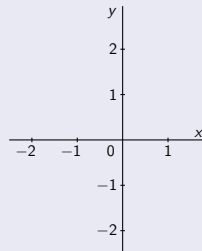
$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

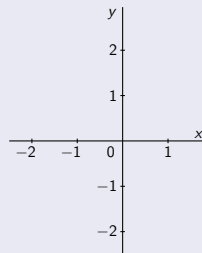
• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$.

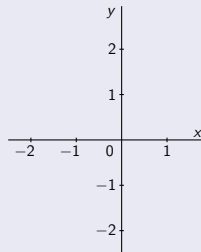
$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0,$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$.

[$f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$.

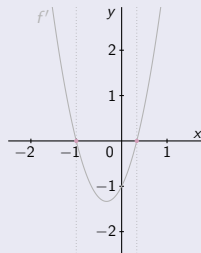
[$f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$.]



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

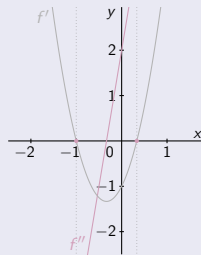
$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

• Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$]



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

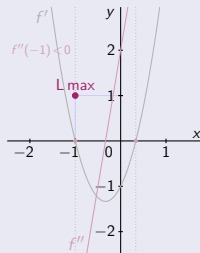
• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

• Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$]

• $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

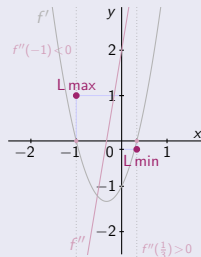
$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
 - Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
 - $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$.]
-
- $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**
 - $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

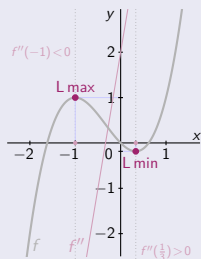
• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

• Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$]

• $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

• $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• **Funkcia** $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je **spojitá** na $D(f) = \mathbb{R}$.

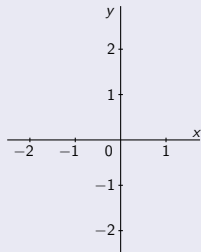
• **Derivácia** $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je **spojitá** na $D(f)$.

• **Druhá derivácia** $f''(x) = 6x + 2$ je **definovaná** pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$]

• $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

• $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

[$f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

[$f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je **spojitá** na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je **spojitá** na $D(f)$.

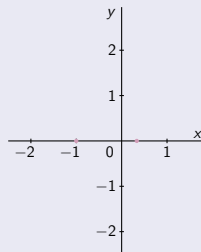
• Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je **definovaná** pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$.]

• $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

• $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' **nemí** znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je **spojitá** na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je **spojitá** na $D(f)$.

• Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je **definovaná** pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$.]

• $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

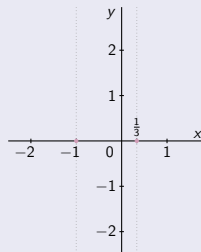
• $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' **není** znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$

$x \in (-1; \frac{1}{3})$

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0. \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

• Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

• Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.

• $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

• $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

• $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

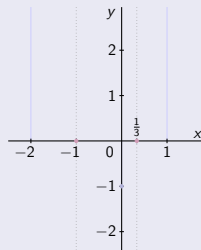
$$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0.$$

$$x \in (-1; \frac{1}{3})$$

$$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$$

$$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$$

$$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0.$$



$$f'(-2) > 0 \quad f'(0) < 0 \quad f'(1) > 0$$

$$(-\infty; -1) \quad (-1; \frac{1}{3}) \quad (\frac{1}{3}; \infty)$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

- ⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.
 ● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$].

● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow$ ● $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow$ ● $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
-----------------------	---------------------------	-------------------------------

$$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0.$$

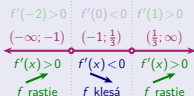
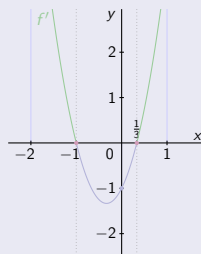
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.

$$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$$

$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.

$$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0.$$

$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

- ⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.
 ● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$].

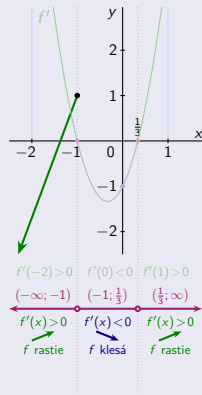
● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty$. $f(-1) = 1$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

- ⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.
 ● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

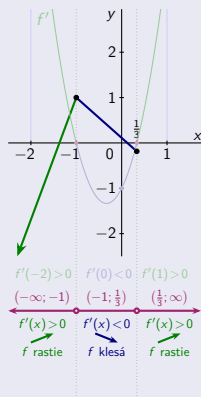
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$].

● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.
	$f(-1) = 1$	$f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

● Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

● Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

● Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.

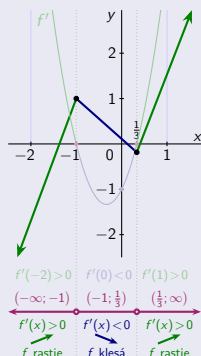
● $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$]

● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.
	$f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$.	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 + 0 - 0) = \infty$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

- ⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.
 ● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

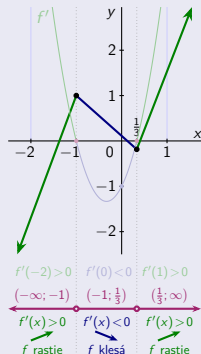
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$].

● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty$	$f(-1) = 1$	$f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$
		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 + 0 - 0) = \infty$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall \text{ bode } c \text{ je ostré lokálne max.}]$

● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall \text{ bode } c \text{ je ostré lokálne min.}]$

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

● Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je **spojitá** na $D(f) = \mathbb{R}$.

● Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je **spojitá** na $D(f)$.

● Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je **definovaná** pre všetky $x \in D(f)$.

● $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$.]

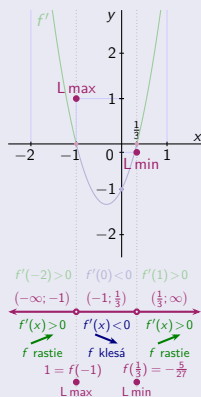
● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' **nemiená znamienko** na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie .	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá .	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie .
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty$	$f(-1) = 1$	$f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$
		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 + 0 - 0) = \infty$

● $f(-1) = 1$ je **lokálne max.** ● $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$ je **lokálne min.**



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

- ⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.
 ● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$]

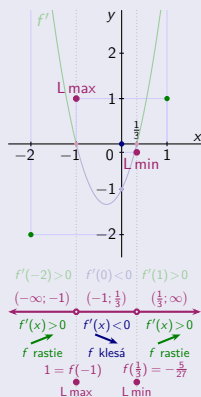
● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty$	$f(-1) = 1$	$f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$
$f(-2) = -8 + 4 - (-2) = -2$	$f(0) = 0 + 0 - 0 = 0$	$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$

- $f(-1) = 1$ je **lokálne max.** ● $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$ je **lokálne min.**



Monotónnosť a extrémny funkcie – Lokálne extrémny

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f , t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

- ⇒ ● $f(c)$ je **ostré lokálne maximum** pre $f'(c) < 0$.
 ● $f(c)$ je **ostré lokálne minimum** pre $f'(c) > 0$.

$[f'(c) < 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne max.]

$[f'(c) > 0 \Rightarrow \forall$ bode c je ostré lokálne min.]

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = \frac{1}{3}$.]

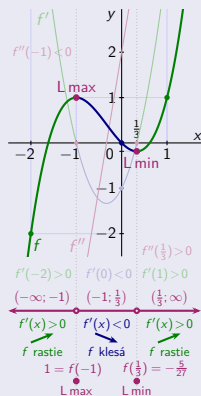
● $f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je **ostré lokálne max.**

● $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je **ostré lokálne min.**

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty$	$f(-1) = 1$	$f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$
$f(-2) = -8 + 4 - (-2) = -2$	$f(0) = 0 + 0 - 0 = 0$	$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$

- $f(-1) = 1$ je **lokálne max.** ● $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$ je **lokálne min.**



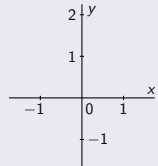
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

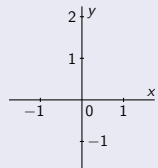
- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

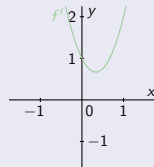
- **Funkcia** $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- **Derivácia** $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- **Funkcia** $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- **Derivácia** $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

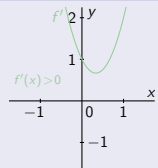


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

• **Funkcia** $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

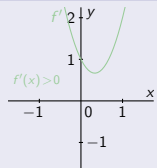
• **Derivácia** $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

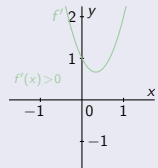


- Stacionárne body *neexistujú*.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.



- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

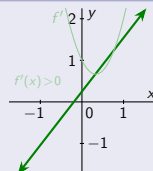
$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

• Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

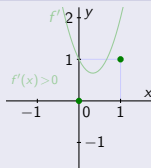
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty.$$

$$f(0) = 0.$$

$$f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

• Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



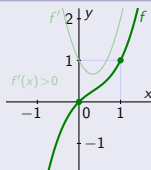
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



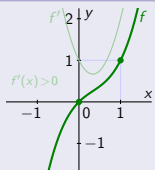
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

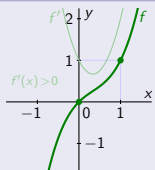
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

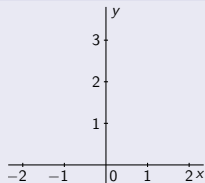
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases} \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)]$



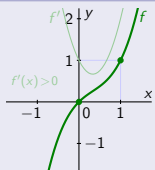
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

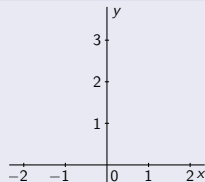
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-1; 1)]$



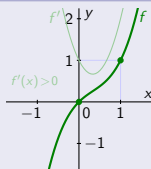
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

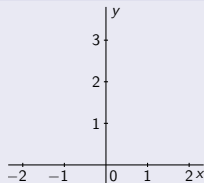
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$



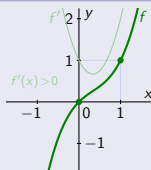
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

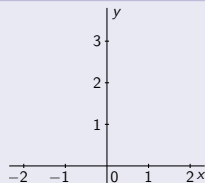
- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.



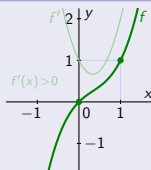
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

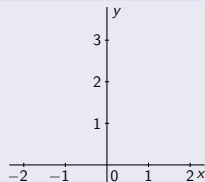
- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases} \bullet f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.

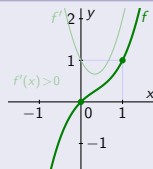


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

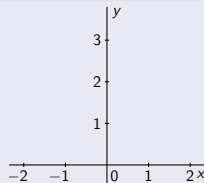


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases} \quad \bullet f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.



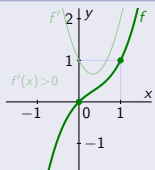
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

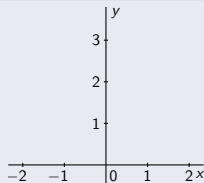
- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.



$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases} \quad \bullet f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

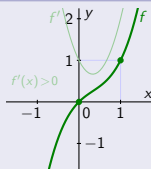


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$



- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

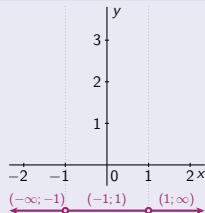
$$\bullet f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases} \quad \bullet f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$x \in (1; \infty)$$

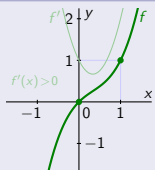


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

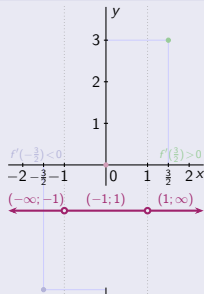


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f(-1) = 1$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.
- $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$$

$$f'(x) = 0.$$

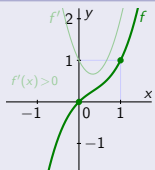
$$f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

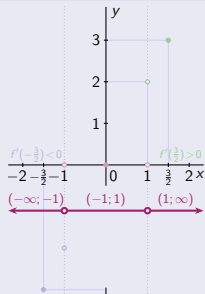


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$x \in (1; \infty)$$

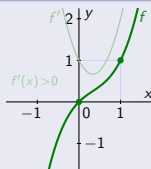
$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'_-(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

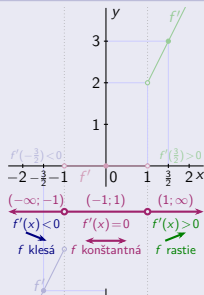


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.}$$

f je konštantná.

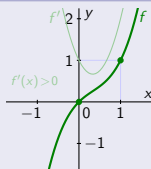
$$f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$



- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.} \quad f \text{ je konštantná.} \quad f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

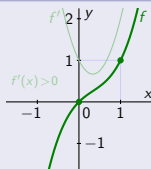
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

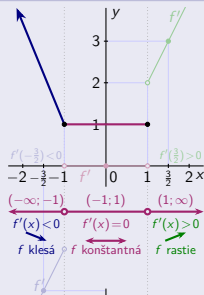


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.}$$

f je konštantná.

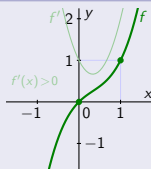
$$f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

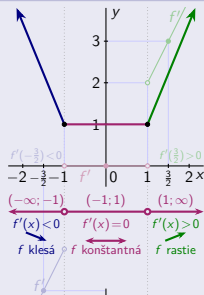


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.} \quad f \text{ je konštantná.} \quad f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

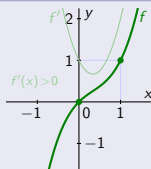
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

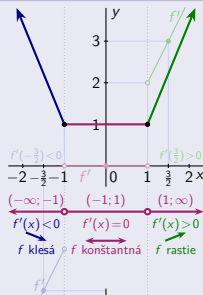


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.} \quad f \text{ je konštantná.} \quad f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

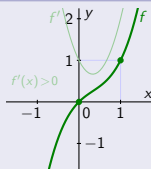
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$



- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

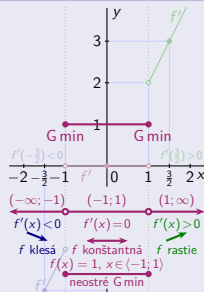
- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
-----------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.} \quad f \text{ je konštantná.} \quad f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty. \quad f(x) = 1 \text{ je neostre G min pre } x \in (-1; 1). \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

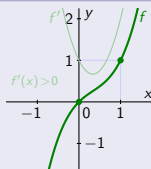


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$



- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

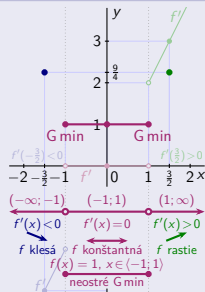
- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
-----------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.} \quad f \text{ je konštantná.} \quad f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty. \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}. \quad f(x) = 1 \text{ je neostre G min pre } x \in (-1; 1). \quad f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

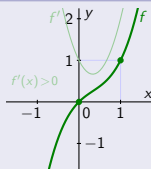


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
 $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty. \quad f(0) = 0. \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$$

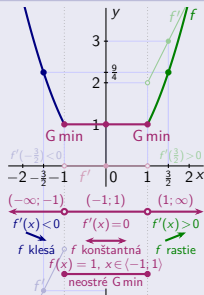


- Stacionárne body neexistujú. \Rightarrow • Funkcia f rastie na celom svojom $D(f)$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| + x^2 + 1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1)] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f(-1) = 1$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.
- $f'(\pm 1)$ neexistujú.



$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
-----------------------	-----------------	---------------------

$$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0. \quad f'(-1) = -2. \quad f'_+(-1) = 0. \quad f'(x) = 0. \quad f'_-(1) = 0. \quad f'_+(1) = 2. \quad f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$$

$$f'(x) = 2x < 0, \text{ t.j. } f \text{ klesá.} \quad f \text{ je konštantná.} \quad f'(x) = 2x > 0, \text{ t.j. } f \text{ rastie.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty. \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}. \quad f(x) = 1 \text{ je neostre G min pre } x \in (-1; 1). \quad f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$



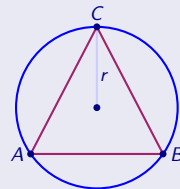
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

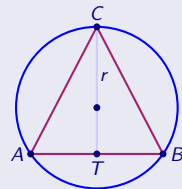
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC .



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

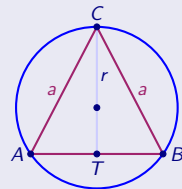
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC . • T stred základne AB .



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

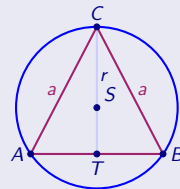
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC . • T stred základne AB . • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

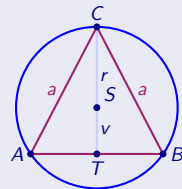
- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

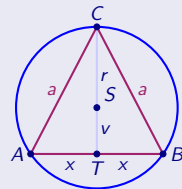
- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

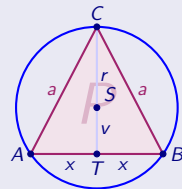


Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC . • T stred základne AB . • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 • S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

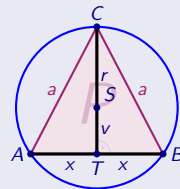
\Rightarrow • Obsah trojuholníka P



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
- \Rightarrow • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpište rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC . • T stred základne AB . • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.

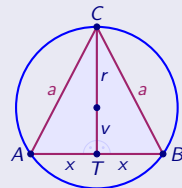
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

\Rightarrow • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC

sú pravuhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

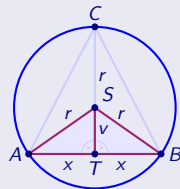
- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \text{• Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky

ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpište rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

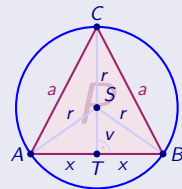
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC . • T stred základne AB . • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.

• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

\Rightarrow • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.



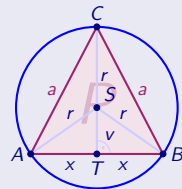
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
- \Rightarrow • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravohlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.
- $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- \Rightarrow • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

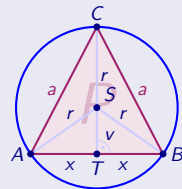
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.
- $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- \Rightarrow • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

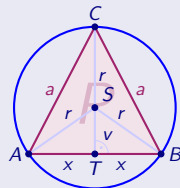
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \text{• Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.
- $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- \Rightarrow • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

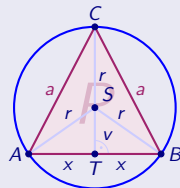
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpište rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \text{• Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.
- $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- \Rightarrow • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

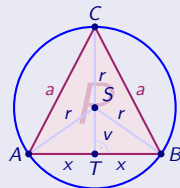
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \text{• Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.
- $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- \Rightarrow • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

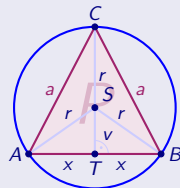
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpište rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. ● $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. \Rightarrow ● $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow ● $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow ● $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
 \Rightarrow ● Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.



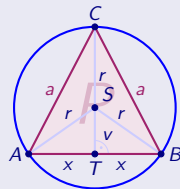
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpište rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC .
 - T stred základne AB .
 - Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 - S stred opísanej kružnice.
 - Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
- \Rightarrow • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.
- $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- \Rightarrow • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
 \Rightarrow • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
 \Rightarrow • Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

$$\bullet a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}. \bullet v = \sqrt{r^2 - x^2}. \Rightarrow \bullet P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2}) \text{ pre } x \in (0; r).$$

$$\bullet \max P \text{ znamená maximalizovať funkciu } P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, x \in (0; r).$$

$$\bullet P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}, x \in (0; r).$$

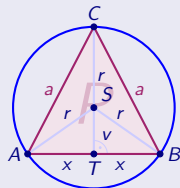
$$\bullet P'(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0. \Leftrightarrow \bullet 2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}.$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Musí platiť: } 4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2, \text{ t. j. } 0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2).$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Posledná rovnica má 4 riešenia } 0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}, \text{ z ktorých vyhovuje iba jeden koreň } x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r).$$

$$\bullet P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

pre všetky $x \in (0; r)$.



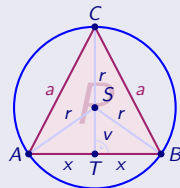
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
 \Rightarrow ● Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. ● $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. \Rightarrow ● $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow ● $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow ● $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
 \Rightarrow ● Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
 \Rightarrow ● Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.
- $P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}})$
 $= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.



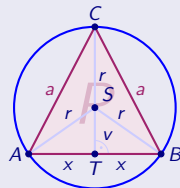
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
 \Rightarrow ● Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. ● $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. \Rightarrow ● $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow ● $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow ● $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
 \Rightarrow ● Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
 \Rightarrow ● Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.
- $P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}})$
 $= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.
- $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$.



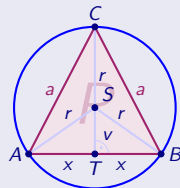
Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
 \Rightarrow ● Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. ● $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. \Rightarrow ● $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow ● $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow ● $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
 \Rightarrow ● Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
 \Rightarrow ● Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.
- $P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}})$
 $= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.
- $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. \Rightarrow ● $P'(x) = 0$. ● $P''(x) < 0$.



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

$$\bullet a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}. \bullet v = \sqrt{r^2 - x^2}. \Rightarrow \bullet P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2}) \text{ pre } x \in (0; r).$$

$$\bullet \max P \text{ znamená maximalizovať funkciu } P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, x \in (0; r).$$

$$\bullet P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}, x \in (0; r).$$

$$\bullet P'(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0. \Leftrightarrow \bullet 2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}.$$

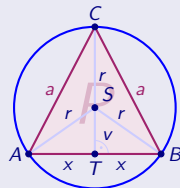
$$\Rightarrow \bullet \text{ Musí platiť: } 4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2, \text{ t. j. } 0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2).$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Posledná rovnica má 4 riešenia } 0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}, \text{ z ktorých vyhovuje iba jeden koreň } x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r).$$

$$\bullet P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r).$$

$$\bullet x = \frac{\sqrt{3}r}{2}. \Rightarrow \bullet P'(x) = 0. \bullet P''(x) < 0.$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je } P(x) = x(r+v)$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

$$\bullet a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}. \bullet v = \sqrt{r^2 - x^2}. \Rightarrow \bullet P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2}) \text{ pre } x \in (0; r).$$

$$\bullet \max P \text{ znamená maximalizovať funkciu } P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, x \in (0; r).$$

$$\bullet P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}, x \in (0; r).$$

$$\bullet P'(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0. \Leftrightarrow \bullet 2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}.$$

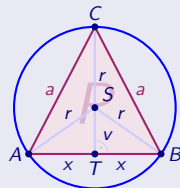
$$\Rightarrow \bullet \text{ Musí platiť: } 4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2, \text{ t. j. } 0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2).$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Posledná rovnica má 4 riešenia } 0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}, \text{ z ktorých vyhovuje iba jeden koreň } x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r).$$

$$\bullet P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r).$$

$$\bullet x = \frac{\sqrt{3}r}{2}. \Rightarrow \bullet P'(x) = 0. \bullet P''(x) < 0. \Rightarrow \bullet v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}, \text{ t. j. } v = \frac{r}{2}.$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je } P(x) = x(r+v)$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Obsah trojuholníka } P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v) \text{ pre } x, v \in (0; r).$$

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

$$\bullet a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}. \bullet v = \sqrt{r^2 - x^2}. \Rightarrow \bullet P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2}) \text{ pre } x \in (0; r).$$

$$\bullet \max P \text{ znamená maximalizovať funkciu } P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, x \in (0; r).$$

$$\bullet P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}, x \in (0; r).$$

$$\bullet P'(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0. \Leftrightarrow \bullet 2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}.$$

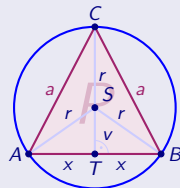
$$\Rightarrow \bullet \text{ Musí platiť: } 4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2, \text{ t. j. } 0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2).$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Posledná rovnica má 4 riešenia } 0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}, \text{ z ktorých vyhovuje iba jeden koreň } x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r).$$

$$\bullet P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r).$$

$$\bullet x = \frac{\sqrt{3}r}{2}. \Rightarrow \bullet P'(x) = 0. \bullet P''(x) < 0. \Rightarrow \bullet v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}, \text{ t. j. } v = \frac{r}{2}.$$

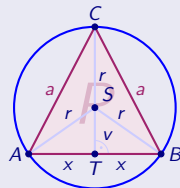
$$\Rightarrow \bullet \text{ Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je } P(x) = x(r+v) = \frac{\sqrt{3}r}{2} \left(r + \frac{r}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
 \Rightarrow ● Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. ● $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. \Rightarrow ● $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow ● $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow ● $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
 \Rightarrow ● Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
 \Rightarrow ● Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.
- $P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}})$
 $= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.
- $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. \Rightarrow ● $P'(x) = 0$. ● $P''(x) < 0$. \Rightarrow ● $v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$, t. j. $v = \frac{r}{2}$.
 \Rightarrow ● $a^2 = (r + \frac{r}{2})^2 + \frac{3r^2}{4} = \frac{12r^2}{4}$, t. j. ramená $|AC| = |BC| = a = \sqrt{3}r$.
- \Rightarrow ● Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x) = x(r+v) = \frac{\sqrt{3}r}{2}(r + \frac{r}{2}) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$

Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.

● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

\Rightarrow ● Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

● $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. ● $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. \Rightarrow ● $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

● $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

● $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.

● $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow ● $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow ● $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

\Rightarrow ● Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

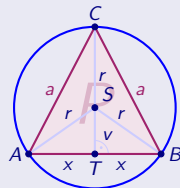
\Rightarrow ● Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

● $P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}})$
 $= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.

● $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. \Rightarrow ● $P'(x) = 0$. ● $P''(x) < 0$. \Rightarrow ● $v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$, t. j. $v = \frac{r}{2}$.

\Rightarrow ● $a^2 = (r + \frac{r}{2})^2 + \frac{3r^2}{4} = \frac{12r^2}{4}$, t. j. ramená $|AC| = |BC| = a = \sqrt{3}r$. ● Podstava $|AB| = 2x = \sqrt{3}r$.

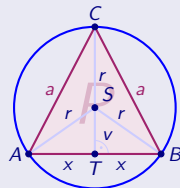
\Rightarrow ● Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x) = x(r+v) = \frac{\sqrt{3}r}{2}(r + \frac{r}{2}) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$



Monotónnosť a extrémny funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

- Označme: ● Vpísaný trojuholník ABC . ● T stred základne AB . ● Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
 ● S stred opísanej kružnice. ● Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
 \Rightarrow ● Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC , BTC a ATS , BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. ● $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. \Rightarrow ● $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. \Leftrightarrow ● $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. \Leftrightarrow ● $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
 \Rightarrow ● Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
 \Rightarrow ● Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm \frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.
- $P''(x) = [r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}})$
 $= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.
- $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. \Rightarrow ● $P'(x) = 0$. ● $P''(x) < 0$. \Rightarrow ● $v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$, t. j. $v = \frac{r}{2}$.
 \Rightarrow ● $a^2 = (r + \frac{r}{2})^2 + \frac{3r^2}{4} = \frac{12r^2}{4}$, t. j. ramená $|AC| = |BC| = a = \sqrt{3}r$. ● Podstava $|AB| = 2x = \sqrt{3}r$.
- \Rightarrow ● Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x) = x(r+v) = \frac{\sqrt{3}r}{2}(r + \frac{r}{2}) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ a trojuholník je rovnostranný.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I : • konvexná. \Leftrightarrow Pre všetky $x \in I$ platí: • $f''(x) > 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

Pre všetky $x \in I$ platí:

• konkávna.



• $f''(x) < 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

- konvexná. \Leftrightarrow Pre všetky $x \in I$ platí: • $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. \Leftrightarrow • $f''(x) \geq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

Pre všetky $x \in I$ platí:

- | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------|
| • konkávna. | \Leftrightarrow | • $f''(x) < 0$. |
| • rýdzo konkávna. | \Leftrightarrow | • $f''(x) \leq 0$. |



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :	• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :	• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :	• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
 - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :	• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
 - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
 - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :	• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :	• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje.

[Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]

[Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :	• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

\Rightarrow • Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

- \Rightarrow
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.
 - Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f''(x) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

- \Rightarrow
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.
 - Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f''(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojité funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

• konvexná.	\Leftrightarrow	Pre všetky $x \in I$ platí:	• $f''(x) > 0$.
• rýdzo konvexná.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \geq 0$.
• konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) < 0$.
• rýdzo konkávna.	\Leftrightarrow		• $f''(x) \leq 0$.

• Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

- Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]
- Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f .]

• Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

- \Rightarrow
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.
 - Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f''(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval. Potom by bola funkcia na tomto podintervale síce konvexná, resp. konkávna, ale nie rýdzo.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c .

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c .
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- } \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- } \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]
-
- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad \text{[Nulová druhá derivácia.]}$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď PrI.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď PrI.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • Funkcia f má inflexiu v bode c . [Bod c je inflexný.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď PrI.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď PrI.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • Funkcia f má inflexiu v bode c . [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď PrI.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď PrI.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • Funkcia f má inflexiu v bode c . [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď PrI.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď PrI.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • Funkcia f má inflexiu v bode c . [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď PrI.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď PrI.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • Funkcia f má inflexiu v bode c . [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

Pre $x < c$: • $f''(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f''(x) < 0$. \Rightarrow • f má inflexiu v bode c .

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \begin{array}{l} \bullet f''(c) = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet f'''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.

[Viď Pr.I.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať.

[Viď Pr.I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • Funkcia f má inflexiu v bode c .

[Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

- Pre $x < c$: • $f''(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f''(x) < 0$. \Rightarrow • f má inflexiu v bode c .
- $f''(x) < 0$ • $f''(x) > 0$. \Rightarrow • f má inflexiu v bode c .

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - Funkcia f má inflexiu v bode c .
 - V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \bullet f''(c) = 0. \quad [\text{Nulová druhá derivácia.}]$$

• Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr.I.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr.I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

\Rightarrow • Funkcia f má inflexiu v bode c . [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

Pre $x < c$: • $f''(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f''(x) < 0$. \Rightarrow • f má inflexiu v bode c .

• $f''(x) < 0$ • $f''(x) > 0$. \Rightarrow • f má inflexiu v bode c .

Pre $x \neq c$: • $f''(x) > 0$, resp. • $f''(x) < 0$. \Rightarrow • f nemá inflexiu v bode c .

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

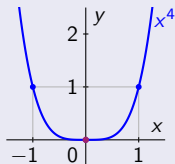
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

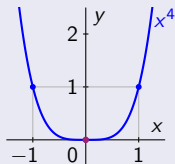
- $f(x) = x^4$.
- $f(0) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

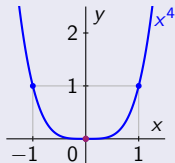
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

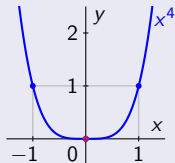
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

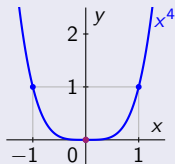
[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

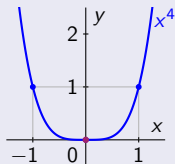
[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

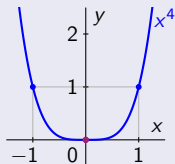
- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

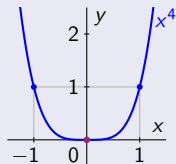
- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

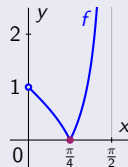
- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

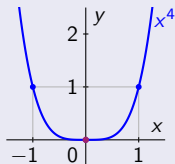
- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

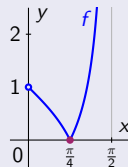
- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.



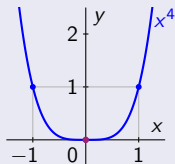
$$x \in (0; \frac{\pi}{4})$$

$$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

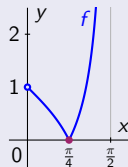
- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.



$$x \in (0; \frac{\pi}{4})$$

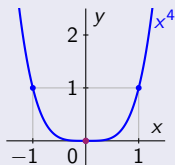
$$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.
- $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

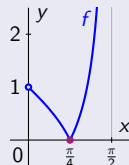
- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.



$$x \in (0; \frac{\pi}{4})$$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.

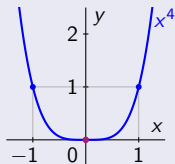
$$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$$

- $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

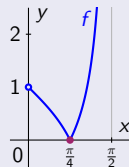
[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. • $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



$$x \in (0; \frac{\pi}{4})$$

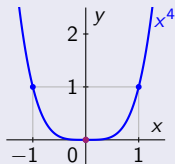
$$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$. • $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$. • $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$. • $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$. • $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

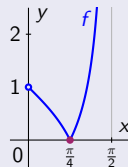
[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



$$x \in (0; \frac{\pi}{4})$$

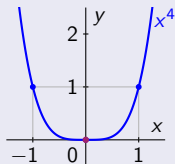
$$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.
- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$.
- $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$.
- $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.
- $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

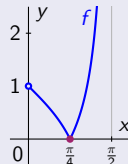
[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



$x \in (0; \frac{\pi}{4})$

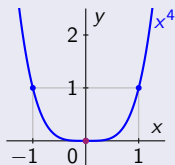
$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$. $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$. $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$. $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.
- $f''(x) = \frac{-2 \sin x}{\cos^2 x} < 0$. $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$. $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} > 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

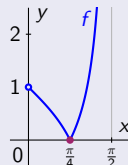
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Bod $\frac{\pi}{4}$ je inflexný.



$$x \in (0; \frac{\pi}{4})$$

$$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.

- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.

- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$.

- $f''(x) = \frac{-2 \sin x}{\cos^2 x} < 0$. $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$.

- f je konkávna.

- $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

- $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.

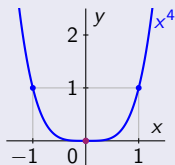
- $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} > 0$.

- f je konvexná.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

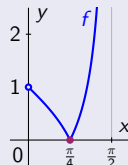
- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Bod $\frac{\pi}{4}$ je inflexný.



$x \in (0; \frac{\pi}{4})$

$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

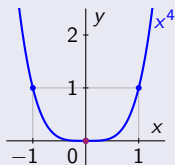
- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$. $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$. $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$. $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.
- $f''(x) = \frac{-2 \sin x}{\cos^2 x} < 0$. $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$. $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} > 0$.
- f je konkávna. f je konvexná.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. \Rightarrow $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$,
ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^4$. $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na \mathbb{R} .

[Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

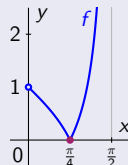
- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je inflexia. \Rightarrow Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia,
ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Bod $\frac{\pi}{4}$ je inflexný.



$x \in (0; \frac{\pi}{4})$

$x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$. $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$. $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$. $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.
- $f''(x) = \frac{-2 \sin x}{\cos^2 x} < 0$. $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$. $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} > 0$.
- f je konkávna. f je konvexná.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.
- To znamená, že pri hľadaní inflexných bodov musíme overiť aj všetky body, v ktorých druhá derivácia neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

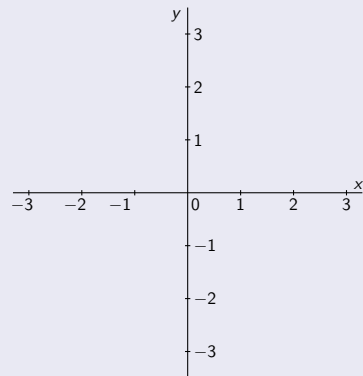
[Vid 01-PrII.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.



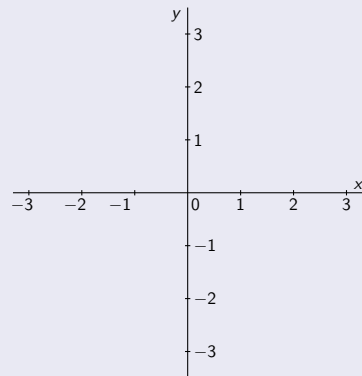
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

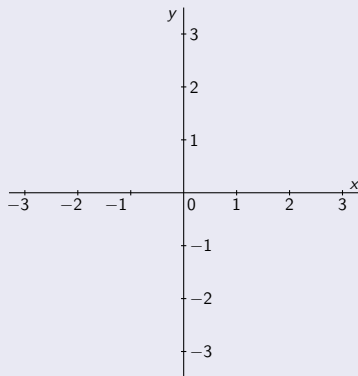
$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

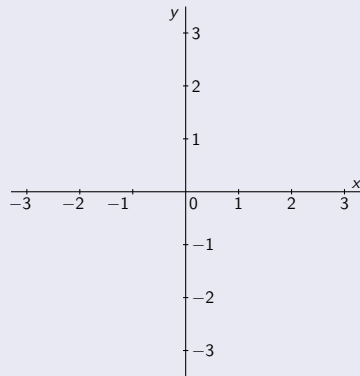
[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $1 = 0,$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

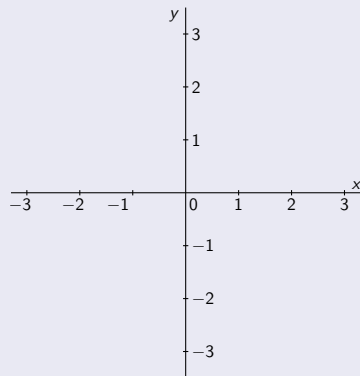
[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}.$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3} \\ &= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}. \end{aligned}$$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

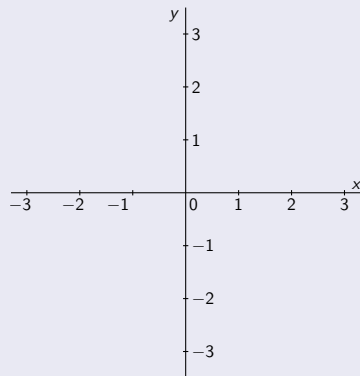
[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

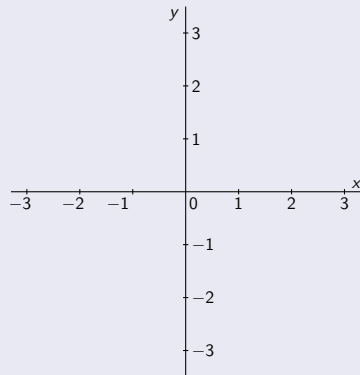
[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

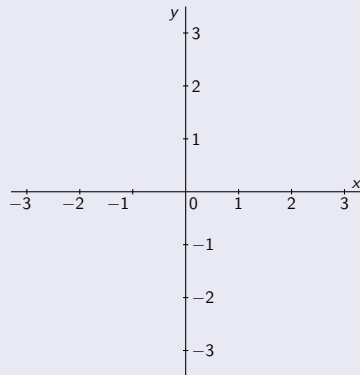
[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.
 \Rightarrow • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

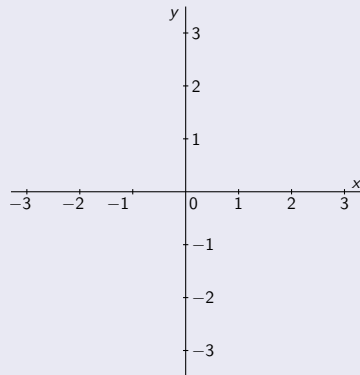
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

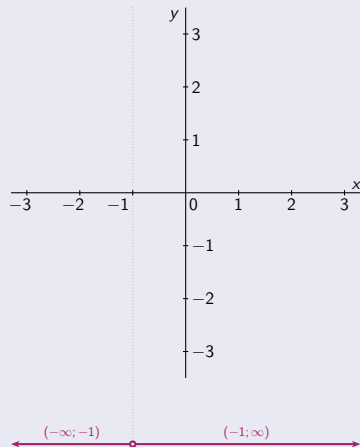
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.
 \Rightarrow • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
 $= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.
- \Rightarrow • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

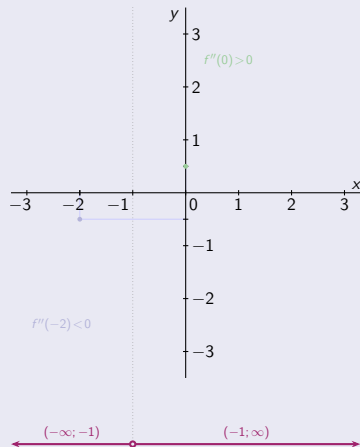
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. f'' je spojitá na $D(f)$, $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

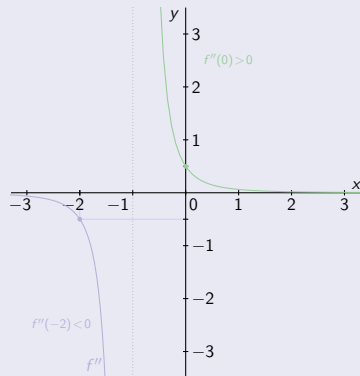
$$f''(x) < 0.$$

f je konkávná.

$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy.
 - f'' je spojitá na $D(f)$,
 - $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

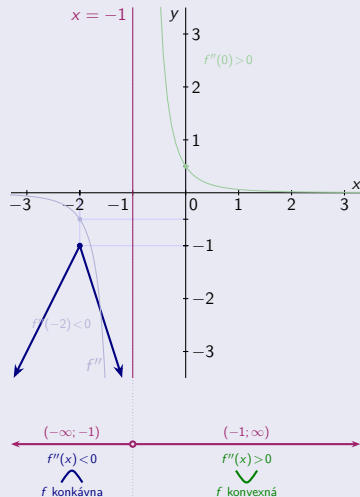
$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x} + 4} = -\infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy.
 - f'' je spojitá na $D(f)$,
 - $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

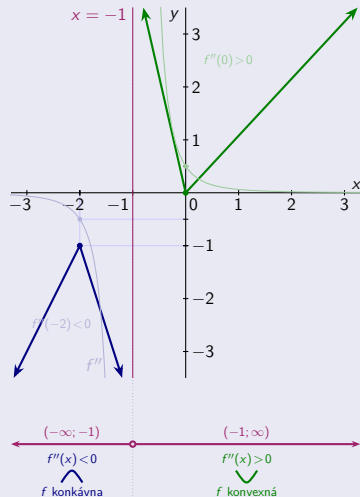
$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = \infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy.
 - f'' je spojitá na $D(f)$,
 - $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

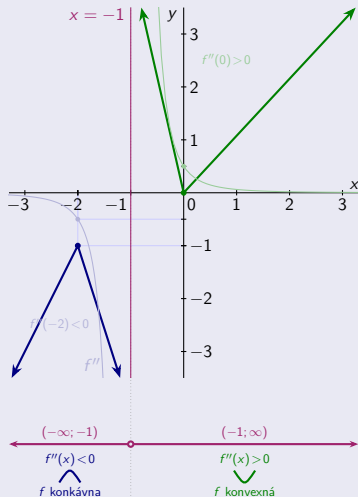
$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty. \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = \infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy.
- f'' je spojitá na $D(f)$,
- $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

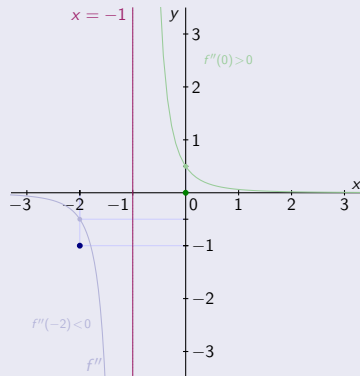
$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty. \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = \infty.$$



Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3} \\ = \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy. f'' je spojitá na $D(f)$, $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

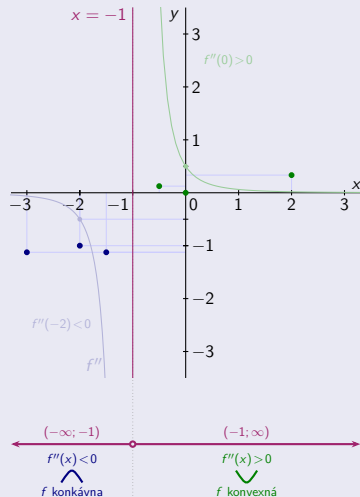
f je konvexná.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -\frac{1}{2}. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty. \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = \infty.$$

$$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}. \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4-6} = -\frac{9}{2}. \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{8}. \quad f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$$

Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy.
- f'' je spojitá na $D(f)$,
- $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty. \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

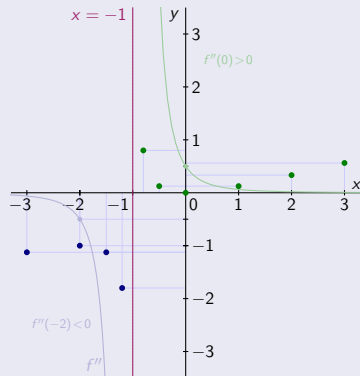
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = \infty.$$

$$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}. \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4-6} = -\frac{9}{2}. \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{8}. \quad f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$$

$$f(-\frac{6}{5}) = \frac{36}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}. \quad f(-\frac{4}{5}) = \frac{16}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}. \quad f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}. \quad f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$$

Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

[Vid 01-PrII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}.$

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, t. j. nikdy.
- f'' je spojitá na $D(f)$,
- $-1 \notin D(f)$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$f''(0) = \frac{1}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty. \quad f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$$

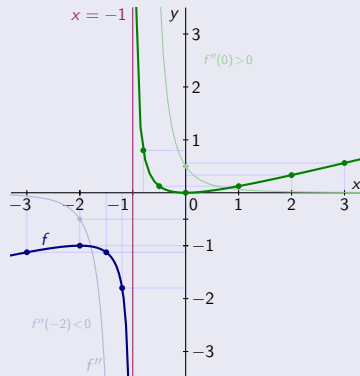
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{4} + 4} = \infty.$$

$$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}. \quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4-6} = -\frac{9}{2}. \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{8}. \quad f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$$

$$f(-\frac{6}{5}) = \frac{36}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}. \quad f(-\frac{4}{5}) = \frac{16}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}. \quad f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}. \quad f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$$

Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

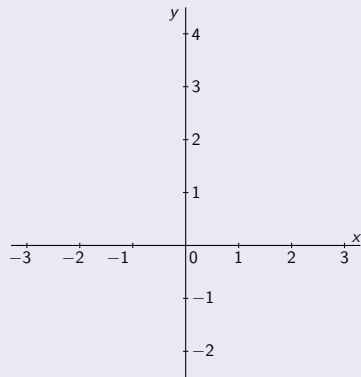
[Viď 01-PrIII.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.



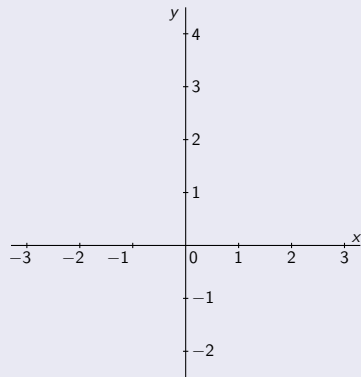
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

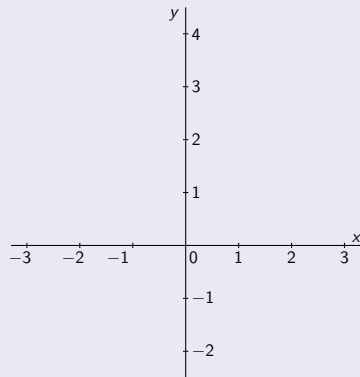
[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$\bullet f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

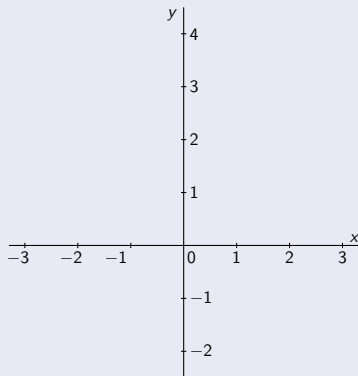
$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-Pr III.]

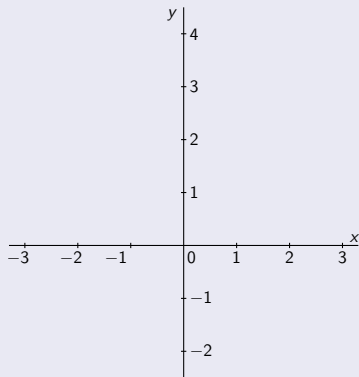
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$\bullet f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x = 0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

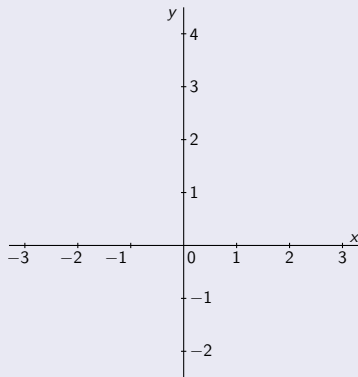
Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$\bullet f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x = 0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$

- f'' je spojitá na $D(f)$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-Pr III.]

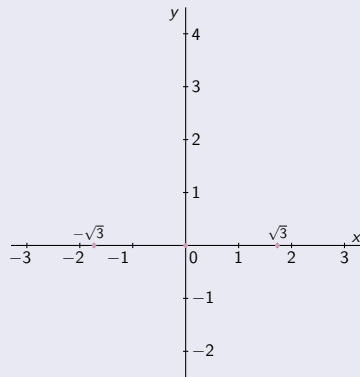
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]

- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

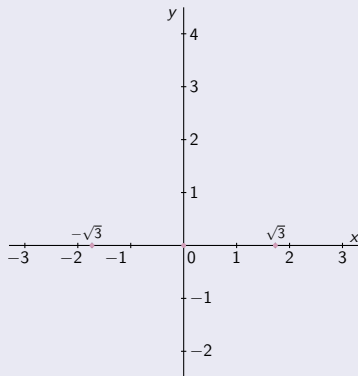
Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0. \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x=0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$

$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''(-\sqrt{3}) = 0, \bullet f''(0) = 0, \bullet f''(\sqrt{3}) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } (-\infty; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; 0), (0; \sqrt{3}) \text{ a } (\sqrt{3}; \infty).$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

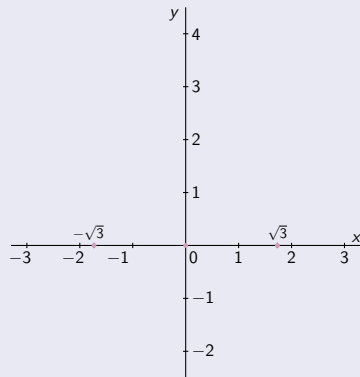
$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0. \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x=0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$

$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \quad f''(-\sqrt{3}) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f''(\sqrt{3}) = 0.$$

$$\Rightarrow f'' \text{ nemení znamienko na } (-\infty; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; 0), (0; \sqrt{3}) \text{ a } (\sqrt{3}; \infty).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0. \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x=0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$

$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''(-\sqrt{3}) = 0, \bullet f''(0) = 0, \bullet f''(\sqrt{3}) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } (-\infty; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; 0), (0; \sqrt{3}) \text{ a } (\sqrt{3}; \infty).$$

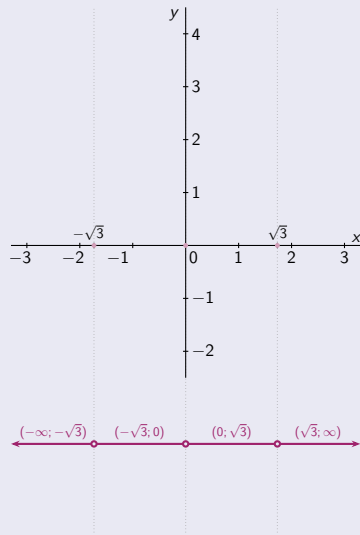
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$$

$$x \in (-\sqrt{3}; 0)$$

$$x \in (0; \sqrt{3})$$

$$x \in (\sqrt{3}; \infty)$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x=0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$

$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''(-\sqrt{3}) = 0, \bullet f''(0) = 0, \bullet f''(\sqrt{3}) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } (-\infty; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; 0), (0; \sqrt{3}) \text{ a } (\sqrt{3}; \infty).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

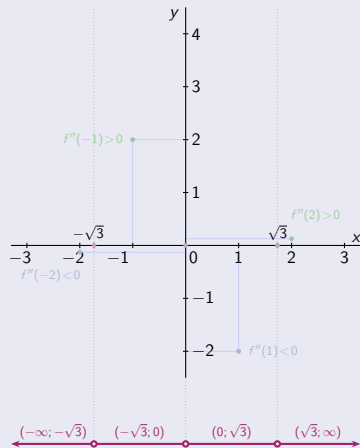
$$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$$

$$x \in (-\sqrt{3}; 0)$$

$$x \in (0; \sqrt{3})$$

$$x \in (\sqrt{3}; \infty)$$

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(-\sqrt{3}) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(\sqrt{3}) = 0$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

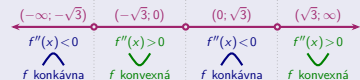
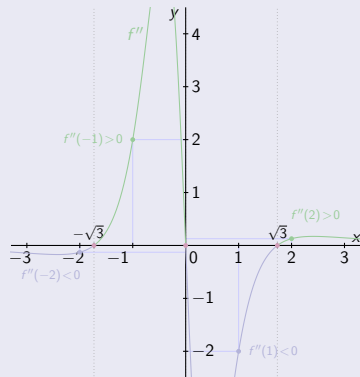
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
------------------------------	------------------------	-----------------------	----------------------------

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

$$f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.} \quad f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.}$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [x = 0, resp. x = ±√3.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(-\sqrt{3}) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(\sqrt{3}) = 0$.
- ⇒ f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
------------------------------	------------------------	-----------------------	----------------------------

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

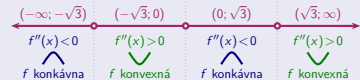
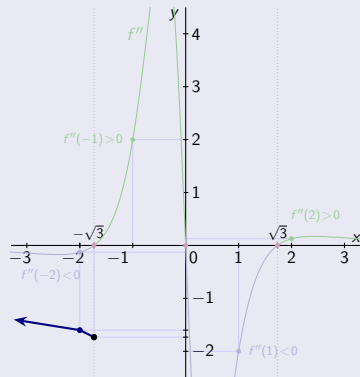
$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

$$f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.} \quad f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.}$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí: $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x=0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$

$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''(-\sqrt{3}) = 0, \bullet f''(0) = 0, \bullet f''(\sqrt{3}) = 0.$$

\Rightarrow f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
------------------------------	------------------------	-----------------------	----------------------------

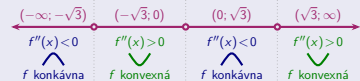
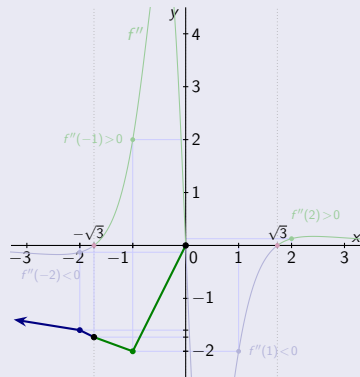
$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

f je konkávna. f je konvexná. f je konkávna. f je konvexná.

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}. \quad f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(-\sqrt{3}) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(\sqrt{3}) = 0$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$$

$$x \in (-\sqrt{3}; 0)$$

$$x \in (0; \sqrt{3})$$

$$x \in (\sqrt{3}; \infty)$$

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

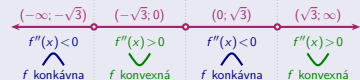
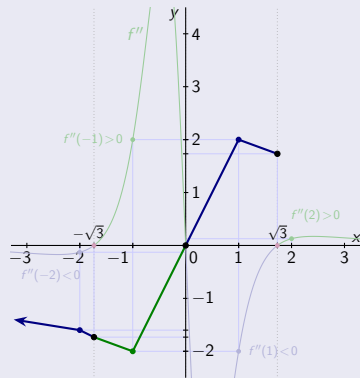
$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

$$f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.} \quad f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.}$$

$$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \quad [x=0, \text{ resp. } x = \pm\sqrt{3}.]$$

$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''(-\sqrt{3}) = 0, \bullet f''(0) = 0, \bullet f''(\sqrt{3}) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } (-\infty; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; 0), (0; \sqrt{3}) \text{ a } (\sqrt{3}; \infty).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$$

$$x \in (-\sqrt{3}; 0)$$

$$x \in (0; \sqrt{3})$$

$$x \in (\sqrt{3}; \infty)$$

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

 f je konkávna.

 f je konvexná.

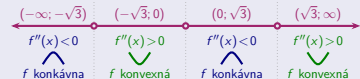
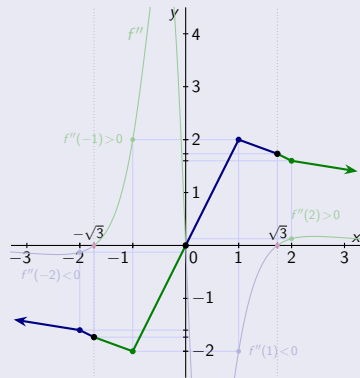
 f je konkávna.

 f je konvexná.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(-\sqrt{3}) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(\sqrt{3}) = 0$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$$

$$x \in (-\sqrt{3}; 0)$$

$$x \in (0; \sqrt{3})$$

$$x \in (\sqrt{3}; \infty)$$

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

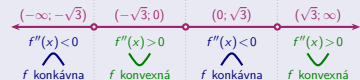
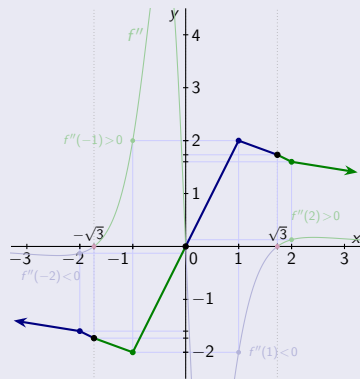
$$f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.} \quad f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.}$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}. \quad f(0) = \frac{0}{1+0} = 0. \quad f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}. \quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2. \quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2. \quad f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$].
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(-\sqrt{3}) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(\sqrt{3}) = 0$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
------------------------------	------------------------	-----------------------	----------------------------

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

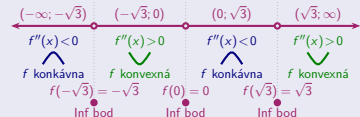
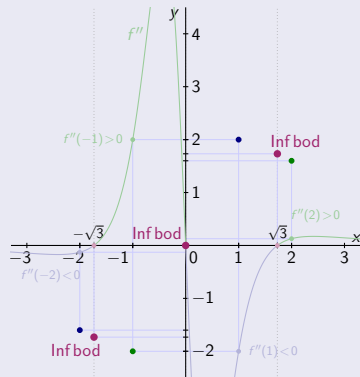
$$f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.} \quad f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.}$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}. \quad f(0) = \frac{0}{1+0} = 0. \quad f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}. \quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2. \quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2. \quad f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$$

$$\bullet f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \quad \bullet f(0) = 0, \quad \bullet f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

sú inflexné body a na $D(f)$ iné neexistujú.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-Pr.III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$].
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(-\sqrt{3}) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(\sqrt{3}) = 0$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
------------------------------	------------------------	-----------------------	----------------------------

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

$$f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.} \quad f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.}$$

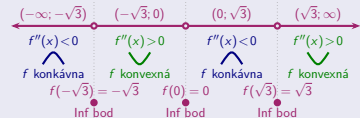
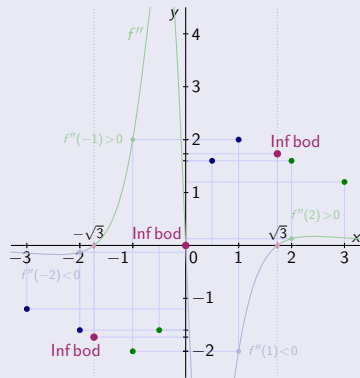
$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}. \quad f(0) = \frac{0}{1+0} = 0. \quad f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

$$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}. \quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2. \quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2. \quad f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$$

$$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}. \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}. \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}. \quad f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

$$\bullet f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \quad \bullet f(0) = 0, \quad \bullet f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

sú inflexné body a na $D(f)$ iné neexistujú.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[Viď 01-Pr.III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre derivácie platí:

$$f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(-\sqrt{3}) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(\sqrt{3}) = 0$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
------------------------------	------------------------	-----------------------	----------------------------

$$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0. \quad f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0. \quad f''(1) = -\frac{16}{8} = -2 < 0. \quad f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$$

$$f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0. \quad f''(x) < 0. \quad f''(x) > 0.$$

$$f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.} \quad f \text{ je konkávna.} \quad f \text{ je konvexná.}$$

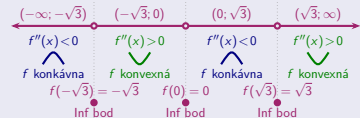
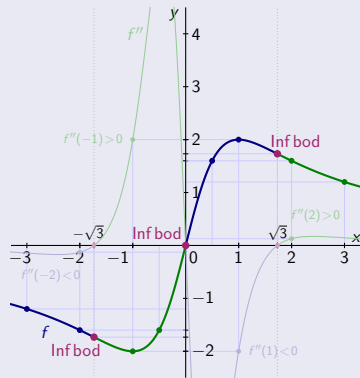
$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}. \quad f(0) = \frac{0}{1+0} = 0. \quad f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$$

$$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}. \quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2. \quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2. \quad f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$$

$$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}. \quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}. \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}. \quad f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

$$\bullet f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \quad \bullet f(0) = 0, \quad \bullet f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

sú inflexné body a na $D(f)$ iné neexistujú.

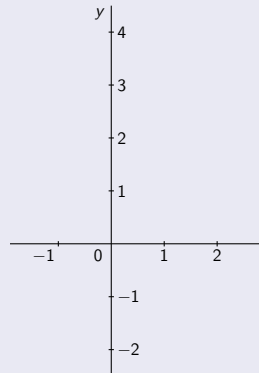
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

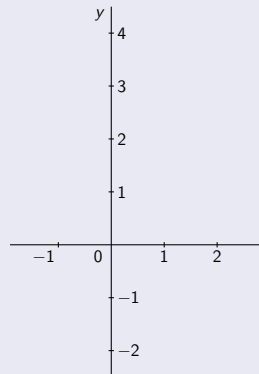
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

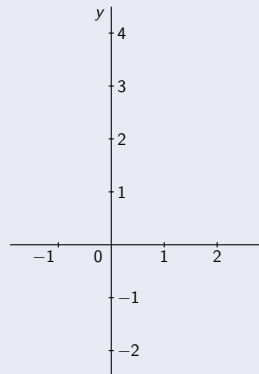
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

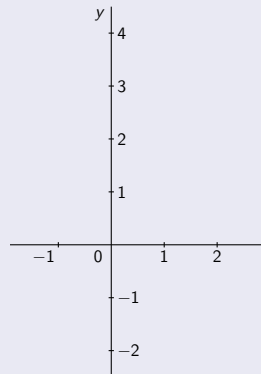
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
 - Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.
-
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$

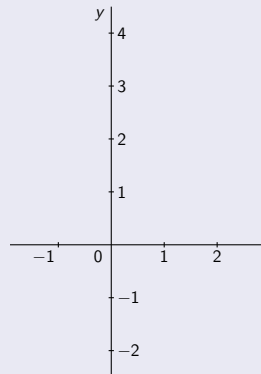


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

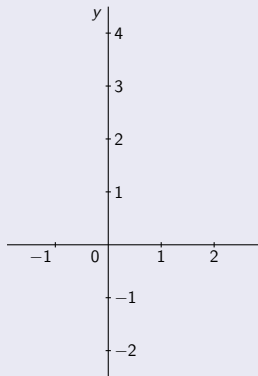


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$
- f'' je spojitá na $D(f)$,

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

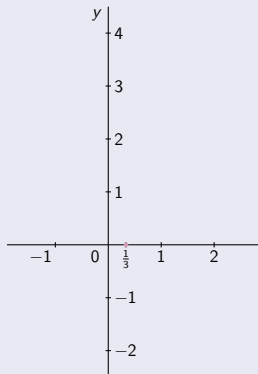


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$
- f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

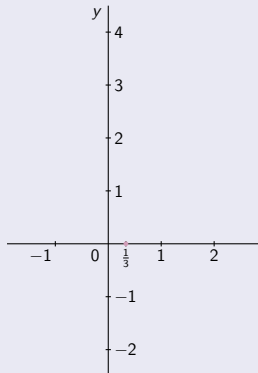


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
 - Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.
-
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$
 - f'' je spojitá na $D(f)$, $f''(\frac{1}{3}) = 0.$
 - $\Rightarrow f''$ nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

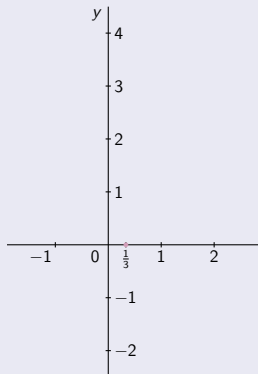
$$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

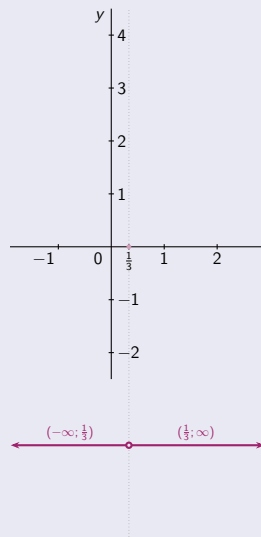
$$f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

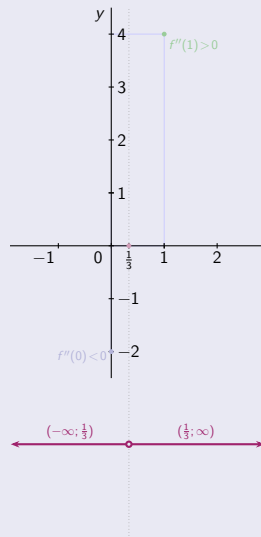
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

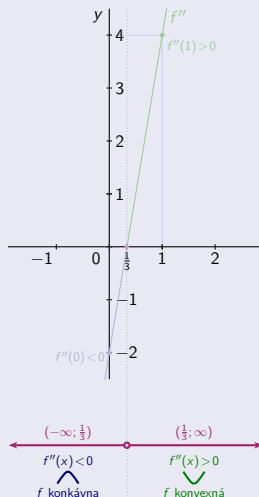
f je konkávnna.

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$

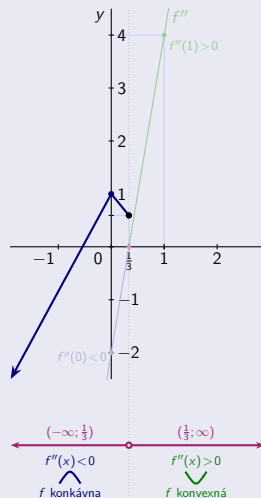
$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(0) = 1.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$

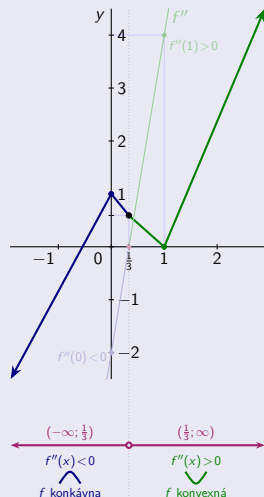
$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$$

$$f(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávnna.

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

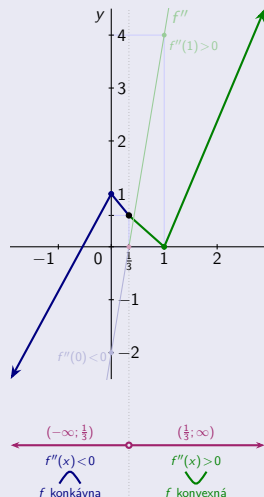
$$f(0) = 1.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$$

$$f(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0. \quad [\text{Jediné riešenie } x = \frac{1}{3}.]$$

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } (-\infty; \frac{1}{3}) \text{ a } (\frac{1}{3}; \infty).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(0) = 1.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$$

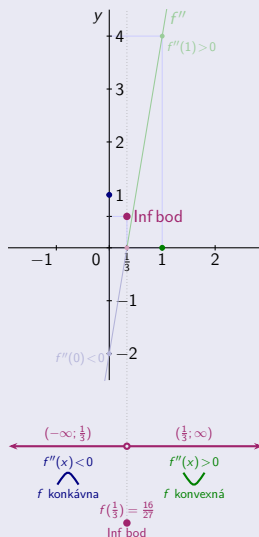
$$f(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty.$$

$$\bullet f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \text{ je inflexný bod}$$

a na $D(f)$ iné inflexné body neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } (-\infty; \frac{1}{3}) \text{ a } (\frac{1}{3}; \infty).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(0) = 1.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$$

$$f(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty.$$

$$f(-1) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{8}.$$

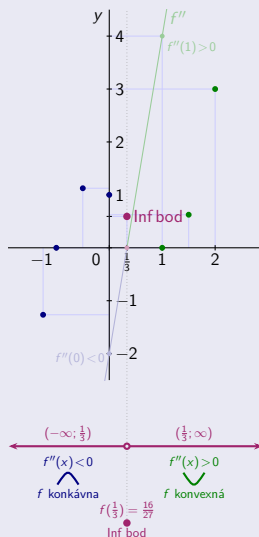
$$f(2) = 8 - 4 - 2 + 1 = 3.$$

$$f\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{125}{64} - \frac{25}{16} + \frac{5}{4} + 1 = -\frac{81}{64}.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{8}.$$

$$\bullet f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \text{ je inflexný bod}$$

a na $D(f)$ iné inflexné body neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet 6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$$

[Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

$$\bullet f'' \text{ je spojitá na } D(f), \bullet f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \bullet f'' \text{ nemení znamienko na } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{ a } \left(\frac{1}{3}; \infty\right).$$

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

$$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f''(x) < 0.$$

f je konkávna.

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$$

$$f''(x) > 0.$$

f je konvexná.

$$f(0) = 1.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$$

$$f(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty.$$

$$f(-1) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{8}.$$

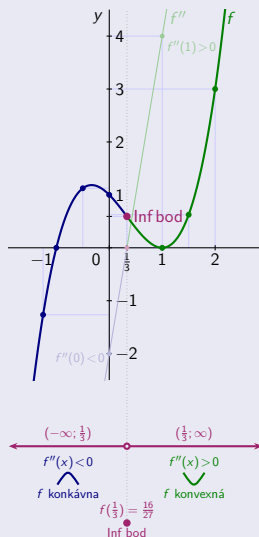
$$f(2) = 8 - 4 - 2 + 1 = 3.$$

$$f\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{125}{64} - \frac{25}{16} + \frac{5}{4} + 1 = -\frac{81}{64}.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{8}.$$

$$\bullet f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \text{ je inflexný bod}$$

a na $D(f)$ iné inflexné body neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

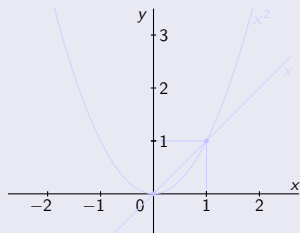
$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.



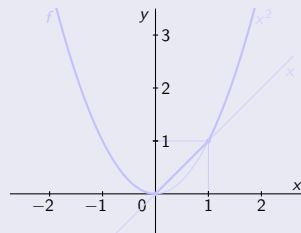
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

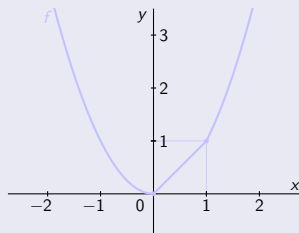
$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

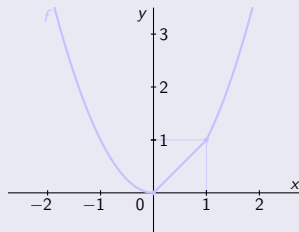
$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

• $f(0) = 0$. • $f(1) = 1$. • Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

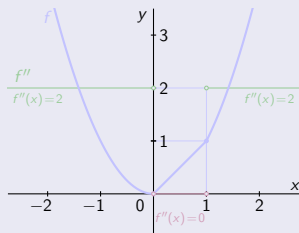
$\bullet f(0) = 0$. $\bullet f(1) = 1$. \bullet Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

\bullet Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

\bullet Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$\bullet f(0) = 0$. $\bullet f(1) = 1$. \bullet Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

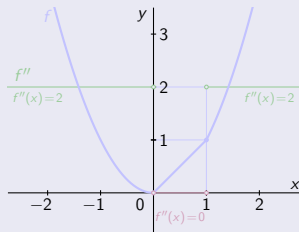
\bullet Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

\bullet Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

$\bullet f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$\bullet f(0) = 0$. $\bullet f(1) = 1$. \bullet Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

\bullet Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

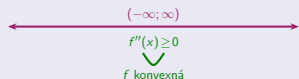
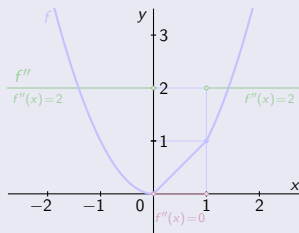
[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

\bullet Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

$\bullet f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]

$\Rightarrow \bullet$ Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

• $f(0) = 0$. • $f(1) = 1$. • Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

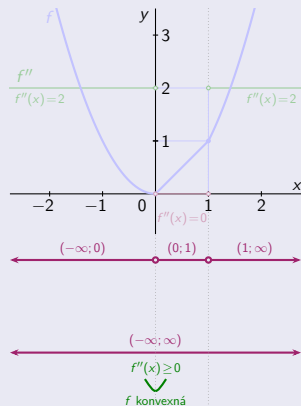
• Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

• $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]

⇒ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
----------------------	----------------	---------------------



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

• $f(0) = 0$. • $f(1) = 1$. • Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

• Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

• $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]

⇒ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
----------------------	----------------	---------------------

$$f''(x) = 2 > 0.$$

f je rýdzo konvexná.

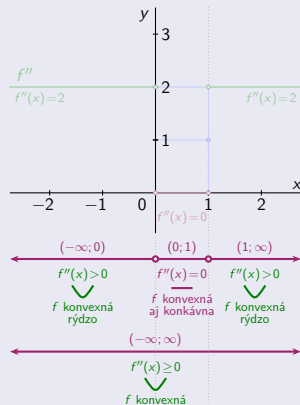
$$f''(x) = 0.$$

f je konvexná aj konkávna.

[Funkcia f je lineárna na $(0; 1)$.]

$$f''(x) = 2 > 0.$$

f je rýdzo konvexná.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

• $f(0) = 0$. • $f(1) = 1$. • Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

• Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

• $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]

⇒ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
----------------------	----------------	---------------------

$$f''(x) = 2 > 0.$$

$$f''(x) = 0.$$

$$f''(x) = 2 > 0.$$

f je rýdzo konvexná.

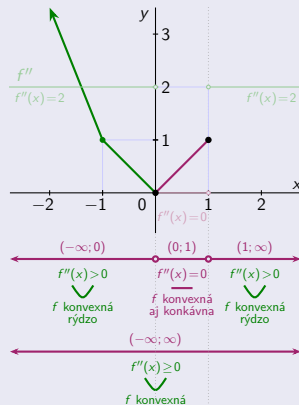
f je konvexná aj konkávna.

f je rýdzo konvexná.

[Funkcia f je lineárna na $(0; 1)$.]

$$f(0) = 0.$$

$$f(1) = 1.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$\bullet f(0) = 0$. $\bullet f(1) = 1$. \bullet Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

\bullet Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

\bullet Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

$\bullet f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]

$\Rightarrow \bullet$ Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
----------------------	----------------	---------------------

$$f''(x) = 2 > 0.$$

$$f''(x) = 0.$$

$$f''(x) = 2 > 0.$$

f je rýdzo konvexná.

f je konvexná aj konkávna.

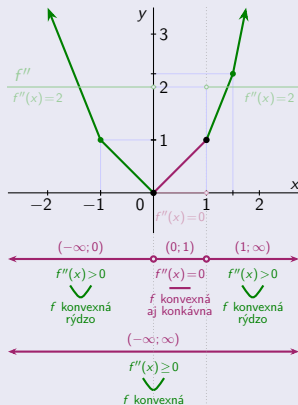
f je rýdzo konvexná.

[Funkcia f je lineárna na $(0; 1)$.]

$$f(1) = 1.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$\bullet f(0) = 0$. $\bullet f(1) = 1$. \bullet Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

\bullet Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

\bullet Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

$\bullet f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]

\Rightarrow \bullet Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
----------------------	----------------	---------------------

$$f''(x) = 2 > 0.$$

$$f''(x) = 0.$$

$$f''(x) = 2 > 0.$$

f je rýdzo konvexná.

f je konvexná aj konkávna.

f je rýdzo konvexná.

[Funkcia f je lineárna na $(0; 1)$.]

$$f(-1) = 1.$$

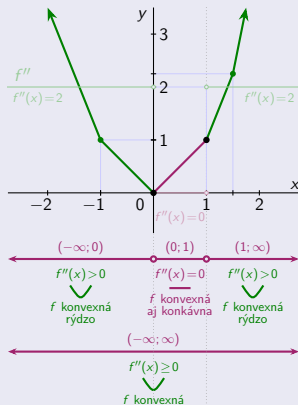
$$f(0) = 0.$$

$$f(1) = 1.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ a $(1; \infty)$.]

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ x & \text{pre } x \in (0; 1), \\ x^2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

• $f(0) = 0$. • $f(1) = 1$. • Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.

• Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]

• Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú.

[Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]

• $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na \mathbb{R} .]

\Rightarrow • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
----------------------	----------------	---------------------

$$f''(x) = 2 > 0.$$

$$f''(x) = 0.$$

$$f''(x) = 2 > 0.$$

f je rýdzo konvexná.

f je konvexná aj konkávna.

f je rýdzo konvexná.

[Funkcia f je lineárna na $(0; 1)$.]

$$f(-1) = 1.$$

$$f(0) = 0.$$

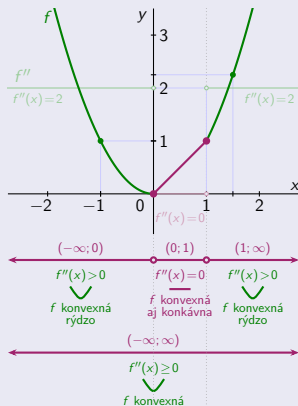
$$f(1) = 1.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$$

f je konvexná na $D(f)$ (nie rýdzo) a inflexné body na $D(f)$ neexistujú.



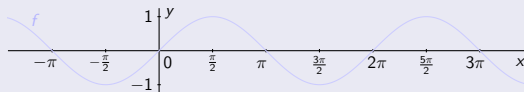
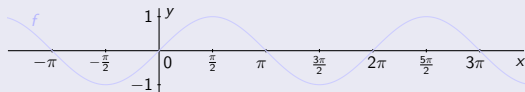
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

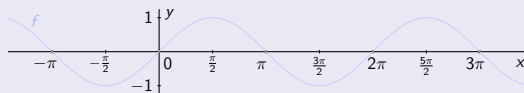
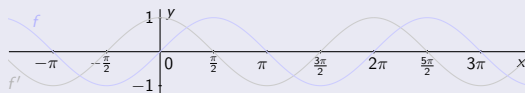


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

• Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

Pre derivácie platí: • $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

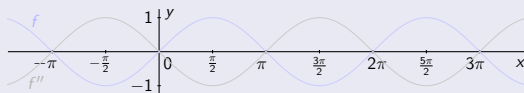
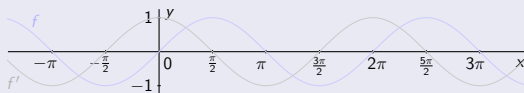


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

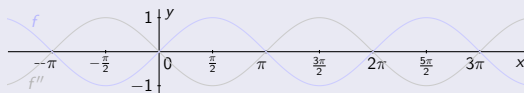
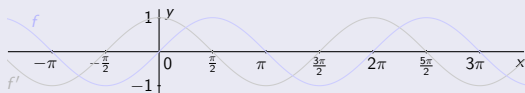


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

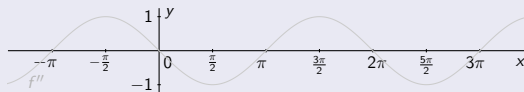
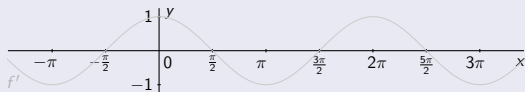
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

Pre derivácie platí: • $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

• $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

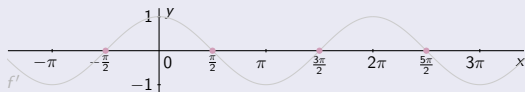
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

Pre derivácie platí: • $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

• $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

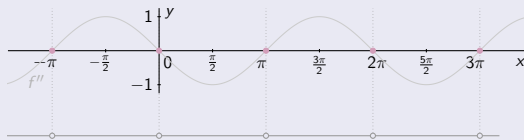
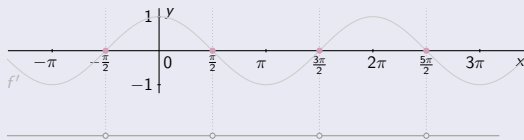
$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 \Rightarrow • f' nemá znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- f'' je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 \Rightarrow • f'' nemá znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

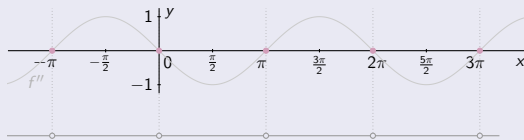
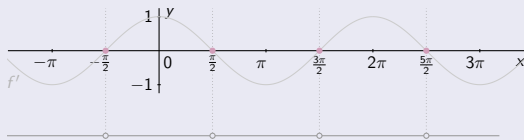
$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 \Rightarrow • f' nemá znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- [Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 \Rightarrow • f'' nemá znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- [Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemá znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

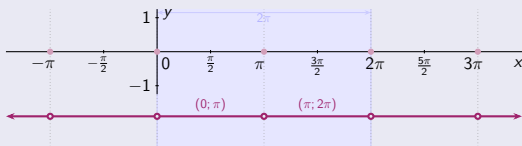
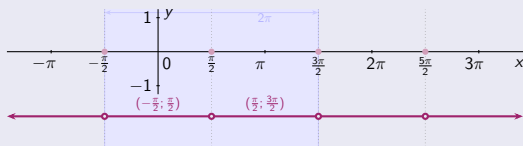
$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

- f'' je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemá znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

- $f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0$. $f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0$.
- $f'(x) > 0$, t.j. f je rastúca. $f'(x) < 0$, t.j. f je klesajúca.

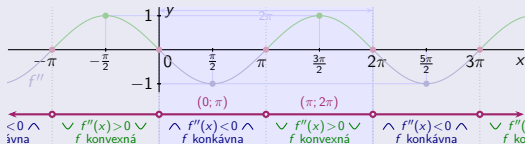
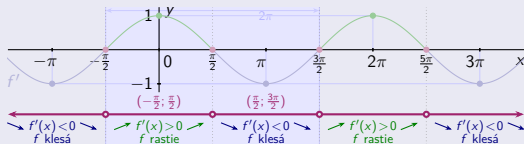
- f'' je spojité a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

- $f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0$. $f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0$.
- $f''(x) < 0$, t.j. f je konkávna. $f''(x) > 0$, t.j. f je konvexná.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

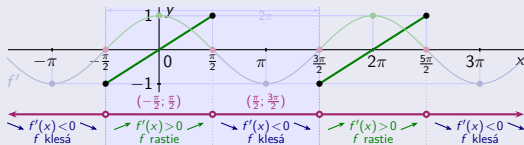
$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0. \quad f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f'(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je rastúca.} \quad f'(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je klesajúca.}$$

$$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1. \quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$$



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

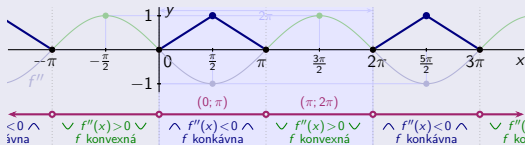
$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$$f''(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je konkávna.} \quad f''(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je konvexná.}$$

$$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(0 + 2k\pi) = 0. \quad f(\pi + 2k\pi) = 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

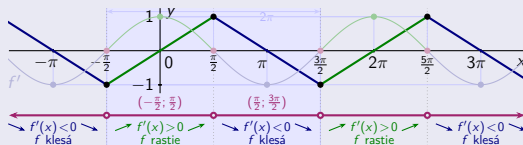
$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0. \quad f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f'(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je rastúca.} \quad f'(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je klesajúca.}$$

$$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$$



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

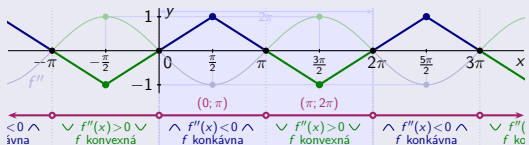
$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$$f''(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je konkávna.} \quad f''(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je konvexná.}$$

$$f(\pi + 2k\pi) = 0. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

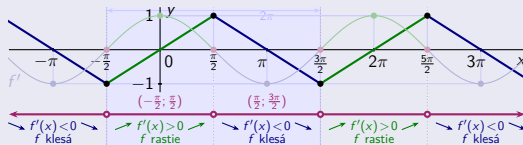
$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0. \quad f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f'(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je rastúca.} \quad f'(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je klesajúca.}$$

$$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1. \quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$$



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

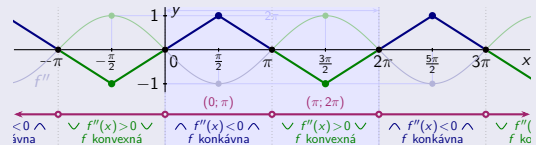
$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$$f''(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je konkávna.} \quad f''(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je konvexná.}$$

$$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1. \\ f(0 + 2k\pi) = 0. \quad f(\pi + 2k\pi) = 0. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

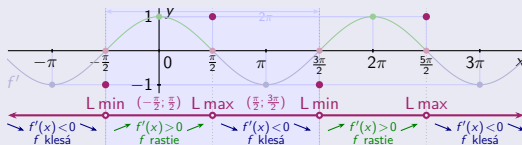
$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0. \quad f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f'(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je rastúca.} \quad f'(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je klesajúca.}$$

$$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1. \quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$$

- $f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ sú lokálne min.
- $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ sú lokálne max.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

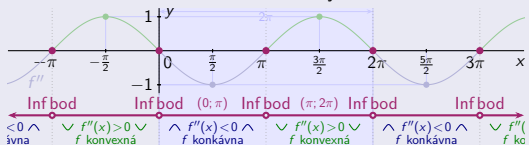
$$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$$

$$f''(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je konkávna.} \quad f''(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je konvexná.}$$

$$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$$

$$f(0 + 2k\pi) = 0. \quad f(\pi + 2k\pi) = 0. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 0.$$

- $f(0 + 2k\pi) = 0$, $f(\pi + 2k\pi) = 0$ sú inflexné body.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0. \quad f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f'(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je rastúca.} \quad f'(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je klesajúca.}$$

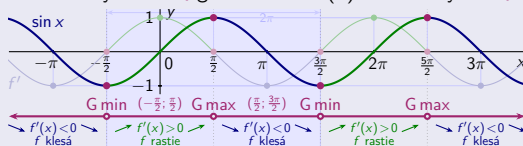
$$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1. \quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$$

$$\bullet f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 \quad \bullet f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$$

sú lokálne min.

sú lokálne max.

Tieto extrémny sú súčasne aj globálne a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$$

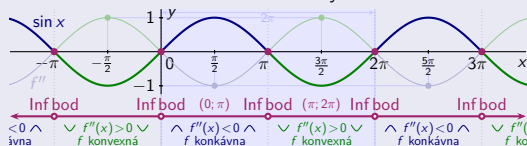
$$f''(x) < 0, \text{ t.j. } f \text{ je konkávna.} \quad f''(x) > 0, \text{ t.j. } f \text{ je konvexná.}$$

$$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$$

$$f(0 + 2k\pi) = 0. \quad f(\pi + 2k\pi) = 0. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 0.$$

$$\bullet f(0 + 2k\pi) = 0, \quad \bullet f(\pi + 2k\pi) = 0$$

sú inflexné body.



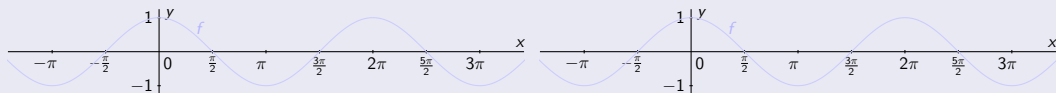
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

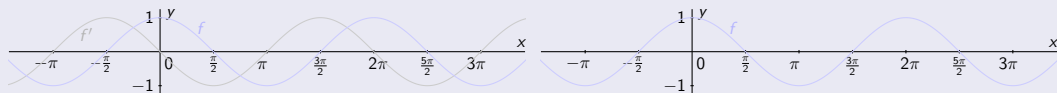
- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$. Pre derivácie platí: $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

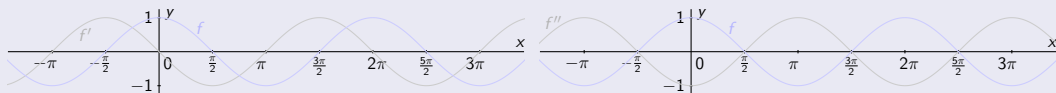


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

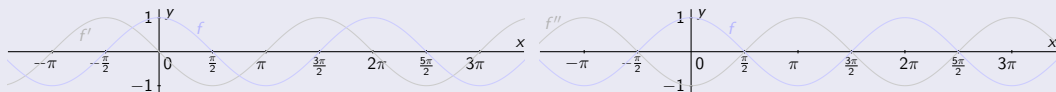


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

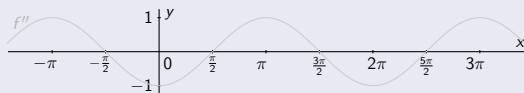
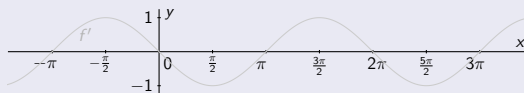
$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

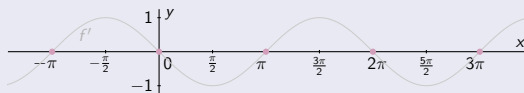
$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

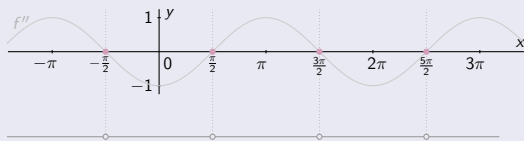
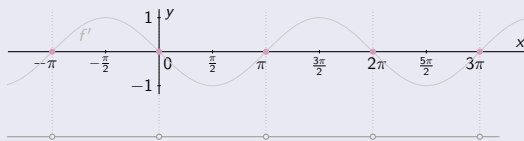
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \bullet f'$ nemá znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.

- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow \bullet x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \bullet f''$ nemá znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

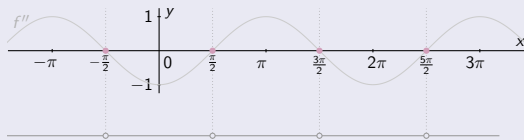
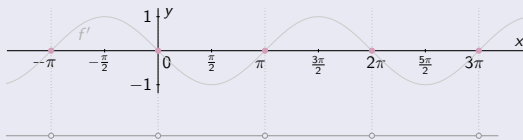
- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow \bullet x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow \bullet f'$ nemá znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow \bullet x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow \bullet f''$ nemá znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in R.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.
 \Rightarrow • f' nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

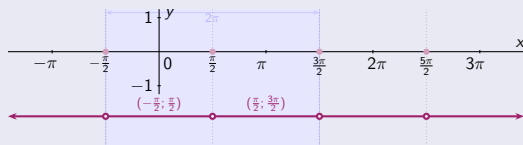
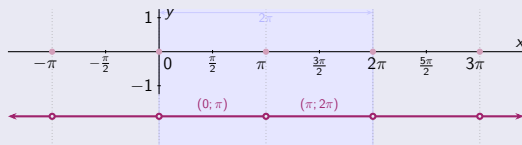
$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.
 \Rightarrow • f'' nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

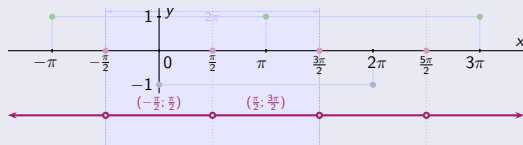
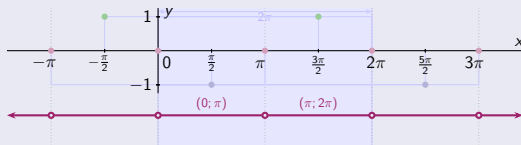
- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0.$$

$f'(x) < 0$, t.j. f je klesajúca.

$$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$f'(x) > 0$, t.j. f je rastúca.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

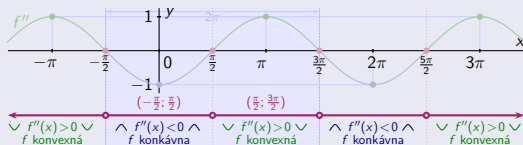
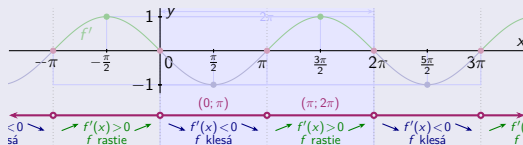
$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0.$$

$f''(x) < 0$, t.j. f je konkávná.

$$f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$f''(x) > 0$, t.j. f je konvexná.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$f'(x) < 0$, t.j. f je klesajúca. $f'(x) > 0$, t.j. f je rastúca.

$$f(\pi + 2k\pi) = -1. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 1.$$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

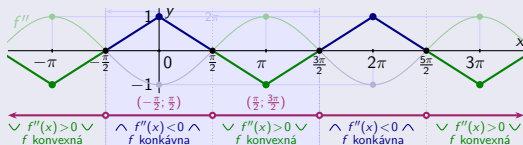
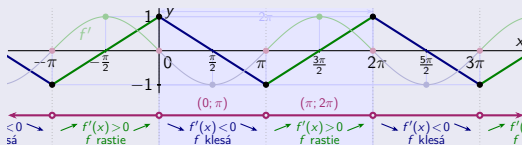
$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$f''(x) < 0$, t.j. f je konkávná. $f''(x) > 0$, t.j. f je konvexná.

$$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$$f'(x) < 0, \text{ t. j. } f \text{ je klesajúca.} \quad f'(x) > 0, \text{ t. j. } f \text{ je rastúca.}$$

$$f(0 + 2k\pi) = 1. \quad f(\pi + 2k\pi) = -1. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 1.$$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

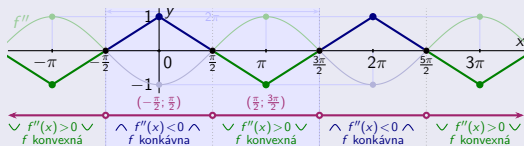
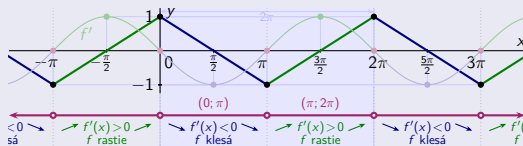
$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0. \quad f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$$f''(x) < 0, \text{ t. j. } f \text{ je konkávna.} \quad f''(x) > 0, \text{ t. j. } f \text{ je konvexná.}$$

$$f(0 + 2k\pi) = 1. \quad f(\pi + 2k\pi) = -1. \\ f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0. \quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetřovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.

$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

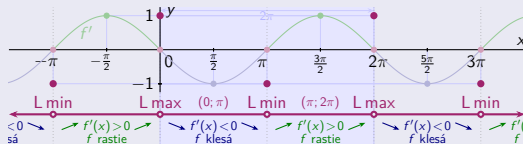
$$f(0 + 2k\pi) = 1. \quad f(\pi + 2k\pi) = -1. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 1.$$

- $f(0 + 2k\pi) = 1$

- $f(\pi + 2k\pi) = -1$

sú lokálne max.

sú lokálne min.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.

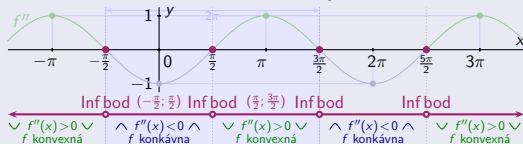
$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$$f(0 + 2k\pi) = 1. \quad f(\pi + 2k\pi) = -1. \\ f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0. \quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$$

- $f(0 + 2k\pi) = 0$,

- $f(\pi + 2k\pi) = 0$

sú inflexné body.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
[Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π .]

- Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f'$ nemení znamienko
na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (0; \pi) + 2k\pi$$

$$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$$

$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.

$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

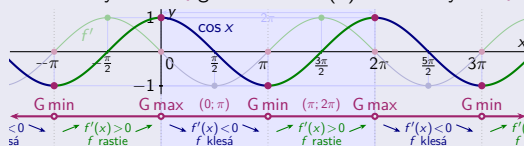
$$f(0 + 2k\pi) = 1. \quad f(\pi + 2k\pi) = -1. \quad f(2\pi + 2k\pi) = 1.$$

- $f(0 + 2k\pi) = 1$
- $f(\pi + 2k\pi) = -1$

sú lokálne max.

sú lokálne min.

Tieto extrémny sú súčasne aj globálne a na $D(f)$ iné extrémny neexistujú.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- $\Rightarrow f''$ nemení znamienko
na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0.$$

$$f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0.$$

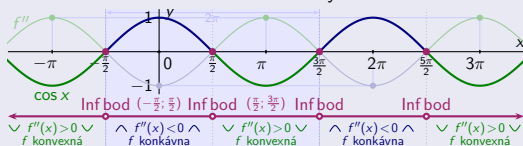
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.

$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$$f(0 + 2k\pi) = 1. \quad f(\pi + 2k\pi) = -1. \\ f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0. \quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0. \quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$$

- $f(0 + 2k\pi) = 0$,
- $f(\pi + 2k\pi) = 0$

sú inflexné body.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

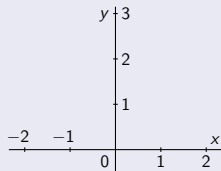
[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

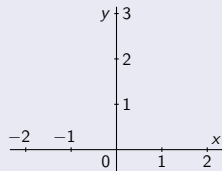
Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- n je nepárne.

- n je párne.



n nepárne



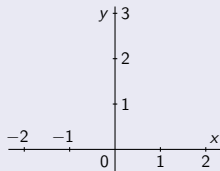
n párne

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

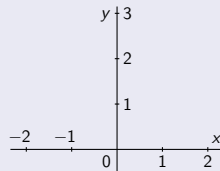
[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujímá.]

- n je nepárne.

- n je párne.



n nepárne



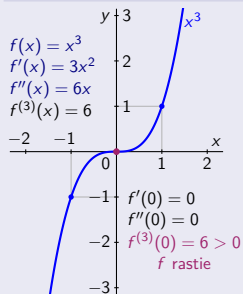
n párne

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

• n je nepárne.

- ⇒ • Funkcia f rastie v bode c pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 • Funkcia f klesá v bode c pre $f^{(n)}(c) < 0$.

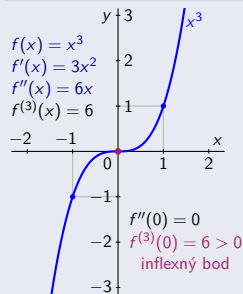


Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

• n je nepárne.

- ⇒ • Bod c je inflexný.

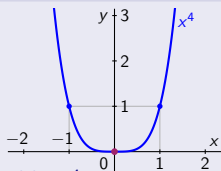


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- n je párne.

\Rightarrow $f(c)$ je ostré lok min pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 $f(c)$ je ostré lok max pre $f^{(n)}(c) < 0$.



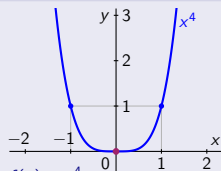
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 & f'(0) &= 0 \\ f'(x) &= 4x^3 & f''(0) &= 0 \\ f''(x) &= 12x^2 & f'''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 24x & f^{(4)}(0) &= 24 > 0 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & & \text{ostré lok min} \end{aligned}$$

Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

- n je párne.

\Rightarrow f je rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 f je rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(c) < 0$.



$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 & f'(0) &= 0 \\ f'(x) &= 4x^3 & f''(0) &= 0 \\ f''(x) &= 12x^2 & f'''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 24x & f^{(4)}(0) &= 24 > 0 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & & \text{rýdzo konvexná} \end{aligned}$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

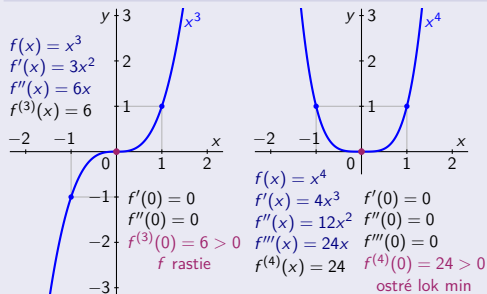
Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

• n je nepárne.

⇒ • Funkcia f rastie v bode c pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 • Funkcia f klesá v bode c pre $f^{(n)}(c) < 0$.

• n je párne.

⇒ • $f(c)$ je ostré lok min pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 • $f(c)$ je ostré lok max pre $f^{(n)}(c) < 0$.



Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

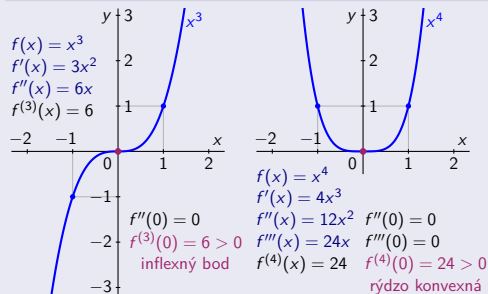
[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujímá.]

• n je nepárne.

⇒ • Bod c je inflexný.

• n je párne.

⇒ • f je rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 • f je rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(c) < 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

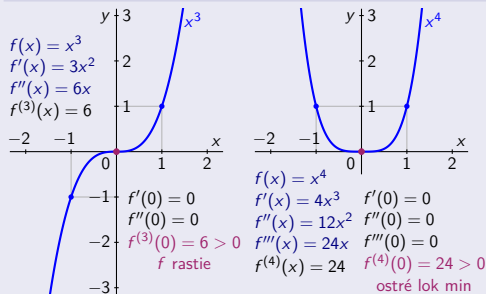
Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

• n je nepárne. [V bode c nie je lokálny extrém.]

⇒ • Funkcia f rastie v bode c pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 • Funkcia f klesá v bode c pre $f^{(n)}(c) < 0$.

• n je párne. [V bode c je ostrý lokálny extrém.]

⇒ • $f(c)$ je ostré lok min pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 • $f(c)$ je ostré lok max pre $f^{(n)}(c) < 0$.



Funkcia f , rád $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
 $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

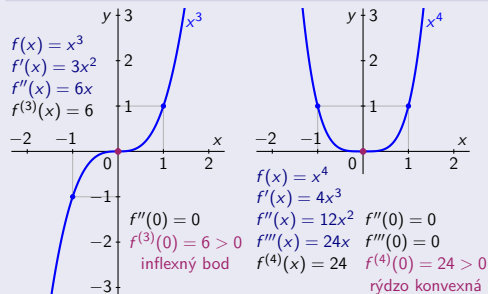
[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujímá.]

• n je nepárne. [V bode c je inflexia.]

⇒ • Bod c je inflexný.

• n je párne. [V bode c nie je inflexia.]

⇒ • f je rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(c) > 0$.
 • f je rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(c) < 0$.



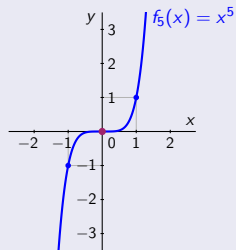
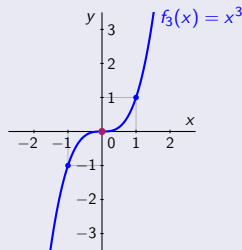
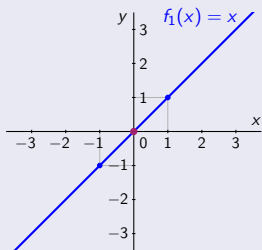
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

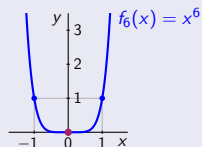
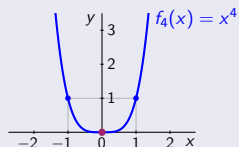
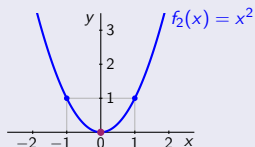
Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:



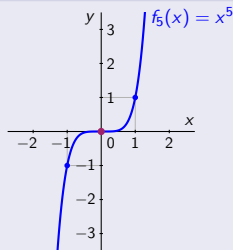
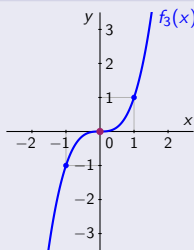
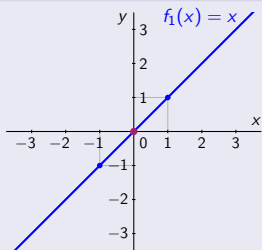
Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

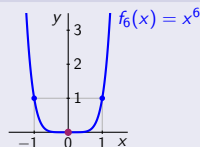
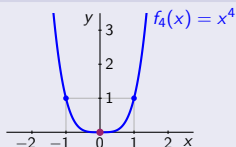
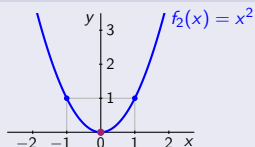
Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ je inflexia (ale až pre $n \geq 3$).
- f_n sú rastúce v bode $x = 0$.



Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

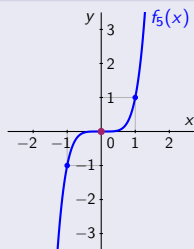
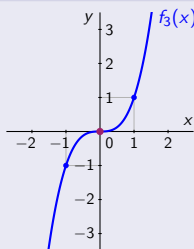
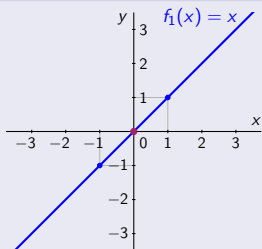
- V bode $x = 0$ nie je inflexia.
- f_n sú rýdzo konvexné na \mathbb{R} .



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

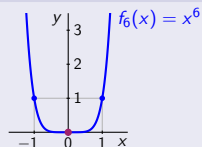
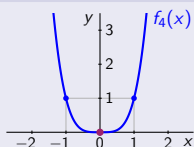
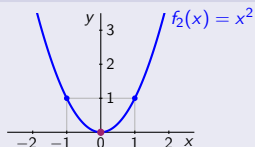
Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ je inflexia (ale až pre $n \geq 3$).
- f_n sú rastúce v bode $x = 0$.
- $f(0)$ nie je extrém.



Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

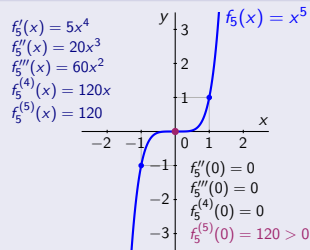
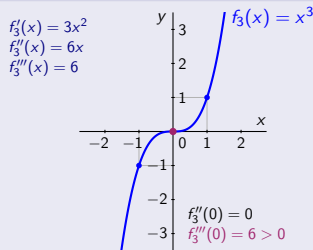
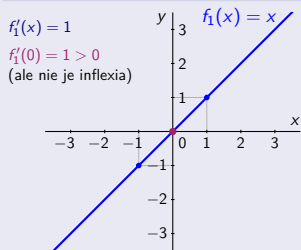
- V bode $x = 0$ nie je inflexia.
- f_n sú rýdzo konvexné na \mathbb{R} .
- $f(0)$ je ostré lokálne min.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

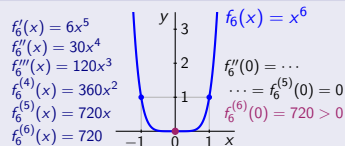
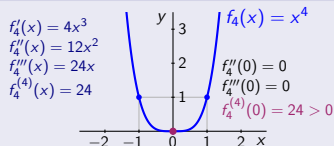
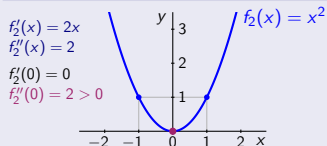
Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ je inflexia (ale až pre $n \geq 3$).
- f_n sú rastúce v bode $x = 0$.
- $f(0)$ nie je extrém.



Pre funkcie $f_n: y = x^n$, kde $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ nie je inflexia.
- f_n sú rýdzo konvexné na \mathbb{R} .
- $f(0)$ je ostré lokálne min.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a ,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,

práve vtedy, ak platí

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ v bode a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,
- práve vtedy, ak platí
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ v bode a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,
- práve vtedy, ak platí
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1 , pretože $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ v bode a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,
- práve vtedy, ak platí
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1 , pretože $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ v bode a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,
práve vtedy, ak platí
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1 , pretože $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x \sim 1$ v bodoch $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pretože $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin a}{1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ v bode a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,
práve vtedy, ak platí
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1 , pretože $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x \sim 1$ v bodoch $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pretože $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin a}{1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$.
- $\ln(x+1) \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ v bode a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,
práve vtedy, ak platí
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1 , pretože $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x \sim 1$ v bodoch $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pretože $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin a}{1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$.
- $\ln(x+1) \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.
- $\frac{1-x}{x} \sim -1$ v bodoch $\pm\infty$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1-x}{x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a ,
označenie $f \sim g$ v bode a , resp. $f \sim g, x \rightarrow a$,
práve vtedy, ak platí
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1 , pretože $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x \sim 1$ v bodoch $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pretože $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin a}{1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$.
- $\ln(x+1) \sim x$ v bode 0 , pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.
- $\frac{1-x}{x} \sim -1$ v bodoch $\pm\infty$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x}{-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

Asymptoticky sa nerovnajú, napríklad funkcie:

- $\frac{1}{x} \not\sim 0$ v bodoch $\pm\infty$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 0 = 0 \neq 1$
a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{0 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{0}$ neexistuje. [Nulou sa deliť nedá.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú.

[Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú.
- V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený.

[Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

[Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
- V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrowaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
 - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
 - V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

• Pri vyšetrowaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

• Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

• Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f .

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

• Pri vyšetrowaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f .
- Graf funkcie g , t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f .

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

• Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f .
- Graf funkcie g , t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f .

Priamka $y = q$, kde $q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** grafu funkcie f ,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

• Pri vyšetrowaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f .
- Graf funkcie g , t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f .

Priamka $y = q$, kde $q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** grafu funkcie f ,
resp. **asymptota so smernicou 0** grafu funkcie f , označenie **ASH**,

[Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x , t. j. má smernicu 0.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

• Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

• Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f .

• Graf funkcie g , t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f .

Priamka $y = q$, kde $q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** grafu funkcie f ,
resp. **asymptota so smernicou 0** grafu funkcie f , označenie **ASH**, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q.$ [Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x , t. j. má smernicu 0.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

• Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okolíach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

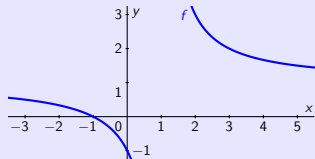
• Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f .

• Graf funkcie g , t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f .

Priamka $y = q$, kde $q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** grafu funkcie f ,
resp. **asymptota so smernicou 0** grafu funkcie f , označenie **ASH**, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q$. [Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x , t. j. má smernicu 0.]

• Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

• Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

- V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okolíach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

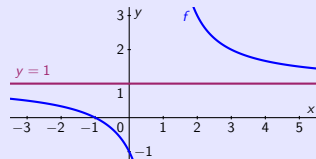
- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíží graf funkcie f .
- Graf funkcie g , t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f .

Priamka $y = q$, kde $q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** grafu funkcie f ,
resp. **asymptota so smernicou 0** grafu funkcie f , označenie **ASH**, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q$. [Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x , t. j. má smernicu 0.]

• Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $y = 1$ je ASH,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

• Pri vyšetovaní priebehu funkcie f , je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]

• V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• V bodoch $-\infty$ a ∞ , pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: • $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0\right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f .
- Graf funkcie g , t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f .

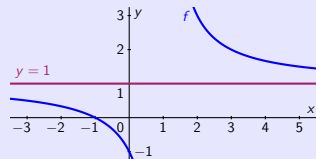
Priamka $y = q$, kde $q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** grafu funkcie f ,
resp. **asymptota so smernicou 0** grafu funkcie f , označenie **ASH**, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q$. [Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x , t. j. má smernicu 0.]

• Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $y = 1$ je **ASH**, pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 + \frac{2}{\infty} = 1 + 0 = 1$

a aj $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 + \frac{2}{-\infty} = 1 + 0 = 1.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,
resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**,

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,
pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,
pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

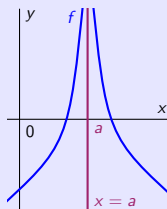
- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,

pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in \mathbb{R}$, môžu byť napríklad:



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

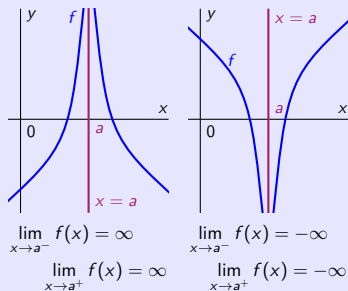
Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.
[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]
- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,
pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in \mathbb{R}$, môžu byť napríklad:



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

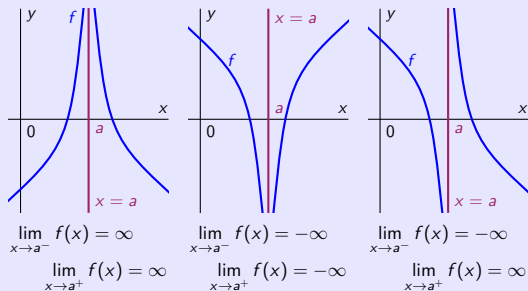
Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.
[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]
- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,
pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in \mathbb{R}$, môžu byť napríklad:



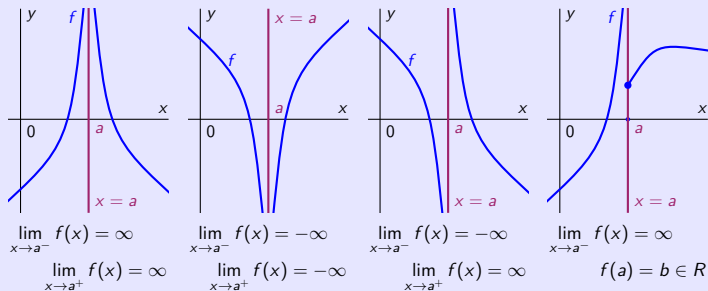
Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.
[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]
- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,
pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in \mathbb{R}$, môžu byť napríklad:



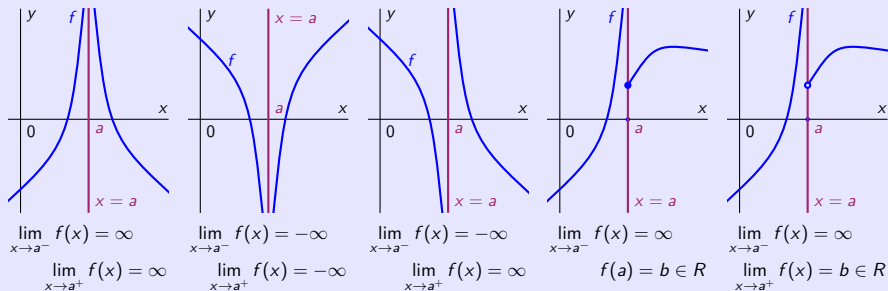
Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.
[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]
- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,
pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in \mathbb{R}$, môžu byť napríklad:



Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f ,

resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f , označenie **ABS**, ak:

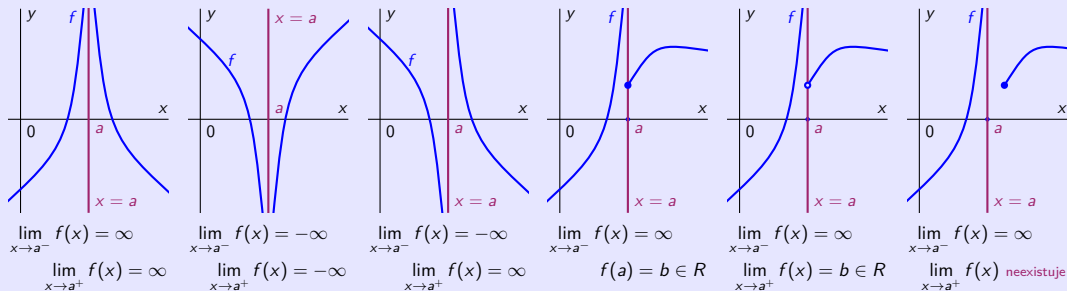
- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y , t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞ .]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ má jednu **ABS** priamku $x = 1$,

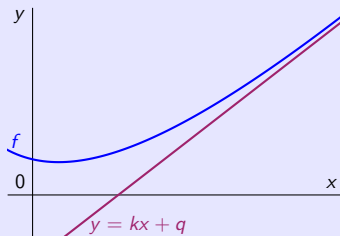
pretože $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in \mathbb{R}$, môžu byť napríklad:



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

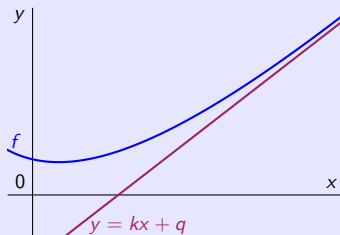
Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS,

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

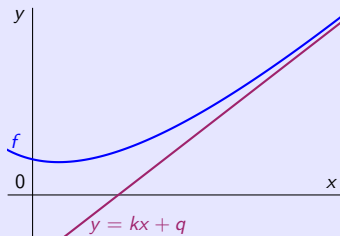


Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]



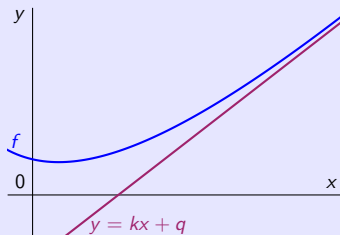
Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.



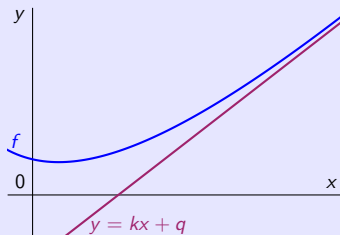
Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).



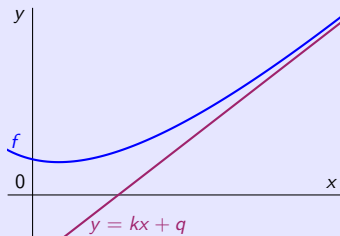
Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

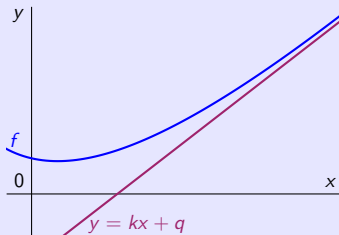
Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

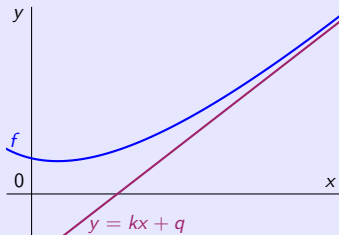
Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

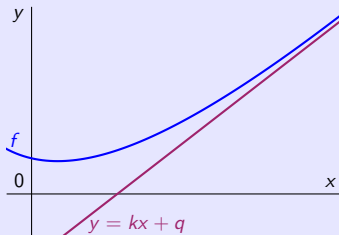
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow$ • $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k.$

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

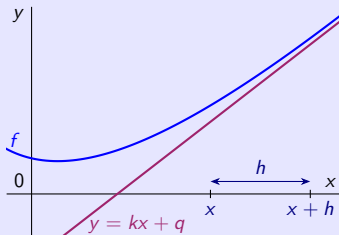
[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow$ • $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

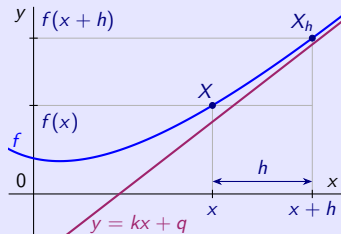
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k.$

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

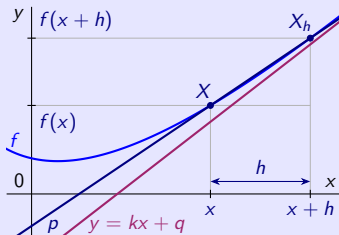
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k.$

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x + h; f(x + h)]$ a priamku $p = XX_h$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

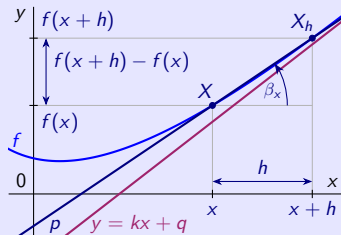
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k.$

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x + h; f(x + h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x .

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

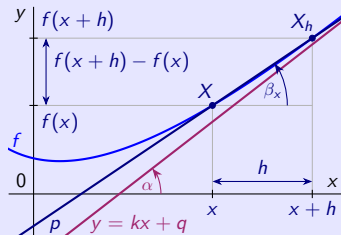
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x + h; f(x + h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x .
- Pre $x \rightarrow \infty$ platí $\beta_x \rightarrow \alpha$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

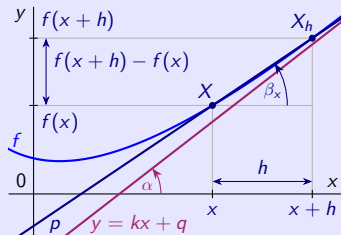
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x .
- Pre $x \rightarrow \infty$ platí $\beta_x \rightarrow \alpha$, t. j. $\operatorname{tg} \beta_x \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = k$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

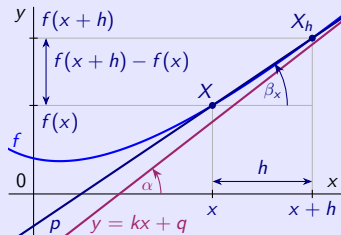
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x .

• Pre $x \rightarrow \infty$ platí $\beta_x \rightarrow \alpha$, t. j. $\operatorname{tg} \beta_x \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \beta_x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

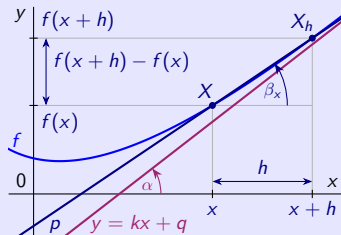
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



• Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).

• Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x + h; f(x + h)]$ a priamku $p = XX_h$.

• Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x .

• Pre $x \rightarrow \infty$ platí $\beta_x \rightarrow \alpha$, t. j. $\operatorname{tg} \beta_x \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \beta_x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,
kde $h > 0$ je ľubovoľné.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

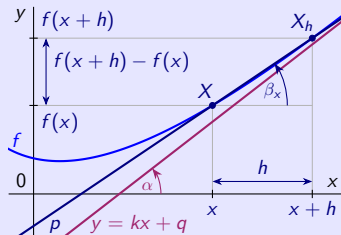
Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je číslo $k \in \mathbb{R}$, t. j. $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptota so smernicou $k \in \mathbb{R}$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in \mathbb{R}$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k$.



• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x .

• Pre $x \rightarrow \infty$ platí $\beta_x \rightarrow \alpha$, t. j. $\operatorname{tg} \beta_x \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \beta_x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,
kde $h > 0$ je ľubovoľné.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu funkcie f .

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q, x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f , označenie ASS, ak:

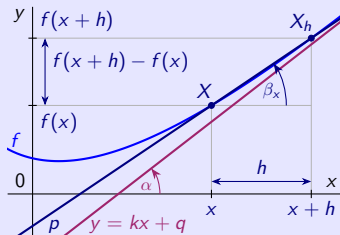
• Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q, x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q, x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q, x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q, x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptotu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x .



- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x .

• Pre $x \rightarrow \infty$ platí $\beta_x \rightarrow \alpha$, t. j. $\operatorname{tg} \beta_x \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = k$.

• Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \beta_x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,
kde $h > 0$ je ľubovoľné.

Priamka $y = kx + q, x \in R$ kde $k, q \in R$, je ASS grafu funkcie f .

\Leftrightarrow • Existujú konečné limity $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q \in R$.

[Buď $x \rightarrow -\infty$ alebo $x \rightarrow \infty$ pre druhú ASS.]

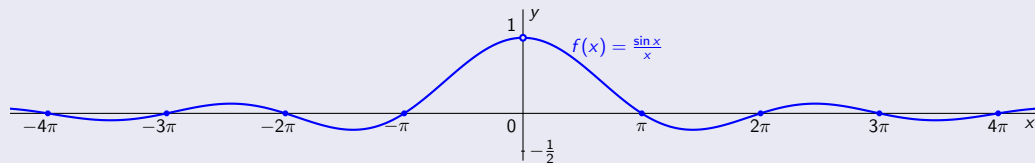
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

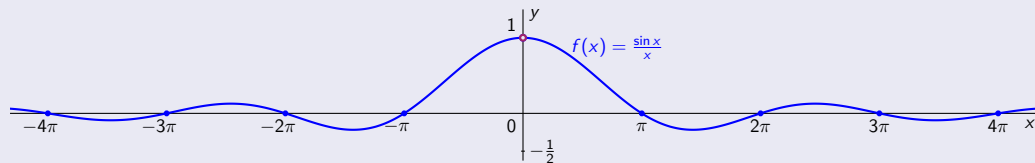


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť,

[Jediný bod nespojitosti.]



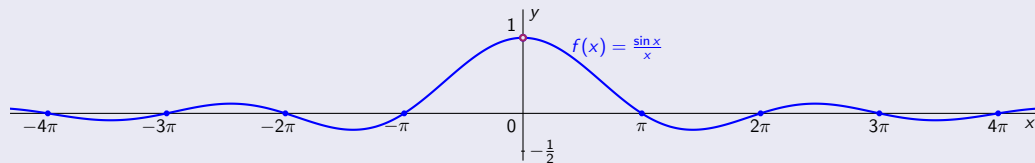
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

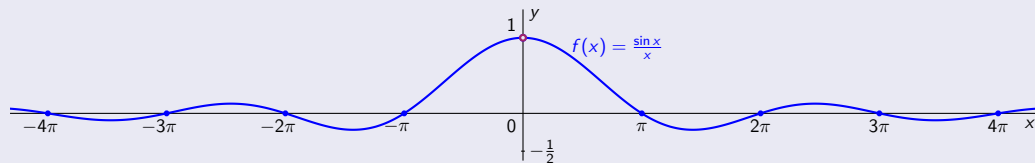


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Iné body nespojitosti neexistujú.

[Jediný bod nespojitosti.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

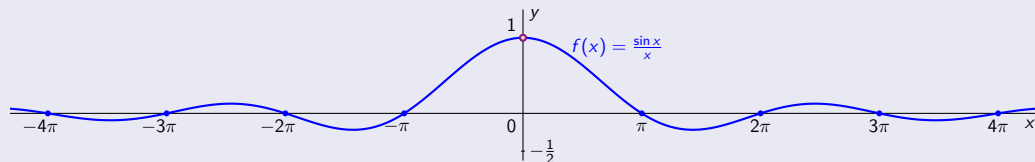
• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

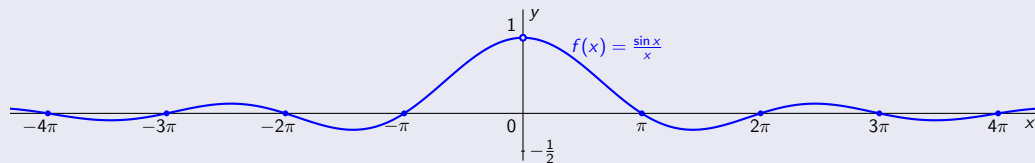
• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

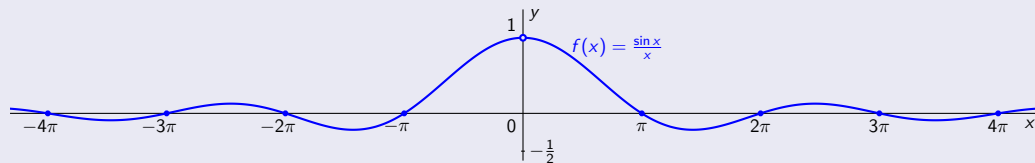
[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$[x \in \mathbb{R} - \{0\}].$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

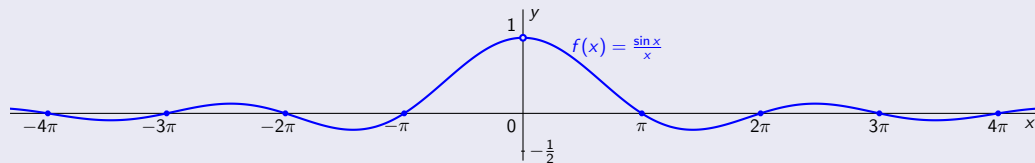
[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|.]$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

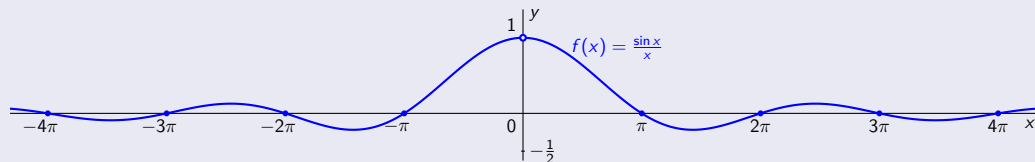
[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

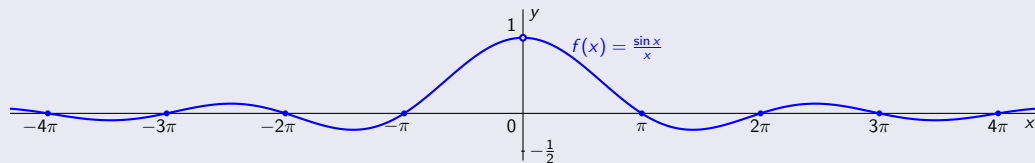
[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0$.

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.]$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

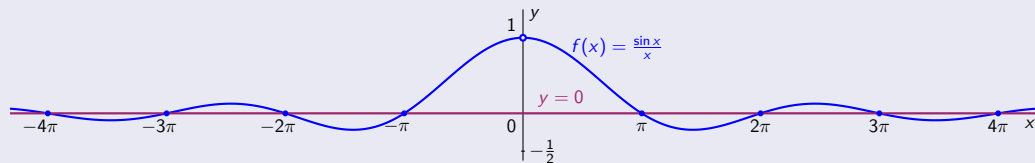
[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.]$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

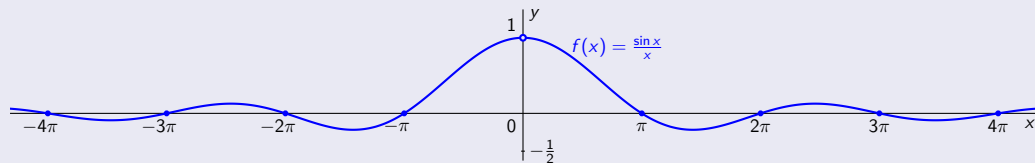
[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.]$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

[Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

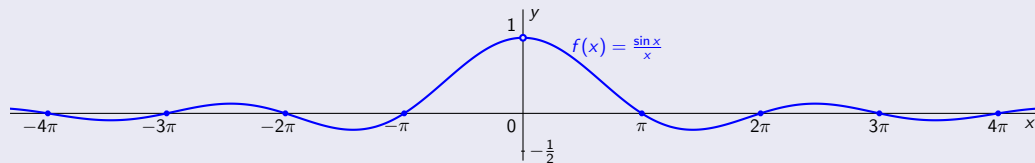
• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.]$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

[Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

• $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

- Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

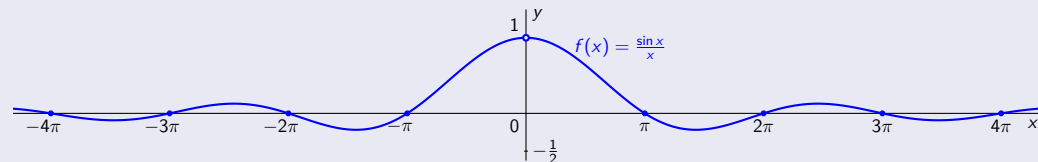
$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.]$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

[Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0.$

- $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.]$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

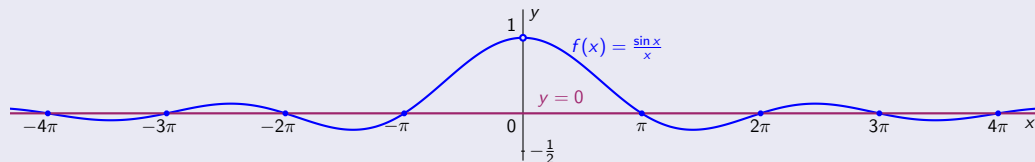
[Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

• $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0.$

• $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$

\Rightarrow • ASS má tvar $y = 0x + 0 = 0$.

[Je to jediná ASS a je to súčasne aj ASH.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$$[x \in \mathbb{R} - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.]$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

[Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

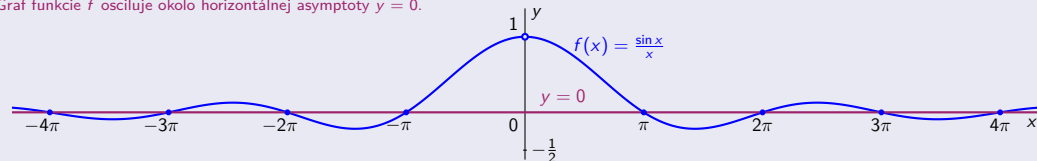
• $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0.$

• $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$

\Rightarrow • ASS má tvar $y = 0x + 0 = 0$.

[Je to jediná ASS a je to súčasne aj ASH.]

Graf funkcie f osciluje okolo horizontálnej asymptoty $y = 0$.



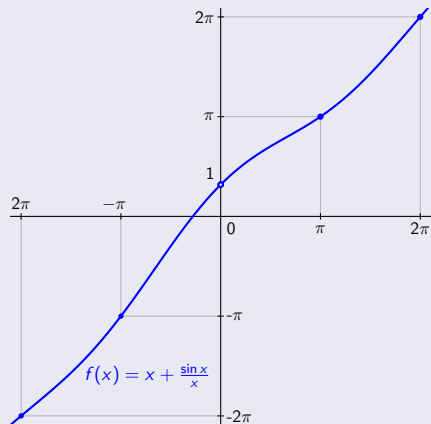
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

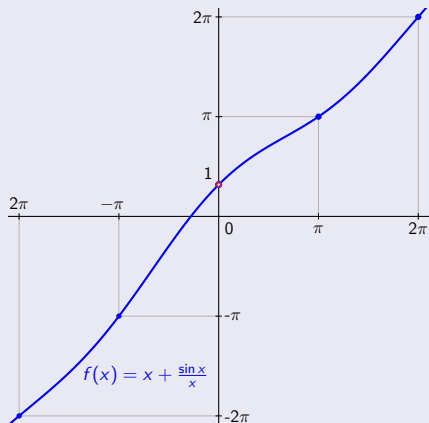


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť,

[Jediný bod nespojitosti.]



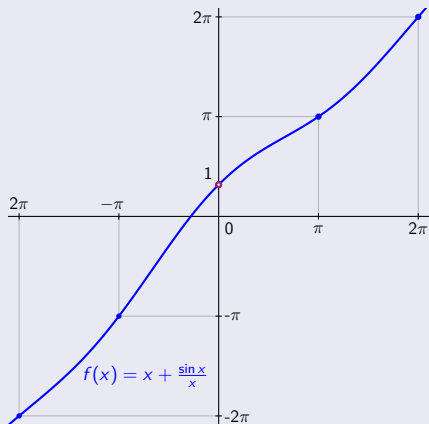
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$.

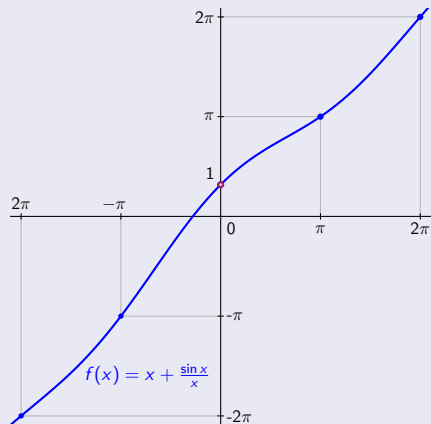
[Jediný bod nespojitosti.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

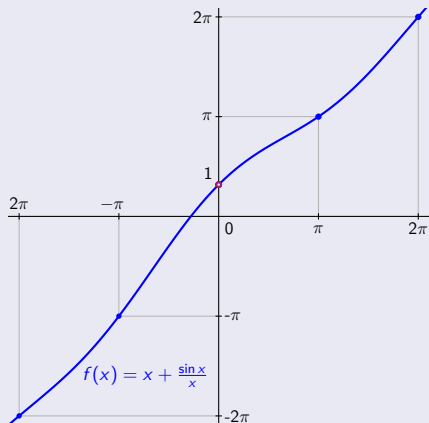
• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

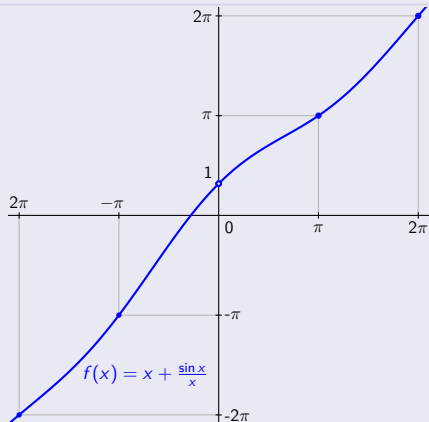
• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right]$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

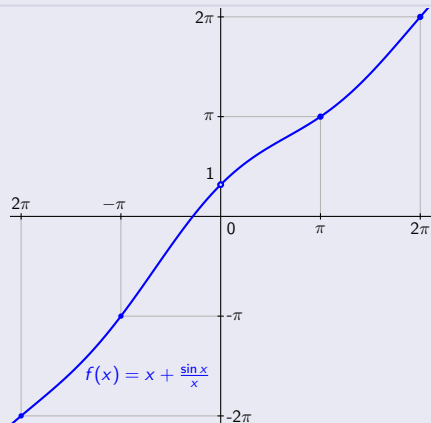
• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right]$
 $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$.

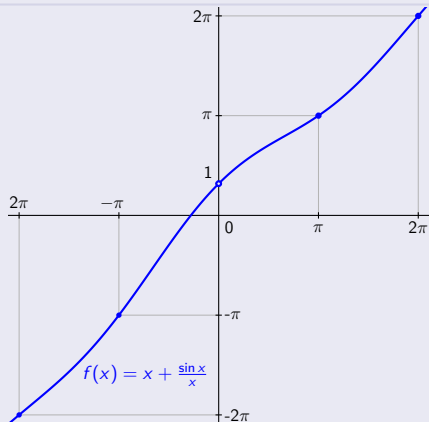
[Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right]$
 $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$.

[Jediný bod nespojitosti.]

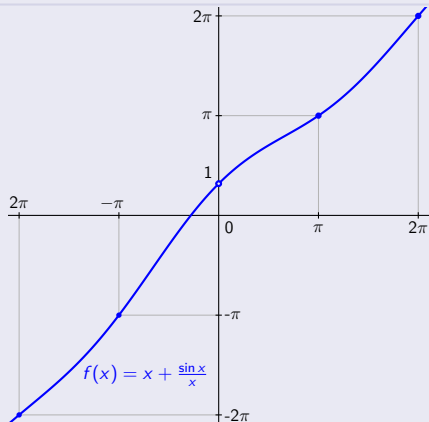
• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right]$
 $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

• $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x^2} \right]$
 $= \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 1 + 0 = 1$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

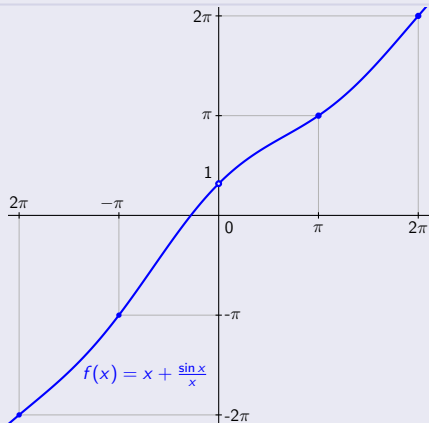
[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \pm\infty + 0 = \pm\infty, \text{ t. j. ASH neexistuje.} \end{aligned}$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x^2} \right] \\ &= \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}. \\ &= \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

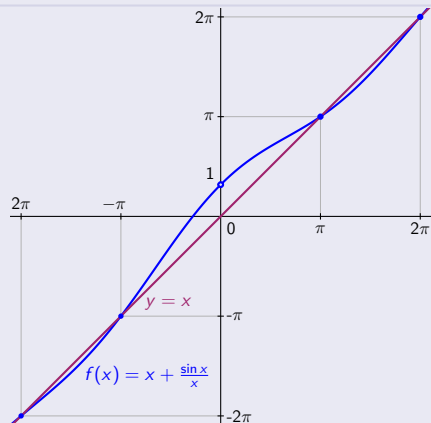
• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right]$
 $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

• $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x^2} \right]$
 $= \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 1 + 0 = 1$.

• $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}$
 $= \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0$.

\Rightarrow • ASS má tvar $y = x + 0 = x$. [Je to jediná ASS.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]

• Iné body nespojitosti neexistujú. \Rightarrow • Neexistujú ABS.

[Neexistujú vertikálne asymptoty.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \pm\infty + 0 = \pm\infty, \text{ t. j. ASH neexistuje.} \end{aligned}$$

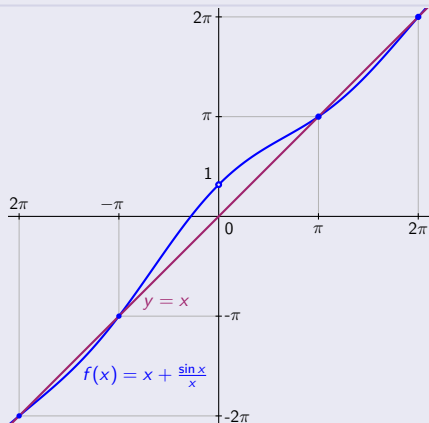
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x^2} \right] \\ &= \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}. \\ &= \left[\begin{array}{l} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] = 0. \end{aligned}$$

\Rightarrow • ASS má tvar $y = x + 0 = x$. [Je to jediná ASS.]

Graf funkcie f osciluje okolo asymptoty $y = x$.



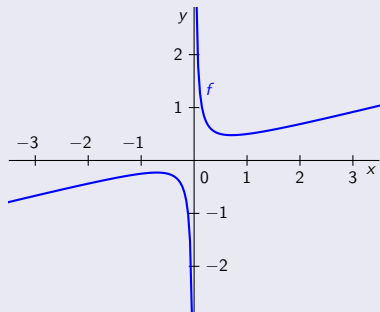
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

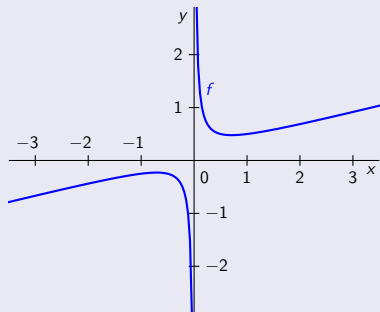
- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

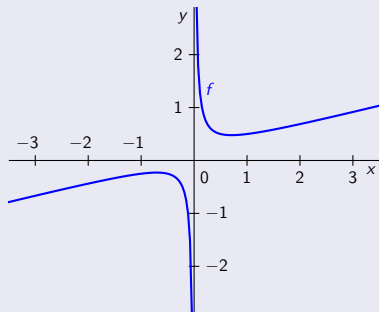
$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

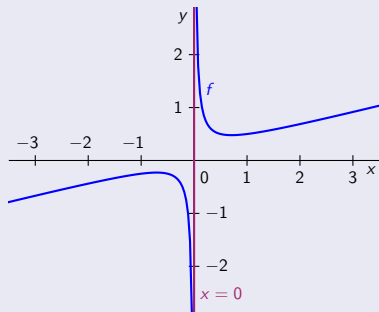
• Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

⇒ • Priamka $x = 0$ je jediná ABS.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

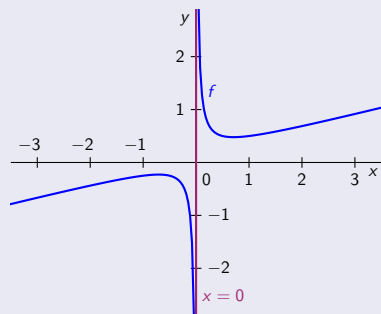
• V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

⇒ • Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty,$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

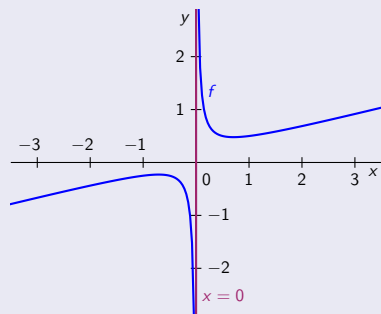
- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

\Rightarrow • Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in R - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

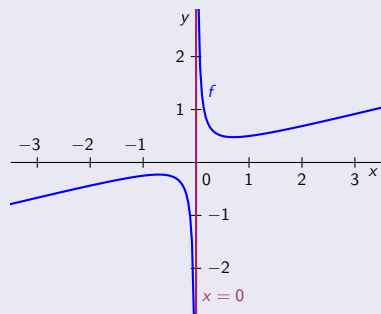
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

⇒ • Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in R - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

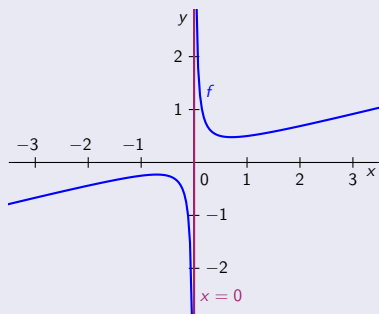
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

⇒ • Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in R - \{0\}.$$

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

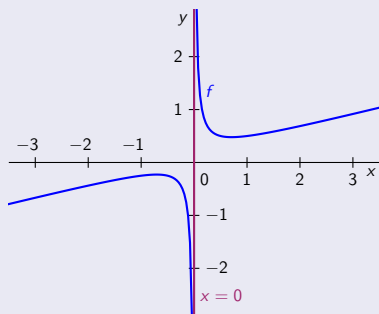
⇒ • Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right]. \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}, x \in R - \{0\}.$$

• Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

• V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

⇒ • Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

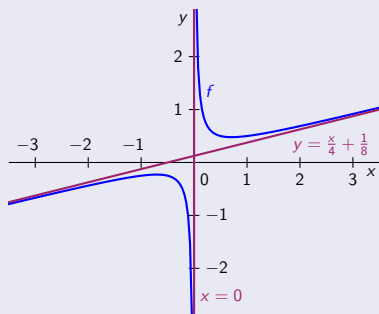
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

⇒ • ASS má tvar $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$.

[Je to jediná ASS.]



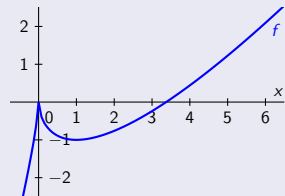
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

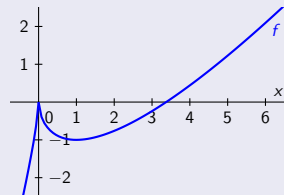
- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

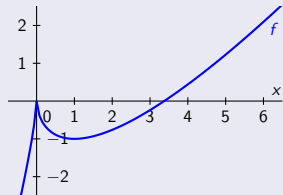
- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

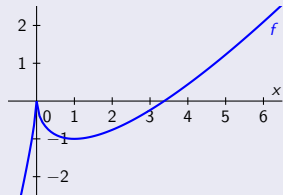
- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

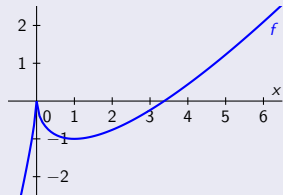


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



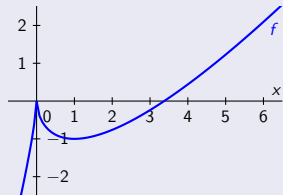
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet k_- &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right] \\ &= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \right] = 2 + \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



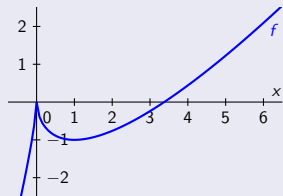
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right]$
 $= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \right] = 2 + \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$
- $k_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$



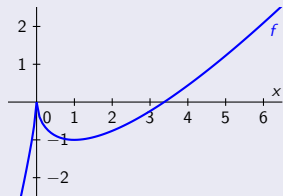
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right]$
 $= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \right] = 2 + \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$
- $k_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$
- $q_{\mp} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x]$
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [-3\sqrt[3]{x^2}] = -\infty.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

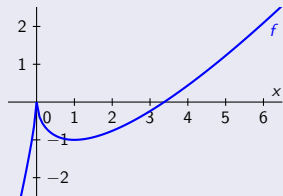
$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right]$
 $= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \right] = 2 + \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$
- $k_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$
- $q_{\mp} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x]$
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [-3\sqrt[3]{x^2}] = -\infty.$

\Rightarrow • Neexistujú ASS.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$. \Rightarrow • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet k_- &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right] \\ &= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \right] = 2 + \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

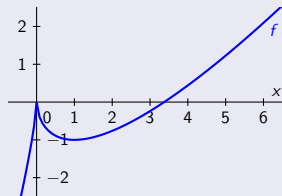
$$\bullet k_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$$

$$\begin{aligned} \bullet q_{\mp} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [-3\sqrt[3]{x^2}] = -\infty. \end{aligned}$$

\Rightarrow • Neexistujú ASS.

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$ nemá žiadne asymptoty.

[Neexistujú ABS, ASH ani ASS.]



Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:

Výšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetrit priebeh funkcie f , znamená postupne určit všetky jej vlastnosti:

 - Určit definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:

 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítat jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítat jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
 - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:

 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítat jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
 - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
 - Vypočítat f' , určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémym
 a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:

 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
 - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
 - Vypočítať f' , určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémym
a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
 - Vypočítať f'' , určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítat jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
 - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
 - Vypočítat f' , určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémym
a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
 - Vypočítat f'' , určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
 - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]
- Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
- Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
- Vypočítat jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- Vypočítat f' , určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémym
 a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
- Vypočítat f'' , určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
- Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
- Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]
 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
 - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
 - Vypočítať f' , určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémym
 a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
 - Vypočítať f'' , určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
 - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
 - Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.
- Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne jej graf.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]

 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítat jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
 - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
 - Vypočítat f' , určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémym
 a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
 - Vypočítat f'' , určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
 - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
 - Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.

- Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne jej graf.

 - Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetrit priebeh funkcie f , znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]

 - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
 - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
 - Vypočítat jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
 - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
 - Vypočítat f' , určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémym
 a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
 - Vypočítat f'' , určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
 - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
 - Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.

- Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne jej graf.

 - Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje.
 - Mnohokrát sú tieto údaje nedostatočné, preto ich musíme vhodne doplniť, napr. vhodne zvolenými funkčnými hodnotami.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)[\[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.\]](#)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)[\[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.\]](#)

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$ (na celej reálnej osi)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)[\[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.\]](#)

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)[\[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.\]](#)

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [\[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.\]](#)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. [$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[tab] [graf] [Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. [$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.]
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm \infty} = 0.$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

- ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$

- ASH má tvar $y = 0.$

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

- ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$

- ASH má tvar $y = 0.$

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow x = 0.$

$$[f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.]$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

- ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$

- ASH má tvar $y = 0.$

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow x = 0.$

$$[f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.]$$

- Funkcia f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty).$

® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

• ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}]$$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$

• ASH má tvar $y = 0.$

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

• $f(x) = 0. \Leftrightarrow x = 0.$

$$[f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.]$$

• Funkcia f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty).$

® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$$

$$f(0) = 0 \text{ [nul. bod]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

• ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}]$$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0$.

• ASH má tvar $y = 0$.

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$[f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

• Funkcia f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$$

$$f(0) = 0 \text{ [nul. bod]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$$

$$f(x) < 0 \text{ [f záporná]}$$

- +

$$f(x) > 0 \text{ [f kladná]}$$

+

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

• ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}]$$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0$.

• ASH má tvar $y = 0$.

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$[f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

• Funkcia f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$$

$$f(0) = 0 \text{ [nul. bod]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$$

$$f(x) < 0 \text{ [f záporná]}$$

- +

$$f(x) > 0 \text{ [f kladná]}$$

+

• $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in R$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

- ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}]$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0$.

- ASH má tvar $y = 0$.

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$[f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

- Funkcia f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$$

$$f(0) = 0 \text{ [nul. bod]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$$

$$f(x) < 0 \text{ [f záporná]}$$

- +

$$f(x) > 0 \text{ [f kladná]}$$

+

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in R$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ alebo $x = 1$.

$$[f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(1-x^2) = 4(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ alebo } x = 1.]$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

- Funkcia f je spojité na $D(f) = \mathbb{R}$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

- ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}]$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0$.

- ASH má tvar $y = 0$.

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$[f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

- Funkcia f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$$

$$f(0) = 0 \text{ [nul. bod]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$$

$$- \quad f(x) < 0 \text{ [f záporná]} \quad -$$

$$- \quad +$$

$$f(x) > 0 \text{ [f kladná]} \quad +$$

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ alebo $x = 1$.

$$[f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(1-x^2) = 4(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ alebo } x = 1.]$$

- Funkcia f' je spojité na \mathbb{R}

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

[tab]

[graf]

[Vid 01-PrIII, 02-PrIII.]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

• ABS neexistuje.

[Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

• Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna.

$$[f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}]$$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0 \pm \infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0$.

• ASH má tvar $y = 0$.

[Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$[f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

• Funkcia f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$$

$$f(0) = 0 \text{ [nul. bod]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$$

$$f(x) < 0 \text{ [f záporná]}$$

- +

$$f(x) > 0 \text{ [f kladná]}$$

+

• $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in R$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ alebo $x = 1$.

$$[f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(1-x^2) = 4(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ alebo } x = 1]$$

• Funkcia f' je spojitá na R a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]}$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [} f \text{ rastie]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]}$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 \text{ [lok. min]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 \text{ [lok. max]}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]} \quad \swarrow \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 \text{ [lok. min]} \quad \swarrow \searrow$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [} f \text{ rastie]} \quad \swarrow \searrow$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 \text{ [lok. max]} \quad \swarrow \searrow$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]} \quad \swarrow \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]} \quad \swarrow \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 \text{ [glob. min]} \quad \swarrow \searrow$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [} f \text{ rastie]} \quad \swarrow \searrow$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 \text{ [glob. max]} \quad \swarrow \searrow$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]} \quad \swarrow \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [} f \text{ rastie]}$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 \text{ [glob. min]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 \text{ [glob. max]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}.$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]} \quad \swarrow \searrow$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [} f \text{ rastie]} \quad \swarrow \searrow$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [} f \text{ klesá]} \quad \swarrow \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 \text{ [glob. min]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 \text{ [glob. max]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$	
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na \mathbb{R} a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 \text{ [glob. min]}$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 \text{ [glob. max]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \text{ [} f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \text{]}$$

$$\bullet \text{ Funkcia } f'' \text{ je spojitá na } \mathbb{R} \text{ a nemení znamienko}^{\circledast} \text{ na intervaloch } (-\infty; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; 0), (0; \sqrt{3}) \text{ a } (\sqrt{3}; \infty).$$

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$$

$$x \in (-\sqrt{3}; 0)$$

$$x \in (0; \sqrt{3})$$

$$x \in (\sqrt{3}; \infty)$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$	
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na \mathbb{R} a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$	
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na \mathbb{R} a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]	$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$	
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na \mathbb{R} a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]	$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}$ [inf. bod]	$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$ [inf. bod]	$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$ [inf. bod]	

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$	
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na \mathbb{R} a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]	$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}$ [inf. bod]	$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$ [inf. bod]	$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$ [inf. bod]	

• ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$.

[Vid 1. časť (predchádzajúca strana),

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$	
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na \mathbb{R} a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]	$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}$ [inf. bod]	$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$ [inf. bod]	$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$ [inf. bod]	

• ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$.

[Vid 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x + 0 = 0$, kde $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{1+x^2} = \frac{4}{1+\infty} = 0$ a $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$	
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}. \quad [f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo } x = \pm\sqrt{3}.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na \mathbb{R} a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]	$f''(x) < 0$ [f konkávná]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}$ [inf. bod]	$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$ [inf. bod]	$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$ [inf. bod]	

• ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$.

• Obor hodnôt $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

[Vid 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x + 0 = 0$, kde $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{1+x^2} = \frac{4}{1+\infty} = 0$ a $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

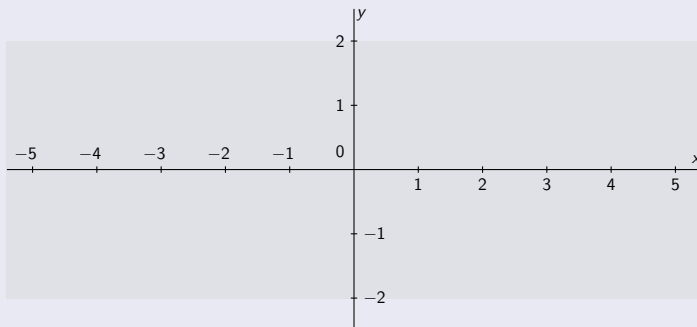
$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

- $D(f) = \mathbb{R}.$

- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle.$



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

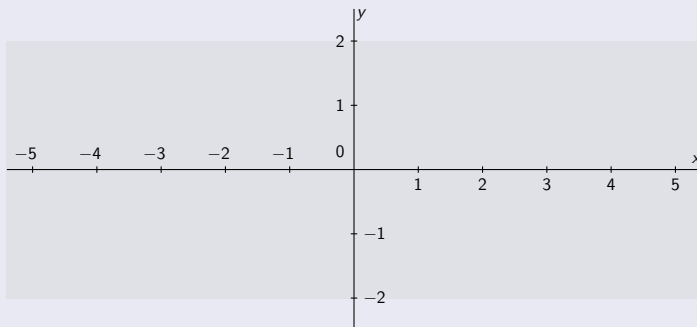
$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .

- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

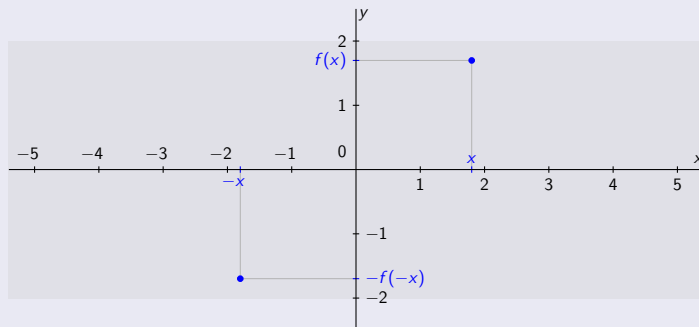
$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.

- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



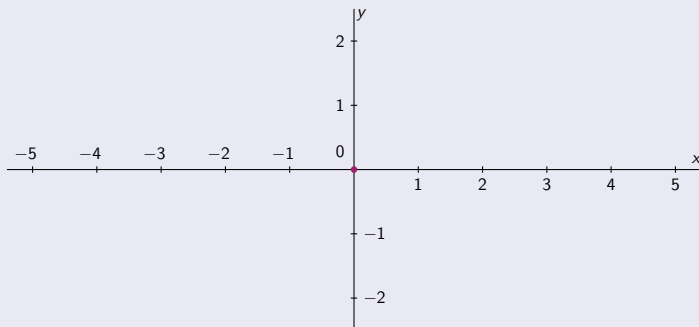
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

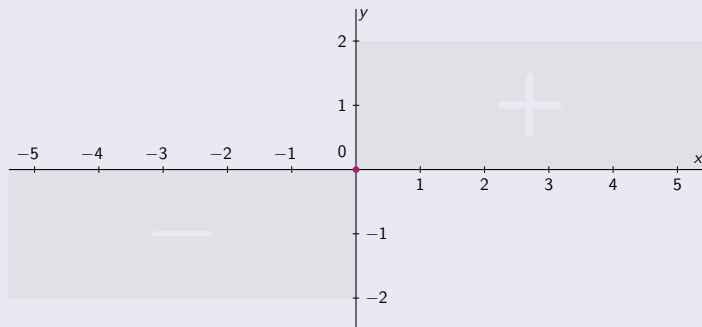
[tab]

[graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					
-	<i>f záporná</i>	-	+	<i>f kladná</i>	+

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.

- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

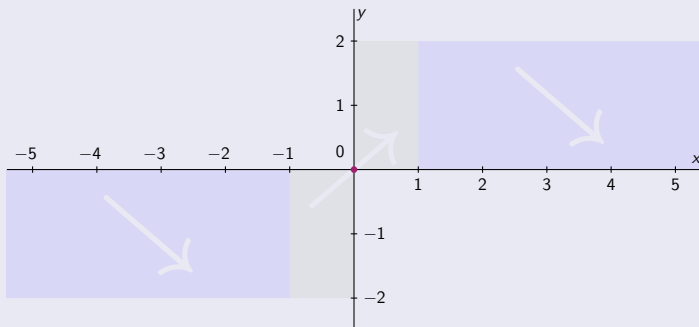
$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab]

[graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					
-		-		+	
<i>f</i> záporná		<i>f</i> kladná		<i>f</i> kladná	
↘		↗		↘	
<i>f</i> klesá		<i>f</i> rastie		<i>f</i> klesá	

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

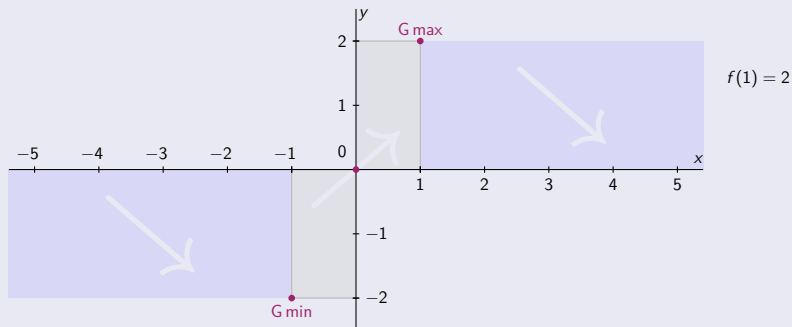
[tab]

[graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					
-		f záporná		+	
-		-		+	
-1 [globálne min]			1 [globálne max]		
↘		↗		↘	
f klesá		f rastie		f klesá	

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$$-2 = f(-1)$$



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

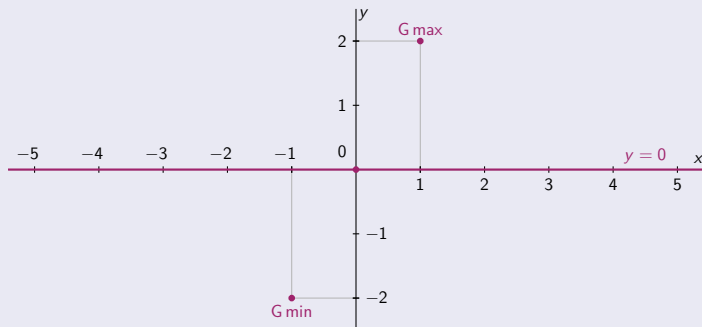
$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					
-		f záporná		-	
+		f kladná		+	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	-1 [globálne min]		1 [globálne max]		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
↘ f klesá ↘		↗ f rastie ↗		↘ f klesá ↘	

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$$-2 = f(-1)$$



$$f(1) = 2$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

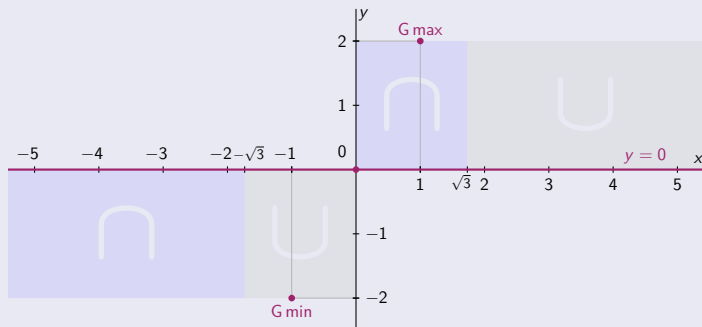
$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					
– f záporná		+ f kladná			
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$		–1 [globálne min]		1 [globálne max]	
\searrow f klesá		\nearrow f rastie		\searrow f klesá	
\cap f konkávna		\cup f konvexná		\cap f konkávna	
		\cup f konvexná		\cap f konkávna	

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$$-2 = f(-1)$$



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

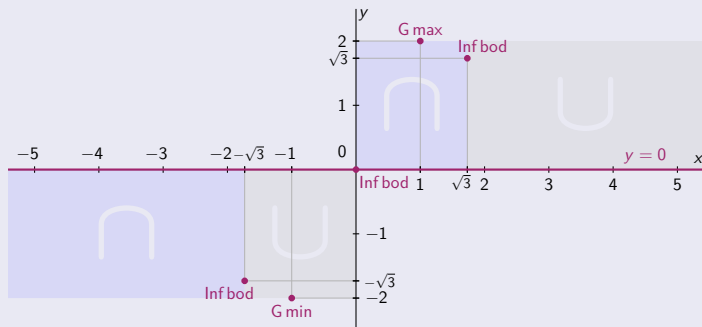
[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					
– f záporná		–		+ f kladná	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$		–1 [globálne min]		1 [globálne max]	
\searrow f klesá		\nearrow f rastie		\searrow f klesá	
$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]	
∩ f konkávna ∩		∪ f konvexná ∪		∩ f konkávna ∩	
∪ f konvexná ∪		∩ f konkávna ∩		∪ f konvexná ∪	

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$$-2 = f(-1)$$

$$-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3})$$



$$f(1) = 2$$

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

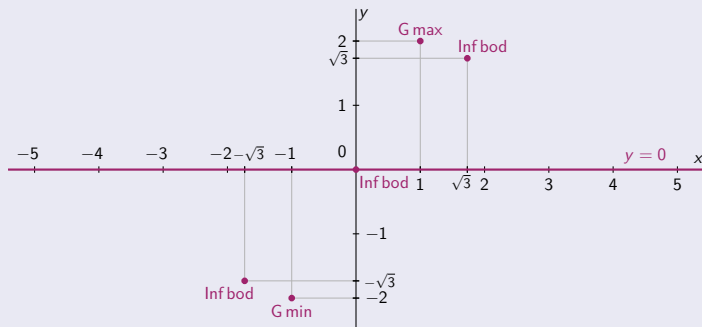
[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 [nulový bod]					
– f záporná		–		+ f kladná	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$		–1 [globálne min]		1 [globálne max]	
\searrow f klesá		\nearrow f rastie		\searrow f klesá	
$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]	
∩ f konkávna		∪ f konvexná		∩ f konkávna	
∪ f konvexná		∩ f konkávna		∪ f konvexná	

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$$-2 = f(-1)$$

$$-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3})$$



$$f(1) = 2$$

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$		
0 [nulový bod]							
– <i>f</i> záporná			+ <i>f</i> kladná				
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$		–1 [globálne min]		1 [globálne max]		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	
↘ <i>f</i> klesá		↗ <i>f</i> rastie		↘ <i>f</i> klesá			
$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]			
∩ <i>f</i> konkávna		∪ <i>f</i> konvexná		∩ <i>f</i> konkávna		∪ <i>f</i> konvexná	

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$$-\frac{8}{5} = f(-\frac{1}{2})$$

$$-2 = f(-1)$$

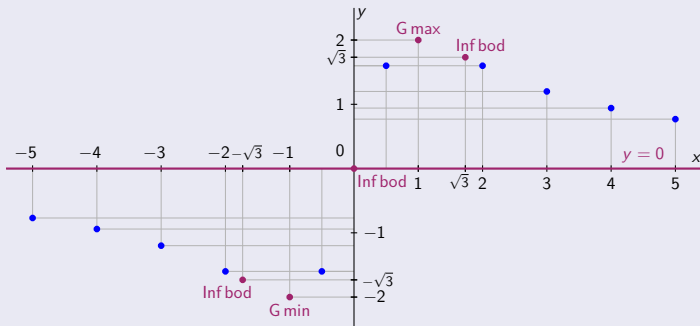
$$-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3})$$

$$-\frac{8}{5} = f(-2)$$

$$-\frac{6}{5} = f(-3)$$

$$-\frac{16}{17} = f(-4)$$

$$-\frac{10}{13} = f(-5)$$



$$f(\frac{1}{2}) = \frac{8}{5}$$

$$f(1) = 2$$

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$f(2) = \frac{8}{5}$$

$$f(3) = \frac{6}{5}$$

$$f(4) = \frac{16}{17}$$

$$f(5) = \frac{10}{13}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$	
0 [nulový bod]						
– f záporná			+ f kladná			
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$		–1 [globálne min]		1 [globálne max]		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
↘ f klesá		↗ f rastie		↘ f klesá		
$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]		
∩ f konkávna		∪ f konvexná		∩ f konkávna		∪ f konvexná

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f spojitá na \mathbb{R} .
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$$-\frac{8}{5} = f(-\frac{1}{2})$$

$$-2 = f(-1)$$

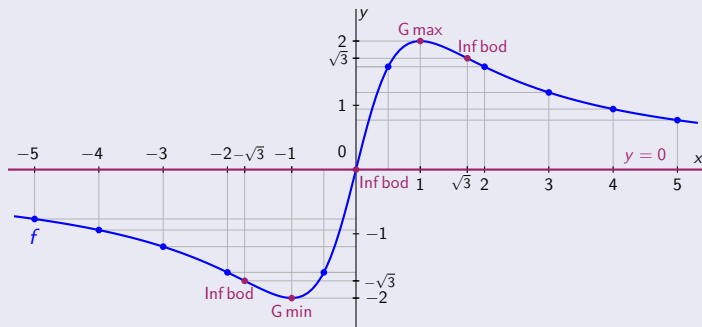
$$-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3})$$

$$-\frac{8}{5} = f(-2)$$

$$-\frac{6}{5} = f(-3)$$

$$-\frac{16}{17} = f(-4)$$

$$-\frac{10}{13} = f(-5)$$



$$f(\frac{1}{2}) = \frac{8}{5}$$

$$f(1) = 2$$

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$f(2) = \frac{8}{5}$$

$$f(3) = \frac{6}{5}$$

$$f(4) = \frac{16}{17}$$

$$f(5) = \frac{10}{13}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab]

[graf]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab]

[graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab]

[graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab]

[graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.

[\[Neodstrániteľná II. druhu.\]](#)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab]

[graf]

• Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.

• Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna.

$$[f(x) = \frac{8x-16}{x^2} \text{ a } f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}.]$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0$.
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0$.
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]
- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2$.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$$

- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

$$\bullet f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 2. \quad [f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2.]$$

- f nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ⊗ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$$

- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

$$\bullet f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 2. \quad [f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2.]$$

- f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$x \in (0; 2)$$

$$x \in (2; \infty)$$

$$f(-1) = \frac{-8-16}{1} = -24 < 0$$

$$0 \text{ [nespojitosť]} \quad f(1) = \frac{-8-16}{1} = -24 < 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(3) = \frac{8-16}{9} = \frac{-8}{9} < 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$$

- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

$$\bullet f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 2. \quad [f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2.]$$

- f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8-16}{1} = -24 < 0$	$f(1) = \frac{-8-16}{1} = -24 < 0$	$f(3) = \frac{8-16}{9} = \frac{-8}{9} < 0$
— $f(x) < 0$ [f záporná]	— $f(x) < 0$ [f záporná]	— $f(x) < 0$ [f záporná]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$$

- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

$$\bullet f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 2. \quad [f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2.]$$

- f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8-16}{1} = -24 < 0$	$f(1) = \frac{-8-16}{1} = -24 < 0$	$f(3) = \frac{8-16}{9} = \frac{-8}{9} < 0$
$f(x) < 0$ [f záporná]	$f(x) < 0$ [f záporná]	$f(x) > 0$ [f kladná]

$$\bullet f'(x) = \frac{8[1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2 + 4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in R - \{0\}.$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$

- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2$.]

- f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8 \cdot 3}{1} = -24 < 0$	0 [nespojitosť] $f(1) = \frac{-8 \cdot 1}{1} = -8 < 0$	$f(2) = 0$
$f(x) < 0$ [f záporná]	$f(x) < 0$ [f záporná]	$f(3) = \frac{8 \cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$
	$- +$	$f(x) > 0$ [f kladná] +

- $f'(x) = \frac{8[1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2 + 4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}, x \in R - \{0\}.$

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 4$. [$f'(x) = 0. \Leftrightarrow 8(4-x) = 0. \Leftrightarrow x = 4$.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$

- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2$.]

- f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ® Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8 \cdot 3}{1} = -24 < 0$	0 [nespojitosť] $f(1) = \frac{-8 \cdot 1}{1} = -8 < 0$	$f(2) = 0$
$f(3) = \frac{8 \cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$		
- $f(x) < 0$ [f záporná]	- - $f(x) < 0$ [f záporná]	- + $f(x) > 0$ [f kladná] +

- $f'(x) = \frac{8[1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2 + 4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}, x \in R - \{0\}.$

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 4$. [$f'(x) = 0. \Leftrightarrow 8(4-x) = 0. \Leftrightarrow x = 4$.]

- Funkcia f' je spojitá na $R - \{0\}$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty. \Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$

- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2$.]

- f nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ⊗ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8 \cdot 3}{1} = -24 < 0$	$f(1) = \frac{-8 \cdot 1}{1} = -8 < 0$	$f(3) = \frac{8 \cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$
— $f(x) < 0$ [f záporná]	— — $f(x) < 0$ [f záporná]	— + $f(x) > 0$ [f kladná] +

- $f'(x) = \frac{8[1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2 + 4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}, x \in R - \{0\}.$

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 4$. [$f'(x) = 0. \Leftrightarrow 8(4-x) = 0. \Leftrightarrow x = 4$.]

- Funkcia f' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$ a $(4; \infty)$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$f(4) = 1 \text{ [lok. max]}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

$$\searrow \quad f'(x) < 0 \text{ [f klesá]} \quad \searrow \nearrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

$$\nearrow \quad f'(x) > 0 \text{ [f rastie]} \quad \searrow \nearrow$$

$$f(4) = 1 \text{ [lok. max]}$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

$$\nearrow \searrow \quad f'(x) < 0 \text{ [f klesá]} \quad \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

$$\searrow \quad f'(x) < 0 \text{ [f klesá]} \quad \searrow \nearrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

$$\nearrow \quad f'(x) > 0 \text{ [f rastie]} \quad \searrow \nearrow$$

$$f(4) = 1 \text{ [glob. max]}$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

$$\nearrow \searrow \quad f'(x) < 0 \text{ [f klesá]} \quad \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$f(4) = 1 \text{ [glob. max]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \quad f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

$$\searrow \quad f'(x) < 0 \text{ [f klesá]} \quad \searrow \nearrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

$$\nearrow \quad f'(x) > 0 \text{ [f rastie]} \quad \nearrow \searrow$$

$$f(4) = 1 \text{ [glob. max]}$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

$$\searrow \quad f'(x) < 0 \text{ [f klesá]} \quad \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \quad f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\bullet \quad f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet \quad x = 6.$$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; 0)$$

$$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$$

↘ $f'(x) < 0$ [f klesá]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$x \in (0; 4)$$

$$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$$

↘ ↗ $f'(x) > 0$ [f rastie]

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x \in (4; \infty)$$

$$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$$

↗ ↘ $f'(x) < 0$ [f klesá]

$$f(4) = 1 \text{ [glob. max]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \quad f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\bullet \quad f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet \quad x = 6.$$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet \quad f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\bullet \quad f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet \quad x = 6.$$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
----------------------	----------------	---------------------

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\bullet f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\bullet f''(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 6.$$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

• Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16 \cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16 \cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16 \cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

- Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16 \cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16 \cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16 \cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

- Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16 \cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16 \cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16 \cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
	0 [nespojitosť]	$f(6) = \frac{8 \cdot 4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

- Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16 \cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16 \cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16 \cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
	0 [nespojitosť]	$f(6) = \frac{8 \cdot 4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$.

[Vid 1. časť (predchádzajúca strana),

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

- Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16 \cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16 \cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16 \cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
	0 [nespojitosť]	$f(6) = \frac{8 \cdot 4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$.

[Vid 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x + 0 = 0$,
kde $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x^2} = \frac{8(1-0)}{\infty} = 0$ a $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$f'(x) < 0$ [f klesá]	$f'(x) > 0$ [f rastie]	$f'(x) < 0$ [f klesá]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1 \cdot x^3 - (4-x) \cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

$$[f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.]$$

- Funkcia f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16 \cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16 \cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16 \cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) < 0$ [f konkávna]	$f''(x) > 0$ [f konvexná]
	0 [nespojitosť]	$f(6) = \frac{8 \cdot 4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$.

$$[\text{Vid 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí } y = kx + q = 0x + 0 = 0, \text{ kde } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x^2} = \frac{8(1-0)}{\infty} = 0 \text{ a } q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.]$$

- Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; 1]$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

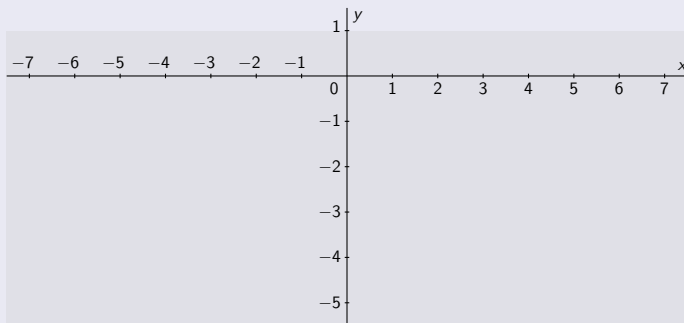
$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab]

[graf]

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$

- $H(f) = (-\infty; 1).$



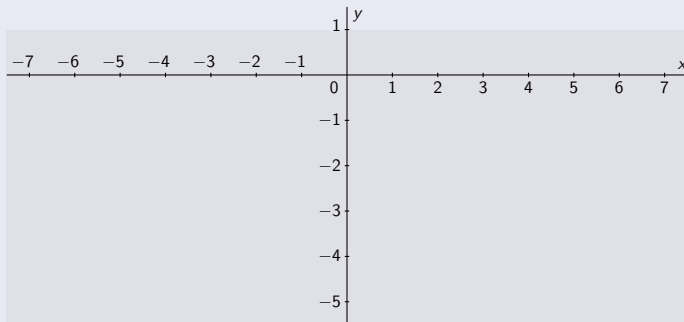
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojivosti]				

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.



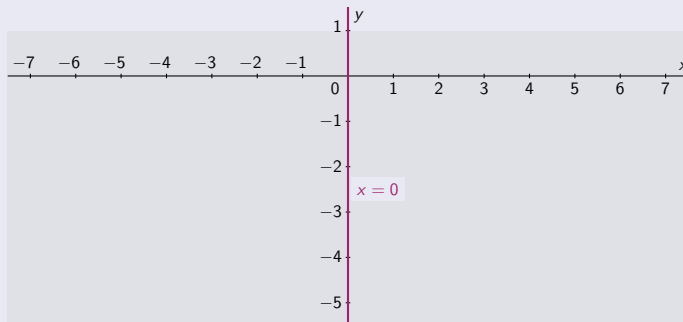
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojivosti]				
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$		

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



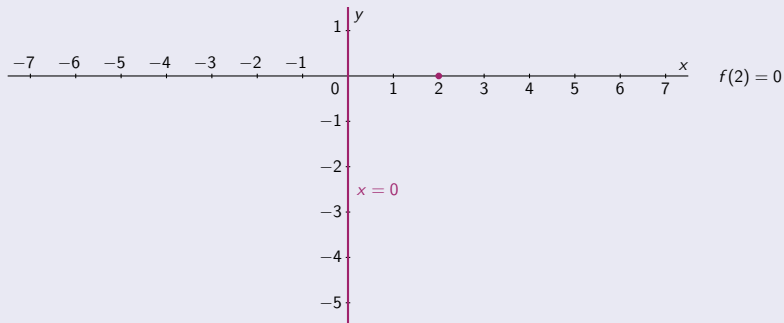
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[\[tab\]](#) [\[graf\]](#)

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojitosti]		2 [nulový bod]		
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$		

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



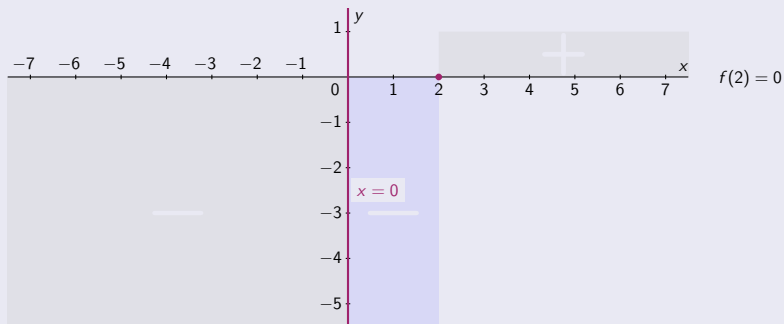
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojitosi]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+	f kladná	+
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$		

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

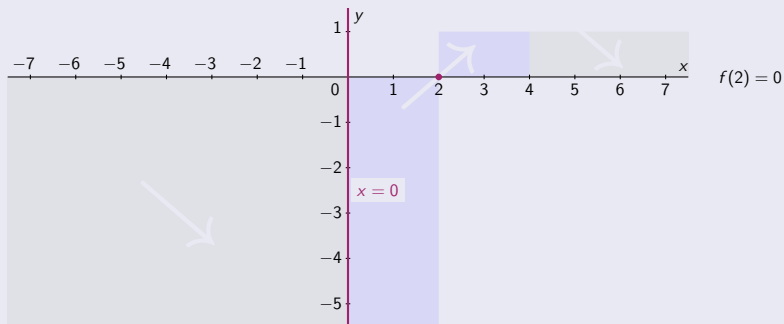
$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojivosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+	f kladná	+
↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗	↘ f klesá ↘		
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.

- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

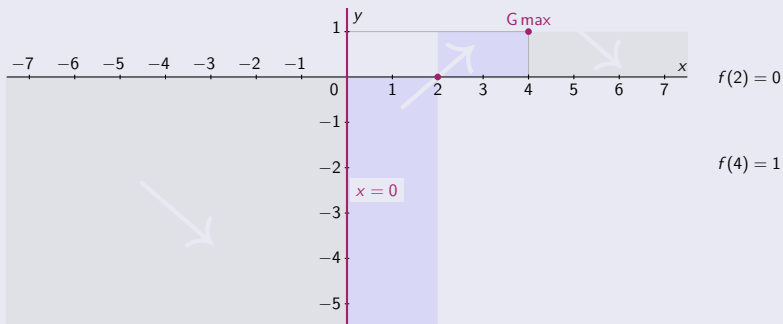
$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[\[tab\]](#) [\[graf\]](#)

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojiteľnosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+ f kladná		+ f kladná
4 [globálne max]				
↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗		↘ f klesá ↘	
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.

- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



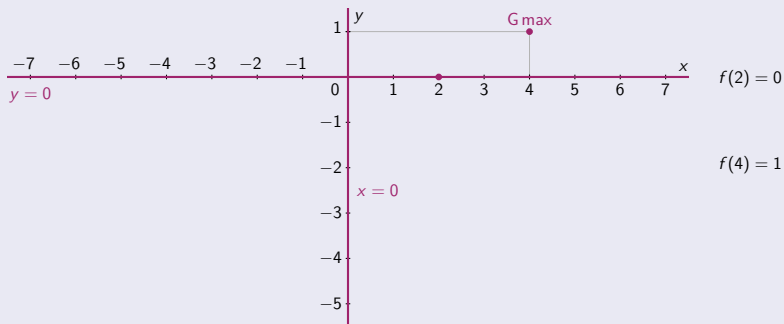
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[\[tab\]](#) [\[graf\]](#)

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojivosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+	f kladná	+
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
\searrow f klesá \searrow	\nearrow f rastie \nearrow	\searrow	f klesá \searrow	
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



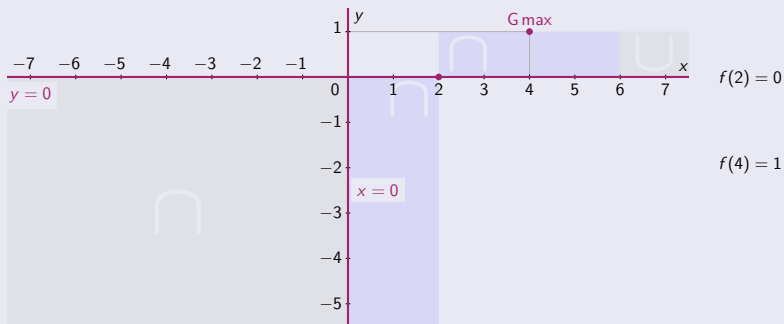
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojitosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+ f kladná		+ f kladná
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
\searrow f klesá \searrow	\nearrow f rastie \nearrow	\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$			
\cap f konkávna \cap	\cap f konkávna \cap	\cap f konkávna \cap	\cap f konkávna \cap	\cup f konvexná \cup

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



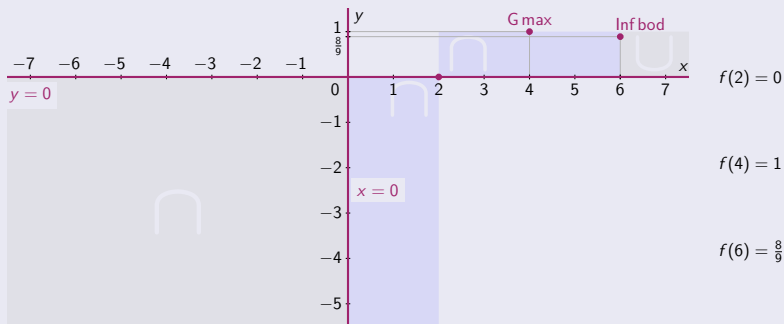
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojitosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+ f kladná		+ f kladná
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$		4 [globálne max]		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
\searrow f klesá \searrow	\nearrow f rastie \nearrow	\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow	
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	6 [inflexný bod]		
\cap f konkávna \cap	\cap f konkávna	\cap f konkávna	\cup f konvexná \cup	

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



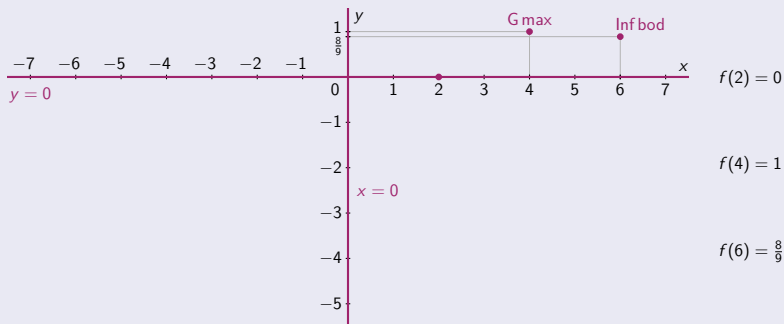
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojitosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+ f kladná		+ f kladná
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$		4 [globálne max]		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
\searrow f klesá \searrow	\nearrow f rastie \nearrow	\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow	
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	6 [inflexný bod]		
\cap f konkávna \cap	\cap f konkávna	\cap f konkávna	\cup f konvexná \cup	

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojitosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+ f kladná		+ f kladná
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
\searrow f klesá \searrow	\nearrow f rastie \nearrow	\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow	
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	6 [inflexný bod]		
\cap f konkávna \cap	\cap f konkávna	\cap f konkávna	\cup f konvexná \cup	

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.

$-24 = f(-1)$

$-8 = f(-2)$

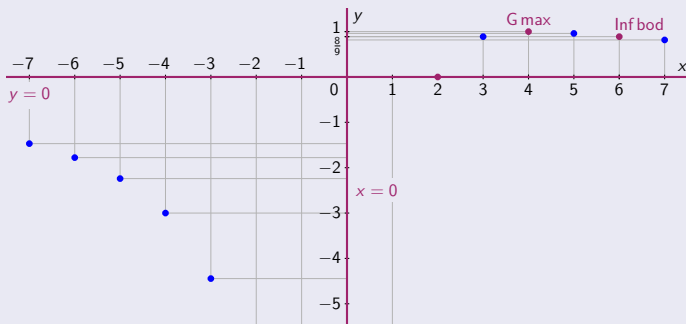
$-\frac{40}{9} = f(-3)$

$-3 = f(-4)$

$-\frac{56}{25} = f(-5)$

$-\frac{16}{9} = f(-6)$

$-\frac{72}{49} = f(-7)$



$f(1) = -8$

$f(2) = 0$

$f(3) = \frac{8}{9}$

$f(4) = 1$

$f(5) = \frac{24}{25}$

$f(6) = \frac{8}{9}$

$f(7) = \frac{40}{49}$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 [bod nespojiteľosti]		2 [nulový bod]		
- f záporná -	- f záporná -	+ f kladná		+ f kladná
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
\searrow f klesá \searrow	\nearrow f rastie \nearrow	\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	6 [inflexný bod]		
\cap f konkávna \cap	\cap f konkávna	\cap f konkávna	\cup f konvexná \cup	\cup f konvexná \cup

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1)$.
- ABS $x = 0$.

$$-24 = f(-1)$$

$$-8 = f(-2)$$

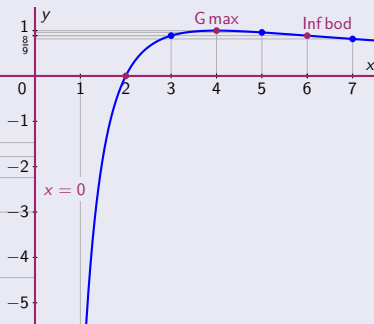
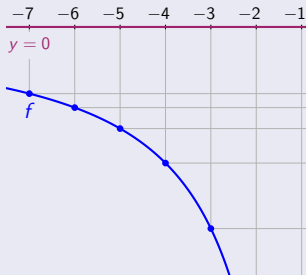
$$-\frac{40}{9} = f(-3)$$

$$-3 = f(-4)$$

$$-\frac{56}{25} = f(-5)$$

$$-\frac{16}{9} = f(-6)$$

$$-\frac{72}{49} = f(-7)$$



$$f(1) = -8$$

$$f(2) = 0$$

$$f(3) = \frac{8}{9}$$

$$f(4) = 1$$

$$f(5) = \frac{24}{25}$$

$$f(6) = \frac{8}{9}$$

$$f(7) = \frac{40}{49}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab]

[graf]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab]

[graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab]

[graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[\[tab\]](#) [\[graf\]](#)

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [\[Neodstrániteľná II. druhu.\]](#)
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{cases} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{cases} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{cases} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]
- $f(x) = 0$. \Leftrightarrow • $x = 1$. $[f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1]$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{cases} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]
- $f(x) = 0$. \Leftrightarrow • $x = 1$. $[f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1]$
- f nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊗ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}]$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{cases} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$

- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. \Leftrightarrow • $x = 1$. $[f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1]$

- f nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. [⊗] Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; -2) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (-2; 1) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (1; \infty) \quad |x-1| = x-1$$

$$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$$

$$0 \text{ [nespojitosť]} \quad f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}.$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{cases} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.

- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet x = 1$. $[f(x) = 0. \Leftrightarrow |x-1| = 0. \Leftrightarrow x = 1.]$

- f nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊗ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; -2) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (-2; 1) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (1; \infty) \quad |x-1| = x-1$$

$$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$$

$$0 \text{ [nespojitosť]} \quad f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$$

$$- \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0 \text{ [} f \text{ záporná]}$$

$$- + \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]}$$

$$+ +$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]}$$

$$+$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}]$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{cases} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.

- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. \Leftrightarrow • $x = 1$. $[f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1]$

- f nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. [®] Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; -2) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (-2; 1) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (1; \infty) \quad |x-1| = x-1$$

$$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$$

$$0 \text{ [nespojitosť]} \quad f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$$

$$- \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0 \text{ [} f \text{ záporná]} \quad - + \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]} \quad + + \quad f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]} \quad +$$

- $f'(x) = \frac{1(x+2)-(x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x > 1$.

- $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}]$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.

- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. \Leftrightarrow • $x = 1$. $[f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1]$

- f nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊗ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; -2) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (-2; 1) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (1; \infty) \quad |x-1| = x-1$$

$$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$$

$$0 \text{ [nespojitosť]} \quad f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$$

$$- \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0 \text{ [} f \text{ záporná]}$$

$$- \quad + \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]}$$

$$+ \quad + \quad f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]} \quad +$$

- $f'(x) = \frac{1(x+2) - (x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x > 1$.
 - $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- } • $f'(x)$ nemá nulové body

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}]$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.

- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. \Leftrightarrow • $x = 1$. $[f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1]$

- f nemá znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ® Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; -2) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (-2; 1) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (1; \infty) \quad |x-1| = x-1$$

$$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$$

$$0 \text{ [nespojitosť]} \quad f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$$

$$- \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0 \text{ [} f \text{ záporná]}$$

$$- + \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]}$$

$$+ + \quad f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [} f \text{ kladná]} \quad +$$

- $f'(x) = \frac{1(x+2) - (x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x > 1$.
 - $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f'(x)$ nemá nulové body a $f'(1)$ neexistuje.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (1. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$$

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. \Rightarrow • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}]$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty: |x-1| = +(x-1) \\ x \rightarrow -\infty: |x-1| = -(x-1) \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.

- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. \Leftrightarrow • $x = 1$. $[f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1]$

- f nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊗ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$$x \in (-\infty; -2) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (-2; 1) \quad |x-1| = -(x-1)$$

$$x \in (1; \infty) \quad |x-1| = x-1$$

$$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$$

$$0 \text{ [nespojitosť]} \quad f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$$

$$- \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0 \text{ [f záporná]}$$

$$- + \quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [f kladná]}$$

$$+ + \quad f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0 \text{ [f kladná]} \quad +$$

- $f'(x) = \frac{1(x+2) - (x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x > 1$.
- $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- f' nemá nulové body a $f'(1)$ neexistuje.
- f' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab]

[graf]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]} \searrow \searrow$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]} \searrow \nearrow$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]} \nearrow$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab]

[graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow \quad f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \quad [f \text{ klesá}]$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow \quad f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \quad [f \text{ klesá}]$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow \quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \quad [f \text{ rastie}] \quad \nearrow$$

$$f(1) = 0 \quad [\text{lok. min}]$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[\[tab\]](#) [\[graf\]](#)

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]} \nearrow$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow \quad f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \quad [f \text{ klesá}]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow \quad f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \quad [f \text{ klesá}]$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow \quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \quad [f \text{ rastie}] \nearrow$$

$$f(1) = 0 \quad [\text{lok. min}]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

- $f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\bullet f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x > 1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x < 1 \text{ a } x \neq -2.$$

$\bullet f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow \quad f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \quad [f \text{ klesá}]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow \quad f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \quad [f \text{ klesá}]$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow \quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \quad [f \text{ rastie}] \quad \nearrow$$

$$f(1) = 0 \quad [\text{lok. min}]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

- $f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]} \nearrow$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

- $f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
 - $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- } • $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$x \in (1; \infty)$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]} \searrow \searrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]} \searrow \nearrow$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]} \nearrow$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

- $f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
 - $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
 - f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[⊗] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\bullet f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x > 1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x < 1 \text{ a } x \neq -2.$$

$\bullet f''$ je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$\bullet f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$$

$$\cap f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\cap \cup f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0 \text{ [f konvexná]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$$

$$\cup \cap f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\bullet f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x > 1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x < 1 \text{ a } x \neq -2.$$

$\bullet f''$ je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$\bullet f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$$

$$\cap f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\cap \cup f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0 \text{ [f konvexná]}$$

-2 [nespojitosť]

$$x \in (1; \infty)$$

$$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$$

$$\cup \cap f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

$f(1) = 0$ [inf. bod]

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá]	$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá]	$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie]
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$	$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$
	$f(1) = 0$ [lok. min]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
 - $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
 - f'' je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$	$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$	$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$
$\cap f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna]	$\cap \cup f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ [f konvexná]	$\cup \cap f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna]
	-2 [nespojitosť]	$f(1) = 0$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH majú tvary $y = \pm 1$.

[Vid 1. časť (predchádzajúca strana),

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\bullet f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x > 1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x < 1 \text{ a } x \neq -2.$$

$\bullet f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

$\bullet f''$ je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$$

$$\cap f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\cap \cup f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0 \text{ [f konvexná]}$$

-2 [nespojitosť]

$$x \in (1; \infty)$$

$$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$$

$$\cup \cap f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

$f(1) = 0$ [inf. bod]

\bullet ASS, t. j. ASH majú tvary $y = \pm 1$.

[Vid 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x \pm 1 = \pm 1$,

$$\text{kde } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{\infty(1+0)} = \frac{\pm 1}{\infty} = 0 \text{ a } q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1.]$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (2. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$$

$$\searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\searrow \searrow f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0 \text{ [f klesá]}$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$\searrow \nearrow f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ [f rastie]}$$

$$f(1) = 0 \text{ [lok. min]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\bullet f''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x > 1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x < 1 \text{ a } x \neq -2.$$

$\bullet f''$ je spojitá na $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$\bullet f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$$

$$\cap f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\cap \cup f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0 \text{ [f konvexná]}$$

-2 [nespojitosť]

$$x \in (1; \infty)$$

$$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$$

$$\cup \cap f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0 \text{ [f konkávna]}$$

$f(1) = 0$ [inf. bod]

\bullet ASS, t. j. ASH majú tvary $y = \pm 1$.

[Vid' 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x \pm 1 = \pm 1$,

$$\text{kde } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{\infty(1+0)} = \frac{\pm 1}{\infty} = 0 \text{ a } q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1.]$$

\bullet Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty \rangle$.

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[\[tab\]](#)[\[graf\]](#)

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

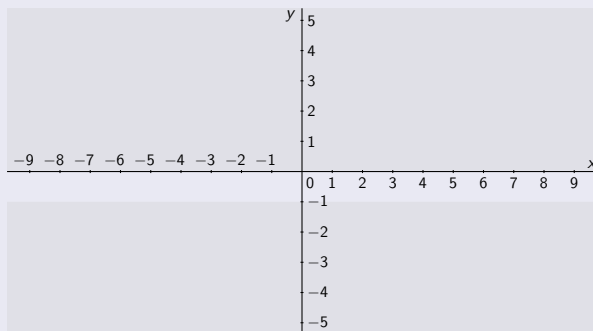
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab]

[graf]

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}.$

- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty).$



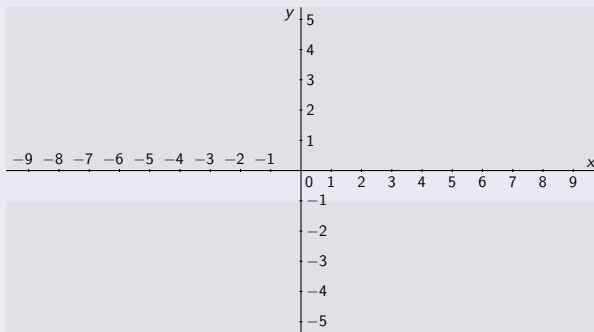
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

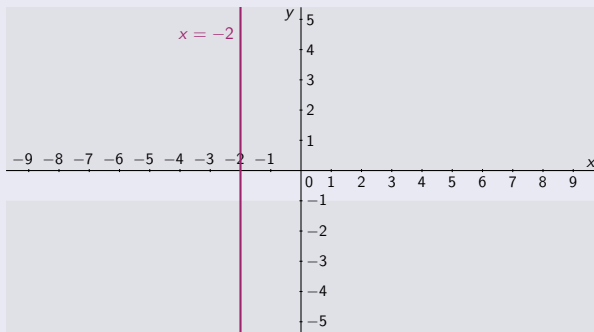
$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.

- f spojité na $\mathbb{R} - \{-2\}$.

- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.

- ABS $x = -2$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

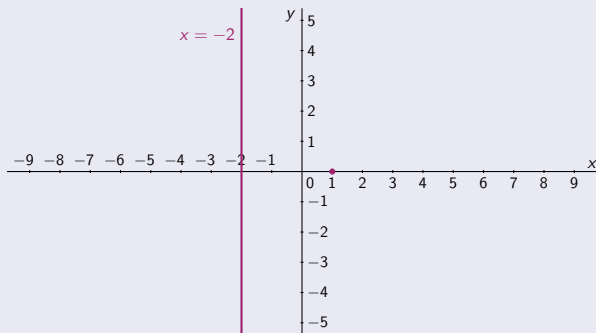
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[\[tab\]](#) [\[graf\]](#)

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojité na $\mathbb{R} - \{-2\}$.

- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$$f(1) = 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

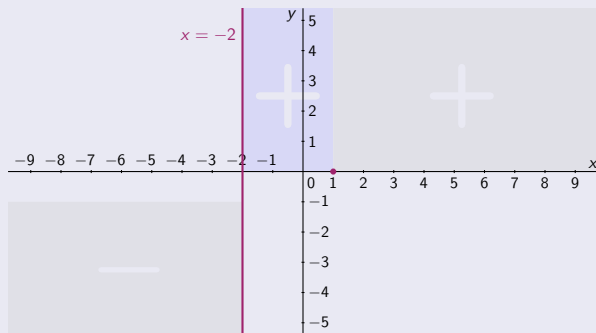
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[\[tab\]](#) [\[graf\]](#)

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- <i>f</i> záporná -	+ <i>f</i> kladná +	+ <i>f</i> kladná +
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.

- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

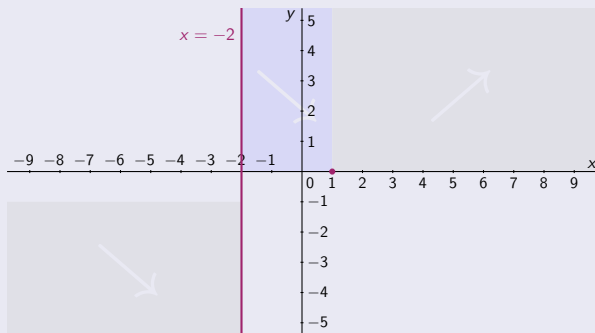
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná	+ f kladná	+ f kladná
↘ f klesá	↘ f klesá	↗ f rastie
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.

- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

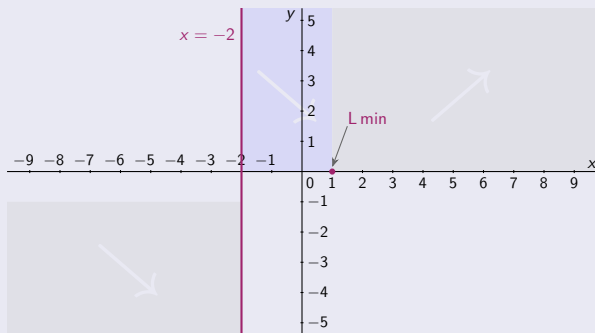
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná	+ f kladná	+ f kladná
1 [lokálne min]		
↘ f klesá	↘ f klesá	↗ f rastie
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.

- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$$f(1) = 0$$

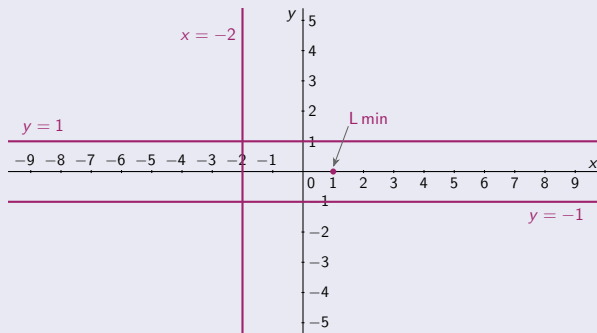
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná -	+ f kladná +	+ f kladná +
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$	1 [lokálne min]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
↘ f klesá ↘	↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$$f(1) = 0$$

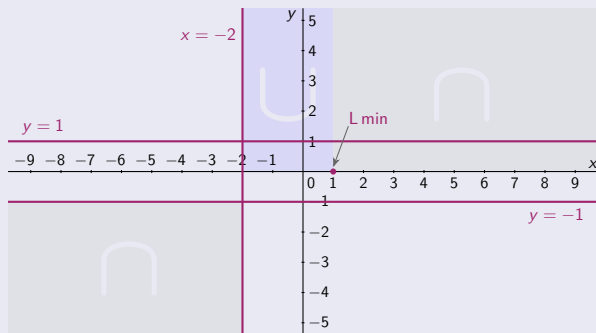
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná -	+ f kladná +	+ f kladná +
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$	1 [lokálne min]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
\searrow f klesá \searrow	\searrow f klesá \searrow	\nearrow f rastie \nearrow
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	
\cap f konkávna \cap	\cup f konvexná \cup	\cap f konkávna \cap

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$$f(1) = 0$$

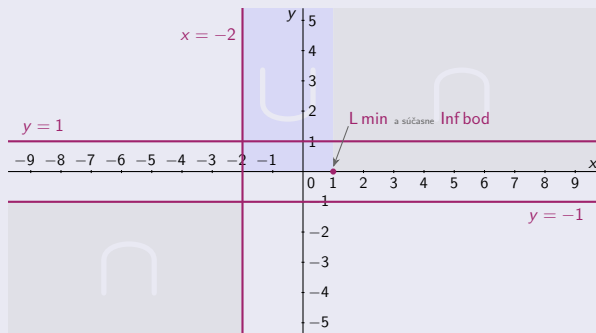
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná	+ f kladná	+ f kladná
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$	1 [lokálne min]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
↘ f klesá	↘ f klesá	↗ f rastie
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
∩ f konkávna	∪ f konvexná	∩ f konkávna

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$$f(1) = 0$$

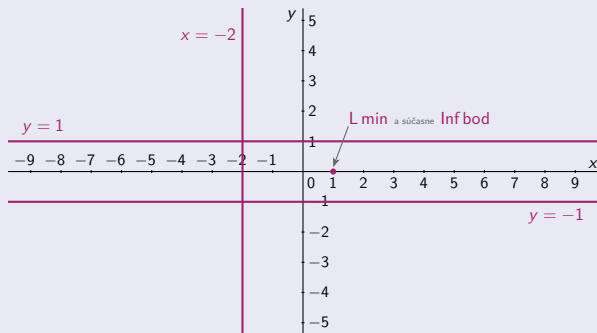
Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná -	+ f kladná +	+ f kladná +
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
↘ f klesá ↘	↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
∩ f konkávna ∩	∪ f konvexná ∪	∩ f konkávna ∩

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná -	+ f kladná +	+ f kladná +
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
↘ f klesá ↘	↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
∩ f konkávna ∩	∪ f konvexná ∪	∩ f konkávna ∩

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.

$$\frac{1}{2} = f(0)$$

$$2 = f(-1)$$

$$-4 = f(-3)$$

$$-\frac{5}{2} = f(-4)$$

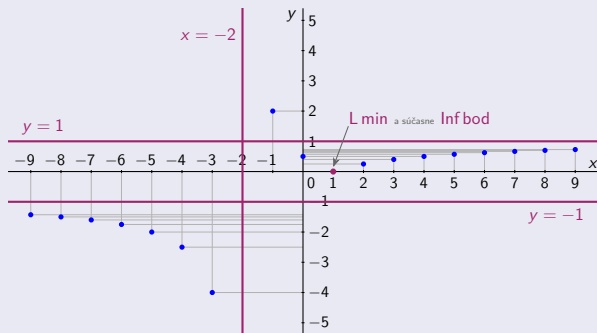
$$-2 = f(-5)$$

$$-\frac{7}{4} = f(-6)$$

$$-\frac{8}{5} = f(-7)$$

$$-\frac{3}{2} = f(-8)$$

$$-\frac{10}{7} = f(-9)$$



$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = \frac{2}{5}$$

$$f(4) = \frac{1}{2}$$

$$f(5) = \frac{4}{7}$$

$$f(6) = \frac{5}{8}$$

$$f(7) = \frac{2}{3}$$

$$f(8) = \frac{7}{10}$$

$$f(9) = \frac{8}{11}$$

Výšetrenie priebehu funkcie – Príklad (3. časť)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
- f záporná	+ f kladná	+ f kladná
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$	1 [lokálne min]	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
↘ f klesá	↘ f klesá	↗ f rastie
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
∩ f konkávna	∪ f konvexná	∩ f konkávna

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- f spojitá na $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.

$$\frac{1}{2} = f(0)$$

$$2 = f(-1)$$

$$-4 = f(-3)$$

$$-\frac{5}{2} = f(-4)$$

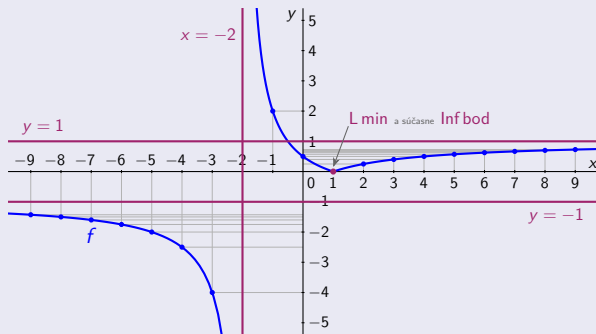
$$-2 = f(-5)$$

$$-\frac{7}{4} = f(-6)$$

$$-\frac{8}{5} = f(-7)$$

$$-\frac{3}{2} = f(-8)$$

$$-\frac{10}{7} = f(-9)$$



$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = \frac{2}{5}$$

$$f(4) = \frac{1}{2}$$

$$f(5) = \frac{4}{7}$$

$$f(6) = \frac{5}{8}$$

$$f(7) = \frac{2}{3}$$

$$f(8) = \frac{7}{10}$$

$$f(9) = \frac{8}{11}$$

Koniec 9. časti

Ďakujem za pozornosť.