# Matematická analýza 1

## 2024/2025

## 10. Neurčitý integrál

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou získate nápomoc.
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

# Obsah


1. Neurčitý integrál
2. Metódy integrovania I
3. Metódy integrovania II
4. Integrovanie racionálnych funkcií
5. Integrovanie iracionálnych funkcií I
6. Integrovanie iracionálnych funkcií II
7. Integrovanie goniometrických funkcií
8. Integrovanie hyperbolických funkcií

# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.

# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

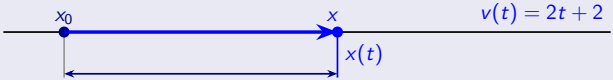
- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,



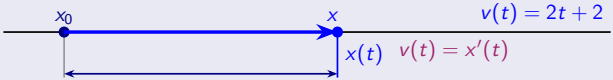
# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$

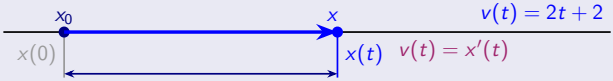


# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,
  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$ a taktiež $x(t_0) = x(0) = x_0$.



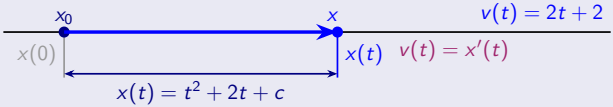
# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,
  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$ a taktiež $x(t_0) = x(0) = x_0$.

  - Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c,\ t \in \langle 0; \infty)$, kde $c \in R$ je ľubovoľné.



# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

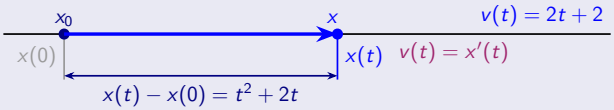
**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,
  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$ a taktiež $x(t_0) = x(0) = x_0$.

  - Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c,\ t \in \langle 0; \infty)$, kde $c \in R$ je ľubovoľné.
  - Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby $x(0) = x_0$,

[$c$ je síce ľubovoľné, ale pre všetky $t \in \langle 0; \infty)$ je rovnaké.]



# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

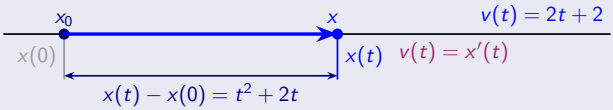
**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,
  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$ a taktiež $x(t_0) = x(0) = x_0$.

  - Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c,\ t \in \langle 0; \infty)$, kde $c \in R$ je ľubovoľné.
  - Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby $x(0) = x_0$, t. j. aby $0^2 + 2 \cdot 0 + c = x_0$.

[$c$ je síce ľubovoľné, ale pre všetky $t \in \langle 0; \infty)$ je rovnaké.]



# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

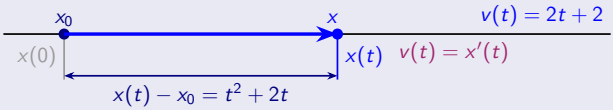
---

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,
  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$ a taktiež $x(t_0) = x(0) = x_0$.

---

- Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c,\ t \in \langle 0; \infty)$, kde $c \in R$ je ľubovoľné.
- Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby $x(0) = x_0$, t. j. aby $0^2 + 2 \cdot 0 + c = x_0$.

$\Rightarrow$ • $c = x_0$. [$c$ je síce ľubovoľné, ale pre všetky $t \in \langle 0; \infty)$ je rovnaké.]



# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

## Dráha priamočiareho pohybu hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

---

- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,
  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$ a taktiež $x(t_0) = x(0) = x_0$.

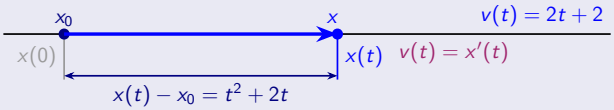
---

  - Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c,\ t \in \langle 0; \infty)$, kde $c \in R$ je ľubovoľné.
  - Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby $x(0) = x_0$, t. j. aby $0^2 + 2 \cdot 0 + c = x_0$.

    $\Rightarrow$ • $c = x_0$. [$c$ je síce ľubovoľné, ale pre všetky $t \in \langle 0; \infty)$ je rovnaké.]

---

- Z uvedeného vyplýva, že dráha je určená funkciou $x(t) = t^2 + 2t + x_0,\ t \in \langle 0; \infty)$.



# Neurčitý integrál – Motivačný príklad

**Dráha** priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase $t$ s rýchlosťou $v(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$.
- Bod sa v čase $t_0 = 0$ nachádza na pozícii $x_0$.

---

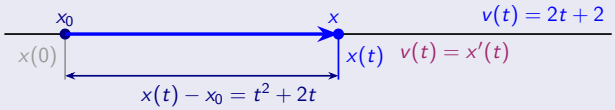
- Hľadáme funkciu $x(t),\ t \in \langle 0; \infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,
  t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2,\ t \in \langle 0; \infty)$ a taktiež $x(t_0) = x(0) = x_0$.

  - Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c,\ t \in \langle 0; \infty)$, kde $c \in R$ je ľubovoľné.
  - Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby $x(0) = x_0$, t. j. aby $0^2 + 2 \cdot 0 + c = x_0$.

    $\Rightarrow$ • $c = x_0$. [$c$ je síce ľubovoľné, ale pre všetky $t \in \langle 0; \infty)$ je rovnaké.]

---

- Z uvedeného vyplýva, že dráha je určená funkciou $x(t) = t^2 + 2t + x_0,\ t \in \langle 0; \infty)$.



# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na otvorenom intervale $I$,

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$.

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$.
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

[Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý),

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj neotvorený (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme jednostranné derivácie.

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme **jednostranné derivácie**.

- V ľavom krajnom bode $a$ deriváciu sprava $F'_+(a) = f(a)$.

[$\langle a; b)$, $\langle a; b)$, resp. $\langle a; \infty)$, kde $a, b \in R$.]

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme **jednostranné derivácie**.

---

- V ľavom krajnom bode $a$ deriváciu sprava $F'_+(a) = f(a)$. $a \xleftarrow{\oplus} \cdots$ [$\langle a; b)$, $\langle a; b)$, resp. $\langle a; \infty)$, kde $a, b \in R$.]
- V pravom krajnom bode $b$ deriváciu sprava $F'_-(b) = f(b)$. $\cdots \xrightarrow{\ominus} b$ [$\langle a; b\rangle$, $(a; b\rangle$, resp. $(-\infty; b\rangle$, kde $a, b \in R$.]

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme **jednostranné derivácie**.

- V ľavom krajnom bode $a$ deriváciu sprava $F'_+(a) = f(a)$. $a \xleftarrow{\oplus} \dots$ [$\langle a; b)$, $\langle a; b)$, resp. $\langle a; \infty)$, kde $a, b \in R$.]
- V pravom krajnom bode $b$ deriváciu sprava $F'_-(b) = f(b)$. $\dots \xrightarrow{\ominus} b$ [$\langle a; b)$, $(a; b)$, resp. $(-\infty; b)$, kde $a, b \in R$.]

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je **primitívna** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na (otvorenom) intervale $I$.

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme **jednostranné derivácie**.

- V ľavom krajnom bode $a$ deriváciu sprava $F'_+(a) = f(a)$. $a \xleftarrow{\oplus} \dots$ [$\langle a; b)$, $\langle a; b)$, resp. $\langle a; \infty)$, kde $a, b \in R$.]
- V pravom krajnom bode $b$ deriváciu sprava $F'_-(b) = f(b)$. $\dots \xrightarrow{\ominus} b$ [$\langle a; b)$, $(a; b)$, resp. $(-\infty; b)$, kde $a, b \in R$.]

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je **primitívna** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na (otvorenom) intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F$ je **spojitá** na intervale $I$.

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme **jednostranné derivácie**.

- V ľavom krajnom bode $a$ deriváciu sprava $F'_+(a) = f(a)$. $a \xleftarrow{\oplus} \dots$ [$\langle a; b)$, $\langle a; b)$, resp. $\langle a; \infty)$, kde $a, b \in R$.]
- V pravom krajnom bode $b$ deriváciu sprava $F'_-(b) = f(b)$. $\dots \xrightarrow{\ominus} b$ [$\langle a; b)$, $(a; b)$, resp. $(-\infty; b)$, kde $a, b \in R$.]

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je **primitívna** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na (otvorenom) intervale $I$.

$\Rightarrow$ - Funkcia $F$ je **spojitá** na intervale $I$.

[Vyplýva z definície a z tvrdenia v kapitole 8. Derivácia funkcie časť 01-VI: Ak má funkcia $f$ v bode $x_0$ konečnú deriváciu, potom je $f$ v bode $x_0$ spojitá.]

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme **jednostranné derivácie**.

- V ľavom krajnom bode $a$ deriváciu sprava $F'_+(a) = f(a)$. [$\langle a; b)$, $\langle a; b)$, resp. $\langle a; \infty)$, kde $a, b \in R$.]
- V pravom krajnom bode $b$ deriváciu sprava $F'_-(b) = f(b)$. [$\langle a; b)$, $(a; b)$, resp. $(-\infty; b)$, kde $a, b \in R$.]

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je **primitívna** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na (otvorenom) intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F$ je **spojitá** na intervale $I$.
[Vyplýva z definície a z tvrdenia v kapitole 8. Derivácia funkcie časť 01-VI: Ak má funkcia $f$ v bode $x_0$ konečnú deriváciu, potom je $f$ v bode $x_0$ spojitá.]

- Funkcia $F(x) = x^2 + 3$, $x \in I$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x) = 2x$, $x \in I$ na každom z intervalov $I \subset (-\infty; \infty)$.

# Neurčitý integrál – Primitívna funkcia

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na **otvorenom intervale** $I$, ak:

- Pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$. [Je zrejmé, že pre všetky $x \in I$ je derivácia $F'(x)$ konečná.]
- Pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. [Budeme uvažovať iba otvorený interval $I$, ohraničený alebo neohraničený.]

- Interval $I$ môže byť aj **neotvorený** (uzavretý alebo iba z jednej strany uzavretý), potom v krajných bodoch intervalu $I$ myslíme **jednostranné derivácie**.

- V ľavom krajnom bode $a$ deriváciu sprava $F'_+(a) = f(a)$. $a \xleftarrow{\oplus} \dots$ [$\langle a; b)$, $\langle a; b)$, resp. $\langle a; \infty)$, kde $a, b \in R$.]
- V pravom krajnom bode $b$ deriváciu sprava $F'_-(b) = f(b)$. $\dots \xrightarrow{\ominus} b$ [$\langle a; b)$, $(a; b)$, resp. $(-\infty; b)$, kde $a, b \in R$.]

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je **primitívna** k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na (otvorenom) intervale $I$.

$\Rightarrow$ - Funkcia $F$ je **spojitá** na intervale $I$.
[Vyplýva z definície a z tvrdenia v kapitole 8. Derivácia funkcie časť 01-VI: Ak má funkcia $f$ v bode $x_0$ konečnú deriváciu, potom je $f$ v bode $x_0$ spojitá.]

- Funkcia $F(x) = x^2 + 3$, $x \in I$ je **primitívnou funkciou** k funkcii $f(x) = 2x$, $x \in I$ na každom z intervalov $I \subset (-\infty; \infty)$.

- Pre všetky $x \in R$ platí $F'(x) = \left[x^2 + 3\right]' = 2x = f(x)$.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon:

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

• Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

- Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

• Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

• Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.

[Ak poznáme jednu primitívnu funkciu $F$, potom poznáme všetky primitívne funkcie. Sú to funkcie $F + c$, kde $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.]

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

- Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.

  [Ak poznáme jednu primitívnu funkciu $F$, potom poznáme všetky primitívne funkcie. Sú to funkcie $F + c$, kde $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.]

- Ak množina $I$ nie je interval, tvrdenie neplatí. [Viď nasledujúci príklad,

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

• Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.

  [Ak poznáme jednu primitívnu funkciu $F$, potom poznáme všetky primitívne funkcie. Sú to funkcie $F + c$, kde $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.]

- Ak množina $I$ nie je interval, tvrdenie neplatí. [Viď nasledujúci príklad, ]

Funkcie $F(x) = x^3$, $x \in I$ a $G(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-1; 0), \\ x^3 - 1, & x \in (1; 2) \end{cases}$

sú primitívne k funkcii $f(x) = 3x^2$, $x \in I$ na množine $I = (-1; 0) \cup (1; 2)$.

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

- Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.

  [Ak poznáme jednu primitívnu funkciu $F$, potom poznáme všetky primitívne funkcie. Sú to funkcie $F + c$, kde $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.]

- Ak množina $I$ nie je interval, tvrdenie neplatí. [Viď nasledujúci príklad, ]

Funkcie $F(x) = x^3$, $x \in I$ a $G(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-1; 0), \\ x^3 - 1, & x \in (1; 2) \end{cases}$

sú primitívne k funkcii $f(x) = 3x^2$, $x \in I$ na množine $I = (-1; 0) \cup (1; 2)$.

- Funkcia $F - G$ nie je konštantná na $I$,

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[f - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

• Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.

  [Ak poznáme jednu primitívnu funkciu $F$, potom poznáme všetky primitívne funkcie. Sú to funkcie $F + c$, kde $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.]

- Ak množina $I$ nie je interval, tvrdenie neplatí. [Viď nasledujúci príklad, ]

Funkcie $F(x) = x^3$, $x \in I$ a $G(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-1; 0), \\ x^3 - 1, & x \in (1; 2) \end{cases}$

sú primitívne k funkcii $f(x) = 3x^2$, $x \in I$ na množine $I = (-1; 0) \cup (1; 2)$.

- Funkcia $F - G$ nie je konštantná na $I$, pretože $[F - G](x) = F(x) - G(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1; 0), \\ 1, & x \in (1; 2). \end{cases}$

# Neurčitý integrál – Vlastnosti primitívnych funkcií

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je taktiež primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

[Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.]

Funkcie $F(x)$, $x \in I$ a $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F - G$ je konštantná na intervale $I$. [Pre všetky $x \in I$ platí $[F - G](x) = [F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$.]

Tvrdenie v kapitole 9. Priebeh funkcie časť 01-Mon: Funkcia $f$ je spojitá na intervale $I$ a má v každom bode $x \in I$ konečnú deriváciu $f'(x)$, potom:

• Funkcia $f$ je na intervale $I$ konštantná. $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.

  [Ak poznáme jednu primitívnu funkciu $F$, potom poznáme všetky primitívne funkcie. Sú to funkcie $F + c$, kde $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.]

- Ak množina $I$ nie je interval, tvrdenie neplatí. [Viď nasledujúci príklad, stačí rozdeliť množinu $I$ na intervaly.]

Funkcie $F(x) = x^3$, $x \in I$ a $G(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-1; 0), \\ x^3 - 1, & x \in (1; 2) \end{cases}$

sú primitívne k funkcii $f(x) = 3x^2$, $x \in I$ na množine $I = (-1; 0) \cup (1; 2)$.

- Funkcia $F - G$ nie je konštantná na $I$, pretože $[F - G](x) = F(x) - G(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1; 0), \\ 1, & x \in (1; 2). \end{cases}$

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$,

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \{F(x) + c : x \in I, c \in R\} \quad F(x) + c, x \in I, c \in R$$

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f$ na intervale $I$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\}$$

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

- Zápis integrálu je určený na začiatku symbolom $\int$ [integračný znak] a na konci symbolom $\mathrm{d}x$ [diferenciál].

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

začiatok integrálu [integračný znak]

koniec integrálu [diferenciál]

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

- Zápis integrálu je určený na začiatku symbolom $\int$ [integračný znak] a na konci symbolom $\mathrm{d}x$ [diferenciál].
  [Zátvorky okolo integrovanej funkcie $f(x)$ nie sú nutné, ale doporučujú sa.]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

integračná funkcia [integrand]

začiatok integrálu [integračný znak]

koniec integrálu [diferenciál]

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu **všetkých primitívnych funkcií** k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

- **Zápis integrálu** je určený na začiatku symbolom $\int$ [integračný znak] a na konci symbolom $\mathrm{d}x$ [diferenciál].
  [Zátvorky okolo integrovanej funkcie $f(x)$ nie sú nutné, ale doporučujú sa.]
- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) **primitívna** funkcia $F(x)$, $x \in I$.
  [Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

integračná funkcia [integrand]

primitívna funkcia [ľubovoľná z primitívnych funkcií]

začiatok integrálu [integračný znak]

koniec integrálu [diferenciál]

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu **všetkých primitívnych funkcií** k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

- **Zápis integrálu** je určený na začiatku symbolom $\int$ [integračný znak] a na konci symbolom $\mathrm{d}x$ [diferenciál].
  [Zátvorky okolo integrovanej funkcie $f(x)$ nie sú nutné, ale doporučujú sa.]
- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) **primitívna funkcia** $F(x)$, $x \in I$.
  [Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.]
- Ak nie je $I$ [obor definície] zadaný, myslíme maximálny **interval**, resp. **zjednotenie intervalov**, kde integrál existuje.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

definičný obor [obor integrovania]

integračná funkcia [integrand]

primitívna funkcia [ľubovoľná z primitívnych funkcií]

začiatok integrálu [integračný znak]

koniec integrálu [diferenciál]

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu **všetkých primitívnych funkcií** k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

- **Zápis integrálu** je určený na začiatku symbolom $\int$ [integračný znak] a na konci symbolom $\mathrm{d}x$ [diferenciál].
  [Zátvorky okolo integrovanej funkcie $f(x)$ nie sú nutné, ale doporučujú sa.]
- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) **primitívna funkcia** $F(x)$, $x \in I$.
  [Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.]
- Ak nie je $I$ [obor definície] zadaný, myslíme maximálny **interval**, resp. **zjednotenie intervalov**, kde integrál existuje.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

integračná premenná

definičný obor [obor integrovania]

integračná funkcia [integrand]

primitívna funkcia [ľubovoľná z primitívnych funkcií]

začiatok integrálu [integračný znak]

koniec integrálu [diferenciál]

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu **všetkých primitívnych funkcií** k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

- **Zápis integrálu** je určený na začiatku symbolom $\int$ [integračný znak] a na konci symbolom $\mathrm{d}x$ [diferenciál].
  [Zátvorky okolo integrovanej funkcie $f(x)$ nie sú nutné, ale doporučujú sa.]
- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) **primitívna** funkcia $F(x)$, $x \in I$.
  [Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.]
- Ak nie je $I$ [obor definície] zadaný, myslíme maximálny **interval**, resp. **zjednotenie intervalov**, kde integrál existuje.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

integračná premenná

integračná konštanta

definičný obor [obor integrovania]

integračná funkcia [integrand]

primitívna funkcia [ľubovoľná z primitívnych funkcií]

začiatok integrálu [integračný znak]

koniec integrálu [diferenciál]

# Neurčitý integrál – Definícia

**Neurčitým integrálom** funkcie $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I \subset R$, označenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývame:

- množinu **všetkých primitívnych funkcií** k funkcii $f$ na intervale $I$. [Symboly pre množinu sa kvôli prehľadnosti vynechávajú.]

- **Zápis integrálu** je určený na začiatku symbolom $\int$ [integračný znak] a na konci symbolom $\mathrm{d}x$ [diferenciál].
  [Zátvorky okolo integrovanej funkcie $f(x)$ nie sú nutné, ale doporučujú sa.]
- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) **primitívna funkcia** $F(x)$, $x \in I$.
  [Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f$ na intervale $I$ sa líšia o konštantu.]
- Ak nie je $I$ [obor definície] zadaný, myslíme maximálny **interval**, resp. **zjednotenie intervalov**, kde integrál existuje.
- Proces hľadania **primitívnej funkcie** nazývame **integrovanie**.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c, x \in I, c \in R.$$

- integračná premenná
- integračná konštanta
- definičný obor [obor integrovania]
- integračná funkcia [integrand]
- primitívna funkcia [ľubovoľná z primitívnych funkcií]
- začiatok integrálu [integračný znak]
- koniec integrálu [diferenciál]

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$.

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$.

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.
- Ku každej spojitej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje neurčitý integrál na intervale $I$,

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.
- Ku každej spojitej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje neurčitý integrál na intervale $I$, ale nie vždy primitívnu funkciu dokážeme vyjadriť ako elementárnu funkciu.

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.
- Ku každej spojitej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje neurčitý integrál na intervale $I$, ale nie vždy primitívnu funkciu dokážeme vyjadriť ako elementárnu funkciu.

Sú to napríklad pre $m \in N$, $n \in N \cup \{0\}$, $m + n > 1$ integrály:

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$, $x \in (-1; \infty)$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$, $x \in (0; \infty)$.
- $\displaystyle\int \frac{e^{\pm x^m}}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\displaystyle\int \frac{\sin(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\displaystyle\int \frac{\cos(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.
- Ku každej spojitej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje neurčitý integrál na intervale $I$, ale nie vždy primitívnu funkciu dokážeme vyjadriť ako elementárnu funkciu.

Sú to napríklad pre $m \in N$, $n \in N \cup \{0\}$, $m + n > 1$ integrály:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$, $x \in (-1; \infty)$.
- $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x \in (0; \infty)$.
- $\int \frac{e^{\pm x^m}}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\sin(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\cos(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.

- Pozor na zaručene overené fámy od rôznych nevzdelancov, klamárov alebo matematických kuchárov produkujúcich rôzne nezmyselné matematické recepty!

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.
- Ku každej spojitej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje neurčitý integrál na intervale $I$, ale nie vždy primitívnu funkciu dokážeme vyjadriť ako elementárnu funkciu.

Sú to napríklad pre $m \in N$, $n \in N \cup \{0\}$, $m + n > 1$ integrály:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$, $x \in (-1; \infty)$.
- $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x \in (0; \infty)$.
- $\int \frac{e^{\pm x^m}}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\sin(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\cos(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.

- Pozor na zaručene overené fámy od rôznych nevzdelancov, klamárov alebo matematických kuchárov produkujúcich rôzne nezmyselné matematické recepty!

- Predchádzajúce neurčité integrály existujú a dajú sa presne vyjadriť, ale iba ako rozvoje nekonečných funkcionálnych radov.

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.
- Ku každej spojitej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje neurčitý integrál na intervale $I$, ale nie vždy primitívnu funkciu dokážeme vyjadriť ako elementárnu funkciu.

Sú to napríklad pre $m \in N$, $n \in N \cup \{0\}$, $m + n > 1$ integrály:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$, $x \in (-1; \infty)$.
- $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x \in (0; \infty)$.
- $\int \frac{e^{\pm x^m}}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\sin(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\cos(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.

- Pozor na zaručene overené fámy od rôznych nevzdelancov, klamárov alebo matematických kuchárov produkujúcich rôzne nezmyselné matematické recepty!

  - Predchádzajúce neurčité integrály existujú a dajú sa presne vyjadriť, ale iba ako rozvoje nekonečných funkcionálnych radov.
  - Znamená to iba skutočnosť, že s našimi doterajšími vedomosťami tieto integrály vypočítať nevieme.

# Neurčitý integrál – Neurčitý integrál spojitej funkcie

- Nie každá funkcia $f(x)$, $x \in I$ musí mať primitívnu funkciu na intervale $I$. [Spojitá funkcia ju má vždy.]

**Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I$.**

$\Rightarrow$ • K funkcii $f$ na intervale $I$ existuje primitívna funkcia.

- Existujú samozrejme aj nespojité funkcie $f(x)$, $x \in I$, ktoré majú primitívnu funkciu na intervale $I$.
- Ku každej spojitej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje neurčitý integrál na intervale $I$, ale nie vždy primitívnu funkciu dokážeme vyjadriť ako elementárnu funkciu.

Sú to napríklad pre $m \in N$, $n \in N \cup \{0\}$, $m + n > 1$ integrály:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$, $x \in (-1; \infty)$.
- $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x \in (0; \infty)$.
- $\int \frac{e^{\pm x^m}}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\sin(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.
- $\int \frac{\cos(x^m)}{x^n}\, dx$, $x \in R - \{0\}$.

- Pozor na zaručene overené fámy od rôznych nevzdelancov, klamárov alebo matematických kuchárov produkujúcich rôzne nezmyselné matematické recepty!

  - Predchádzajúce neurčité integrály existujú a dajú sa presne vyjadriť, ale iba ako rozvoje nekonečných funkcionálnych radov.
  - Znamená to iba skutočnosť, že s našimi doterajšími vedomosťami tieto integrály vypočítať nevieme.
  - Neznamená to, že tieto neurčité integrály neexistujú.

# Neurčitý integrál – Príklad

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.

# Neurčitý integrál – Príklad

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.

Pre všetky $x \in I$ platí:

- $$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

# Neurčitý integrál – Príklad

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.

Pre všetky $x \in I$ platí:

- $$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = [F(x) + c]' = f(x).$$

# Neurčitý integrál – Príklad

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = [F(x) + c]' = f(x).$

# Neurčitý integrál – Príklad

Funkcia $F(x),\ x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x),\ x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1; 1)$.

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = [F(x) + c]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1; 1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1; 1)$.

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1; 1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1; 1)$.

- $x \in (-1; 0)$. $\Rightarrow$
- $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$
- $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1; 1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1; 1)$.

- $x \in (-1; 0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \phantom{-}x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1;1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1;1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1;1)$.

- $x \in (-1;0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0;1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \phantom{-}x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$.

# Neurčitý integrál – Príklad

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1; 1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1; 1)$.

- $x \in (-1; 0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \quad x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$,

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí:

[Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1; 1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1; 1)$.

- $x \in (-1; 0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$, t. j. $c = c_0 \in R$.

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí: [Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = [F(x) + c]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1; 1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ na intervale $(-1; 1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1; 1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1; 1)$.

- $x \in (-1; 0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$, t. j. $c = c_0 \in R$.

$\Rightarrow$ $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, $x \in (-1; 1)$, kde $c \in R$, [$F$ je spojitá na $(-1; 1)$.]

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí: [Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1;1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1;1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1;1)$.

- $x \in (-1;0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0;1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \quad x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$, t. j. $c = c_0 \in R$.

$\Rightarrow$ $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, $x \in (-1;1)$, kde $c \in R$, [$F$ je spojitá na $(-1;1)$.]

ale $F$ nie je primitívna k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$.

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí: [Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1;1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1;1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1;1)$.

- $x \in (-1;0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0;1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \quad x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$, t. j. $c = c_0 \in R$.

$\Rightarrow$ $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, $x \in (-1;1)$, kde $c \in R$, [$F$ je spojitá na $(-1;1)$.]

ale $F$ nie je primitívna k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$. [Neexistuje $F'(0)$.]

- $F'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x + c - c}{x} = -1$
- $F'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x + c - c}{x} = 1$

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí: [Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1;1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1;1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1;1)$.

- $x \in (-1;0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0;1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \quad x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$, t. j. $c = c_0 \in R$.

$\Rightarrow$ $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, $x \in (-1;1)$, kde $c \in R$, [$F$ je spojitá na $(-1;1)$.]

ale $F$ nie je primitívna k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$. [Neexistuje $F'(0)$.]

- $F'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x + c - c}{x} = -1 = \lim\limits_{x \to 0^-} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$
- $F'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x + c - c}{x} = 1 \quad = \lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí: [Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1;1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1;1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1;1)$.

- $x \in (-1;0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0;1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \quad x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$, t. j. $c = c_0 \in R$.

$\Rightarrow$ • $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, $x \in (-1;1)$, kde $c \in R$, [$F$ je spojitá na $(-1;1)$.]

ale $F$ nie je primitívna k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$. [Neexistuje $F'(0)$.]

- $F'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x + c - c}{x} = -1 = \lim\limits_{x \to 0^-} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq 0 = f(x).$
- $F'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x + c - c}{x} = 1 \quad = \lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq 0 = f(x).$

$\Rightarrow$ • $F'(0)$ neexistuje

# Neurčitý integrál – Príklad

**Funkcia $F(x)$, $x \in I$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$ a $c \in R$ je konštanta.**

Pre všetky $x \in I$ platí: [Derivovanie a integrovanie na danom intervale sú inverzné operácie.]

- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$
- $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = [F(x) + c]' = f(x).$

**Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na intervale $(-1;1)$.**

Pre primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in (-1;1)$ k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$ platí:

- $F(x)$ je spojitá na $(-1;1)$.
- $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre všetky $x \in (-1;1)$.

- $x \in (-1;0)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = -1$. $\Rightarrow$ $F(x) = -x + c_1 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, kde $c \in R$.
- $x \in (0;1)$. $\Rightarrow$ $F'(x) = \operatorname{sgn} x = +1$. $\Rightarrow$ $F(x) = \quad x + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot x + c_0$, kde $c_0 \in R$.
- $x = 0$. $\Rightarrow$ $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. $\Rightarrow$ $F(0) = 0 + c = -0 + c_0$, t. j. $c = c_0 \in R$.

$\Rightarrow$ $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x + c$, $x \in (-1;1)$, kde $c \in R$, [$F$ je spojitá na $(-1;1)$.]

ale $F$ nie je primitívna k funkcii $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$. [Neexistuje $F'(0)$.]

- $F'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x + c - c}{x} = -1 = \lim\limits_{x \to 0^-} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq 0 = f(x).$
- $F'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x + c - c}{x} = 1 \quad = \lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq 0 = f(x).$

$\Rightarrow$ $F'(0)$ neexistuje a primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in (-1;1)$ na intervale $(-1;1)$ neexistuje.

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,
  pretože neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,
  pretože neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2}{2n\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right]$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \sin (2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos (2n+1)\pi\right]$$

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{2n\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi\cdot\infty} - 1 = 0 - 1$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{(2n+1)\pi}\right\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos(2n+1)\pi\right] = \frac{2\cdot 0}{\pi\cdot\infty} - (-1)$$

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2}{2n\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi \cdot \infty} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \sin (2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos (2n+1)\pi\right] = \frac{2 \cdot 0}{\pi \cdot \infty} - (-1) = 1.$$

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{2n\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi\cdot\infty} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos(2n+1)\pi\right] = \frac{2\cdot 0}{\pi\cdot\infty} - (-1) = 1.$$

- $-1 \neq 1$. [Jednostranné limity sa nerovnajú.]

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{2n\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi\cdot\infty} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos(2n+1)\pi\right] = \frac{2\cdot 0}{\pi\cdot\infty} - (-1) = 1.$$

- $-1 \neq 1$. [Jednostranné limity sa nerovnajú.] $\Rightarrow$
- Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2}{2n\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi \cdot \infty} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \sin (2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos (2n+1)\pi\right] = \frac{2 \cdot 0}{\pi \cdot \infty} - (-1) = 1.$$

- $-1 \neq 1$. [Jednostranné limity sa nerovnajú.] $\Rightarrow$
- Limita $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ neexistuje.

Pre funkciu $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $F(0) = 0$ platí:

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{2n\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi\cdot\infty} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos(2n+1)\pi\right] = \frac{2\cdot 0}{\pi\cdot\infty} - (-1) = 1.$$

- $-1 \neq 1$. [Jednostranné limity sa nerovnajú.] $\Rightarrow$ • Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Pre funkciu $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $F(0) = 0$ platí:

- $F'(x) = \left[x^2\sin\frac{1}{x}\right]' = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = f(x)$ pre $x \in R - \{0\}$.

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{2n\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi\cdot\infty} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos(2n+1)\pi\right] = \frac{2\cdot 0}{\pi\cdot\infty} - (-1) = 1.$$

- $-1 \neq 1$. [Jednostranné limity sa nerovnajú.] $\Rightarrow$
- Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Pre funkciu $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $F(0) = 0$ platí:

- $F'(x) = \left[x^2\sin\frac{1}{x}\right]' = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = f(x)$ pre $x \in R - \{0\}$.
- $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x} - 0 = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \left[\begin{array}{l} x\to 0,\ \sin\frac{1}{x} \text{ je ohraničená} \\ -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \text{ pre } x \neq 0 \end{array}\right] = 0 = f(0)$.

# Neurčitý integrál – Príklad

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pre $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$.

- Funkcia $f$ je nespojitá v bode $x = 0$,

  pretože neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]$, t. j. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$.

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{2n\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin 2n\pi}{n\pi} - \cos 2n\pi\right] = \frac{0}{\pi\cdot\infty} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ platí:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} - \cos\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} - \cos(2n+1)\pi\right] = \frac{2\cdot 0}{\pi\cdot\infty} - (-1) = 1.$$

- $-1 \neq 1$. [Jednostranné limity sa nerovnajú.] $\Rightarrow$ • Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Pre funkciu $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $F(0) = 0$ platí:

- $F'(x) = \left[x^2\sin\frac{1}{x}\right]' = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = f(x)$ pre $x \in R - \{0\}$.
- $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x} - 0 = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \left[\begin{array}{l} x\to 0,\ \sin\frac{1}{x} \text{ je ohraničená} \\ -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \text{ pre } x \neq 0 \end{array}\right] = 0 = f(0)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F$ je primitívna funkcia k funkcii $f$ na $R$.

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

$c \in R$, $a \in R$, $k \in Z$

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

$c \in R$, $a \in R$, $k \in Z$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\int dx = \int 1\, dx = x + c$ | $x \in R$ | $\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ | $x \in R - \{0\}$, $a \neq -1$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

$c \in R$, $a \in R$, $k \in Z$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ | $x \in R - \{0\}$ | $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$ | $f(x) \neq 0$, $x \in D(f)$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

$c \in R,\ a \in R,\ k \in Z$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ | $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $x \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

$c \in R,\ a \in R,\ k \in Z$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ | $\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{k\pi}{a}$ | $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

$c \in R,\ a \in R,\ k \in Z$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\int \sinh ax\, dx = \frac{\cosh ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ | $\int \cosh ax\, dx = \frac{\sinh ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ |
| $\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c$ | $x \in R - \{0\},\ a \neq 0$ | $\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie I

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií I.

$c \in R,\ a \in R,\ k \in Z$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\int dx = \int 1\, dx = x + c$ | $x \in R$ | $\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ | $x \in R - \{0\},\ a \neq -1$ |
| $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ | $x \in R - \{0\}$ | $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$ | $f(x) \neq 0,\ x \in D(f)$ |
| $\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ | $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $x \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$ |
| $\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ | $\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{k\pi}{a}$ | $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}$ |
| $\int \sinh ax\, dx = \frac{\cosh ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ | $\int \cosh ax\, dx = \frac{\sinh ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ |
| $\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c$ | $x \in R - \{0\},\ a \neq 0$ | $\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c$ | $x \in R,\ a \neq 0$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

$c, c_1, c_2 \in R$, $a > 0$

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

$c, c_1, c_2 \in R,\ a > 0$

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c_2$ | $x \in R$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

$c, c_1, c_2 \in R,\ a > 0$

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$ | $x \in R - \{\pm a\}$ |

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

$c, c_1, c_2 \in R,\ a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + c_1 = -\arccos \frac{x}{|a|} + c_2$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{|a|} + c_2$$

$x \in (-a; a)$

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

$c, c_1, c_2 \in R,\ a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

$\Big\}\ x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty)$

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

$c, c_1, c_2 \in R,\ a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$$

$\Big\}\ x \in R$

# Neurčitý integrál – Základné vzorce pre integrovanie II

- Základné vzorce pre integrovanie úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií a pre praktické potreby je nevyhnutné si ich zapamätať!
- Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly, na ktorých sa môžu líšiť iba o konštantu.
- Platnosť vzorcov overíme ich derivovaním. Napr. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$.

## Neurčité integrály základných elementárnych funkcií II.

$c, c_1, c_2 \in R,\ a > 0$

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a} + c_2$ | $x \in R$ |
| $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$ | $x \in R - \{\pm a\}$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_1 = -\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_2$ <br> $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_1$ <br> $= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_2$ | $x \in (-a; a)$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$ <br> $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$ | $x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty)$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$ <br> $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$ | $x \in R$ |

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}}$$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \dfrac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \dfrac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} \qquad \text{pre } n \in N,\ n \geq 2$$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \dfrac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } n \in N,\ n \geq 2$$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } n \in N,\ n \geq 2$$

- $= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } n \in N,\ n \geq 2$$

- $= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{x^{-(n-1)}}{1-n} + c$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c \text{ pre } n \in N,\ n \geq 2$$

- $= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{x^{-(n-1)}}{1-n} + c = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c \text{ pre } n \in N,\ n \geq 2$$

- $= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{x^{-(n-1)}}{1-n} + c = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

Špeciálne:
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + c,$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c \text{ pre } n \in N,\ n \geq 2$$

- $= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{x^{-(n-1)}}{1-n} + c = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

Špeciálne:
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + c,$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c,$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c \text{ pre } n \in N,\ n \geq 2$$

- $= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{x^{-(n-1)}}{1-n} + c = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

Špeciálne: • $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + c,$ • $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c,$ • $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + c, \ldots$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

- $= \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \langle 0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

- $= \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \int x^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c \text{ pre } n \in N,\ n \geq 2$$

- $= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{x^{-(n-1)}}{1-n} + c = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

Špeciálne: • $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$, • $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c$, • $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + c$, ...

- $\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}.$

[Namiesto zápisu $\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ sa často používa $\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.]

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, \mathrm{d}x$

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

- $= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, \mathrm{d}x$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

- $= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c, \; x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

- $= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c, \; x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int |x| \, dx$$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

- $= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c, \; x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int |x| \, dx$$

- $= \begin{cases} \int x \, dx & \text{pre } x \geq 0, \\ \int (-x) \, dx = -\int x \, dx & \text{pre } x \leq 0, \end{cases}$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

- $= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi;\; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c, \; x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int |x| \, dx$$

- $= \begin{cases} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c & \text{pre } x \geq 0, \\ \int (-x) \, dx = -\int x \, dx = -\frac{x^2}{2} + c & \text{pre } x \leq 0, \end{cases}$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

- $= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c, \; x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int |x| \, dx$$

- $= \begin{cases} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c = \frac{x \cdot x}{2} + c & \text{pre } x \geq 0, \\ \int (-x) \, dx = -\int x \, dx = -\frac{x^2}{2} + c = \frac{x \cdot (-x)}{2} + c & \text{pre } x \leq 0, \end{cases}$

# Neurčitý integrál – Príklady

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

- $= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi; \; k \in Z\}, \; c \in R.$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c, \; x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \; k \in Z\right\}, \; c \in R.$

$$\int |x| \, dx = \frac{x|x|}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R$$

- $= \begin{cases} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c = \frac{x \cdot x}{2} + c = \frac{x|x|}{2} + c & \text{pre } x \geq 0, \; c \in R. \\ \int (-x) \, dx = -\int x \, dx = -\frac{x^2}{2} + c = \frac{x \cdot (-x)}{2} + c = \frac{x|x|}{2} + c & \text{pre } x \leq 0, \; c \in R. \end{cases}$

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $aF(x) + bG(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $af(x) + bg(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $aF(x) + bG(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $af(x) + bg(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int \left[af(x) + bg(x)\right] \mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I,\ c \in R.$$

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $aF(x) + bG(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $af(x) + bg(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int \left[af(x) + bg(x)\right] \mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I,\ c \in R.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $[aF(x) + bG(x) + c]' = aF'(x) + bG'(x) + 0 = af(x) + bg(x)$.]

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $aF(x) + bG(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $af(x) + bg(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int \left[af(x) + bg(x)\right] \mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I,\ c \in R.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $[aF(x) + bG(x) + c]' = aF'(x) + bG'(x) + 0 = af(x) + bg(x)$.]

- Pri integrovaní chápeme všetky výrazy ako množiny.

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

$\Rightarrow$
- Funkcia $aF(x) + bG(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $af(x) + bg(x)$, $x \in I$ na intervale $I$
  a platí
- $$\int \left[af(x) + bg(x)\right] \mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I,\ c \in R.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $\left[aF(x) + bG(x) + c\right]' = aF'(x) + bG'(x) + 0 = af(x) + bg(x)$.]

- Pri integrovaní chápeme všetky výrazy ako množiny.
- Ak je súčasťou výrazu neurčitý integrál (nevyjadrený primitívnou funkciou), integračnú konštantu nemusíme písať.

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $aF(x) + bG(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $af(x) + bg(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int \left[af(x) + bg(x)\right] \mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I,\ c \in R.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $[aF(x) + bG(x) + c]' = aF'(x) + bG'(x) + 0 = af(x) + bg(x)$.]

- Pri integrovaní chápeme všetky výrazy ako množiny.
- Ak je súčasťou výrazu neurčitý integrál (nevyjadrený primitívnou funkciou), integračnú konštantu nemusíme písať.
- Na konci sa všetky konštanty z jednotlivých primitívnych funkcií sčítajú do jednej výslednej konštanty.

# Metódy integrovania I – Metóda rozkladu

- Základom integrovania je rozklad na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu)
  a ich transformácia na ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy).
- Niekedy môžeme integrál odhadnúť a bez integrovania vypočítať (metóda neurčitých koeficientov).
- Jednotlivé metódy sa pri integrovaní navzájom kombinujú.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$, $x \in I$ sú primitívne k funkciám $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ na intervale $I$, reálne čísla $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$. [Metóda rozkladu.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $aF(x) + bG(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $af(x) + bg(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int \left[af(x) + bg(x)\right] \mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I,\ c \in R.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $\left[aF(x) + bG(x) + c\right]' = aF'(x) + bG'(x) + 0 = af(x) + bg(x)$.]

- Pri integrovaní chápeme všetky výrazy ako množiny.
- Ak je súčasťou výrazu neurčitý integrál (nevyjadrený primitívnou funkciou), integračnú konštantu nemusíme písať.
- Na konci sa všetky konštanty z jednotlivých primitívnych funkcií sčítajú do jednej výslednej konštanty.

[Vo výraze $a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$ nemusíme na pravej strane písať konštantu, pretože je zahrnutá v integráli $b\int g(x)\,\mathrm{d}x$.]

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
$= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
$= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

$$\int \frac{2(x+1)^2-2}{x}\,\mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

$$\int \frac{2(x+1)^2-2}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{2(x^2+2x+1)-2}{x}\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

$$\int \frac{2(x+1)^2-2}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{2(x^2+2x+1)-2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2x+4)\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

$$\int \frac{2(x+1)^2-2}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{2(x^2+2x+1)-2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{2x^2}{2} + 4x + c$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

- $= \int 2\cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
  $= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

Rozklad na jednotlivé čiastkové integrály väčšinou nepíšeme a priamo počítame primitívne funkcie:

- $\int\left(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

- $= \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$

$$\int \frac{2(x+1)^2-2}{x}\,\mathrm{d}x = x^2 + 4x + c$$

- $= \int \frac{2(x^2+2x+1)-2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{2x^2}{2} + 4x + c = x^2 + 4x + c,$
  $x \in R - \{0\},\ c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$

  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$

  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$

  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x \,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$

  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x \,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$

  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

- $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$

  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c$$

- $= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c,$

  $x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x - x + c$$

- $= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x - x + c,$

  $x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c \in R.$

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$]

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int [u(x)v(x)]'\, \mathrm{d}x = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$]

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int [u(x)v(x)]'\, \mathrm{d}x = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$]

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$.

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$$\Rightarrow \bullet \int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$.

## $\int \ln x\, \mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$$\Rightarrow \bullet \int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int [u(x)v(x)]'\, \mathrm{d}x = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$]

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$.

$$\int \ln x\, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\, \mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.
$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$.

$$\int \ln x\, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\, \mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & \\ v' = 1 & \end{array}\right]$
- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & \\ v = \ln x & \end{array}\right]$

- Na voľbe, t. j. označení $u = \ln x$, $v' = 1$ alebo $v = \ln x$, $u' = 1$ nezáleží,
- Pre lepšiu orientáciu (proti pomýleniu) je vhodné funkcie $u$, $v$, $u'$, $v'$ zapisovať prehľadne do tabuľky, napr. naľavo pôvodné funkcie

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x$, $x \in I$.

## $\int \ln x\, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\, \mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right]$
- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right]$

- Na voľbe, t. j. označení $u = \ln x$, $v' = 1$ alebo $v = \ln x$, $u' = 1$ nezáleží,
- Pre lepšiu orientáciu (proti pomýleniu) je vhodné funkcie $u$, $v$, $u'$, $v'$ zapisovať prehľadne do tabuľky,

  napr. naľavo pôvodné funkcie a napravo derivované, resp. integrované funkcie.

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$.

## $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = \Big[u(x)v(x) \qquad \Big]$
- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right] = \Big[u(x)v(x) \qquad \Big]$

$\Big\} = x \ln x$

- Na voľbe, t. j. označení $u = \ln x$, $v' = 1$ alebo $v = \ln x$, $u' = 1$ nezáleží,
- Pre lepšiu orientáciu (proti pomýleniu) je vhodné funkcie $u$, $v$, $u'$, $v'$ zapisovať prehľadne do tabuľky,

  napr. naľavo pôvodné funkcie a napravo derivované, resp. integrované funkcie.

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$.

## $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)'v(x)\,\mathrm{d}x\right]$
- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right]$

$$\Bigg\} = x \ln x - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Na voľbe, t. j. označení $u = \ln x$, $v' = 1$ alebo $v = \ln x$, $u' = 1$ nezáleží, dôležité je správne použitie metódy.
- Pre lepšiu orientáciu (proti pomýleniu) je vhodné funkcie $u$, $v$, $u'$, $v'$ zapisovať prehľadne do tabuľky,

  napr. naľavo pôvodné funkcie a napravo derivované, resp. integrované funkcie.

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x = \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$.

## $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)'v(x)\,\mathrm{d}x\right]$
- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right]$

$$\Bigg\} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x$$

- Na voľbe, t. j. označení $u = \ln x$, $v' = 1$ alebo $v = \ln x$, $u' = 1$ nezáleží, dôležité je správne použitie metódy.
- Pre lepšiu orientáciu (proti pomýleniu) je vhodné funkcie $u$, $v$, $u'$, $v'$ zapisovať prehľadne do tabuľky, napr. naľavo pôvodné funkcie a napravo derivované, resp. integrované funkcie.

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Pre všetky $x \in I$ platí $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.
$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int [u(x)v(x)]'\,\mathrm{d}x = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$]

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$.

## $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x \ln x - x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)'v(x)\,\mathrm{d}x\right]$
- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right]$

$$\Bigg\} = x \ln x - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x$$
$$= x \ln x - x + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

- Na voľbe, t. j. označení $u = \ln x$, $v' = 1$ alebo $v = \ln x$, $u' = 1$ nezáleží, dôležité je správne použitie metódy.
- Pre lepšiu orientáciu (proti pomýleniu) je vhodné funkcie $u$, $v$, $u'$, $v'$ zapisovať prehľadne do tabuľky, napr. naľavo pôvodné funkcie a napravo derivované, resp. integrované funkcie.

# Metódy integrovania I – Metóda per partes

Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ majú spojité derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda per partes.]

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$

$\Big[$Pre všetky $x \in I$ platí $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, t. j. derivácia súčinu.

$\Rightarrow u(x)v(x) + c = \int [u(x)v(x)]'\,\mathrm{d}x = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.\Big]$

- Funkcie $u(x)$, $v(x)$, $x \in I$ sú spojité, pretože sú spojité ich derivácie $u'(x)$, $v'(x)$, $x \in I$ (sú k nim na intervale $I$ primitívne).
- Všetky funkcie $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, $x \in I$ sú spojité a na intervale $I$ k nim existujú primitívne funkcie.
- Metódu môžeme tiež vyjadriť v tvaroch $u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$, resp. $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)'v(x)\,\mathrm{d}x\right]$
- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right] = \left[u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right]$

$$\Bigg\} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

- Na voľbe, t. j. označení $u = \ln x$, $v' = 1$ alebo $v = \ln x$, $u' = 1$ nezáleží, dôležité je správne použitie metódy.
- Pre lepšiu orientáciu (proti pomýleniu) je vhodné funkcie $u$, $v$, $u'$, $v'$ zapisovať prehľadne do tabuľky, napr. naľavo pôvodné funkcie a napravo derivované, resp. integrované funkcie.

- Zápis $\int \mathrm{d}x$ predstavuje integrál funkcie $f(x) = 1$, t. j. $\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x$.

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int x \cos x \, dx$$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x \cos x \, dx$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$,

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right]$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$,

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2 \cos x}{2} - \int \frac{-x^2 \sin x}{2} \, \mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$,

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2 \cos x}{2} - \int \frac{-x^2 \sin x}{2} \, dx = \frac{x^2 \cos x}{2} + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x \, dx = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right]$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

  $= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

  $= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

  $= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$

  $= \left[\begin{array}{c} 1+x^2 > 0 \text{ pre } x \in R \\ \left|1+x^2\right| = 1+x^2 \end{array}\right]$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

  $= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$

  $= \left[\begin{array}{c} 1+x^2 > 0 \text{ pre } x \in R \\ |1+x^2| = 1+x^2 \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$

# Metódy integrovania I – Príklady

## $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- Vždy treba zvážiť výber funkcií $u$, $v$, nie každá ich voľba vedie k úspešnému výpočtu integrálu.

  - $= \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = ☹.$

## $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

  $= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$

  $= \left[\begin{array}{c} 1+x^2 > 0 \text{ pre } x \in R \\ |1+x^2| = 1+x^2 \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$

  $= x\operatorname{arctg} x - \ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + c = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c\ \ x \in R,\ c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4 \cos 4x \end{array} \right]$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cdot \cos 4x \, \mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \sin 5x \cdot \cos 4x \, \mathrm{d}x$

  $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array}\right]$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \sin 5x \cdot \cos 4x \, \mathrm{d}x$$

  $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\left[-\frac{\cos 5x \cdot \cos 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x\right]$$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \sin 5x \cdot \cos 4x \, \mathrm{d}x$$

  $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\left[-\frac{\cos 5x \cdot \cos 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x\right]$$

  $$= \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25}\int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x.$$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \sin 5x \cdot \cos 4x \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\left[-\frac{\cos 5x \cdot \cos 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25}\int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x.$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom):

- $$I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I.$$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \sin 5x \cdot \cos 4x \, dx$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\left[-\frac{\cos 5x \cdot \cos 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx\right]$$

$$= \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25}\int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx.$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I.$

$\Rightarrow$ • $\frac{9}{25} I = I - \frac{16}{25} I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cdot \cos 4x}{25}.$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cdot \cos 4x \, dx$

  $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4 \sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[ -\frac{\cos 5x \cdot \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx \right]$

  $= \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx.$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom):

- $I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I.$

$\Rightarrow$ • $\frac{9}{25} I = I - \frac{16}{25} I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$

- $$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cdot \cos 4x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4 \sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[ -\frac{\cos 5x \cdot \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx \right]$$

$$= \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx.$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I.$

$\Rightarrow$ • $\frac{9}{25} I = I - \frac{16}{25} I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.
- Pri opakovanom použití metódy per partes si musíme dávať pozor, aby sa jednotlivé použitia neneutralizovali

$$I = \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cdot \cos 4x \, dx$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cdot \cos 4x \, dx$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4 \sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[ -\frac{\cos 5x \cdot \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx \right]$$

$$= \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx.$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I.$

$\Rightarrow$ • $\frac{9}{25} I = I - \frac{16}{25} I = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{25}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

- Metódu per partes môžeme použiť opakovane viackrát po sebe.
- Pri opakovanom použití metódy per partes si musíme dávať pozor, aby sa jednotlivé použitia neneutralizovali a aby sme sa nevrátili k pôvodne riešenému integrálu $I$.

$$I = \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cdot \cos 4x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx \right] = I. \; ☹$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array} \right]$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, \mathrm{d}x$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$

  $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array}\right]$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, \mathrm{d}x$$

  $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \sin 4x \cdot \cos 5x \, \mathrm{d}x \right].$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom):

- $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom):

- $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

$\Rightarrow$ • $-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom):

- $$I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$$

$\Rightarrow$ • $$-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$$

$\Rightarrow$ • $$I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom):

- $$I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$$

$\Rightarrow$ • $$-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$$

$\Rightarrow$ • $$I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

$\Rightarrow$ • $-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

Pre všetky $x, y \in R$ platí: • $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array}\right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

$\Rightarrow$ • $-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

Pre všetky $x, y \in R$ platí: • $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \Rightarrow$ • $\cos 5x \cdot \sin 4x = \frac{\sin(5x+4x) - \sin(5x-4x)}{2} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2}.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

$\Rightarrow$ • $-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

Pre všetky $x, y \in R$ platí: • $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \Rightarrow$ • $\cos 5x \cdot \sin 4x = \frac{\sin(5x+4x) - \sin(5x-4x)}{2} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2}.$

- $$= \int \frac{\sin 9x - \sin x}{2} \, dx$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

$\Rightarrow$ • $-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

Pre všetky $x, y \in R$ platí: • $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$ $\Rightarrow$ • $\cos 5x \cdot \sin 4x = \frac{\sin(5x+4x) - \sin(5x-4x)}{2} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2}.$

- $$= \int \frac{\sin 9x - \sin x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin 9x - \sin x] \, dx$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

$\Rightarrow$ • $-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

Pre všetky $x, y \in R$ platí: • $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$ $\Rightarrow$ • $\cos 5x \cdot \sin 4x = \frac{\sin(5x+4x) - \sin(5x-4x)}{2} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2}.$

- $$= \int \frac{\sin 9x - \sin x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin 9x - \sin x] \, dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos 9x}{9} - (-\cos x) \right] + c$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \sin 4x & u = -\frac{\cos 4x}{4} \\ v = \cos 5x & v' = -5 \sin 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 4x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5 \cos 5x \end{array} \right] = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5}{4} \left[ \frac{\sin 4x \cdot \sin 5x}{4} - \frac{5}{4} \overbrace{\int \sin 4x \cdot \cos 5x \, dx}^{I} \right].$$

Dostali sme rovnicu s neznámou $I$ (hľadaným integrálom): • $I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16} + \frac{25}{16} I.$

$\Rightarrow$ • $-\frac{9}{16} I = I - \frac{25}{16} I = -\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x}{4} - \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{16}.$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{4 \cos 4x \cdot \cos 5x}{9} + \frac{5 \sin 4x \cdot \sin 5x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c$$ (viď 02-Pr IVs) [Iné riešenie.]

Pre všetky $x, y \in R$ platí: • $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \Rightarrow$ • $\cos 5x \cdot \sin 4x = \frac{\sin(5x+4x) - \sin(5x-4x)}{2} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2}.$

- $$= \int \frac{\sin 9x - \sin x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin 9x - \sin x] \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos 9x}{9} - (-\cos x) \right] + c$$

$$= \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

## Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV)

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}$.
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$.

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}.$

$\Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$
$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18}$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$
$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$

$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$

$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$
$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]'$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$
$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9}$$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{9 \cos 5x \cdot \sin 4x}{9}$$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

**Všetky riešenia** predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú **správne.**

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{9 \cos 5x \cdot \sin 4x}{9} = \cos 5x \cdot \sin 4x, \; x \in R.$$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{9 \cos 5x \cdot \sin 4x}{9} = \cos 5x \cdot \sin 4x, \; x \in R.$$
  - $\left[\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18}\right]'$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$

- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{9 \cos 5x \cdot \sin 4x}{9} = \cos 5x \cdot \sin 4x, \; x \in R.$$
  - $$\left[\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18}\right]' = -\frac{\sin x}{2} - \frac{-9 \sin 9x}{18}$$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:
- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}$. ? $\Rightarrow$ $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}$.
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$. ? $\Rightarrow$ $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}$.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{9 \cos 5x \cdot \sin 4x}{9} = \cos 5x \cdot \sin 4x, \; x \in R.$$

Pre všetky $x, y \in R$ platí: $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$. ?

- $$\left[\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18}\right]' = -\frac{\sin x}{2} - \frac{-9 \sin 9x}{18} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2}$$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:
- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{9 \cos 5x \cdot \sin 4x}{9} = \cos 5x \cdot \sin 4x, \; x \in R.$$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 9x - \sin x = 2 \cos \frac{9x+x}{2} \cdot \sin \frac{9x-x}{2} = 2 \cos 5x \cdot \sin 4x.$

- $$\left[\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18}\right]' = -\frac{\sin x}{2} - \frac{-9 \sin 9x}{18} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2} = \frac{2 \cos 5x \cdot \sin 4x}{2}$$

# Metódy integrovania I – Príklad (skúška správnosti)

Všetky riešenia predchádzajúceho integrálu $I = \int \cos 5x \cdot \sin 4x \, dx$ (PrIV) sú správne.

- $I = \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 5x \cdot \sin 4x = -\frac{\cos(5x+4x) - \cos(5x-4x)}{2} = -\frac{\cos 9x - \cos x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}.$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \Rightarrow$
- $\cos 5x \cdot \cos 4x = \frac{\cos(5x+4x) + \cos(5x-4x)}{2} = \frac{\cos 9x + \cos x}{2}.$

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $$= \frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{5(\cos x - \cos 9x)}{9 \cdot 2} + \frac{4(\cos 9x + \cos x)}{9 \cdot 2}$$
$$= \frac{9 \cos x - \cos x}{18} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{18}.$$

[Oba výsledky (primitívne funkcie) sa líšia o konštantu 0 (sú rovnaké).]

- Správnosť riešenia môžeme overiť taktiež priamym derivovaním.
  - $$\left[\frac{5 \sin 5x \cdot \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cdot \cos 4x}{9}\right]' = \frac{5 \cdot 5 \cos 5x \cdot \sin 4x + 5 \sin 5x \cdot 4 \cos 4x}{9} + \frac{-4 \cdot 5 \sin 5x \cdot \cos 4x - 4 \cos 5x \cdot 4 \sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16) \cos 5x \cdot \sin 4x + (20-20) \sin 5x \cdot \cos 4x}{9} = \frac{9 \cos 5x \cdot \sin 4x}{9} = \cos 5x \cdot \sin 4x, \; x \in R.$$

Pre všetky $x, y \in R$ platí:

- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \Rightarrow$
- $\sin 9x - \sin x = 2 \cos \frac{9x+x}{2} \cdot \sin \frac{9x-x}{2} = 2 \cos 5x \cdot \sin 4x.$

- $$\left[\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18}\right]' = -\frac{\sin x}{2} - \frac{-9 \sin 9x}{18} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2} = \frac{2 \cos 5x \cdot \sin 4x}{2} = \sin 4x \cdot \cos 5x, \; x \in R.$$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{c|c} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right]$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{c|c} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{c|c} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{c|c} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$
- $I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{l|l} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$
- $I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

  - Integrál $I_n$, $n \in N$ sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu $I_{n-1}$.

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{l|l} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$
- $I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

---

- Integrál $I_n$, $n \in N$ sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu $I_{n-1}$.
- Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť $n$-krát za sebou.

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{l|l} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$
- $I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

  - Integrál $I_n$, $n \in N$ sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu $I_{n-1}$.
  - Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť $n$-krát za sebou.

  - $I_1 = x \, e^x - 1 \cdot I_0 = x \, e^x - e^x + c = (x - 1) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{l|l} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$
- $I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

  - Integrál $I_n$, $n \in N$ sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu $I_{n-1}$.
  - Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť $n$-krát za sebou.

  - $I_1 = x \, e^x - 1 \cdot I_0 = x \, e^x - e^x + c = (x - 1) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$
  - $I_2 = x^2 \, e^x - 2 \cdot I_1 = x^2 \, e^x - 2(x - 1) \, e^x + c = (x^2 - 2x + 2) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{c|c} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$
- $I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

---

- Integrál $I_n$, $n \in N$ sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu $I_{n-1}$.
- Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť $n$-krát za sebou.

---

- $I_1 = x \, e^x - 1 \cdot I_0 = x \, e^x - e^x + c = (x - 1) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I_2 = x^2 \, e^x - 2 \cdot I_1 = x^2 \, e^x - 2(x - 1) \, e^x + c = (x^2 - 2x + 2) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I_3 = x^3 \, e^x - 3 \cdot I_2 = x^3 \, e^x - 3(x^2 - 2x + 2) \, e^x + c$
$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^n\,\mathrm{e}^x - n\cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[\begin{array}{c|c} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n\,\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^n\,\mathrm{e}^x - n\cdot I_{n-1},\ x \in R,\ n \in N.$
- $I_0 = \int x^0\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

---

- Integrál $I_n$, $n \in N$ sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu $I_{n-1}$.
- Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť $n$-krát za sebou.

---

- $I_1 = x\,\mathrm{e}^x - 1\cdot I_0 = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = (x-1)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R.$
- $I_2 = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\cdot I_1 = x^2\,\mathrm{e}^x - 2(x-1)\,\mathrm{e}^x + c = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R.$
- $I_3 = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\cdot I_2 = x^3\,\mathrm{e}^x - 3(x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + c$
  $= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R.$
- $I_4 = x^4\,\mathrm{e}^x - 4\cdot I_3 = x^4\,\mathrm{e}^x - 4(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x + c$
  $= (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklad

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}$ pre $n \in N$ a $I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$ pre $n = 0$. [Viď 03-MNK, 03-PrI.]

- $I_n = \left[ \begin{array}{c|c} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R, \; n \in N.$
- $I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

---

- Integrál $I_n$, $n \in N$ sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu $I_{n-1}$.
- Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť $n$-krát za sebou.

---

- $I_1 = x \, e^x - 1 \cdot I_0 = x \, e^x - e^x + c = (x - 1) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I_2 = x^2 \, e^x - 2 \cdot I_1 = x^2 \, e^x - 2(x - 1) \, e^x + c = (x^2 - 2x + 2) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I_3 = x^3 \, e^x - 3 \cdot I_2 = x^3 \, e^x - 3(x^2 - 2x + 2) \, e^x + c$
  $= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I_4 = x^4 \, e^x - 4 \cdot I_3 = x^4 \, e^x - 4(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \, e^x + c$
  $= (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$
- $I_5 = x^5 \, e^x - 5 \cdot I_4 = x^5 \, e^x - 5(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \, e^x + c$
  $= (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania I – Príklady

$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ [Viď 03-Pr V.]

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

[Viď 03-PrV.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2, \; x \in (-1;0) \cup (0;1), \; c_1, c_2 \in R.$$

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

  $= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$

  $= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov:

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov:

- $\int p(x)\cdot \ln q(x)\,\mathrm{d}x,$
- $\int p(x)\cdot \operatorname{arctg} q(x)\,\mathrm{d}x,$

kde $p(x),\ q(x)$ sú reálne polynómy.

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov:

- $\int p(x)\cdot \ln q(x)\,\mathrm{d}x,$
- $\int p(x)\cdot \operatorname{arctg} q(x)\,\mathrm{d}x,$

kde $p(x),\ q(x)$ sú reálne polynómy.

- Derivovaním polynómu dostaneme polynóm (ale stupňa o jeden nižšieho) a jeho integrovaním dostaneme tiež polynóm (ale stupňa o jeden vyššieho ).

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov:

- $\int p(x)\cdot \ln q(x)\,\mathrm{d}x,$
- $\int p(x)\cdot \operatorname{arctg} q(x)\,\mathrm{d}x,$

kde $p(x)$, $q(x)$ sú reálne polynómy.

- Derivovaním polynómu dostaneme polynóm (ale stupňa o jeden nižšieho) a jeho integrovaním dostaneme tiež polynóm (ale stupňa o jeden vyššieho ).
- Pre derivácie funkcií $\ln q(x)$, $\operatorname{arctg} q(x)$ platí $\left[\ln q(x)\right]' = \frac{q'(x)}{q(x)}$, $\left[\operatorname{arctg} q(x)\right]' = \frac{q'(x)}{1+q^2(x)}$.

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov:

- $\int p(x)\cdot \ln q(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\int p(x)\cdot \operatorname{arctg} q(x)\,\mathrm{d}x$,

kde $p(x)$, $q(x)$ sú reálne polynómy.

- $\int p(x)\cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$,
- $\int p(x)\cdot \cos \alpha x\,\mathrm{d}x$,
- $\int p(x)\cdot \sin \alpha x\,\mathrm{d}x$,

kde $p(x)$ je reálny polynóm a $\alpha \in R - \{0\}$.

- Derivovaním polynómu dostaneme polynóm (ale stupňa o jeden nižšieho) a jeho integrovaním dostaneme tiež polynóm (ale stupňa o jeden vyššieho ).
- Pre derivácie funkcií $\ln q(x)$, $\operatorname{arctg} q(x)$ platí $\left[\ln q(x)\right]' = \frac{q'(x)}{q(x)}$, $\left[\operatorname{arctg} q(x)\right]' = \frac{q'(x)}{1+q^2(x)}$.

# Metódy integrovania I – Príklady

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

[Viď 03-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2, \; x \in (-1;0) \cup (0;1), \; c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov:

- $\int p(x)\cdot \ln q(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\int p(x)\cdot \operatorname{arctg} q(x)\,\mathrm{d}x$,

kde $p(x)$, $q(x)$ sú reálne polynómy.

- $\int p(x)\cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$,
- $\int p(x)\cdot \cos \alpha x\,\mathrm{d}x$,
- $\int p(x)\cdot \sin \alpha x\,\mathrm{d}x$,

kde $p(x)$ je reálny polynóm a $\alpha \in R - \{0\}$.

- Derivovaním polynómu dostaneme polynóm (ale stupňa o jeden nižšieho) a jeho integrovaním dostaneme tiež polynóm (ale stupňa o jeden vyššieho ).
- Pre derivácie funkcií $\ln q(x)$, $\operatorname{arctg} q(x)$ platí $\left[\ln q(x)\right]' = \frac{q'(x)}{q(x)}$, $\left[\operatorname{arctg} q(x)\right]' = \frac{q'(x)}{1+q^2(x)}$.
- Pre derivácie funkcií $\mathrm{e}^{\alpha x}$, $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$ platí $\left[\mathrm{e}^{\alpha x}\right]' = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, $\left[\cos \alpha x\right]' = -\alpha \sin \alpha x$, $\left[\sin \alpha x\right]' = \alpha \cos \alpha x$ a pre ich neurčité integrály platí $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x} + c$, $\int \cos \alpha x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha x + c$, $\int \sin \alpha x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\cos \alpha x + c$.

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$. [Metóda neurčitých koeficientov.]

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$,

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x =$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}.$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
- Položíme $f(x) = F'(x)$

$$\bullet \int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow \bullet\ f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$.
  - $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow$
  - $\underbrace{f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}.$ $\Rightarrow$
- $\displaystyle\underbrace{f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow \underbrace{f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$$

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$ pre $n \in N$. [Viď 02-Pr V.]

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]
- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow$ • $\underbrace{f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$

**$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$** pre $n \in N$. [Viď 02-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]

$$\bullet \int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow \bullet \underbrace{f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$$

## $I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ pre $n \in N$. [Viď 02-Pr V.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^{n-1} & u' = (n-1)x^{n-2} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}\right]$$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]

$$\bullet \int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow \bullet \underbrace{f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$$

## $I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ pre $n \in N$. [Viď 02-Pr V.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^{n-1} & u' = (n-1)x^{n-2} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}\right]$$

$$= x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)\left[x^{n-2}\mathrm{e}^x - (n-2)I_{n-3}\right]\right]$$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow$
- $\underbrace{f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$

**$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$** pre $n \in N$. [Viď 02-Pr V.]

- $= \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^{n-1} & u' = (n-1)x^{n-2} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}\right]$$
$$= x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)\left[x^{n-2}\mathrm{e}^x - (n-2)I_{n-3}\right]\right] = \cdots.$$

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]

$$\bullet \int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow \bullet \underbrace{f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$$

**$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$** pre $n \in N$. [Viď 02-Pr V.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^{n-1} & u' = (n-1)x^{n-2} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}\right]$$

$$= x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)\left[x^{n-2}\mathrm{e}^x - (n-2)I_{n-3}\right]\right] = \cdots.$$

[Stupeň polynómu sa znižuje, $\mathrm{e}^x$ ostáva,

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \Rightarrow$ • $\underbrace{f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}.$

## $I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ pre $n \in N$. [Viď 02-Pr V.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$$
  $$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^{n-1} & u' = (n-1)x^{n-2} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}\right]$$
  $$= x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)\left[x^{n-2}\mathrm{e}^x - (n-2)I_{n-3}\right]\right] = \cdots.$$
  [Stupeň polynómu sa znižuje, $\mathrm{e}^x$ ostáva, t. j. treba vypočítať koeficienty pri členoch $x^n\mathrm{e}^x$, $x^{n-1}\mathrm{e}^x$, $x^{n-2}\mathrm{e}^x$, $\ldots$, $\mathrm{e}^x$.]

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]
  - $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}$. $\Rightarrow$
  - $\underbrace{f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}$.

**$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + c$ pre $n \in N$.** [Viď 02-Pr V.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$$
  $$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^{n-1} & u' = (n-1)x^{n-2} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}\right]$$
  $$= x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)\left[x^{n-2}\mathrm{e}^x - (n-2)I_{n-3}\right]\right] = \cdots.$$
  [Stupeň polynómu sa znižuje, $\mathrm{e}^x$ ostáva, t. j. treba vypočítať koeficienty pri členoch $x^n\mathrm{e}^x$, $x^{n-1}\mathrm{e}^x$, $x^{n-2}\mathrm{e}^x$, $\ldots$, $\mathrm{e}^x$.]
- Odhad primitívnej funkcie má tvar $I_n = \mathrm{e}^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + c$,

# Metódy integrovania II – Metóda neurčitých koeficientov

- Neurčitý integrál dokážeme v niektorých prípadoch odhadnúť a vypočítať bez integrovania.

**Integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$.** [Metóda neurčitých koeficientov.]

- Primitívnu funkciu $F(x)$, $x \in I$ odhadneme pomocou neurčitého výrazu s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$, t. j. výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
  [Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie $F$ naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.]
- Položíme $f(x) = F'(x)$ a vypočítame $a_1, a_2, \ldots, a_k$. [Neintegrujeme, ale derivujeme a riešime systém algebraických rovníc.]
  - $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) + c}_{\text{odhad integrálu}}$. $\Rightarrow$
  - $\underbrace{f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \ldots, a_k}$.

**$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + c$ pre $n \in N$.** [Viď 02-Pr V.]

- $$= \left[\begin{array}{c|c} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}$$
  $$= \left[\begin{array}{c|c} u = x^{n-1} & u' = (n-1)x^{n-2} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}\right]$$
  $$= x^n \mathrm{e}^x - n\left[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)\left[x^{n-2}\mathrm{e}^x - (n-2)I_{n-3}\right]\right] = \cdots.$$
  [Stupeň polynómu sa znižuje, $\mathrm{e}^x$ ostáva, t. j. treba vypočítať koeficienty pri členoch $x^n\mathrm{e}^x$, $x^{n-1}\mathrm{e}^x$, $x^{n-2}\mathrm{e}^x$, $\ldots$, $\mathrm{e}^x$.]
- Odhad primitívnej funkcie má tvar $I_n = \mathrm{e}^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + c$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sú hľadané neznáme koeficienty.

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$

[Odhad primitívnej funkcie.]

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3\,\mathrm{e}^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$

- $[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0]\, e^x = [x^3 + (3 + \alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0]\, e^x.$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3 + \alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$.
- $0 = 2\alpha + \beta$ pre $x^1$.

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$.
- $0 = 2\alpha + \beta$ pre $x^1$.
- $0 = \beta + \gamma$ pre $x^0$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -3.$
- $0 = 2\alpha + \beta$ pre $x^1$.
- $0 = \beta + \gamma$ pre $x^0$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -3.$
- $0 = 2\alpha + \beta$ pre $x^1$. $\Rightarrow$ • $\beta = -2\alpha = -2 \cdot (-3) = 6.$
- $0 = \beta + \gamma$ pre $x^0$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -3.$
- $0 = 2\alpha + \beta$ pre $x^1$. $\Rightarrow$ • $\beta = -2\alpha = -2 \cdot (-3) = 6.$
- $0 = \beta + \gamma$ pre $x^0$. $\Rightarrow$ • $\gamma = -\beta = -6.$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

- $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0\right] e^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^0\right] e^x.$

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -3.$
- $0 = 2\alpha + \beta$ pre $x^1$. $\Rightarrow$ • $\beta = -2\alpha = -2 \cdot (-3) = 6.$
- $0 = \beta + \gamma$ pre $x^0$. $\Rightarrow$ • $\gamma = -\beta = -6.$

$\Rightarrow$ • $F(x) = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\, e^x,\ x \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x + c$$

- $I_3 = F(x) + c = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$
  [Odhad primitívnej funkcie.]

---

- $x^3\,\mathrm{e}^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x = F'(x).$ [Derivácia odhadu.]

$\Downarrow$ $\Downarrow$

- $\left[x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\cdot x^0\right]\mathrm{e}^x = \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)x^0\right]\mathrm{e}^x.$

---

Dostali sme tri lineárne rovnice s tromi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma$:

- $0 = 3 + \alpha$ pre $x^2$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -3.$
- $0 = 2\alpha + \beta$ pre $x^1$. $\Rightarrow$ • $\beta = -2\alpha = -2\cdot(-3) = 6.$
- $0 = \beta + \gamma$ pre $x^0$. $\Rightarrow$ • $\gamma = -\beta = -6.$

---

$\Rightarrow$ • $F(x) = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x,\ x \in R.$

$\Rightarrow$ • $I_3 = \int x^3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \sin x + c, \; x \in R, \; c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta,\ A, B, C, D$:

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.
- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.
- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.
- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.
- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.
- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -1$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.
- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -1$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$. $\Rightarrow$ • $B = -3\alpha = 3$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -1$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$. $\Rightarrow$ • $\gamma = 2B = 6$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$. $\Rightarrow$ • $B = -3\alpha = 3$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$. $\Rightarrow$ • $\alpha = -1$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$. $\Rightarrow$ • $\gamma = 2B = 6$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$. $\Rightarrow$ • $B = -3\alpha = 3$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$. $\Rightarrow$ • $D = -\gamma = -6$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.
- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$. $\Rightarrow$ • $A = 0$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$. $\Rightarrow$ $\beta = 3A = 0.$
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$. $\Rightarrow$ $A = 0.$
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$. $\Rightarrow$ • $\beta = 3A = 0$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$. $\Rightarrow$ • $A = 0$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$. $\Rightarrow$ • $C = -2\beta = 0$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$. $\Rightarrow$ • $\beta = 3A = 0$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$. $\Rightarrow$ • $\delta = C = 0$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$. $\Rightarrow$ • $A = 0$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$. $\Rightarrow$ • $C = -2\beta = 0$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$. $\Rightarrow$ $\alpha = -1$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$. $\Rightarrow$ $\beta = 3A = 0$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$. $\Rightarrow$ $\gamma = 2B = 6$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$. $\Rightarrow$ $\delta = C = 0$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$. $\Rightarrow$ $A = 0$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$. $\Rightarrow$ $B = -3\alpha = 3$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$. $\Rightarrow$ $C = -2\beta = 0$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$. $\Rightarrow$ $D = -\gamma = -6$.

# Metódy integrovania II – Príklad

## $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$. $\Rightarrow$ $\alpha = -1$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$. $\Rightarrow$ $\beta = 3A = 0$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$. $\Rightarrow$ $\gamma = 2B = 6$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$. $\Rightarrow$ $\delta = C = 0$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$. $\Rightarrow$ $A = 0$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$. $\Rightarrow$ $B = -3\alpha = 3$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$. $\Rightarrow$ $C = -2\beta = 0$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$. $\Rightarrow$ $D = -\gamma = -6$.

$\Rightarrow$ • $F(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x$

$= (-x^3 + 0x^2 + 6x + 0)\cos x + (0x^3 + 3x^2 + 0x - 6)\sin x = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x,\ x \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x + c$$

- $I_3 = F(x) + c = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R,$

  kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D \in R.$

  [Odhad primitívnej funkcie, musí tu byť $\sin x$ aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

- $x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x$ [Derivácia odhadu.]

  $+ (3Ax^2 + 2Bx + C)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x.$

- $[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\sin x + [0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0]\cos x$

  $= [-\alpha x^3 + (3A - \beta)x^2 + (2B - \gamma)x + (C - \delta)]\sin x + [Ax^3 + (3\alpha + B)x^2 + (2\beta + C)x + (\gamma + D)]\cos x.$

Dostali sme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$:

- $1 = -\alpha$ pre $x^3 \sin x$. $\Rightarrow$ $\alpha = -1$.
- $0 = 3A - \beta$ pre $x^2 \sin x$. $\Rightarrow$ $\beta = 3A = 0$.
- $0 = 2B - \gamma$ pre $x \sin x$. $\Rightarrow$ $\gamma = 2B = 6$.
- $0 = C - \delta$ pre $x^0 \sin x$. $\Rightarrow$ $\delta = C = 0$.

- $0 = A$ pre $x^3 \cos x$. $\Rightarrow$ $A = 0$.
- $0 = 3\alpha + B$ pre $x^2 \cos x$. $\Rightarrow$ $B = -3\alpha = 3$.
- $0 = 2\beta + C$ pre $x \cos x$. $\Rightarrow$ $C = -2\beta = 0$.
- $0 = \gamma + D$ pre $x^0 \cos x$. $\Rightarrow$ $D = -\gamma = -6$.

$\Rightarrow$ $F(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin x$

$= (-x^3 + 0x^2 + 6x + 0)\cos x + (0x^3 + 3x^2 + 0x - 6)\sin x = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x,\ x \in R.$

$\Rightarrow$ $I_3 = \int x^3 \sin x \, dx = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t \in J$, $t = \varphi(x)$, $x \in I$ platí $F'(t) = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.]

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t \in J$, $t = \varphi(x)$, $x \in I$ platí $F'(t) = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.]

1. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov tvaru • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie $\varphi(x)$, $x \in I$.]

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t \in J$, $t = \varphi(x)$, $x \in I$ platí $F'(t) = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.]

1. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov tvaru • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie $\varphi(x)$, $x \in I$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $t = \varphi(x),\ x \in I,\ t \in \varphi(I) \subset J$,

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t \in J$, $t = \varphi(x)$, $x \in I$ platí $F'(t) = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.]

1. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov tvaru • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie $\varphi(x)$, $x \in I$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $t = \varphi(x),\ x \in I,\ t \in \varphi(I) \subset J$,

t. j. $f(\varphi(x)) = f(t),\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t \in J$, $t = \varphi(x)$, $x \in I$ platí $F'(t) = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.]

1. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov tvaru • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie $\varphi(x)$, $x \in I$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $t = \varphi(x),\ x \in I,\ t \in \varphi(I) \subset J$,

  t. j. $f(\varphi(x)) = f(t),\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$

- Počítame integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(t)$ na $\varphi(I)$.

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t \in J$, $t = \varphi(x)$, $x \in I$ platí $F'(t) = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.]

1. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov tvaru • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie $\varphi(x)$, $x \in I$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $t = \varphi(x),\ x \in I,\ t \in \varphi(I) \subset J$,

  t. j. $f(\varphi(x)) = f(t),\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$

- Počítame integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(t)$ na $\varphi(I)$.

- Pre riešenie $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi(x))$ na $I$, použijeme rovnakú substitúciu $t = \varphi(x)$.

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t\in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t\in J$ na intervale $J$,
funkcia $t=\varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I)\subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x\in I$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x),\ x\in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(t)\,\mathrm{d}t=F(t)+c=F(\varphi(x))+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t\in J$, $t=\varphi(x)$, $x\in I$ platí $F'(t)=\left[F(\varphi(x))\right]'=F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.]

1. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov tvaru • $$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,\ x\in I.$$

[Integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie $\varphi(x)$, $x\in I$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $t=\varphi(x),\ x\in I,\ t\in\varphi(I)\subset J$,

  t. j. $f(\varphi(x))=f(t),\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}\varphi(x)=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$

- Počítame integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(t)$ na $\varphi(I)$.

- Pre riešenie $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi(x))$ na $I$, použijeme rovnakú substitúciu $t=\varphi(x)$.

- V praxi overujeme splnenie predpokladov väčšinou až na konci riešenia po úspešnom integrovaní.

# Metódy integrovania II – 1. metóda substitúcie (jednostranná)

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je **primitívna** k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$,
funkcia $t = \varphi(x)$ má deriváciu $\varphi'(x)$ na intervale $I$, obor hodnôt $\varphi(I) \subset J$. [1. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi(x)),\ x \in I$ je **primitívna** k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej funkcie: Pre všetky $t \in J$, $t = \varphi(x)$, $x \in I$ platí $F'(t) = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.]

1. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov tvaru • $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie $\varphi(x)$, $x \in I$.]

- **Substitúcia** (nahradenie premennej) $t = \varphi(x),\ x \in I,\ t \in \varphi(I) \subset J$,

  t. j. $f(\varphi(x)) = f(t),\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$

- Počítame integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme **primitívnu** funkciu $F(t)$ k funkcii $f(t)$ na $\varphi(I)$.

- Pre riešenie $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi(x))$ na $I$, použijeme rovnakú substitúciu $t = \varphi(x)$.

- V praxi overujeme splnenie predpokladov väčšinou až na konci riešenia po úspešnom integrovaní.
- Existenciu primitívnej funkcie $F$ nám zaručí napríklad spojitosť integrovanej funkcie $f$.

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$$

- $= \left[ \text{Subst.} \quad t = \sin x \left| \begin{array}{l} x \in R \\ t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right. \right]$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$$

- $= \left[ \text{Subst.} \quad t = \sin x \left| \begin{array}{l} x \in R \\ t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right. \right] = \int t^3$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{ll|l} \text{Subst.} & t = \sin x & x \in R \\ & \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8 + 1}$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1}$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right]$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1}$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1}$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c,$
  $x \in R, \; c \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c,$
  $x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, \mathrm{d}t$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c,$
  $x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = f(x) & f(x) \neq 0 \\ \mathrm{d}t = f'(x) \, \mathrm{d}x & t \neq 0 \end{array} \right]$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, \mathrm{d}t$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad x = f(t) & f(t) \neq 0 \\ \mathrm{d}x = f'(t) \, \mathrm{d}t & x \neq 0 \end{array} \right]$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c,$
  $x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = f(x) & f(x) \neq 0 \\ \mathrm{d}t = f'(x) \, \mathrm{d}x & t \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, \mathrm{d}t$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad x = f(t) & f(t) \neq 0 \\ \mathrm{d}x = f'(t) \, \mathrm{d}t & x \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c,$
  $x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = f(x) & f(x) \neq 0 \\ \mathrm{d}t = f'(x) \, \mathrm{d}x & t \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$
  $= \ln |t| + c$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, \mathrm{d}t$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad x = f(t) & f(t) \neq 0 \\ \mathrm{d}x = f'(t) \, \mathrm{d}t & x \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
  $= \ln |x| + c$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in R \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

- $= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c,$
  $x \in R, \; c \in R.$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln |f(x)| + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = f(x) & f(x) \neq 0 \\ \mathrm{d}t = f'(x) \, \mathrm{d}x & t \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$
  $= \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c,$
  $x \in D(f), \; f(x) \neq 0, \; c \in R.$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, \mathrm{d}t = \ln |f(t)| + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad x = f(t) & f(t) \neq 0 \\ \mathrm{d}x = f'(t) \, \mathrm{d}t & x \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
  $= \ln |x| + c = \ln |f(t)| + c,$
  $t \in D(f), \; f(t) \neq 0, \; c \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R,\ a \neq 0$.

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$\Rightarrow$ • $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$\Rightarrow$ • $$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right]$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$,

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t),\ t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R,\ a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c$$

[Ak $x \in I = (\alpha; \beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí:

$$\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí:

$$\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha+b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta+b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí:

$$\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b;\beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí:

$$\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in (-\beta;-\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$

---

$$\bullet \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$

---

$$\bullet \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) & \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) & \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$

---

$$\bullet \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c$$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí:

$$\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b;\beta+b) & \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí:

$$\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in (-\beta;-\alpha) & \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\bullet \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R-\{1\} & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R-\{0\} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R-\{1\},\ c \in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) & \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) & \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R - \{1\},\ c \in R.$
- $\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x$
- $\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R - \{1\},\ c \in R.$
- $\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in R \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right]$
- $\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R - \{1\},\ c \in R.$
- $\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in R \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right] = -\int \cos t\,\mathrm{d}t$
- $\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí:

$$\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b;\beta+b) & \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí:

$$\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in (-\beta;-\alpha) & \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

$$\bullet \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R-\{1\} & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R-\{0\} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R-\{1\},\ c \in R.$$

$$\bullet \int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = -x & x \in R & \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in R & \end{array}\right] = -\int \cos t\,\mathrm{d}t = -\sin t + c$$

$$\bullet \int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí:

$$\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí:

$$\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

$$\bullet \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R - \{1\},\ c \in R.$$

$$\bullet \int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in R \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right] = -\int \cos t\,\mathrm{d}t = -\sin t + c$$

$$= -\sin(-x) + c$$

$$\bullet \int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí: $\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) & \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí: $\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) & \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) & \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$

---

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} & \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R - \{1\},\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = -x & x \in R & \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in R & \end{array}\right] = -\int \cos t\,\mathrm{d}t = -\sin t + c$
  $\displaystyle = -\sin(-x) + c = \sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklad

Funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(t)$, $t \in J$ na intervale $J$, čísla $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \bullet \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = ax+b & x=\alpha & t = a\alpha + b \\ \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x & x=\beta & t = a\beta + b \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{a}$$

$$= \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ x \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

[Ak $x \in I = (\alpha;\beta)$, kde $\alpha, \beta \in R$, potom interval $J$ má hranice $a\alpha + b$, $a\beta + b$, t. j. $J = (a\alpha + b; a\beta + b)$ pre $a > 0$, resp. $J = (a\beta + b; a\alpha + b)$ pre $a < 0$.]

Špeciálne pre $a = 1$, $b \in R$ platí:

$$\bullet \int f(x+b)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+b & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (\alpha+b; \beta+b) \end{array}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Špeciálne pre $a = -1$, $b = 0$ platí:

$$\bullet \int f(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in (\alpha;\beta) \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in (-\beta; -\alpha) \end{array}\right] = -\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

$$\bullet \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+1| + c,\ x \in R - \{1\},\ c \in R.$$

$$\bullet \int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x \in R \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right] = -\int \cos t\,\mathrm{d}t = -\sin t + c$$

$$= -\sin(-x) + c = \sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

$$\bullet \int \cos(-x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

---

- Pri integrovaní funkcií môžeme niekedy využiť ich špeciálne vlastnosti a najprv ich zjednodušiť. V poslednom príklade sme využili párnosť funkcie kosínus.

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),\ t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),\ t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),\ t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$ [Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),\ t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$ [Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t),\ t \in J,\ x \in \varphi(J) \subset I,$

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t),\ t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),\ t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x)),\ x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x),\ x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$ [Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t),\ t \in J,\ x \in \varphi(J) \subset I,$

t. j. $f(x) = f(\varphi(t)),\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$ [Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $x \in \varphi(J) \subset I$,
  t. j. $f(x) = f(\varphi(t))$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Počítame integrál $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na $J$.

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$ [Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $x \in \varphi(J) \subset I$,
  t. j. $f(x) = f(\varphi(t))$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Počítame integrál $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na $J$.
- Pre riešenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi^{-1}(x))$ na $I$, použijeme inverznú substitúciu $t = \varphi^{-1}(x)$.

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$ [Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $x \in \varphi(J) \subset I$,
  t. j. $f(x) = f(\varphi(t))$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Počítame integrál $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na $J$.
- Pre riešenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi^{-1}(x))$ na $I$, použijeme inverznú substitúciu $t = \varphi^{-1}(x)$.

- V praxi overujeme splnenie predpokladov väčšinou až na konci riešenia po úspešnom integrovaní.

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$
- Funkcia $F(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

  a platí
- $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov
- $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $x \in \varphi(J) \subset I$,

  t. j. $f(x) = f(\varphi(t))$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Počítame integrál $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na $J$.
- Pre riešenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi^{-1}(x))$ na $I$, použijeme inverznú substitúciu $t = \varphi^{-1}(x)$.

- V praxi overujeme splnenie predpokladov väčšinou až na konci riešenia po úspešnom integrovaní.
- Existenciu primitívnej funkcie $F$ nám zaručí napríklad spojitosť integrovanej funkcie $f$.

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$
- Funkcia $F(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

  a platí
- $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov
- $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

[Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $x \in \varphi(J) \subset I$,

  t. j. $f(x) = f(\varphi(t))$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Počítame integrál $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na $J$.
- Pre riešenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi^{-1}(x))$ na $I$, použijeme inverznú substitúciu $t = \varphi^{-1}(x)$.

- V praxi overujeme splnenie predpokladov väčšinou až na konci riešenia po úspešnom integrovaní.
- Existenciu primitívnej funkcie $F$ nám zaručí napríklad spojitosť integrovanej funkcie $f$.
- Funkcia $x = \varphi(t)$ je na intervale $J$ spojitá a rýdzomonotónna (rastúca alebo klesajúca), pretože má na $J$ nenulovú deriváciu $\varphi(t)' \neq 0$.

# Metódy integrovania II – 2. metóda substitúcie (obojstranná)

$I$ a $J$ sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale $J$, funkcia $F(t)$, $t \in J$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in J$ na intervale $J$. [2. metóda substitúcie.]

$\Rightarrow$ • Funkcia $F(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale $I$

a platí • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

[Derivácia zloženej a inverznej funkcie: Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí
$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$]

2. metóda substitúcie sa používa na výpočet integrálov • $$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$ [Premennú $x$ nahradíme funkciou $\varphi(t)$.]

- Substitúcia (nahradenie premennej) $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $x \in \varphi(J) \subset I$,
  t. j. $f(x) = f(\varphi(t))$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Počítame integrál $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. hľadáme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na $J$.
- Pre riešenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi^{-1}(x))$ na $I$, použijeme inverznú substitúciu $t = \varphi^{-1}(x)$.

- V praxi overujeme splnenie predpokladov väčšinou až na konci riešenia po úspešnom integrovaní.
- Existenciu primitívnej funkcie $F$ nám zaručí napríklad spojitosť integrovanej funkcie $f$.
- Funkcia $x = \varphi(t)$ je na intervale $J$ spojitá a rýdzomonotónna (rastúca alebo klesajúca), pretože má na $J$ nenulovú deriváciu $\varphi(t)' \neq 0$.
  To znamená, že funkcia $x = \varphi(t)$ je na $J$ prostá a existuje k nej na $I$ inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)$.

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle \\ t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$

- $= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle \\ t = \arccos x & t \in \langle 0; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi\rangle \end{array} \right]$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right]$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi) \\ t = \arccos x & t \in \langle 0; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right]$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\cos t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi) \\ t=\arccos x & t\in\langle 0;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
  $$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\cos t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi) \\ t=\arccos x & t\in\langle 0;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
  $$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \left[\frac{1}{\sin^2 t}-1\right]\mathrm{d}t$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\cos t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi) \\ t=\arccos x & t\in\langle 0;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int \left[\frac{1}{\cos^2 t}-1\right]\mathrm{d}t$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;0) \cup (0;1\rangle & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};0) \cup (0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2};0) \cup (0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
  $$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \left[\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1;0) \cup (0;1\rangle & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2};\pi) \\ t = \arccos x & t \in \langle 0;-\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t \cdot \sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
  $$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int \left[\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -(\operatorname{tg} t - t) + c_2$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\tfrac{\pi}{2};0)\cup(0;\tfrac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\tfrac{\pi}{2};0)\cup(0;\tfrac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int\left[\frac{1}{\sin^2 t}-1\right]\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c_1 = -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\cos t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\tfrac{\pi}{2})\cup(\tfrac{\pi}{2};\pi) \\ t=\arccos x & t\in\langle 0;-\tfrac{\pi}{2})\cup(\tfrac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int\left[\frac{1}{\cos^2 t}-1\right]\mathrm{d}t = -(\operatorname{tg} t - t) + c_2 = -\frac{\sin t}{\cos t} + t + c_2$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;0) \cup (0;1\rangle & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};0) \cup (0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2};0) \cup (0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \left[\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c_1 = -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c_1$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1;0) \cup (0;1\rangle & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2};\pi) \\ t = \arccos x & t \in \langle 0;-\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t \cdot \sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int \left[\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -(\operatorname{tg} t - t) + c_2 = -\frac{\sin t}{\cos t} + t + c_2$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_2 \in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \left[\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c_1 = -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c_1$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi) \\ t = \arccos x & t \in \langle 0;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t \cdot \sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int \left[\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -(\operatorname{tg} t - t) + c_2 = -\frac{\sin t}{\cos t} + t + c_2$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_2 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \left[\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c_1 = -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c_1$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi) \\ t = \arccos x & t \in \langle 0;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t \cdot \sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int \left[\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -(\operatorname{tg} t - t) + c_2 = -\frac{\sin t}{\cos t} + t + c_2$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_2 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \left[\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c_1 = -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c_1$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi) \\ t = \arccos x & t \in \langle 0;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t \cdot \sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int \left[\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -(\operatorname{tg} t - t) + c_2 = -\frac{\sin t}{\cos t} + t + c_2$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_2 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;1) - \{0\},\ c_1, c_2 \in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in \langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \left[\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c_1 = -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c_1$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in \langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in \langle 0;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = -\int \frac{\sin t \cdot \sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = -\int \left[\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right]\mathrm{d}t = -(\operatorname{tg} t - t) + c_2 = -\frac{\sin t}{\cos t} + t + c_2$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in \langle -1;1\rangle - \{0\},\ c_2 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;1) - \{0\},\ c_1, c_2 \in R.$$

- Riešením pomocou metódy per partes dostaneme rovnaký výsledok, ale iný obor integrovania.

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t \, \mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right]$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ \quad t = \arcsin x & t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t \,\mathrm{d}t}{\cos t}$$

- $$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t \,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t \,\mathrm{d}t}{\sin t}$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad t = \arcsin x & t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$

- $$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \qquad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad t = \arcsin x & t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \qquad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$
$$= -t + c_2$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$
$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$
$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

- Obe riešenia príkladu sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1 \rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$
$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

- Obe riešenia príkladu sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1 \rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$
$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

- Obe riešenia príkladu sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in R \end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \ln x & u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{x} & v' = \ln x \end{array}\right]$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$
$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

- Obe riešenia príkladu sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,\mathrm{d}t$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \ln x & u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{x} & v' = \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ \quad t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$
$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

- Obe riešenia príkladu sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \ln x & u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{x} & v' = \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x - I$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t & \end{array}\right] = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t$

  $= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t, & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t & \end{array}\right] = \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t$

  $= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$

- Obe riešenia príkladu sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

- $= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

- $= \left[\begin{array}{r|l} u' = \ln x & u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{x} & v' = \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x - I. \Rightarrow$ • $I = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

  [Rovnica s neznámou $I$.]

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x$

---

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right]$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x$

---

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2}, \; dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array} \right]$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2},\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2} & t \in R \end{array}\right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{2} \, \mathrm{d}t$

---

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array}\right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x$

  $= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2}, \, dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{2} \, dt$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c$$

---

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$
$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$$
[Rovnica s neznámou $I$.]

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2},\ dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array}\right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{2} \, dt$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array}\right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$$

[Rovnica s neznámou $I$.]

$\Rightarrow$ • $I = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} + x\right) + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \ x \in R, \ c \in R.$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2},\ dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array}\right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{2} \, dt$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

- $= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array}\right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$$

[Rovnica s neznámou $I$.]

$\Rightarrow$ • $I = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} + x\right) + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \ x \in R, \ c \in R.$

$$\int \mathrm{tg}^3 x \, dx$$

# Metódy integrovania II – Príklady

## $I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2}, \; dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{2} \, dt$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$$

[Rovnica s neznámou $I$.]

$\Rightarrow$ • $I = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2x}{2} + x \right) + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

## $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx = (t^2 + 1) \, dx, \qquad t \in R \\ x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \qquad x \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \; k \in Z \end{array} \right]$

# Metódy integrovania II – Príklady

## $I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2}, \; dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{2} \, dt$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$$

[Rovnica s neznámou $I$.]

$\Rightarrow$ • $I = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2x}{2} + x \right) + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

## $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx = (t^2 + 1) \, dx, \quad t \in R \\ x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \; k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{t^3 \, dt}{t^2+1} = \int \frac{(t^3 + t - t) \, dt}{t^2+1}$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2}, \; dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{2} \, dt$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$ [Rovnica s neznámou $I$.]

$\Rightarrow$ • $I = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2x}{2} + x \right) + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \; t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx = (t^2 + 1) \, dx, \quad t \in R \\ x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \; k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{t^3 \, dt}{t^2+1} = \int \frac{(t^3 + t - t) \, dt}{t^2+1}$

$= \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t \, dt}{t^2+1} = \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)' \, dt}{t^2+1}$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2}, \; dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{2} \, dt$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$$

[Rovnica s neznámou $I$.]

$$\Rightarrow \; I = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2x}{2} + x \right) + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \; t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx = (t^2 + 1) \, dx, \quad t \in R \\ x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \; k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{t^3 \, dt}{t^2+1} = \int \frac{(t^3 + t - t) \, dt}{t^2+1}$

$$= \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t \, dt}{t^2+1} = \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)' \, dt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \ln (t^2 + 1) + c$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$$

- $= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = 2x & x \in R \\ x = \frac{t}{2},\ dx = \frac{dt}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{2} \, dt$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin t}{2 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \cos x & u = -\sin x \\ v = \cos x & v' = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + x - I.$$

[Rovnica s neznámou $I$.]

$$\Rightarrow \bullet \ I = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2x}{2} + x \right) + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln \left( \operatorname{tg}^2 x + 1 \right) + c$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \ t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx = (t^2 + 1) \, dx, \quad t \in R \\ x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \quad x \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{t^3 \, dt}{t^2+1} = \int \frac{(t^3 + t - t) \, dt}{t^2+1}$

$$= \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t \, dt}{t^2+1} = \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)' \, dt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \ln \left( t^2 + 1 \right) + c$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln \left( \operatorname{tg}^2 x + 1 \right) + c, \ x \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \ k \in Z, \ c \in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^{x} + 1}}$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x \in R & e^{2x} = t^2 & (\ln t)' = \frac{1}{t} > 0 \\ x = \ln t & t \in (0;\infty) & dx = \frac{dt}{t} & \end{array} \right]$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x \in R & \mathrm{e}^{2x} = t^2 & (\ln t)' = \frac{1}{t} > 0 \\ x = \ln t & t \in (0;\infty) & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right]$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right]$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

$$= \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^x & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

$$= \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1 = \left[\, c=c_1+\ln 2,\ c\in R,\ c_1\in R \,\right]$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}} = x - \ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^{x} & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ \quad x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ \quad t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \quad \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & \quad =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

$$= \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1 = \left[\, c=c_1+\ln 2,\ c\in R,\ c_1\in R \,\right]$$

$$= x-\ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}} = x - \ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^{x} & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

$$= \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1 = \left[\, c=c_1+\ln 2,\ c\in R,\ c_1\in R \,\right]$$

$$= x-\ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Použili sme tri substitúcie, môžeme ich spojiť do jednej $v=u+\frac{1}{2}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}+\frac{1}{2}$, $x\in R$, $v\in(\frac{1}{2};\infty)$ a dostaneme rovnaký výsledok.

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}} = x - \ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^{x} & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

$$= \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1 = \left[\, c=c_1+\ln 2,\ c\in R,\ c_1\in R \,\right]$$

$$= x-\ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Použili sme tri substitúcie, môžeme ich spojiť do jednej $v=u+\frac{1}{2}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}+\frac{1}{2}$, $x\in R$, $v\in(\frac{1}{2};\infty)$ a dostaneme rovnaký výsledok.

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } v=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}+\frac{1}{2} & \mathrm{e}^{x}=\frac{2}{2v-1} & x\in R & \mathrm{d}x=-\frac{2\,\mathrm{d}v}{2v-1} \\ \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}=v-\frac{1}{2}=\frac{2v-1}{2} & x=\ln\frac{2}{2v-1} & v\in(\frac{1}{2};\infty) & \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}=\frac{2\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}{2v-1} \end{array}\right]$$

# Metódy integrovania II – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}} = x - \ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^{x} & x\in R & \mathrm{e}^{2x}=t^2 & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & (\frac{1}{u})'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & u\in(0;\infty) & 1+u+u^2=u^2+u+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & v\in(\frac{1}{2};\infty) & =(u+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}=v^2+\frac{3}{4} \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1 = -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

$$= -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

$$= \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1 = \left[\, c=c_1+\ln 2,\ c\in R,\ c_1\in R \,\right]$$

$$= x-\ln\left(2+\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Použili sme tri substitúcie, môžeme ich spojiť do jednej $v=u+\frac{1}{2}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{1}{2}$, $x\in R$, $v\in(\frac{1}{2};\infty)$ a dostaneme rovnaký výsledok.

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } v=\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{1}{2} & \mathrm{e}^x=\frac{2}{2v-1} & x\in R & \mathrm{d}x=-\frac{2\,\mathrm{d}v}{2v-1} \\ \frac{1}{\mathrm{e}^x}=v-\frac{1}{2}=\frac{2v-1}{2} & x=\ln\frac{2}{2v-1} & v\in(\frac{1}{2};\infty) & \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}=\frac{2\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}{2v-1} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{2\,\mathrm{d}v}{2v-1}}{\frac{2\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}{2v-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = \cdots.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne.

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.
  - Integrovanú funkciu musíme zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.
  - Integrovanú funkciu musíme zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
  - Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.
  - Integrovanú funkciu musíme zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
  - Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} \qquad \text{pre } a \in R,\ n = 1.$$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} \qquad \text{pre } a \in R,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.
  - Integrovanú funkciu musíme zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
  - Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} \qquad \text{pre } a \in R,\ n = 1.$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right]$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} \qquad \text{pre } a \in R,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.
  - Integrovanú funkciu musíme zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
  - Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} \qquad \text{pre } a \in R,\ n = 1.$$

- $$= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} \qquad \text{pre } a \in R,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.
  - Integrovanú funkciu musíme zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
  - Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} \qquad \text{pre } a \in R,\ n = 1.$$

- $$= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c$$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} \qquad \text{pre } a \in R,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

- Integrovanie polynómov je triviálne. Pre $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N \cup \{0\}$ platí:

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

- Integrovanie racionálnych lomených funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale je väčšinou veľmi prácne.
  - Integrovanú funkciu musíme zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
  - Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + c \text{ pre } a \in R,\ n = 1.$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-a| + c,\ x \in R - \{a\},\ c \in R.$$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)\cdot(x-a)^{n-1}} + c \text{ pre } a \in R,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x - a & x \in R - \{a\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c$$
$$= \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + c = -\frac{1}{(n-1)\cdot(x-a)^{n-1}} + c,\ x \in R - \{a\},\ c \in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right]$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right]$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+(\sqrt{2})^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= \operatorname{arctg} t + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + c$$
$$= -\frac{1}{t} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \operatorname{arctg}(x+2) + c$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(x+2) + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4} = -\frac{1}{x+2} + c$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + c$$
$$= -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x+2} + c, \ x \in R - \{-2\}, \ c \in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-1}$

---

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot(x+3)}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+2}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-1} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-1,-3\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{\pm 1\} \end{array} \right]$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot(x+3)} = \left[ \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{1}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} \right]$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+2}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-2} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2 \pm \sqrt{2}\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{\pm\sqrt{2}\} \end{array} \right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-1,-3\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{\pm 1\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$

---

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot(x+3)} = \left[ \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{1}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} \right]$

  $= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+2}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-2} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2 \pm \sqrt{2}\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{\pm\sqrt{2}\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-(\sqrt{2})^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-1,-3\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{\pm 1\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c$

---

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot(x+3)} = \left[ \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{1}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} \right]$

  $= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} = \frac{1}{2} \ln |x+1| - \frac{1}{2} \ln |x+3| + c$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+2}$$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-2} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2 \pm \sqrt{2}\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{\pm\sqrt{2}\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-(\sqrt{2})^2}$

  $= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + c$$

- $$= \int \frac{dx}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-1,-3\} \\ dt = dx & t \in R - \{\pm 1\} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + c,\ x \in R - \{-1,-3\},\ c \in R.$$

---

- $$= \int \frac{dx}{(x+1)\cdot(x+3)} = \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{1}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + c,\ x \in R - \{-1,-3\},\ c \in R.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right| + c$$

- $$= \int \frac{dx}{x^2+4x+4-2} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-2} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2 \pm \sqrt{2}\} \\ dt = dx & t \in R - \{\pm\sqrt{2}\} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2-2} = \int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right| + c,\ x \in R - \{-2 \pm \sqrt{2}\},\ c \in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$ pre $a > 0,\ n = 1.$ [Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$ [Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$ [Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$ [Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$ [Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

  $= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R \text{ pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad \text{pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

  $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

  $$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R \text{ pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad \text{pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R \text{ pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad \text{pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R \text{ pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad \text{pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}$$

$$= \frac{2(1-n)+1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R \text{ pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad \text{pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \\ v = x & \\ v' = 1 & \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}$$

$$= \frac{2(1-n)+1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{3-2n}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ x \in R,\ c \in R \text{ pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \text{ pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x \cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x \cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (a^2;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[ \frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)} \cdot I_{n-1}$$

$$= \frac{2(1-n)+1}{2a^2(1-n)} \cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{3-2n}{2a^2(1-n)} \cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ x \in R,\ c \in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ pre $a > 0$.

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$ pre $a > 0$.

- $= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$ pre $a > 0$.

- $= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$

  $= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2}\right]$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $$= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+1 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+1} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right]$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $$= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+1 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+1} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right] = \frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\cdot I_1$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $$= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+1 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+1} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right.$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2} \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right] = \frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 = \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $$= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+1 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+1} \\ u = x & \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right] = \frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 = \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

- $$= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+1 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+1} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right.$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + c \text{ pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right] = \frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 = \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c$$

- $$= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+1 & x\in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+1} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c,$$
$$x\in R,\ c\in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2}$ pre $a > 0,\ n = 1.$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,\ x \in R - \{\pm a\},\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= -\frac{1}{a^2} \int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2 - a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,\ x \in R - \{\pm a\},\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= -\frac{1}{a^2} \int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,\ x \in R - \{\pm a\},\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= -\frac{1}{a^2} \int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,\ x \in R - \{\pm a\},\ c \in R$ pre $a > 0,\ n = 1.$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$ pre $a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$

- $= -\frac{1}{a^2} \int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$

  $= -\frac{1}{a^2} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{x \cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{x \cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,\ x \in R - \{\pm a\},\ c \in R \text{ pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} \qquad \text{pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= -\frac{1}{a^2} \int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{x \cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{x \cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2 - a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle -a^2; \infty) - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R \quad \text{pre } a>0,\ n=1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} \qquad \text{pre } a>0,\ n\in N,\ n\neq 1.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & u = \int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in R-\{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in\langle -a^2;\infty)-\{0\} \end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ x \in R - \{\pm a\},\ c \in R \quad \text{pre } a > 0,\ n = 1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} \qquad \text{pre } a > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & u = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle -a^2; \infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R \quad \text{pre } a>0,\ n=1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} \qquad \text{pre } a>0,\ n\in N,\ n\neq 1.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & u = \int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in R-\{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(-a^2;\infty)-\{0\}\end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}$$

$$= -\frac{2(1-n)+1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R \quad \text{pre } a>0,\ n=1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} \qquad \text{pre } a>0,\ n\in N,\ n\neq 1.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & u = \int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in R-\{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(-a^2;\infty)-\{0\} \end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}$$

$$= -\frac{2(1-n)+1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} = -\frac{3-2n}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R \text{ pre } a>0,\ n=1.$$

[Tabuľkový integrál, viď 01-ZVz II.]

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = \frac{3-2n}{2a^2(n-1)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} \text{ pre } a>0,\ n\in N,\ n\neq 1.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & u = \int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in R-\{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(-a^2;\infty)-\{0\}\end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \\ v = x & v' = 1\end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}$$

$$= -\frac{2(1-n)+1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} = -\frac{3-2n}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{3-2n}{2a^2(n-1)}\cdot I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}},\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ pre $a > 0$.

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$ pre $a > 0$.

- $= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$ pre $a > 0$.

- $= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$ pre $a > 0$.

- $= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$

  $= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (-a^2;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2}\right]$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $$= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-1 & x \in R - \{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (1;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-1}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (-a^2;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\right]$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $$= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-1 & x \in R - \{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (1;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (-a^2;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\right] = -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot I_1$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $$= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-1 & x \in R - \{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (1;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (-a^2;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2}\Bigg]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\right] = -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 = -\frac{1}{2a^2}\cdot I_1 - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $$= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-1 & x \in R - \{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (1;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-1}\Bigg]$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\right] = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{x}{2(x^2-1)}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (-a^2;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2}\Bigg]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\right] = -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 = -\frac{1}{2a^2}\cdot I_1 - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

- $$= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-1 & x \in R - \{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (1;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-1}\Bigg]$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\right] = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{x}{2(x^2-1)}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + c \text{ pre } a>0.$$

- $$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in R-\{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(-a^2;\infty)-\{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2}\Bigg]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\right] = -\frac{1}{a^2}\cdot I_1 - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 = -\frac{1}{2a^2}\cdot I_1 - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + c,\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R.$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} + c$$

- $$= -\int \frac{(x^2-1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} & v = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-1 & x\in R-\{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(1;\infty)-\{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right. = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-1}\Bigg]$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\right] = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} + \frac{x}{2(x^2-1)} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{x}{2(x^2-1)} + c,$$
$$x\in R-\{\pm 1\},\ c\in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ pre $a > 0$.

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$ pre $a > 0$.

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$ pre $a > 0$.

- $= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$

$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$ pre $a > 0$.

- $= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ pre $a > 0$.

- $= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[ \begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ dt = 2x\,dx & t \in \langle a^2; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array} \right]$

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$ pre $a > 0$.

- $= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[ \begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ dt = 2x\,dx & t \in \langle a^2; \infty) - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array} \right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right]$$

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle a^2;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c \quad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in R \\ dt = 2x\,dx & t \in (a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right] = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

$$\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2(x^2-a^2)} + c \quad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in R - \{\pm a\} \\ dt = 2x\,dx & t \in (a^2;\infty) - \{0\} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right] = -\frac{x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklady

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c \quad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in R \\ dt = 2x\,dx & t\in(a^2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right] = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

$$= \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2(x^2-a^2)} + c \quad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \frac{1}{2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \int \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in R-\{\pm a\} \\ dt = 2x\,dx & t\in(a^2;\infty)-\{0\} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-a^2} \\ u = x & u' = 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right] = -\frac{x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$= \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2(x^2-a^2)} + c = \frac{1}{4a}\ln|x-a| - \frac{1}{4a}\ln|x+a| - \frac{x}{2(x^2-a^2)} + c,$$

$$x\in R-\{\pm a\},\ c\in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$
$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t \in \langle 2; \infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z \in R \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

  $$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

  $$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t \in \langle 2; \infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t \in \langle 2; \infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\text{04-In 1: } \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} + c_1 = -\frac{1}{t} + c_1\right] \left[\text{04-Pr III: } \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + c_2 \text{ pre } a = \sqrt{2}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t \in \langle 2;\infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\text{04-In 1: } \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} + c_1 = -\frac{1}{t} + c_1\right] \left[\text{04-Pr III: } \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + c_2 \text{ pre } a = \sqrt{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t \in \langle 2; \infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\text{04-In 1: } \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} + c_1 = -\frac{1}{t} + c_1\right] \left[\text{04-Pr III: } \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + c_2 \text{ pre } a = \sqrt{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t \in \langle 2; \infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\text{04-In 1: } \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} + c_1 = -\frac{1}{t} + c_1\right] \left[\text{04-Pr III: } \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + c_2 \text{ pre } a = \sqrt{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t \in \langle 2; \infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\text{04-In 1: } \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} + c_1 = -\frac{1}{t} + c_1\right] \left[\text{04-Pr III: } \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + c_2 \text{ pre } a = \sqrt{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \frac{-4}{4(x^2+2x+3)} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

- $$= \int \frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

$$= \int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{(x^2+2x+3)'\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x\in R \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x & t\in\langle 2;\infty) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = x+1 & x\in R \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x & z\in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\text{04-In 1: } \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} + c_1 = -\frac{1}{t} + c_1\right]\left[\text{04-Pr III: } \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + c_2 \text{ pre } a = \sqrt{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \frac{-4}{4(x^2+2x+3)} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

$$= \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=$ [ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2}$

$= \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}$ ]

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=$ [ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2}$ $\frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}$ ]

$=$ [ $x^3 \left| -2 = a + c \right.$ ]

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=$ [ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2}$ $\frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}$ ]

$=$ [ $x^3$ $-2 = a + c$ ; $x^2$ $0 = 2a + b + c + d$ ]

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} \qquad \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \phantom{2}a + \phantom{2}c \\ x^2 & 0 = 2a + \phantom{2}b + c + d \\ x^1 & 0 = \phantom{2}a + 2b \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=$ [ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2}$ $\frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}$ ]

$=$ [ $\left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = a + c \\ x^2 & 0 = 2a + b + c + d \\ x^1 & 0 = a + 2b \\ x^0 & 1 = b \end{array}\right|$ ]

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=$ [ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2}$

$= \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}$ ]

$= \left[ \begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \phantom{2}a + \phantom{2}c \\ x^2 & 0 = 2a + \phantom{2}b + c + d \\ x^1 & 0 = \phantom{2}a + 2b \\ x^0 & 1 = \phantom{2}b \end{array} \right| \Bigg| \Bigg] = \int \Big[ \qquad \Big] \mathrm{d}x$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=$ [ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2}$

$= \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}$ ]

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} x^3 & -2 = \phantom{2}a + \phantom{2}c & 4r & b = 1 \\ x^2 & 0 = 2a + \phantom{2}b + c + d & & \\ x^1 & 0 = \phantom{2}a + 2b & & \\ x^0 & 1 = \phantom{2}b & & \end{array}\right] = \int \left[ \quad + \frac{1}{x^2} \qquad\qquad \right]\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \phantom{2}a + \phantom{2}c \\ x^2 & 0 = 2a + \phantom{2}b + c + d \\ x^1 & 0 = \phantom{2}a + 2b \\ x^0 & 1 = \phantom{2}b \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \;\Rightarrow\; a = -2 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} \qquad\qquad\qquad\

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \phantom{2}a + \phantom{2}c \\ x^2 & 0 = 2a + \phantom{2}b + c + d \\ x^1 & 0 = \phantom{2}a + 2b \\ x^0 & 1 = \phantom{2}b \end{array}\quad \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \end{array}\right] = \int \left[\qquad\qquad + \frac{0}{x+1}\qquad\qquad\right]\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \phantom{2}a + \phantom{2}c \\ x^2 & 0 = 2a + \phantom{2}b + c + d \\ x^1 & 0 = \phantom{2}a + 2b \\ x^0 & 1 = \phantom{2}b \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \\ 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \Rightarrow d = 3 \end{array}\right] = \int \left[ \qquad\qquad + \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} x^3 & -2 = a + c & 4r & b = 1 \\ x^2 & 0 = 2a + b + c + d & 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ x^1 & 0 = a + 2b & 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \\ x^0 & 1 = b & 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \Rightarrow d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\ \qquad = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} x^3 & -2 = \phantom{2}a + \phantom{2}c & 4r & b = 1 \\ x^2 & 0 = 2a + \phantom{2}b + c + d & 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ x^1 & 0 = \phantom{2}a + 2b & 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \\ x^0 & 1 = \phantom{2}b & 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \Rightarrow d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int 3(x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\ \qquad = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} x^3 & -2 = a + c & 4r & b = 1 \\ x^2 & 0 = 2a + b + c + d & 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ x^1 & 0 = a + 2b & 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \\ x^0 & 1 = b & 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \Rightarrow d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int 3(x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{-1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\ \qquad = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} x^3 & -2 = a + c & 4r & b = 1 \\ x^2 & 0 = 2a + b + c + d & 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ x^1 & 0 = a + 2b & 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \\ x^0 & 1 = b & 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \Rightarrow d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int 3(x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{-1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int 3t^{-2}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

- $= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=$ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2}$

$= \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = a + c \\ x^2 & 0 = 2a + b + c + d \\ x^1 & 0 = a + 2b \\ x^0 & 1 = b \end{array}\quad \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \\ 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \Rightarrow d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int 3(x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{-1\} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int 3t^{-2}\,\mathrm{d}t = -2\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{3t^{-1}}{-1} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\ \qquad = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = a + c \\ x^2 & 0 = 2a + b + c + d \\ x^1 & 0 = a + 2b \\ x^0 & 1 = b \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \Rightarrow a = -2 \\ 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \Rightarrow c = 0 \\ 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \Rightarrow d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3(x+1)^{-2}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{-1\} \\ dt = dx & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3t^{-2}\,dt = -2\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{3t^{-1}}{-1} + c$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \quad \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\ \qquad = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \ \ a + \ \ c \\ x^2 & 0 = 2a + \ \ b + c + d \\ x^1 & 0 = \ \ a + 2b \\ x^0 & 1 = \ \ b \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \ \Rightarrow \ a = -2 \\ 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \ \Rightarrow \ c = 0 \\ 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \ \Rightarrow \ d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3(x+1)^{-2}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{-1\} \\ dt = dx & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3t^{-2}\,dt = -2\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{3t^{-1}}{-1} + c$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= -\ln|x|^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1}\right] + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\ \qquad = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \ \ a + \ \ c \\ x^2 & 0 = 2a + \ \ b + c + d \\ x^1 & 0 = \ \ a + 2b \\ x^0 & 1 = \ \ b \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \ \Rightarrow\ a = -2 \\ 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \ \Rightarrow\ c = 0 \\ 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \ \Rightarrow\ d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3(x+1)^{-2}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{-1\} \\ dt = dx & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3t^{-2}\,dt = -2\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{3t^{-1}}{-1} + c$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= -\ln|x|^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1}\right] + c = -\ln x^2 - \frac{x+1+3x}{x(x+1)} + c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c = \frac{4x+1}{x^2+x} - \ln x^2 + c$$

- $$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{-2x^3-0x^2+0x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)^2+b(x+1)^2+cx^2(x+1)+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\ \qquad = \frac{a(x^3+2x^2+x)+b(x^2+2x+1)+c(x^3+x^2)+dx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & -2 = \ a + \ c \\ x^2 & 0 = 2a + \ b + c + d \\ x^1 & 0 = \ a + 2b \\ x^0 & 1 = \ b \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 4r & b = 1 \\ 3r & a = -2b \ \Rightarrow \ a = -2 \\ 1r & c = -2 - a = -2 + 2 \ \Rightarrow \ c = 0 \\ 2r & d = -2a - b - c = 4 - 1 - 0 \ \Rightarrow \ d = 3 \end{array}\right] = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3(x+1)^{-2}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+1 & x \in R - \{-1\} \\ dt = dx & t \in R - \{0\} \end{array}\right]$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx + \int 3t^{-2}\,dt = -2\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{3t^{-1}}{-1} + c$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= -\ln|x|^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1}\right] + c = -\ln x^2 - \frac{x+1+3x}{x(x+1)} + c$$

$$= \frac{4x+1}{x^2+x} - \ln x^2 + c,\ x \in R - \{0, -1\},\ c \in R.$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array} \right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$

$= \left[\begin{array}{l|l|l} x^3 & 1 = \quad a+c & \\ & & \\ & & \end{array}\right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} \qquad \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]$

$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & 1 = \quad a+c \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d \\ & \\ & \end{array}\right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} \qquad \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]$

$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d \\ & \end{array}\right|\quad\left|\quad\right]$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

$=$ Rozklad na parciálne zlomky: $\frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)}$

$$\frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d \end{array}\right|$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d \end{array}\right|\quad\left|\quad\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d & \end{array}\begin{array}{c|l} 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ & \\ & \\ & \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 1r-3r \quad -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 4r-2r \quad 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d & \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|l|c|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 4r-2r & 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a = 1-c = 1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d & & \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|l|c|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 4r-2r & 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a = 1-c = 1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d & 4r & b = a-d = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = 1 \end{array}\right]$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 4r-2r & 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a = 1-c = 1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d & 4r & b = a-d = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = 1 \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 4r-2r & 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a = 1-c = 1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{-}d & 4r & b = a-d = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = 1 \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 4r-2r & 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a = 1-c = 1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{-}d & 4r & b = a-d = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = 1 \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 4r-2r & 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a = 1-c = 1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d & 4r & b = a-d = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = 1 \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1 = 2d \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{2} \\ x^2 & -1 = -a+b-2c+d & 4r-2r & 1 = 2c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a = 1-c = 1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ x^0 & 0 = -a+b+\phantom{2}d & 4r & b = a-d = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = 1 \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln|x-1|^2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$$

# Integrovanie racionálnych funkcií – Príklad

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln\left[(x-1)^2(x^2+1)\right]-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

- $$= \left[\begin{array}{c} \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)^2(x^2+1) \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky:}\quad \frac{x^3-x^2+2x+0}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ \qquad = \frac{(ax^3-ax^2+ax-a)+(bx^2+b)+(cx^3+dx^2-2cx-2dx+cx+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(-a+b-2c+d)x^2+(a+c-2d)x+(-a+b+d)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} x^3 & 1 = \phantom{-}a+c & 1r-3r & -1=2d \;\Rightarrow\; d=-\frac{1}{2} \\ x^2 & -1=-a+b-2c+d & 4r-2r & 1=2c \;\Rightarrow\; c=\frac{1}{2} \\ x^1 & 2 = \phantom{-}a+c-2d & 1r & a=1-c=1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{2} \\ x^0 & 0=-a+b+\phantom{2}d & 4r & b=a-d=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b=1 \end{array}\right] = \int\left[x^2+x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln|x-1|^2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln\left[(x-1)^2(x^2+1)\right]-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c,\ x\in R-\{1\},\ c\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať,

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$,

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$,
- $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$,
- $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow \bullet\ x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow \bullet\ x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

## $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1)\right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

## $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1)\right] \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} \left| x \in \langle 0;1) \right. \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \left| t \in \langle 0;\infty) \right. \end{array}\right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

## $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1)\right] \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in \langle 0;1) \\ t \in \langle 0;\infty) \end{array}\right]$

$$= \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

## $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} \left| x \in \langle 0;1) \right. \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \left| t \in \langle 0;\infty) \right. \end{array} \right]$

$= \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[ \text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

## $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in \langle 0;1) \\ t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$

$$= \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right] = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

## $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in \langle 0;1) \\ t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$

$$= \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right] = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

## $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in \langle 0;1) \\ t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$

$$= \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right] = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + c$$

$$= \left[\frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{t^2+1} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

- Integrovanie iracionálnych funkcií je väčšinou veľmi zložité.
- Mnohé z takýchto integrálov môžeme tzv. racionalizovať, t. j. vhodným spôsobom (napr. substitúciou) previesť na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$ pre $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N$ racionalizujeme pomocou substitúcie:

- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, • $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\left[t^n(dx+e) = ax+b. \Rightarrow (dt^n-a)x = b-et^n. \Rightarrow\right.$ • $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}. \Rightarrow$ • $\left.\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{-net^{n-1}(dt^n-a)-(b-et^n)ndt^{n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.\right]$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Predpoklad $ae-bd = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný (polynómy $ax+b$, $dx+e$ sú lineárne nezávislé).

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = -x\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + c$$

- $= \left[\frac{x}{1-x} \geq 0 \left| \begin{array}{l} x \geq 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \\ x \leq 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in \langle 0;1) \\ t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$

$$= \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right] = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + c$$

$$= \left[\frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{t^2+1} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right] = -x\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + c,\ x \in \langle 0;1),\ c \in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right]$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

  $= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$

  $= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

  $= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{l} \text{Subst.} \quad t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$

  $= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x}$

- $= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

  $= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} & x \in (0;1) \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & t \in (1;\infty) \end{array} \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x} = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ t^2 = \frac{1-x}{x},\ t^2 x = 1 - x & \end{array} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right]$$

---

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x} = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ t^2 = \frac{1-x}{x},\ t^2 x = 1-x & \end{array} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{t\,\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}}$$

---

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \end{array} \left| t \in (1;\infty) \right. \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & u = \sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{1}{x}-1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ u^2 = t-1 \Rightarrow t = 1+u^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \end{array} \left| \begin{array}{l} t \in (1;\infty) \\ u \in (0;\infty) \end{array} \right. \right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x} = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ t^2 = \frac{1-x}{x},\ t^2 x = 1-x & \end{array} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{t\,\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}}$$
$$= -2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

---

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}$$
$$= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & u = \sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{1}{x}-1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ u^2 = t-1 \Rightarrow t = 1+u^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \end{array} \left| \begin{array}{l} t \in (1;\infty) \\ u \in (0;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{u \cdot 2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x} = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ t^2 = \frac{1-x}{x},\ t^2 x = 1-x & \end{array} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{t\,\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$= -2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

---

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & u = \sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{1}{x}-1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ u^2 = t-1 \Rightarrow t = 1+u^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \end{array} \left| \begin{array}{l} t \in (1;\infty) \\ u \in (0;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{u \cdot 2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \frac{(1-u^2-1)\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

## $\displaystyle\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x} = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ t^2 = \frac{1-x}{x},\ t^2 x = 1-x & \end{array} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right] = \int^{t} \frac{\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$= -2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t$$

---

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \end{array} \left| t \in (1;\infty) \right. \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & u = \sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{1}{x}-1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ u^2 = t-1 \Rightarrow t = 1+u^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \end{array} \left| \begin{array}{l} t \in (1;\infty) \\ u \in (0;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{u \cdot 2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \frac{(1-u^2-1)\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \left[\frac{1}{1+u^2} - 1\right]\mathrm{d}u$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x} = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ t^2 = \frac{1-x}{x},\ t^2 x = 1-x & \end{array} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right] = \int^t \frac{\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$= -2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -2(t - \operatorname{arctg} t) + c$$

---

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \end{array} \left| t \in (1;\infty) \right. \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & u = \sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{1}{x}-1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ u^2 = t-1 \Rightarrow t = 1+u^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \end{array} \left| \begin{array}{l} t \in (1;\infty) \\ u \in (0;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{u \cdot 2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \frac{(1-u^2-1)\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \left[\frac{1}{1+u^2} - 1\right]\mathrm{d}u$$

$$= 2(\operatorname{arctg} u - u) + c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c$$

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2\,\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x} = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ t^2 = \frac{1-x}{x},\ t^2 x = 1 - x & \end{array} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right] = \int^t \frac{\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$= -2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -2(t - \mathrm{arctg}\,t) + c = -2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c,\ x \in (0;1),\ c \in R.$$

---

- $$= \left[ x \neq 0,\ x - x^2 = x(1-x) > 0 \left| \begin{array}{l} x > 0, 1-x > 0 \Rightarrow x \in (0;1) \\ x < 0, 1-x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \emptyset \Rightarrow x \in (0;1) \right] = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in (0;1) \\ t \in (1;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int \frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} & u = \sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{1}{x}-1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ u^2 = t-1 \Rightarrow t = 1+u^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \end{array} \left| \begin{array}{l} t \in (1;\infty) \\ u \in (0;\infty) \end{array} \right. \right] = -\int \frac{u \cdot 2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \frac{(1-u^2-1)\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \left[\frac{1}{1+u^2} - 1\right]\mathrm{d}u$$

$$= 2(\mathrm{arctg}\,u - u) + c = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\frac{1}{x}-1} - 2\sqrt{\frac{1}{x}-1} + c,\ x \in (0;1),\ c \in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} \quad t = \sqrt[6]{x+1} & \left| \sqrt{x+1} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 = t^3 \right. \\ t^6 = x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x & \left| \sqrt[3]{x+1} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2 = t^2 \right. \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in (-1;\infty) \\ t \in (0;\infty) \end{array} \right. \right]$

- $= \left[ \begin{array}{ll} \text{Subst.} \quad t = \sqrt[6]{x+1} & \left| \sqrt{x+1} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 = t^3 \right. \\ t^6 = x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x & \left| \sqrt[3]{x+1} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2 = t^2 \right. \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in (-1;\infty) \\ t \in (0;\infty) \end{array} \right. \right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $$= \left[ \begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$


- $$= \left[ \begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= 6\int\frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int\frac{(t^3+t^2)-(t^2+t)+(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

---

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & u=t+1 \\ & \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \end{array}\middle|\begin{array}{l} t\in(0;\infty) \\ u\in(1;\infty) \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= 6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^3+t^2)-(t^2+t)+(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t$$

---

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } u=t+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \end{array}\middle|\begin{array}{l} t\in(0;\infty) \\ u\in(1;\infty) \end{array}\right]$$
$$= 6\int \frac{(u-1)^3\,\mathrm{d}u}{u} = 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= 6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^3+t^2)-(t^2+t)+(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t$$
$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c$$

---

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & u=t+1 \\ & \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \end{array}\middle|\begin{array}{l} t\in(0;\infty) \\ u\in(1;\infty) \end{array}\right]$$
$$= 6\int \frac{(u-1)^3\,\mathrm{d}u}{u} = 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 6\int \left[u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right]\mathrm{d}u$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= 6\int\frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int\frac{(t^3+t^2)-(t^2+t)+(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int\left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t$$
$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c = 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c$$

---

- $$= \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\middle|\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 \\ \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 \end{array}\middle|\begin{array}{l} x\in(-1;\infty) \\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = \left[\begin{array}{ll} \text{Subst.} & u=t+1 \\ & \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \end{array}\middle|\begin{array}{l} t\in(0;\infty) \\ u\in(1;\infty) \end{array}\right]$$
$$= 6\int\frac{(u-1)^3\,\mathrm{d}u}{u} = 6\int\frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 6\int\left[u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right]\mathrm{d}u$$
$$= 6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2}{2}+3u-\ln|u|\right)+c = 2u^3-9u^2+18u-6\ln u+c_1$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= 6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^3+t^2)-(t^2+t)+(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int\left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t$$
$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c = 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c$$
$$= 2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+c,\ x\in(-1;\infty),\ c\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=t+1 & t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & u\in(1;\infty) \end{array}\right]$$
$$= 6\int \frac{(u-1)^3\,\mathrm{d}u}{u} = 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 6\int\left[u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right]\mathrm{d}u$$
$$= 6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2}{2}+3u-\ln|u|\right)+c = 2u^3-9u^2+18u-6\ln u+c_1$$
$$= 2\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)^3-9\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)^2+\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)-6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+c_1$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= 6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^3+t^2)-(t^2+t)+(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int\left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t$$
$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c = 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c$$
$$= 2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+c,\ x\in(-1;\infty),\ c\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=t+1 & t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & u\in(1;\infty) \end{array}\right]$$
$$= 6\int \frac{(u-1)^3\,\mathrm{d}u}{u} = 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 6\int\left[u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right]\mathrm{d}u$$
$$= 6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2}{2}+3u-\ln|u|\right)+c = 2u^3-9u^2+18u-6\ln u+c_1$$
$$= 2(\sqrt[6]{x+1}+1)^3-9(\sqrt[6]{x+1}+1)^2+(\sqrt[6]{x+1}+1)-6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+c_1$$
$$= \left[\begin{array}{l} 2u^3-9u^2+18u = 2(t+1)^3-9(t+1)^2+18(t+1) = 2(t^3+3t^2+3t+1)-9(t^2+2t+1)+18(t+1) = 2t^3-3t^2+6t+11 \\ \qquad \Rightarrow 2u^3-9u^2+18u-6\ln u+c_1 = 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+11+c_1,\ \text{kde } c=11+c_1 \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right) + c$$

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= 6\int\frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int\frac{(t^3+t^2)-(t^2+t)+(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int\left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t$$
$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c = 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c$$
$$= 2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+c,\ x\in(-1;\infty),\ c\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 \Rightarrow 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & & \sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=t+1 & t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & u\in(1;\infty) \end{array}\right]$$
$$= 6\int\frac{(u-1)^3\,\mathrm{d}u}{u} = 6\int\frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 6\int\left[u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right]\mathrm{d}u$$
$$= 6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2}{2}+3u-\ln|u|\right)+c = 2u^3-9u^2+18u-6\ln u+c_1$$
$$= 2\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)^3-9\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)^2+\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)-6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+c_1$$
$$= \left[\begin{array}{l} 2u^3-9u^2+18u = 2(t+1)^3-9(t+1)^2+18(t+1) = 2(t^3+3t^2+3t+1)-9(t^2+2t+1)+18(t+1) = 2t^3-3t^2+6t+11 \\ \qquad \Rightarrow 2u^3-9u^2+18u-6\ln u+c_1 = 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+11+c_1,\ \text{kde } c=11+c_1 \end{array}\right]$$
$$= 2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+c,\ x\in(-1;\infty),\ c\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{rl|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ & 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ \qquad\qquad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ \qquad\qquad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \left[t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right]\mathrm{d}t = 6\int \left[t-1+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right]\mathrm{d}t$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ \qquad\qquad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \left[t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right]\mathrm{d}t = 6\int \left[t-1+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right]\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right]+c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ \qquad\qquad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int\left[t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right]\mathrm{d}t = 6\int\left[t-1+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right]\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right]+c$$

$$= 3t^2-6t+6\ln t+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ \qquad\qquad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \left[t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right]\mathrm{d}t = 6\int \left[t-1+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right]\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right]+c$$

$$= 3t^2-6t+6\ln t+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

$$= 3t^2-6t+\ln t^6+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ \qquad\qquad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int\left[t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right]\mathrm{d}t = 6\int\left[t-1+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right]\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right]+c$$

$$= 3t^2-6t+6\ln t+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

$$= 3t^2-6t+\ln t^6+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c = \left[\,t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow t^2=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=\sqrt{x}\Rightarrow t^6=x\,\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \ln x + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{12}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{\sqrt{x}} + c$$

- $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x},\ t^6=x & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ \qquad\qquad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$

$$= \int \frac{(t^6-1)6t^5}{(t^3+t^4)t^6}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^6-1)}{t^4+t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \left[t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right]\mathrm{d}t = 6\int \left[t-1+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right]\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right]+c$$

$$= 3t^2-6t+6\ln t+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

$$= 3t^2-6t+\ln t^6+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c = \left[\, t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow t^2=\sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3=\sqrt{x} \Rightarrow t^6=x \,\right]$$

$$= 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \ln x + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{12}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{\sqrt{x}} + c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \cup \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left. \begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \cup \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \cup \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right]$

  $= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[ 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0; 1) \right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left. \begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \cup \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[ 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0; 1) \right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left. \begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \cup \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[ 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0; 1) \right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left. \begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \cup \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[ 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0; 1) \right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \cup \langle 0;1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0;1\rangle \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\, 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \,\right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & z = 1-x & \mathrm{d}z = -\mathrm{d}x & x \in \langle 0;1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}} & & \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z & z \in (0;1\rangle \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} & x \in \langle 0;1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0;1) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \cup \langle 0;1) \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[ 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad z = 1-x & \mathrm{d}z = -\mathrm{d}x & x \in \langle 0;1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}} & \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z & z \in (0;1) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} & & x \in \langle 0;1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & & t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[ \text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0;1) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \cup \langle 0;1) \Rightarrow x \in \langle 0;1) \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\, 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1) \,\right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad z = 1-x & \mathrm{d}z = -\mathrm{d}x & x \in \langle 0;1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}} & \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z & z \in (0;1\rangle \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{t^2}{t^2+1} & x \in \langle 0;1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[ \text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right]$$

$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \left[ -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\, 1-\sqrt{x}\neq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1)\,\right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad z=1-x & \mathrm{d}z=-\mathrm{d}x & x\in\langle 0;1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{z}}=z^{-\frac{1}{2}} & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(0;1\rangle \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x)=x \Rightarrow x=\frac{t^2}{t^2+1} & x\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}x=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & t\in\langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[ \text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u=t \end{array} \right| \begin{array}{l} v=-\frac{1}{t^2+1} \\ u'=1 \end{array} \right]$$

$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \left[ -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \right] = -2\sqrt{z} + \frac{t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left.\begin{matrix} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\, 1-\sqrt{x}\neq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1)\,\right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad z=1-x & \mathrm{d}z=-\mathrm{d}x & x\in\langle 0;1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{z}}=z^{-\frac{1}{2}} & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(0;1\rangle \end{array}\right] \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x)=x \Rightarrow x=\frac{t^2}{t^2+1} & x\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}x=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & t\in\langle 0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= -\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\text{Viď 04-Pr V} \left|\begin{matrix} v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} & v=-\frac{1}{t^2+1} \\ u=t & u'=1 \end{matrix}\right.\right]$$

$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \left[-\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right] = -2\sqrt{z}+\frac{t}{t^2+1}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= -2\sqrt{z}+\frac{t}{t^2+1}-\operatorname{arctg} t + c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

- $= \left[ \left.\begin{array}{l} \sqrt{x}\in R \quad\quad \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1) \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1) \Rightarrow x\in\langle 0;1) \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\, 1-\sqrt{x}\neq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1)\,\right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad z=1-x & \mathrm{d}z=-\mathrm{d}x & x\in\langle 0;1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{z}}=z^{-\frac{1}{2}} & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(0;1\rangle \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x)=x \Rightarrow x=\frac{t^2}{t^2+1} & x\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}x=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & t\in\langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[ \text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u=t \end{array} \right| \begin{array}{l} v=-\frac{1}{t^2+1} \\ u'=1 \end{array} \right]$$

$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \left[ -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \right] = -2\sqrt{z} + \frac{t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= -2\sqrt{z} + \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c = \left[\, \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{t^2+1} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{1-x} + x\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + c$$

- $= \left[ \left.\begin{array}{l} \sqrt{x}\in R \quad\quad \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1) \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1) \Rightarrow x\in\langle 0;1) \right]$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\, 1-\sqrt{x}\neq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1)\,\right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad z=1-x & \mathrm{d}z=-\mathrm{d}x & x\in\langle 0;1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}} & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(0;1\rangle \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow t^2(1-x)=x \Rightarrow x=\frac{t^2}{t^2+1} & x\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & t\in\langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[ \text{Viď 04-Pr V} \left| \begin{array}{l} v' = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ u = t \end{array} \right| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{t^2+1} \\ u' = 1 \end{array} \right]$$

$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \left[ -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \right] = -2\sqrt{z} + \frac{t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= -2\sqrt{z} + \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c = \left[\, \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{t^2+1} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}} \,\right]$$

$$= -2\sqrt{1-x} + x\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + c,\ x\in\langle 0;1),\ c\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[ \left. \begin{array}{ll} \sqrt{x} \in R & \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \langle 0; \infty) \cup \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle \right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \in R \quad \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \cup \langle 0;1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0;1\rangle \Bigg] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x \in \langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t \in \langle 0;1\rangle \end{array}\right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \in R \quad \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \in \langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle 0;\infty) \cup \langle 0;1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0;1\rangle \Bigg] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x \in \langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t \in \langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\in R \quad \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \Bigg]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

  $= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$

  $= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\in R \quad\Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \Bigg]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$

$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$

$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$

$= \left[\text{04-In 2: } I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0, n\in N.\right]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0,\ n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n = \int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1=\operatorname{arctg} z+c \text{ pre } a=1,\ n\in N. \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0,\ n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n = \int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1=\operatorname{arctg} z+c \text{ pre } a=1,\ n\in N. \end{array}\right] = 16I_3-24I_2+8I_1$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0, n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1=\operatorname{arctg} z+c \text{ pre } a=1, n\in N. \end{array}\right] = 16I_3-24I_2+8I_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} 16I_3-24I_2+8I_1 = 16\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2+\frac{z}{2\cdot 2(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 \\ \qquad = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1+\frac{z}{2\cdot 1(z^2+1)}\right]+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1 \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1) \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cap\langle 0;1) \Rightarrow x\in\langle 0;1) \\ \left[\text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \;\middle|\; t\in\langle 0;1) \end{array}\right] \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t \;\middle|\; z^2-1=-z^2-t \;\middle|\; t\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}t=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} \;\middle|\; t=\frac{1-z^2}{z^2+1} \;\middle|\; z\in\langle 0;1) \end{array}\right] = \int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3}=\frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3}=\frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3}=\frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0,\ n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n}=\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1=\operatorname{arctg} z+c \text{ pre } a=1,\ n\in N. \end{array}\right] = 16I_3-24I_2+8I_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} 16I_3-24I_2+8I_1 = 16\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2+\frac{z}{2\cdot 2(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 \\ \qquad = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1+\frac{z}{2\cdot 1(z^2+1)}\right]+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1 \end{array}\right] = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\operatorname{arctg} z+c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3}=\frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3}=\frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3}=\frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0, n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n}=\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1=\operatorname{arctg} z+c \text{ pre } a=1, n\in N. \end{array}\right] = 16I_3-24I_2+8I_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} 16I_3-24I_2+8I_1 = 16\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2+\frac{z}{2\cdot 2(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 \\ \qquad\qquad =\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1+\frac{z}{2\cdot 1(z^2+1)}\right]+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1 \end{array}\right] = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\operatorname{arctg} z+c$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \Rightarrow z^2+1=\frac{1-t}{1+t}+1=\frac{2}{1+t}=\frac{2}{1+\sqrt{x}} & \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\in R \quad \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \Bigg]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3}=\frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3}=\frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3}=\frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0, n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n}=\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1=\operatorname{arctg} z+c \text{ pre } a=1, n\in N. \end{array}\right] = 16I_3-24I_2+8I_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} 16I_3-24I_2+8I_1 = 16\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2+\frac{z}{2\cdot 2(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 \\ \qquad\qquad =\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1+\frac{z}{2\cdot 1(z^2+1)}\right]+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1 \end{array}\right] = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\operatorname{arctg} z+c$$

$$= \left[\begin{array}{l} z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \Rightarrow z^2+1=\frac{1-t}{1+t}+1=\frac{2}{1+t}=\frac{2}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{z}{z^2+1}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2}=\frac{\sqrt{1-x}}{2} \\ \qquad\qquad \Rightarrow \frac{z}{(z^2+1)^2}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}=\frac{\sqrt{1-x}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}\frac{\sqrt{1-x}}{4}+\frac{\sqrt{x-x^2}}{4} \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}-24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}+8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0, n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1=\operatorname{arctg} z+c \text{ pre } a=1, n\in N. \end{array}\right] = 16I_3-24I_2+8I_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} 16I_3-24I_2+8I_1 = 16\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2+\frac{z}{2\cdot 2(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 \\ \qquad = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1+\frac{z}{2\cdot 1(z^2+1)}\right]+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1 \end{array}\right] = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\operatorname{arctg} z+c$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \Rightarrow z^2+1 = \frac{1-t}{1+t}+1 = \frac{2}{1+t} = \frac{2}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2} = \frac{\sqrt{1-x}}{2} & -\frac{6z}{z^2+1} = -3\sqrt{1-x} \\ \qquad \Rightarrow \frac{z}{(z^2+1)^2} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{1-x}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{4}+\frac{\sqrt{x-x^2}}{4} & \frac{4z}{(z^2+1)^2} = \sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2} \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií I – Príklad

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} + c$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{x}\in R & \Rightarrow x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0 & \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 0;\infty)\cup\langle 0;1\rangle \Rightarrow x\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{x},\ x=t^2 & x\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int 2t\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow z^2(1+t)=1-t & z^2-1=-z^2-t & t\in\langle 0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle \end{array}\right] = \int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\cdot\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 8\int\frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^4+2z^2+1-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3z^2-1}{(z^2+1)^3} = \frac{(z^2+1)^2-3(z^2+1)+2}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{z^2+1}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{2}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$= 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z = 16\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3} - 24\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} + 8\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1 = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+c \text{ pre } a>0, n\in N. \\ \qquad\qquad \Rightarrow I_n = \int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1} + \frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}},\ I_1 = \mathrm{arctg}\,z + c \text{ pre } a=1, n\in N. \end{array}\right] = 16I_3 - 24I_2 + 8I_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} 16I_3-24I_2+8I_1 = 16\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2+\frac{z}{2\cdot 2(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 \\ \qquad = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1+\frac{z}{2\cdot 1(z^2+1)}\right]+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1 \end{array}\right] = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\,\mathrm{arctg}\,z+c$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} z=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \Rightarrow z^2+1 = \frac{1-t}{1+t}+1 = \frac{2}{1+t} = \frac{2}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2} = \frac{\sqrt{1-x}}{2} & -\frac{6z}{z^2+1} = -3\sqrt{1-x} \\ \Rightarrow \frac{z}{(z^2+1)^2} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{1-x}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{4} + \frac{\sqrt{x-x^2}}{4} & \frac{4z}{(z^2+1)^2} = \sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2} \end{array}\right]$$

$$= -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} + c,\ x\in\langle 0;1\rangle,\ c\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a, b, e \in R,\ a \neq 0$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES
- 2. ES
- 3. ES

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.
- 2. ES
- 3. ES

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.
- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.
- 3. ES

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.
- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.
- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\left[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow\right.$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}$.

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\left[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow\right.$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}$.

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\left[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow\right.$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\Big[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\Big[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\Big[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\frac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}=\frac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2}=\frac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\sqrt{ax^2+bx+e}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\Big[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $t\pm\sqrt{a}x$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\Big[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $xt\pm\sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\Big[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\frac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}=\frac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2}=\frac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\sqrt{ax^2+bx+e}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre $t$ a znamienko výrazu $a-t^2$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\Big[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $t\pm\sqrt{a}x$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\Big[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $xt\pm\sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\Big[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\frac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}=\frac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2}=\frac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\sqrt{ax^2+bx+e}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre $t$ a znamienko výrazu $a-t^2$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt{ax^2+bx+e}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\Big[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $t\pm\sqrt{a}x$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\Big[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $xt\pm\sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\Big[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\frac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}=\frac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2}=\frac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\sqrt{ax^2+bx+e}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre $t$ a znamienko výrazu $a-t^2$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt{ax^2+bx+e}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- V niektorých prípadoch môžeme použiť iba jednu z ES a niekedy môžeme použiť aj všetky tri ES.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\Big[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $t\pm\sqrt{a}x$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\Big[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $xt\pm\sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\Big[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\frac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}=\frac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2}=\frac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\sqrt{ax^2+bx+e}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre $t$ a znamienko výrazu $a-t^2$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt{ax^2+bx+e}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- V niektorých prípadoch môžeme použiť iba jednu z ES a niekedy môžeme použiť aj všetky tri ES.
- Použitie ES je síce účinné, ale väčšinou veľmi prácne.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\Big[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $t\pm\sqrt{a}x$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\Big[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $xt\pm\sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\Big[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\frac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}=\frac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2}=\frac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\sqrt{ax^2+bx+e}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre $t$ a znamienko výrazu $a-t^2$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt{ax^2+bx+e}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- V niektorých prípadoch môžeme použiť iba jednu z ES a niekedy môžeme použiť aj všetky tri ES.
- Použitie ES je síce účinné, ale väčšinou veľmi prácne.
- Dnes, keď existuje mnoho programov pre symbolické výpočty (napr. `Wolfram Mathematica`, `Maple` alebo `wxMaxima`) tento problém už nie je relevantný.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie – ES

Integrály typu $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\,\mathrm{d}x$ pre $a,b,e\in R,\ a\neq 0$ môžeme racionalizovať pomocou Eulerových substitúcií:

- 1. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$.

  $\left[x^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2.\Rightarrow bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x.\Rightarrow\right.$ • $x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $t\pm\sqrt{a}x$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 2. ES má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=xt\pm\sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$.

  $\left[ax^2+bx+e=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}+e\Rightarrow ax^2+bx=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{e}.\Rightarrow (a-t^2)x^2=(\pm 2\sqrt{e}t-b)x.\Rightarrow\right.$ • $x=\frac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - Substitúcie $xt\pm\sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme.

- 3. ES má tvar $t=\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa pre $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$ dva rôzne reálne korene polynómu $ax^2+bx+e$.

  $\left[t\geq 0,\ t^2(x-\beta)=a(x-\alpha).\Rightarrow\right.$ • $x=\frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\frac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}=\frac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2}=\frac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$

  $\Rightarrow$ • $\sqrt{ax^2+bx+e}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.\Rightarrow$ • $\mathrm{d}x=\frac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.\Big]$

  - V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre $t$ a znamienko výrazu $a-t^2$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $x$, $\sqrt{ax^2+bx+e}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- V niektorých prípadoch môžeme použiť iba jednu z ES a niekedy môžeme použiť aj všetky tri ES.
- Použitie ES je síce účinné, ale väčšinou veľmi prácne.
- Dnes, keď existuje mnoho programov pre symbolické výpočty (napr. `Wolfram Mathematica`, `Maple` alebo `wxMaxima`) tento problém už nie je relevantný.
- Často nám pri integrovaní pomôžu iné substitúcie (napr. pomocou goniometrických alebo hyperbolických funkcií, resp. substitúcia $t=\frac{1}{x}$).

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$ pre $a > 0$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$ pre $a > 0$.

- $=$ [ 2. ES: $\sqrt{a^2-x^2} = a - xt$

$$a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \Big| \; x = \frac{2at}{t^2+1},$$

$$2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x$$ ]

- $=$ [ Subst. $x = a \sin t$ ]

- $=$ [ Subst. $x = a \cos t$ ]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $=$ [ 2. ES: $\sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1}$ | $a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2$ | $2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x$ | $x = \frac{2at}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$ ]

- $=$ [ Subst. $x = a\sin t$ | $\sin t = \frac{x}{a}$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$ | $\cos t > 0$ pre $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ]

- $=$ [ Subst. $x = a\cos t$ | $\cos t = \frac{x}{a}$, $t = \arccos\frac{x}{a}$ | $\sin t > 0$ pre $t \in (0; \pi)$ ]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \\ a^2-x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \left| \begin{array}{l} x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 \\ \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \end{array} \right. \\ 2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{\mathrm{L'h}}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 \end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t \left| \begin{array}{ll} \sin t = \frac{x}{a}, & t = \arcsin\frac{x}{a} \\ \cos t > 0 \text{ pre } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) & \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (-a; a) \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t \left| \begin{array}{ll} \cos t = \frac{x}{a}, & t = \arccos\frac{x}{a} \\ \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) & \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in (-a; a) \\ t \in (0; \pi) \end{array} \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & & x\in(-a;0) \Rightarrow t\in(-1;0) \\
a^2-x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x\neq 0 & x\in(0;a) \Rightarrow t\in(0;1) \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm 1 \\
x\to 0 \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & &
\end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l}
\text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x\in(-a;a) \quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\
\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \quad = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t
\end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l}
\text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x\in(-a;a) \quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\
\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t\in(0;\pi) & t\in(0;\pi) \quad = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t
\end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & & x\in(-a;0) \Rightarrow t\in(-1;0) \\ a^2-x^2 = a^2-2axt+x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x\neq 0 & x\in(0;a) \Rightarrow t\in(0;1) \\ 2axt = x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at = xt^2+x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm 1 \\ x\to 0 \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & & \end{array}\right]$$

  $$= \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right]$$

  $$= \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\cos t}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t\in(0;\pi) & t\in(0;\pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right]$$

  $$= \int \frac{-a\sin t\,\mathrm{d}t}{a\sin t}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & & x\in(-a;0) \Rightarrow t\in(-1;0) \\ a^2-x^2 = a^2-2axt+x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x\neq 0 & x\in(0;a) \Rightarrow t\in(0;1) \\ 2axt = x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at = xt^2+x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm 1 \\ x\to 0 \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\cos t} = \int \mathrm{d}t$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t\in(0;\pi) & t\in(0;\pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-a\sin t\,\mathrm{d}t}{a\sin t} = -\int \mathrm{d}t$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & & x\in(-a;0) \Rightarrow t\in(-1;0) \\ a^2-x^2 = a^2-2axt+x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x\neq 0 & x\in(0;a) \Rightarrow t\in(0;1) \\ 2axt = x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at = xt^2+x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm 1 \\ x\to 0 \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{\mathrm{L'h}}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + c$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\cos t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t\in(0;\pi) & t\in(0;\pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-a\sin t\,\mathrm{d}t}{a\sin t} = -\int \mathrm{d}t = -t + c_3$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c_1 = \arcsin\frac{x}{a} + c_2 = -\arccos\frac{x}{a} + c_3 \text{ pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & & x\in(-a;0) \Rightarrow t\in(-1;0) \\ a^2-x^2 = a^2-2axt+x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x\neq 0 & x\in(0;a) \Rightarrow t\in(0;1) \\ 2axt = x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at = xt^2+x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm 1 \\ x\to 0 \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + c = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c_1,$$

$$x\in(-a;0)\cup(0;a),\ c_1\in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\cos t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \arcsin\frac{x}{a} + c_2,\ x\in(-a;a),\ c_2\in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t\in(0;\pi) & t\in(0;\pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-a\sin t\,\mathrm{d}t}{a\sin t} = -\int \mathrm{d}t = -t + c_3 = -\arccos\frac{x}{a} + c_3,\ x\in(-a;a),\ c_3\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$ pre $a > 0$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$ pre $a > 0$.

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l}
1.\,\text{ES:} \quad \sqrt{x^2-a^2} = t - x & \sqrt{x^2-a^2} = t - x = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} & x \in (-\infty; -a) \Rightarrow t \in (-a; 0) \\
x^2 - a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \in (a; \infty) \Rightarrow t \in (a; \infty) \\
x = \frac{t^2+a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2-a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty} \left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm a \\
x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) \cdot \frac{x - \sqrt{x^2-a^2}}{x - \sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x - \sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{-\infty - \infty} = 0 & &
\end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l}
3.\,\text{ES:} \quad t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{1 - \frac{2a}{x+a}} & x \to \pm\infty \Rightarrow t \to 1 & x \in (-\infty; -a) \Rightarrow t \in (1; \infty) \\
t^2(x+a) = x - a \Rightarrow x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x \to a^+ \Rightarrow t \to 0 & x \in (a; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1) \\
\mathrm{d}x = \frac{2at(1-t^2) - a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2} & x \to -a^- \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-a^-} \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{-2a}{0^-}} = \infty & \\
x^2 - a^2 = a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2} - a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = a^2\frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2} = \frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = \frac{2at}{|1-t^2|} & &
\end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l}
\text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2-a^2}=t-x & \sqrt{x^2-a^2}=t-x=t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t} & x\in(-\infty;-a)\Rightarrow t\in(-a;0) \\
x^2-a^2=t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\in(a;\infty)\Rightarrow t\in(a;\infty) \\
x=\frac{t^2+a^2}{2t}, \quad t=x+\sqrt{x^2-a^2} & x\to\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)=\infty+\infty=\infty & x\to\pm a\Rightarrow t\to\pm a \\
x\to-\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0 & &
\end{array}\right] = \int\frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l}
\text{3. ES:} \quad t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\to\pm\infty\Rightarrow t\to 1 & x\in(-\infty;-a)\Rightarrow t\in(1;\infty) \\
t^2(x+a)=x-a\Rightarrow x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\to a^+\Rightarrow t\to 0 & x\in(a;\infty)\Rightarrow t\in(0;1) \\
\mathrm{d}x=\frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2} & x\to-a^-\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{-2a}{0^-}}=\infty & \\
x^2-a^2=a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}=a^2\frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2}=\frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2}\Rightarrow\sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{|1-t^2|} & &
\end{array}\right] = \int\frac{\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}} = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2-a^2}=t-x & \sqrt{x^2-a^2}=t-x=t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t} & x\in(-\infty;-a)\Rightarrow t\in(-\infty;0) \\ x^2-a^2=t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\in(a;\infty)\Rightarrow t\in(a;\infty) \\ x=\frac{t^2+a^2}{2t}, \quad t=x+\sqrt{x^2-a^2} & x\to\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\infty+\infty=\infty & x\to\pm a\Rightarrow t\to\pm a \\ x\to-\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0 & & \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{3. ES:} \quad t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\to\pm\infty\Rightarrow t\to 1 & x\in(-\infty;-a)\Rightarrow t\in(1;\infty) \\ t^2(x+a)=x-a\Rightarrow x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\to a^+\Rightarrow t\to 0 & x\in(a;\infty)\Rightarrow t\in(0;1) \\ \mathrm{d}x=\frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2} & x\to -a^-\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to -a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{-2a}{0^-}}=\infty & \\ x^2-a^2=a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}=a^2\frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2}=\frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2}\Rightarrow\sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{|1-t^2|} & & \end{array}\right] = \int \frac{\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} t\in(0;1)\Rightarrow x\in(a;\infty) & \operatorname{sgn} x=1 & \frac{1}{|1-t^2|}=\frac{1}{1-t^2}=-\frac{1}{t^2-1}=-\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1} \\ t\in(1;\infty)\Rightarrow x\in(-\infty;-a) & \operatorname{sgn} x=-1 & \frac{1}{|1-t^2|}=\frac{1}{t^2-1}=-(-\frac{1}{t^2-1})=-\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1} \end{array}\right] = -\operatorname{sgn} x\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1 \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2-a^2} = t - x & \sqrt{x^2-a^2} = t - x = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} & x \in (-\infty; -a) \Rightarrow t \in (-a; 0) \\ x^2 - a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \in (a; \infty) \Rightarrow t \in (a; \infty) \\ x = \frac{t^2+a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2-a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm a \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1, \; x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty), \; c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{3. ES:} \quad t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x \to \pm\infty \Rightarrow t \to 1 & x \in (-\infty; -a) \Rightarrow t \in (1; \infty) \\ t^2(x+a) = x - a \Rightarrow x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x \to a^+ \Rightarrow t \to 0 & x \in (a; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2} & x \to -a^- \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{-2a}{0^-}} = \infty & \\ x^2 - a^2 = a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2} - a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = a^2\frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2} = \frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = \frac{2at}{|1-t^2|} & & \end{array}\right] = \int \frac{\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} t \in (0;1) \Rightarrow x \in (a; \infty) & \operatorname{sgn} x = 1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{t^2-1} = -\operatorname{sgn} x \cdot \frac{1}{t^2-1} \\ t \in (1; \infty) \Rightarrow x \in (-\infty; -a) & \operatorname{sgn} x = -1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{t^2-1} = -\left(-\frac{1}{t^2-1}\right) = -\operatorname{sgn} x \cdot \frac{1}{t^2-1} \end{array}\right] = -\operatorname{sgn} x \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= -\operatorname{sgn} x \cdot \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1 \qquad \text{pre } a>0.$$

$$= \left[\begin{array}{ll|l}
\text{1. ES:} & \sqrt{x^2-a^2} = t - x & \sqrt{x^2-a^2} = t - x = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(-\infty;0) \\
 & x^2-a^2 = t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(a;\infty) \\
 & x = \frac{t^2+a^2}{2t}, \quad t = x+\sqrt{x^2-a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm a \\
 & x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 &
\end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c_1\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{ll|l}
\text{3. ES:} & t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\to\pm\infty \Rightarrow t\to 1 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(1;\infty) \\
 & t^2(x+a) = x-a \Rightarrow x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\to a^+ \Rightarrow t\to 0 & x\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \\
 & \mathrm{d}x = \frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2} & x\to -a^- \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{-2a}{0^-}} = \infty & \\
 & x^2-a^2 = a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2} - a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = a^2\frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2} = \frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = \frac{2at}{|1-t^2|} &
\end{array}\right] = \int \frac{\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l}
t\in(0;1) \Rightarrow x\in(a;\infty) & \operatorname{sgn} x = 1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{t^2-1} = -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1} \\
t\in(1;\infty) \Rightarrow x\in(-\infty;-a) & \operatorname{sgn} x = -1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{t^2-1} = -\left(-\frac{1}{t^2-1}\right) = -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1}
\end{array}\right] = -\operatorname{sgn} x\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \operatorname{sgn} x\cdot\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_2 = \operatorname{sgn} x\left[\ln|t+1| - \ln|t-1|\right] + c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1 = \operatorname{sgn} x\left[\ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-1\right|\right] + c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l}
\text{1. ES:} & \sqrt{x^2-a^2} = t - x & \sqrt{x^2-a^2} = t - x = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(-\infty;0) \\
 & x^2-a^2 = t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(a;\infty) \\
x = \frac{t^2+a^2}{2t}, & t = x+\sqrt{x^2-a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm a \\
x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & &
\end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c_1\in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l}
\text{3. ES:} & t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\to\pm\infty \Rightarrow t\to 1 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(1;\infty) \\
 & t^2(x+a) = x-a \Rightarrow x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\to a^+ \Rightarrow t\to 0 & x\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \\
 & \mathrm{d}x = \frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2} & x\to -a^- \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to -a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{-2a}{0^-}} = \infty & \\
 & x^2-a^2 = a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2} - a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = a^2\frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2} = \frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = \frac{2at}{|1-t^2|} & &
\end{array}\right] = \int \frac{\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l}
t\in(0;1) \Rightarrow x\in(a;\infty) & \operatorname{sgn} x = 1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{t^2-1} = -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1} \\
t\in(1;\infty) \Rightarrow x\in(-\infty;-a) & \operatorname{sgn} x = -1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{t^2-1} = -\left(-\frac{1}{t^2-1}\right) = -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1}
\end{array}\right] = -\operatorname{sgn} x\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \operatorname{sgn} x\cdot\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_2 = \operatorname{sgn} x\left[\ln|t+1| - \ln|t-1|\right] + c_2$$

$$= \operatorname{sgn} x\left[\ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-1\right|\right] + c_2,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c_2\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1 = \operatorname{sgn} x\left[\ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-1\right|\right] + c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{1. ES:} & \sqrt{x^2-a^2} = t-x & \sqrt{x^2-a^2} = t-x = t-\frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(-\infty;0) \\ & x^2-a^2 = t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(a;\infty) \\ x = \frac{t^2+a^2}{2t}, & t = x+\sqrt{x^2-a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to\pm a \Rightarrow t\to\pm a \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & & \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c_1\in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{3. ES:} & t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\to\pm\infty \Rightarrow t\to 1 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(1;\infty) \\ & t^2(x+a) = x-a \Rightarrow x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\to a^+ \Rightarrow t\to 0 & x\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \\ & \mathrm{d}x = \frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2} & x\to -a^- \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to -a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{-2a}{0^-}} = \infty & \\ & x^2-a^2 = a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2} - a^2\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = a^2\frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2} = \frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = \frac{2at}{|1-t^2|} & & \end{array}\right] = \int \frac{\frac{4at\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{|1-t^2|}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} t\in(0;1) \Rightarrow x\in(a;\infty) & \operatorname{sgn} x = 1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{t^2-1} = -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1} \\ t\in(1;\infty) \Rightarrow x\in(-\infty;-a) & \operatorname{sgn} x = -1 & \frac{1}{|1-t^2|} = \frac{1}{t^2-1} = -\left(-\frac{1}{t^2-1}\right) = -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{t^2-1} \end{array}\right] = -\operatorname{sgn} x\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= -\operatorname{sgn} x\cdot\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \operatorname{sgn} x\cdot\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_2 = \operatorname{sgn} x\left[\ln|t+1| - \ln|t-1|\right] + c_2$$

$$= \operatorname{sgn} x\left[\ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-1\right|\right] + c_2,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c_2\in R.$$

[Oba výsledky sú správne.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$ pre $a > 0$. [Iné riešenie.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$ pre $a > 0$. [Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x = \cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t$ je iba $(a; \infty)$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x = \cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t$ je iba $(a; \infty)$.

Pre $x \in (a; \infty)$ platí:

- $$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a},\ t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x \in (a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t > 0 \text{ pre } t \in (0;\infty) & t \in (0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x = \cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t$ je iba $(a; \infty)$.

Pre $x \in (a; \infty)$ platí:

- $$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a},\ t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x \in (a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t > 0 \text{ pre } t \in (0;\infty) & t \in (0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x = \cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t$ je iba $(a; \infty)$.

Pre $x \in (a; \infty)$ platí:

- $$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a},\ t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x \in (a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t > 0 \text{ pre } t \in (0;\infty) & t \in (0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t + c_1$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x = \cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t$ je iba $(a; \infty)$.

Pre $x \in (a; \infty)$ platí:

- $$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a},\ t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x \in (a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t > 0 \text{ pre } t \in (0;\infty) & t \in (0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t + c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1$$

$$x \in (a; \infty), \qquad c_1 \in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x = \cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t$ je iba $(a; \infty)$.

Pre $x \in (a; \infty)$ platí:

- $$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a},\ t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x \in (a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t > 0 \text{ pre } t \in (0;\infty) & t \in (0;\infty) \end{array} \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \quad = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t + c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1 = \left[ \begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{array} \right]$$

$$x \in (a; \infty), \qquad c_1 \in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{r} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$x\in(a;\infty), \qquad c_1\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1$$

$$x\in(a;\infty), \qquad c_1\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1$$

$$x\in(a;\infty), \qquad c_1\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x = \cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t$ je iba $(a; \infty)$.

Pre $x \in (a; \infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a},\ t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x \in (a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t > 0 \text{ pre } t \in (0;\infty) & t \in (0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t + c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right) + c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + c_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) - \ln a + c_1$$

$$x \in (a; \infty), \qquad c_1 \in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[\, c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R \,\right] \qquad x\in(a;\infty), \qquad c_1\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \text{ pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t + c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[\,c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\,\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[\,c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\,\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[\,c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\,\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\,\text{Predchádzajúca časť}\,\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[\,c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\,\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\,\text{Predchádzajúca časť}\,\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[\, c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R \,\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\,\text{Predchádzajúca časť}\,\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[\, c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\,\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\,\text{Predchádzajúca časť}\,\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\text{Predchádzajúca časť}\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right.\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \quad \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\text{Predchádzajúca časť}\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right|+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array}\ \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\text{Predchádzajúca časť}\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right|+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array}\ \begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \quad =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\text{Predchádzajúca časť}\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right|+c_2 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a^2+c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right.\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l}\operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty).\end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\text{Predchádzajúca časť}\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right|+c_2 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a^2+c_2$$

$$= \left[c=c_2-\ln a^2=c_2-2\ln a,\ c,\ c_2\in R\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \text{ pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\left|\sinh t\right|=a\sinh t \end{array}\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l} \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\text{Predchádzajúca časť}\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right|+c_2 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a^2+c_2$$

$$= \left[c=c_2-\ln a^2=c_2-2\ln a,\ c,\ c_2\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(-\infty;-a),\ c\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \text{ pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

Pri substitúcii $x=\cosh t$ musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x=\cosh t$ je iba $(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=a\cosh t & \cosh t=\frac{x}{a},\ t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) \\ \quad \mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t>0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) \end{array} \left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ =a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t \end{array}\right.\right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= t+c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1 = \left[\begin{array}{l}\operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \qquad\qquad \text{pre } x\in\langle 1;\infty).\end{array}\right] = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)+c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1$$

$$= \left[c=c_1-\ln a,\ c,\ c_1\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(a;\infty),\ c\in R,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí:

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x=-z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array}\right] = -\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\text{Predchádzajúca časť}\right] = -\ln\left|z+\sqrt{z^2-a^2}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c_2$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right|+c_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right|+c_2 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a^2+c_2$$

$$= \left[c=c_2-\ln a^2=c_2-2\ln a,\ c,\ c_2\in R\right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(-\infty;-a),\ c\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ môžeme použiť substitúciu $x=-a\cosh t$, $t=\operatorname{argcosh}\frac{-x}{a}$, $t\in(0;\infty)$ a pokračovať ako v prvej časti pre $x\in(a;\infty)$.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ pre $a > 0$.

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x \in R \Rightarrow t \in (0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t \in R & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x \in R \Rightarrow t \in (0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t \in R & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x \in R \Rightarrow t \in (0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to -\infty \Rightarrow t \to \infty \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t \in R & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x \in R \Rightarrow t \in (0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x \in R \quad \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t \in R & t \in R \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2 \text{ pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x \in R \Rightarrow t \in (0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t}\,\mathrm{d}t}{\frac{2t^2}{t^2+a^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1, \; x \in R, \; c_1 \in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t \in R & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2$$

$$x \in R, \qquad c_2 \in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2 \text{ pre } a > 0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x \in R \Rightarrow t \in (0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x \to \infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty + \infty = \infty & x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t}\,\mathrm{d}t}{\frac{2t^2}{t^2+a^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1, \; x \in R, \; c_1 \in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t \in R & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2$$

$$= \left[\text{Funkciu argsinh môžeme vyjadriť v tvare } \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\; x \in R.\right]$$

$x \in R, \qquad c_2 \in R.$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x\in R \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to-\infty \Rightarrow t\to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to-\infty \Rightarrow t\to\infty \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t}\,\mathrm{d}t}{\frac{2t^2}{t^2+a^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \quad \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t\in R & t\in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2$$

$$= \left[\text{Funkciu argsinh môžeme vyjadriť v tvare } \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.\right]$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) + c_2$$

$$x\in R, \qquad c_2\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x\in R \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to-\infty \Rightarrow t\to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \quad \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t\in R & t\in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2$$

$$= \left[\text{Funkciu argsinh môžeme vyjadriť v tvare } \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.\right]$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) + c_2 = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right) + c_2$$

$$x\in R, \qquad c_2\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t-x & \sqrt{x^2+a^2} = t-x = t-\frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x\in R \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to-\infty \Rightarrow t\to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x+\sqrt{x^2+a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \quad\quad \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t>0 \text{ pre všetky } t\in R & t\in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2$$

$$= \left[\text{Funkciu argsinh môžeme vyjadriť v tvare } \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.\right]$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2 = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right)+c_2$$

$$= \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + c_2$$

$$x\in R, \qquad c_2\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x\in R \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to-\infty \Rightarrow t\to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \quad \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t\in R & t\in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2$$

$$= \left[\text{Funkciu argsinh môžeme vyjadriť v tvare } \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.\right]$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) + c_2 = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right) + c_2$$

$$= \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + c_2 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a + c_2$$

$$x\in R, \qquad c_2\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & \sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x\in R \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to-\infty \Rightarrow t\to 0 \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \infty+\infty = \infty & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x\in R \\ \quad \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t\in R & t\in R \end{array} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right.\right]$$

$$= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_2$$

$$= \left[\text{Funkciu argsinh môžeme vyjadriť v tvare } \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.\right]$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) + c_2 = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right) + c_2$$

$$= \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + c_2 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l} c_1 = c_2 - \ln a \\ c_1\in R,\ c_2\in R \end{array}\right] \qquad x\in R, \qquad c_2\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \text{ pre } a>0.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2+a^2}=t-x & \sqrt{x^2+a^2}=t-x=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & x\in R \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to-\infty\Rightarrow t\to 0 \\ x=\frac{t^2-a^2}{2t}, \quad t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\to\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\infty+\infty=\infty & x\to\infty\Rightarrow t\to\infty \\ x\to-\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a}, \quad t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \mathrm{d}x=a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t>0 \text{ pre všetky } t\in R & t\in R & \quad =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t+c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2$$

$$= \left[\text{Funkciu argsinh môžeme vyjadriť v tvare } \operatorname{argsinh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.\right]$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2 = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right)+c_2$$

$$= \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_2 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l} c_1=c_2-\ln a \\ c_1\in R,\ c_2\in R \end{array}\right] = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1,c_2\in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ pre $a > 0$,

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0,$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) & t \in (0; \pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right]$$

- $$= \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0,$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) & t \in (0; \pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right] = -\int a\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$

- $$= \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{-x \cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0,$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
  $$= a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) & t \in (0; \pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right] = -\int a\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$
  $$= -a^2 \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

- $$= \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{-x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = a^2-x^2 & x \in (-a; a) \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle 0; a^2) \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ u = x & \qquad\qquad = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2-x^2} \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0,$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
  $$= a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) & t \in (0; \pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right] = -\int a\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$
  $$= -a^2 \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -a^2 \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$

---

- $$= \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{-x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = a^2-x^2 & x \in (-a; a) \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle 0; a^2) \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ u = x & \qquad\qquad = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2-x^2} \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$
  $$= \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0,$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
  $$= a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right] + c_1 = a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{2\sin t\cdot\cos t}{4}\right] + c_1$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) & t \in (0; \pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right] = -\int a\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$
  $$= -a^2 \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -a^2 \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right] + c_2 = -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{2\sin t\cdot\cos t}{4}\right] + c_2$$

---

- $$= \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{-x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = a^2-x^2 & x \in (-a; a) \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t \in (0; a^2) \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ u = x & = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2-x^2} \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$
  $$= \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - I.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0,$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x \in (-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right] + c_1 = a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{2\sin t\cdot\cos t}{4}\right] + c_1$$
$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a\sin t\cdot a\cos t}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, \quad t = \arccos\frac{x}{a} & x \in (-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) & t \in (0;\pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right] = -\int a\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -a^2 \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -a^2 \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right] + c_2 = -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{2\sin t\cdot\cos t}{4}\right] + c_2$$
$$= -\frac{a^2 t}{2} + \frac{a\cos t\cdot a\sin t}{2} + c_2$$

- $$= \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{-x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = a^2-x^2 & x \in (-a;a) \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle 0;a^2)\end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ u = x & \qquad = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2-x^2} \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - I.$$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} \quad \text{pre } a > 0, \quad \text{kde } \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c_1 = -\arccos\frac{x}{a} + c_2.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, & t = \arcsin\frac{x}{a} & x \in (-a;a) \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right] + c_1 = a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{2\sin t\cdot\cos t}{4}\right] + c_1$$
$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a\sin t\cdot a\cos t}{2} + c_1 = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c_1,\ x \in \langle -a;a\rangle,\ c_1 \in R.$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a}, & t = \arccos\frac{x}{a} & x \in (-a;a) \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) & & t \in (0;\pi) \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right] = -\int a\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -a^2\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right] + c_2 = -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{2\sin t\cdot\cos t}{4}\right] + c_2$$
$$= -\frac{a^2 t}{2} + \frac{a\cos t\cdot a\sin t}{2} + c_2 = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c_2,\ x \in \langle -a;a\rangle,\ c_2 \in R.$$

- $$= \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{-x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = a^2-x^2 & x \in (-a;a) \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle 0;a^2)\end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ u = x & u' = 1 \qquad\qquad = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - I.$$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

$$\Rightarrow \bullet\ I = \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2},\ x \in (-a;a).$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

- $=$

$$\left[\begin{array}{l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \;\Big|\; x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \;\Big|\; \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 &
\end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

$$= \left[\begin{array}{l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \quad x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 &
\end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

$$= \left[\begin{array}{ll|l}
\multicolumn{2}{l|}{\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1}} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
\multicolumn{2}{l|}{x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{\mathrm{L'h}}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0} &
\end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\ a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ 2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 \\ \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\ \qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3} \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

$$= \left[\begin{array}{l|l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & &
\end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l}
\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\
\qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3}
\end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right] \mathrm{d}t = a^2 \left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

$$= \left[\begin{array}{l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \quad x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 &
\end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l}
\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\
\qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3}
\end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right] \mathrm{d}t = a^2 \left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$\left[\text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a > 0, n \in N.\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

$$= \left[\begin{array}{l|l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 & x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x & \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\mathrm{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & &
\end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l}
\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\
\qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3}
\end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right]\mathrm{d}t = a^2\left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l}
\text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \; I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a > 0, n \in N. \\
\qquad \Rightarrow I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}, \; I_1 = \operatorname{arctg} t + c \text{ pre } a = 1, n \in N.
\end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\ a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \quad x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ 2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\mathrm{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & \end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\ \qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3} \end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right] \mathrm{d}t = a^2 \left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \; I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a > 0, n \in N. \\ \qquad \Rightarrow I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}, \; I_1 = \operatorname{arctg} t + c \text{ pre } a = 1, n \in N. \end{array}\right] = a^2\left[8I_3 - 8I_2 + 2I_1\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\ a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \quad x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ 2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{\mathrm{L'h}}{\mathrm{H}}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & \end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\ \qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3} \end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right] \mathrm{d}t = a^2 \left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \; I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a > 0, n \in N. \\ \qquad \Rightarrow I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}, \; I_1 = \operatorname{arctg} t + c \text{ pre } a = 1, n \in N. \end{array}\right] = a^2\left[8I_3 - 8I_2 + 2I_1\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} 8I_3 - 8I_2 + 2I_1 = 8\left[\frac{3}{2\cdot 2} I_2 + \frac{t}{2\cdot 2(t^2+1)^2}\right] - 8I_2 + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2I_2 + 2I_1 \\ \qquad = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2\left[\frac{1}{2\cdot 1} I_1 + \frac{t}{2\cdot 1(t^2+1)}\right] + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{t^2+1} + I_1 \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\ a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \quad x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ 2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\mathrm{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 & \end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\ \qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3} \end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right]\mathrm{d}t = a^2\left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \; I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a > 0, n \in N. \\ \qquad \Rightarrow I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}, \; I_1 = \operatorname{arctg} t + c \text{ pre } a = 1, n \in N. \end{array}\right] = a^2\left[8I_3 - 8I_2 + 2I_1\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} 8I_3 - 8I_2 + 2I_1 = 8\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2 + \frac{t}{2\cdot 2(t^2+1)^2}\right] - 8I_2 + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2I_2 + 2I_1 \\ \qquad = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1 + \frac{t}{2\cdot 1(t^2+1)}\right] + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{t^2+1} + I_1 \end{array}\right] = \frac{2a^2t}{(t^2+1)^2} - \frac{a^2t}{t^2+1} + a^2 \operatorname{arctg} t + c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

[Iné riešenie.]

$$= \left[\begin{array}{l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \quad x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \neq 0 & \\
\mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\mathrm{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 &
\end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l}
\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\
\qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3}
\end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right]\mathrm{d}t = a^2\left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l}
\text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \; I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a > 0, n \in N. \\
\qquad \Rightarrow I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}, \; I_1 = \operatorname{arctg} t + c \text{ pre } a = 1, n \in N.
\end{array}\right] = a^2\left[8I_3 - 8I_2 + 2I_1\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l}
8I_3 - 8I_2 + 2I_1 = 8\left[\frac{3}{2\cdot 2} I_2 + \frac{t}{2\cdot 2(t^2+1)^2}\right] - 8I_2 + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2I_2 + 2I_1 \\
\qquad = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2\left[\frac{1}{2\cdot 1} I_1 + \frac{t}{2\cdot 1(t^2+1)}\right] + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{t^2+1} + I_1
\end{array}\right] = \frac{2a^2t}{(t^2+1)^2} - \frac{a^2t}{t^2+1} + a^2 \operatorname{arctg} t + c$$

$$= \left[t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \cdot \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-(a^2-x^2)}{x(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \;\middle|\; \frac{2a^2t}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2at}{t^2+1}\cdot\frac{2at}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t} = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{ax}{2} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} \;\middle|\; \frac{a^2t}{t^2+1} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2at}{t^2+1} = \frac{ax}{2}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0. \qquad \text{[Iné riešenie.]}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l}
\text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x \in \langle -a; 0) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \\
a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 & x \in (0; a\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\
2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x & x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \\
x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\mathrm{L'h}\,\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 &
\end{array}\right] = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l}
\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\
\qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3}
\end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right]\mathrm{d}t = a^2\left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l}
\text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a > 0, n \in N. \\
\qquad \Rightarrow I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}},\ I_1 = \operatorname{arctg} t + c \text{ pre } a = 1, n \in N.
\end{array}\right] = a^2\left[8I_3 - 8I_2 + 2I_1\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l}
8I_3 - 8I_2 + 2I_1 = 8\left[\frac{3}{2\cdot 2} I_2 + \frac{t}{2\cdot 2(t^2+1)^2}\right] - 8I_2 + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2I_2 + 2I_1 \\
\qquad = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2\left[\frac{1}{2\cdot 1} I_1 + \frac{t}{2\cdot 1(t^2+1)}\right] + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{t^2+1} + I_1
\end{array}\right] = \frac{2a^2t}{(t^2+1)^2} - \frac{a^2t}{t^2+1} + a^2 \operatorname{arctg} t + c$$

$$= \left[t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \cdot \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-(a^2-x^2)}{x(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \;\middle|\; \frac{2a^2t}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2at}{t^2+1}\cdot\frac{2at}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t} = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{ax}{2} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} \;\middle|\; \frac{a^2t}{t^2+1} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2at}{t^2+1} = \frac{ax}{2}\right]$$

$$= \frac{ax}{2} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{ax}{2} + a^2 \operatorname{arctg}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + a^2 \operatorname{arctg} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c \quad \text{pre } a>0.$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \text{2. ES:} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - xt = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \\ a^2-x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \\ 2axt = x^2t^2 + x^2 \Rightarrow 2at = xt^2 + x \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x \in \langle -a;0) \Rightarrow t \in \langle -1;0) \\ x \in (0;a\rangle \Rightarrow t \in (0;1\rangle \\ x \to \pm a \Rightarrow t \to \pm 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x \neq 0 \\ \\ \\ \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \\ \mathrm{d}x = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \\ \\ \end{array}\right. = \int \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \cdot \frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{2a^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = 2a^2 \int \frac{(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^3} = \frac{t^4+2t^2+1-4t^2-4+4}{(t^2+1)^3} \\ \qquad = \frac{(t^2+1)^2-4(t^2+1)+4}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^3} \end{array}\right]$$

$$= 2a^2 \int \left[\frac{4}{(t^2+1)^3} - \frac{4}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right]\mathrm{d}t = a^2\left[8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - 8\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{04-In 2: } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \; I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \text{ pre } a>0, n \in N. \\ \qquad \Rightarrow I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}, \; I_1 = \operatorname{arctg} t + c \text{ pre } a=1, n \in N. \end{array}\right] = a^2\left[8I_3 - 8I_2 + 2I_1\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} 8I_3 - 8I_2 + 2I_1 = 8\left[\frac{3}{2\cdot 2}I_2 + \frac{t}{2\cdot 2(t^2+1)^2}\right] - 8I_2 + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2I_2 + 2I_1 \\ \qquad = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2\left[\frac{1}{2\cdot 1}I_1 + \frac{t}{2\cdot 1(t^2+1)}\right] + 2I_1 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{t^2+1} + I_1 \end{array}\right] = \frac{2a^2t}{(t^2+1)^2} - \frac{a^2t}{t^2+1} + a^2 \operatorname{arctg} t + c$$

$$= \left[t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \cdot \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-(a^2-x^2)}{x(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \;\middle|\; \frac{2a^2t}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2at}{t^2+1}\cdot\frac{2at}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t} = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{ax}{2} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} \;\middle|\; \frac{a^2t}{t^2+1} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2at}{t^2+1} = \frac{ax}{2}\right]$$

$$= \frac{ax}{2} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{ax}{2} + a^2 \operatorname{arctg} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + a^2 \operatorname{arctg} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c, \; x \in \langle -a;0) \cup (0;a\rangle, \; c \in R.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$ pre $a > 0$.

- $= \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x$

$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$ pre $a > 0$.

- $= \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$ pre $a > 0$.

- $= \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x \cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$ pre $a > 0$.

- $= \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x \cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right]$$

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in\langle a^2;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(0;\infty) \Rightarrow t\in\langle a^2;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x \in (-\infty;-a) \Rightarrow t \in (0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in (a;\infty) \Rightarrow t \in (0;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right]$$
  $$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in \langle a^2;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle 0;\infty) \Rightarrow t \in \langle a^2;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right]$$
  $$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right]$$
$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = x\sqrt{x^2-a^2} - I - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in\langle a^2;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in\langle 0;\infty) \Rightarrow t\in\langle a^2;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right]$$
$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right]$$
$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = x\sqrt{x^2-a^2} - I - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(a^2;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(0;\infty) \Rightarrow t\in\langle a^2;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right]$$
$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-a^2} \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = x\sqrt{x^2-a^2} - I - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(a^2;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(0;\infty) \Rightarrow t\in\langle a^2;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+a^2} \\ u' = 1 & \end{array}\right]$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$\Rightarrow$ • $I = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklady

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c \text{ pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-a^2 & x\in(-\infty;-a) \Rightarrow t\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(a;\infty) \Rightarrow t\in(0;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right]$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = x\sqrt{x^2-a^2} - I - \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$\Rightarrow$ • $$I = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c,$$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

$x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$, $c \in R$.

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c \text{ pre } a > 0.$$

- $$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{l|l} v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+a^2 & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(a^2;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t\in(0;\infty) \Rightarrow t\in\langle a^2;\infty) \end{array}\right] \\ u = x & u' = 1 \qquad = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right]$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$\Rightarrow$ • $$I = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

[Dostali sme rovnicu s neznámou $I$.]

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:}\quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x \in (-\infty;-1) \Rightarrow t \in (-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2 - 1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x \in (1;\infty) \Rightarrow t \in (1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1}) \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x \to \pm 1 \Rightarrow t \to \pm 1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\qquad t = \frac{1}{x} & x \in (-\infty;-1) \Rightarrow t \in (-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x \in (1;\infty) \Rightarrow t \in (0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:}\quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1 \Rightarrow t\to\pm1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty \end{array}\right]$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:} \quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1 \Rightarrow t\to\pm1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}}$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}}$$

$$= \int \frac{-2t\cdot\operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:}\quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1 \Rightarrow t\to\pm1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = \int \frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}}$$

$$= \int \frac{-2t\cdot\operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = 1-t^2 & t\in(-1;0) \Rightarrow z\in(0;1) \\ \mathrm{d}z = -2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1) \Rightarrow z\in(0;1) \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:}\quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1 \Rightarrow t\to\pm1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = \int\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z = t^2+1 & t\in(-1;0) & z\in(1;2) \\ \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t & t\in(1;\infty) & z\in(2;\infty) \end{array}\right]$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}}$$

$$= \int\frac{-2t\cdot\operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = 1-t^2 & t\in(-1;0) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = -1 \\ \mathrm{d}z = -2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = 1 \end{array}\right] = \operatorname{sgn} t\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \operatorname{sgn} t\int\frac{z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z}{2}$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1 \Rightarrow t\to\pm1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = \int\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z = t^2+1 & t\in(-1;0) & z\in(1;2) \\ \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t & t\in(1;\infty) & z\in(2;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2} = \int 2z^{-2}\,\mathrm{d}z$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right] = \int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}}$$

$$= \int\frac{-2t\cdot\operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = 1-t^2 & t\in(-1;0) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = -1 \\ \mathrm{d}z = -2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = 1 \end{array}\right] = \operatorname{sgn} t\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \operatorname{sgn} t\int\frac{z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z}{2}$$

$$= \operatorname{sgn} t\,\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}} + c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{1. ES:} \quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1 \Rightarrow t\to\pm1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = \int\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z = t^2+1 & t\in(-1;0) & z\in(1;2) \\ \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t & t\in(1;\infty) & z\in(2;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2} = \int 2z^{-2}\,\mathrm{d}z = \frac{2z^{-1}}{-1} + c_1 = -\frac{2}{z} + c_1$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right] = \int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}}$$

$$= \int\frac{-2t\cdot\operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = 1-t^2 & t\in(-1;0) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = -1 \\ \mathrm{d}z = -2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = 1 \end{array}\right] = \operatorname{sgn} t\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \operatorname{sgn} t\int\frac{z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z}{2}$$

$$= \operatorname{sgn} t\,\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}} + c_2 = \operatorname{sgn} t\sqrt{z} + c_2$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:}\quad \sqrt{x^2-1}=t-x & \sqrt{x^2-1}=t-\frac{t^2+1}{2t}=\frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1)\Rightarrow t\in(-1;0) & t=x+\sqrt{x^2-1} \\ x^2-1=t^2-2tx+x^2 & t^2+1=2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty)\Rightarrow t\in(1;\infty) & =(x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1=2tx\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x=\frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1\Rightarrow t\to\pm1 & =\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{-\infty-\infty}=0 \\ x\to\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\infty \end{array}\right] = \int\frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = \int\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=t^2+1 & t\in(-1;0)\,|\,z\in(1;2) \\ \mathrm{d}z=2t\,\mathrm{d}t & t\in(1;\infty)\,|\,z\in(2;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2} = \int 2z^{-2}\,\mathrm{d}z = \frac{2z^{-1}}{-1}+c_1 = -\frac{2}{z}+c_1 = c_1-\frac{2}{t^2+1}$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1)\Rightarrow t\in(-1;0)\Rightarrow \operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}t=-1 & \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}=\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn}t} \\ x=\frac{1}{t},\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty)\Rightarrow t\in(0;1)\Rightarrow \operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}t=1 & \sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn}x} \end{array}\right] = \int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn}t}}$$

$$= \int\frac{-2t\cdot\operatorname{sgn}t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=1-t^2 & t\in(-1;0)\Rightarrow z\in(0;1)\Rightarrow \operatorname{sgn}t=-1 \\ \mathrm{d}z=-2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1)\Rightarrow z\in(0;1)\Rightarrow \operatorname{sgn}t=1 \end{array}\right] = \operatorname{sgn}t\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \operatorname{sgn}t\int\frac{z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z}{2}$$

$$= \operatorname{sgn}t\,\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}+c_2 = \operatorname{sgn}t\sqrt{z}+c_2 = \left[\begin{array}{l} t\in(-1;0),\,x\in(-\infty;-1)\Rightarrow I=-\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}=-\sqrt{z}+c_2 \\ t\in(0;1),\,x\in(1;\infty)\Rightarrow I=\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}=\sqrt{z}+c_2 \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:}\quad \sqrt{x^2-1}=t-x & \sqrt{x^2-1}=t-\frac{t^2+1}{2t}=\frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1)\Rightarrow t\in(-1;0) & t=x+\sqrt{x^2-1} \\ x^2-1=t^2-2tx+x^2 & t^2+1=2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty)\Rightarrow t\in(1;\infty) & =(x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1=2tx\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x=\frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1\Rightarrow t\to\pm1 & =\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{-\infty-\infty}=0 \\ x\to\infty\Rightarrow t\to\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\infty \end{array}\right] = \int\frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = \int\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=t^2+1 & t\in(-1;0)\,|\,z\in(1;2) \\ \mathrm{d}z=2t\,\mathrm{d}t & t\in(1;\infty)\,|\,z\in(2;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2} = \int 2z^{-2}\,\mathrm{d}z = \frac{2z^{-1}}{-1}+c_1 = -\frac{2}{z}+c_1 = c_1-\frac{2}{t^2+1}$$

$$= c_1-\frac{2}{2x(x+\sqrt{x^2-1})}$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1)\Rightarrow t\in(-1;0)\Rightarrow \operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}t=-1 & \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}=\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn}t} \\ x=\frac{1}{t},\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty)\Rightarrow t\in(0;1)\Rightarrow \operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}t=1 & \sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn}x} \end{array}\right] = \int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn}t}}$$

$$= \int\frac{-2t\cdot\operatorname{sgn}t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z=1-t^2 & t\in(-1;0)\Rightarrow z\in(0;1)\Rightarrow \operatorname{sgn}t=-1 \\ \mathrm{d}z=-2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1)\Rightarrow z\in(0;1)\Rightarrow \operatorname{sgn}t=1 \end{array}\right] = \operatorname{sgn}t\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \operatorname{sgn}t\int\frac{z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z}{2}$$

$$= \operatorname{sgn}t\,\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}+c_2 = \operatorname{sgn}t\sqrt{z}+c_2 = \left[\begin{array}{l|l} t\in(-1;0),\,x\in(-\infty;-1)\Rightarrow I=-\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}=-\sqrt{z}+c_2 & -\sqrt{z}=-\sqrt{1-t^2}=-\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} \\ t\in(0;1),\,x\in(1;\infty)\Rightarrow I=\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}=\sqrt{z}+c_2 & \sqrt{z}=\sqrt{1-t^2}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{array}\right]$$

# Integrovanie iracionálnych funkcií II – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = c_1 - \frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES:}\quad \sqrt{x^2-1} = t - x & \sqrt{x^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) & t = x + \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2 - 2tx + x^2 & t^2+1 = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) & = (x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ t^2+1 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\to\pm1 \Rightarrow t\to\pm1 & = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = \int \frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } z = t^2+1 & t\in(-1;0) & z\in(1;2) \\ \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t & t\in(1;\infty) & z\in(2;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2} = \int 2z^{-2}\,\mathrm{d}z = \frac{2z^{-1}}{-1} + c_1 = -\frac{2}{z} + c_1 = c_1 - \frac{2}{t^2+1}$$

$$= c_1 - \frac{2}{2x(x+\sqrt{x^2-1})} = c_1 - \frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-1}},\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty),\ c\in R.$$

---

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1) \Rightarrow t\in(-1;0) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = -1 & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} t = 1 & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}}$$

$$= \int \frac{-2t\cdot\operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = 1-t^2 & t\in(-1;0) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = -1 \\ \mathrm{d}z = -2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1) \Rightarrow z\in(0;1) \Rightarrow \operatorname{sgn} t = 1 \end{array}\right] = \operatorname{sgn} t \int \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \operatorname{sgn} t \int \frac{z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z}{2}$$

$$= \operatorname{sgn} t\,\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}} + c_2 = \operatorname{sgn} t\sqrt{z} + c_2 = \left[\begin{array}{l|l} t\in(-1;0), x\in(-\infty;-1) \Rightarrow I = -\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = -\sqrt{z} + c_2 & -\sqrt{z} = -\sqrt{1-t^2} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} \\ t\in(0;1), x\in(1;\infty) \Rightarrow I = \int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \sqrt{z} + c_2 & \sqrt{z} = \sqrt{1-t^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c_2,\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty),\ c_2\in R.$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

  $\Big[ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z$, t. j. $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty)$ pre každé $k \in Z$.

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$,

  [$x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, t. j. $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$. $\Rightarrow$ $t \in (-\infty; \infty)$ pre každé $k \in Z$. $\Rightarrow$ • $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$,

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$,

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$,

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}.\right]$

- $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$
- $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$,

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

  - $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$
  - $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$,

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}$
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$,

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}$
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$, • $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, • $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$.
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$, • $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, • $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$.
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $\sin x$, $\cos x$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$, • $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, • $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$.
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $\sin x$, $\cos x$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Funkcie $\sin x$, $\cos x$ môžu byť aj implicitne zadané, napr. $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$,

# Integrovanie goniometrických funkcií – UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií
  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (Univerzálna goniometrická substitúcia).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie,
  potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (Univerzálna hyperbolická substitúcia).

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej goniometrickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, t. j. $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$, • $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, • $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

  $\left[x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ \text{t. j. } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z. \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \text{ pre každé } k \in Z. \Rightarrow \bullet\ \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},\ \text{t. j. } x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.\right]$

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$.
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $\sin x$, $\cos x$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Funkcie $\sin x$, $\cos x$ môžu byť aj implicitne zadané, napr. $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, ale nesmú obsahovať funkciu $x$ a jej mocniny.

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

- $= \left[ \begin{array}{c|c|c} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right]$

- $= \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}$

- $= \displaystyle\int \frac{\sin x\, \mathrm{d}x}{\sin^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in Z \end{array} \right]$

- $= \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1 - \cos^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

- $$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t \cos t} = \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin t \cos t}$$

- $$= \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1 - \cos^2 x} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array} \right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

- $$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t \cos t} = \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin t \cos t}$$
$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t} - \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t}$$

- $$= \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1 - \cos^2 x} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array} \right] = \int \frac{-\mathrm{d}t}{1 - t^2}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t \cos t} = \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin t \cos t}$$
$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t} - \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c_1 = \ln\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right| + c_1$$

---

- $$= \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1 - \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right] = \int \frac{-\mathrm{d}t}{1 - t^2}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

## $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t \cos t} = \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin t \cos t}$$
$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t} - \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c_1 = \ln\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right| + c_1$$
$$= \ln|\operatorname{tg} t| + c_1$$

---

- $$= \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1 - \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right] = \int \frac{-\mathrm{d}t}{1 - t^2}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos t} = \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin t\cos t}$$
$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t} - \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c_1 = \ln\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right| + c_1$$
$$= \ln|\operatorname{tg} t| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

---

- $$= \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right] = \int \frac{-\mathrm{d}t}{1-t^2}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c_2,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c_2 \in R.$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z \Rightarrow t \in (-1; 1) \\ & t \neq \pm 1 & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right), k \in Z \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array} \right]$

- $= \displaystyle\int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-1; 1) \\ & t \neq \pm 1 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}$

- $= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-1; 1) \\ & t \neq \pm 1 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

---

- $$= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-1; 1) \\ & t \neq \pm 1 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

---

- $$= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right] = \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-1; 1) \\ & t \neq \pm 1 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{2}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c_1$$

---

- $$= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right] = \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c_2$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (-1; 1) \\ & t \neq \pm 1 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in Z \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1 = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_1$$

---

- $$= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right] = \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = -\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + c_2$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x\in(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi),\, k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;-1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in Z & x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi),\, k\in Z \Rightarrow t\in(-1;1) \\ & t\neq\pm 1 & x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi),\, k\in Z \Rightarrow t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1 = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_1$$

$$= \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + c_1,$$

$$x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z,\ c_1\in R.$$

---

- $$= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\sin x & x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi),\, k\in Z \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & t\in(-1;1) \end{array}\right] = \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = -\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + c_2$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c_2 = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) + c_2,$$

$$x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ c_2\in R.$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array} \right]$

- $= \displaystyle\int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UGS:}\quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\, k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$

- $= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$

  $= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}}$

- $= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2}$$

---

- $$= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & \cos x \neq 0 & x \in \left\langle -\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \left\langle 0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi\right\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

  $$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = t+1 & t \in (-\infty; -1) \Rightarrow u \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & t \in (-1; \infty) \Rightarrow u \in (0; \infty) \end{array}\right]$$

---

- $$= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

  $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & \cos x \neq 0 & x \in \langle -\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle 0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \end{array}\right]$$

  $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ u = t+1 & t \in (-\infty; -1) \Rightarrow u \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & t \in (-1; \infty) \Rightarrow u \in (0; \infty) \end{array}\right]$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 2\int u^{-2}\,\mathrm{d}u$$

---

- $$= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & \cos x \neq 0 & x \in \left\langle -\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \left\langle 0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi\right\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \operatorname{tg} x + \int t^{-2}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

## $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$

  $= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = t+1 & t \in (-\infty; -1) \Rightarrow u \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & t \in (-1; \infty) \Rightarrow u \in (0; \infty) \end{array} \right]$

  $= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 2\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = 2\frac{u^{-1}}{-1} + c_1 = -\frac{2}{u} + c_1$

---

- $= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$

  $= \left[ \begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t = \cos x & \cos x \neq 0 & x \in \langle -\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle 0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \end{array} \right]$

  $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \operatorname{tg} x + \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{tg} x + \frac{t^{-1}}{-1} + c_2$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1}\neq -1 & x\in\left(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow t\in(-\infty;-1) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right)\Rightarrow t\in(-1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=t+1 & t\in(-\infty;-1)\Rightarrow u\in(-\infty;0) \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & t\in(-1;\infty)\Rightarrow u\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 2\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = 2\frac{u^{-1}}{-1}+c_1 = -\frac{2}{u}+c_1 = -\frac{2}{t+1}+c_1 = c_1-\frac{2}{t+1}$$

---

- $$= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t=\cos x & \cos x\neq 0 & x\in\left\langle -\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow t\in\langle -1;0) & x\in\left\langle 0+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow t\in(0;1\rangle \\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;0+2k\pi\right\rangle\Rightarrow t\in(0;1\rangle & x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right\rangle\Rightarrow t\in\langle -1;0) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \operatorname{tg} x + \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{tg} x + \frac{t^{-1}}{-1}+c_2 = \operatorname{tg} x - \frac{1}{t}+c_2$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = c_1 - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (-1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = t+1 & t \in (-\infty; -1) \Rightarrow u \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & t \in (-1; \infty) \Rightarrow u \in (0; \infty) \end{array}\right]$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 2\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = 2\frac{u^{-1}}{-1} + c_1 = -\frac{2}{u} + c_1 = -\frac{2}{t+1} + c_1 = c_1 - \frac{2}{t+1}$$

$$= c_1 - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1},\ x \in R - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi,\ k \in Z\right\},\ c \in R.$$

---

- $$= \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \cos x & \cos x \neq 0 & x \in \left\langle -\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \left\langle 0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi\right\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \operatorname{tg} x + \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{tg} x + \frac{t^{-1}}{-1} + c_2 = \operatorname{tg} x - \frac{1}{t} + c_2$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} + c_2 = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + c_2,\ x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ c_2 \in R.$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right]$

- $= \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

- $= \displaystyle\int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z \end{array} \right]$

- $= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int \mathrm{d}t$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$

- $= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= \operatorname{tg} t + c_1$$

- $$= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sin x & \sin x \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in (0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & x \neq k\pi, k \in Z & x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= \operatorname{tg} t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sin x & \sin x \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in (0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & x \neq k\pi, k \in Z & x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= \operatorname{tg} t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sin x & \sin x \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in (0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & x \neq k\pi, k \in Z & x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\operatorname{cotg} x - \int t^{-2}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= \operatorname{tg} t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sin x & \sin x \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in (0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & x \neq k\pi, k \in Z & x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\operatorname{cotg} x - \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} x - \frac{t^{-1}}{-1} + c_2$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= \operatorname{tg} t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sin x & \sin x \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in (0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & x \neq k\pi, k \in Z & x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\operatorname{cotg} x - \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} x - \frac{t^{-1}}{-1} + c_2 = \frac{1}{t} - \operatorname{cotg} x + c_2$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1 = \frac{1-\cos x}{\sin x} + c_2$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:}\ \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z & t \in (-\infty; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int \mathrm{d}t$$
$$= t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= \operatorname{tg} t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sin x & \sin x \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in (0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & x \neq k\pi, k \in Z & x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \Rightarrow t \in \langle -1; 0) & x \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; 1\rangle \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\operatorname{cotg} x - \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} x - \frac{t^{-1}}{-1} + c_2 = \frac{1}{t} - \operatorname{cotg} x + c_2$$
$$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} + c_2 = \frac{1-\cos x}{\sin x} + c_2,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c_2 \in R.$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

- $= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, \mathrm{d}x$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

- $= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, \mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2 \int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}} \, \mathrm{d}t$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, \mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2 \int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}} \, \mathrm{d}t = 2 \int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} \, \mathrm{d}t$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, \mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \Rightarrow t \in (-\infty; \infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2 \int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}} \, \mathrm{d}t = 2 \int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} \, \mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

- $$= \left[\begin{array}{r} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} =$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

- $$= \left[\begin{array}{r} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \\ \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x & x\in\left\langle \frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

- $$= \left[\begin{array}{r} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \\ \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x & x\in\left\langle \frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-(\sqrt{2})^2}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} \quad x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} \quad \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

- $$= \left[\begin{array}{r} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \\ \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x & x\in\left\langle \frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array}\begin{array}{l} x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z\Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \\ \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x & x\in\left\langle \frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z\Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + c$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+\sin 2x\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}-\sin 2x\right) + c$$

- $$= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \Rightarrow t\in(-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{\frac{(1-2t^2+t^4)-4t^2}{(t^2+1)^3}}{\frac{16t^4+(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)}{(t^2+1)^4}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1-6t^2+t^4)(t^2+1)}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}\,\mathrm{d}t = ☹.$$

[Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.]

---

- $$= \left[\begin{array}{r} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \\ \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x & x\in\left\langle \frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z \Rightarrow t\in\langle -1;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+\sin 2x\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}-\sin 2x\right) + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[ \begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right]$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[ \begin{array}{r} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, \mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x}$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $= \left[ \begin{array}{r} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ du = 2\,dx & u \in R \end{array} \right]$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ du = 2\,dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & t = \operatorname{tg} x & u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & du = \frac{2\,dt}{t^2+1} & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z,\ t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, \mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, \mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, \mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & t = \operatorname{tg} x & u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z,\ t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \,\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & t = \operatorname{tg} x & u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z,\ t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ \quad du = 2\,dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & t = \operatorname{tg} x & u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \quad \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z,\ t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \,\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & t = \operatorname{tg} x & u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z,\ t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x \,\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[ \begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & t = \operatorname{tg} x & u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ k \in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z,\ t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\,\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm \mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm \mathrm{i}) \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\,\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \qquad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\,\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \qquad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} \left[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})\right]\cdot\left[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})\right] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})\right]\cdot\left[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})\right] \\ \quad = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}\right]\cdot\left[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}\right] = \frac{1}{2}\left[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)\right] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{c} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{c} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]\mathrm{d}t$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \qquad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + c$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{c} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c$$

$$= \left[t^2\pm\sqrt{2}t+1 = (t\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+\tfrac{1}{2} > 0\right]$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{c} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c$$

$$= \left[t^2\pm\sqrt{2}t+1 = (t\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+\tfrac{1}{2}>0\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + c$$

# Integrovanie goniometrických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1} + c$$

[Iné riešenie.]

- $$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & u\in R \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\,\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\mathrm{i}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm\mathrm{i}) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1-\mathrm{i})] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm1+\mathrm{i})]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm1-\mathrm{i})] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp1)+\mathrm{i}]\cdot[(\sqrt{2}t\mp1)-\mathrm{i}] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{c} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c$$

$$= \left[t^2\pm\sqrt{2}t+1 = (t\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+\tfrac{1}{2}>0\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1} + c,$$

$$x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií

  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (UGS).

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (UHS).

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (UHS).

**Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, \mathrm{d}x$**

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$

  $[x \in R. \Rightarrow t \in (-1; 1).$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií

  väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

  $\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow\right.$ • $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - e^0}{e^x + e^0} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

$\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - e^0}{e^x + e^0} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]' \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

  $\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - e^0}{e^x + e^0} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]' \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

- $\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t$
- $\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}$
- $\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

  $\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - e^0}{e^x + e^0} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]' \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

- $\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}}$
- $\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}}$
- $\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

  $\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - e^0}{e^x + e^0} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]' \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

- $\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}$
- $\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}$
- $\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

  $\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - e^0}{e^x + e^0} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]' \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

  - $\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 - \operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}$
  - $\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}$
  - $\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$,
- $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$,
- $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$,
- $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

$\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x-e^0}{e^x+e^0} = \frac{e^x-1}{e^x+1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]' \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

- $$\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$
- $$\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$
- $$\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$, • $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$, • $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

$\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x-e^0}{e^x+e^0} = \frac{e^x-1}{e^x+1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]' \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

- $$\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$
- $$\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$
- $$\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $\sinh x$, $\cosh x$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$, • $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$, • $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

$\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x-e^0}{e^x+e^0} = \frac{e^x-1}{e^x+1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]'\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

- $\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$.
- $\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$.
- $\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $\sinh x$, $\cosh x$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Funkcie $\sinh x$, $\cosh x$ môžu byť aj implicitne zadané, napr. $\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$,

# Integrovanie hyperbolických funkcií – UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia]

- Integrovanie goniometrických, resp. hyperbolických funkcií väčšinou nie je problematické ale veľmi prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (UGS).
- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, potom môžeme použiť $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ (UHS).

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$ môžeme racionalizovať pomocou Univerzálnej hyperbolickej substitúcie:

- $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, • $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$, • $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$, • $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

$\left[x \in R. \Rightarrow t \in (-1;1). \Rightarrow \bullet\ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^x-e^0}{e^x+e^0} = \frac{e^x-1}{e^x+1}. \Rightarrow \bullet\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right]'\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}.\right]$

- $$\mathrm{d}x = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$
- $$\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$
- $$\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

- Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba $\sinh x$, $\cosh x$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.
- Funkcie $\sinh x$, $\cosh x$ môžu byť aj implicitne zadané, napr. $\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$, ale nesmú obsahovať funkciu $x$ a jej mocniny.

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} \quad t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-1; 0) \\ \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \neq 0,\ t \neq 0 & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1) \end{array} \right]$

- $= \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}}$

- $= \displaystyle\int \frac{\sinh x \, \mathrm{d}x}{\sin^2 x}$

- $= \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} \quad t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-1; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \neq 0,\ t \neq 0 & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right]$

- $= \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UHS:} \quad t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-1; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \neq 0,\ t \neq 0 & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sinh t \cosh t} = \int \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\sinh t \cosh t}\, \mathrm{d}t$

- $= \int \frac{\sinh x\, \mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sinh x\, \mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \cosh x & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (1; \infty) \\ \mathrm{d}t = \sinh x\, \mathrm{d}x & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array} \right]$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (0; 1) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array} \right]$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \neq 0 \\ & \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \neq 0,\ t \neq 0 \end{array} \begin{array}{l} x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-1; 0) \\ x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sinh t \cosh t} = \int \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\sinh t \cosh t}\,\mathrm{d}t$
  $= \int \frac{\cosh t\,\mathrm{d}t}{\sinh t} - \int \frac{-\sinh t\,\mathrm{d}t}{\cosh t}$

- $= \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \cosh x & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (1; \infty) \\ \mathrm{d}t = \sinh x\,\mathrm{d}x & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (0; 1) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t - \frac{1}{t})}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

## $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:}\quad t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \neq 0 & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(-1;0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x\neq 0,\ t\neq 0 & x\in(0;\infty) \Rightarrow t\in(0;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1$$
$$= \ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x\in R,\ x\neq 0,\ c_1\in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & x\in(0;\infty) \Rightarrow t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sinh t\cosh t} = \int \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\sinh t\cosh t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{\cosh t\,\mathrm{d}t}{\sinh t} - \int \frac{-\sinh t\,\mathrm{d}t}{\cosh t} = \ln|\sinh t| - \ln|\cosh t| + c_1 = \ln\left|\frac{\sinh t}{\cosh t}\right| + c_1$$

- $$= \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \cosh x & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(1;\infty) \\ \mathrm{d}t = \sinh x\,\mathrm{d}x & x\in(0;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(0;1) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x\in(0;\infty) \Rightarrow t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t-\frac{1}{t})}$$
$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} \quad t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (-1;0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \neq 0,\ t \neq 0 & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (0;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1$$
$$= \ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R,\ x \neq 0,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sinh t\cosh t} = \int \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\sinh t\cosh t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{\cosh t\,\mathrm{d}t}{\sinh t} - \int \frac{-\sinh t\,\mathrm{d}t}{\cosh t} = \ln|\sinh t| - \ln|\cosh t| + c_1 = \ln\left|\frac{\sinh t}{\cosh t}\right| + c_1$$
$$= \ln|\operatorname{tgh} t| + c_1$$

- $$= \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \cosh x & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (1;\infty) \\ \mathrm{d}t = \sinh x\,\mathrm{d}x & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (0;1) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (1;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t-\frac{1}{t})}$$
$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_3$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right| + c_3$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:}\ \ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-1; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \neq 0,\ t \neq 0 & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1$$
$$= \ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R,\ x \neq 0,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sinh t \cosh t} = \int \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\sinh t \cosh t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{\cosh t\,\mathrm{d}t}{\sinh t} - \int \frac{-\sinh t\,\mathrm{d}t}{\cosh t} = \ln|\sinh t| - \ln|\cosh t| + c_1 = \ln\left|\frac{\sinh t}{\cosh t}\right| + c_1$$
$$= \ln|\operatorname{tgh} t| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R,\ x \neq 0,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sinh x\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \cosh x & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (1; \infty) \\ \mathrm{d}t = \sinh x\,\mathrm{d}x & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} + c_2,\ x \in R,\ x \neq 0,\ c_2 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (0; 1) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t - \frac{1}{t})}$$
$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_3 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right| + c_3,\ x \in R,\ x \neq 0,\ c_3 \in R.$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{UHS:} \quad t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty; \infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \cosh x \geq 1 > 0 & t \in (-1; 1) \end{array} \right]$

- $= \displaystyle\int \frac{\cosh x \,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cosh x \,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x + 1}$

- $= \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UHS:}\quad t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \cosh x \geq 1 > 0 & t \in (-1;1) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

- $$= \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x + 1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t = \sinh x & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & t \in (-\infty;\infty) \end{array}\right]$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array}\right]$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UHS:}\quad t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \cosh x \geq 1 > 0 & t \in (-1;1) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

- $$= \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x+1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t = \sinh x & & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & & t \in (-\infty;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & & & t \in (0;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:}\ \ t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \cosh x \geq 1 > 0 & t \in (-1;1) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + c_1$$

- $$= \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x+1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sinh x & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & t \in (-\infty;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c_2$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + c_3$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = 2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} + c_1 = \mathrm{arctg}\,\sinh x + c_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^x + c_3$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UHS:}\quad t = \mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \neq 0 & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \cosh x \geq 1 > 0 & t \in (-1;1) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + c_1 = 2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ c_1 \in R.$$

---

- $$= \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x + 1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\ t = \sinh x & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & t \in (-\infty;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \mathrm{arctg}\,t + c_2 = \mathrm{arctg}\,\sinh x + c_2,\ x \in R,\ c_2 \in R.$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in (-\infty;\infty) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + c_3 = 2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^x + c_3,\ x \in R,\ c_3 \in R.$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l|l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & t \neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1} = 1-\sqrt{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (-1; 1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x \neq -1 & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (1-\sqrt{2}; 1) \end{array} \right]$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x - e^{-x}}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & t \neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1} = 1-\sqrt{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (-1; 1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x \neq -1 & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (1-\sqrt{2}; 1) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x-e^{-x}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = e^x & x = \ln t & \sinh x \neq -1, & t \neq e^{\ln(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 \quad x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}-1) \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (\sqrt{2}-1; \infty) \end{array}\right]$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & t \neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1} = 1-\sqrt{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (-1; 1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x \neq -1 & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (1-\sqrt{2}; 1) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2+2t} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t^2-2t-1}$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x-e^{-x}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = e^x & x = \ln t & \sinh x \neq -1, & t \neq e^{\ln(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 \quad x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}-1) \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (\sqrt{2}-1; \infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t-\frac{1}{t})}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & t \neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1} = 1-\sqrt{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (-1; 1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x \neq -1 & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (1-\sqrt{2}; 1) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2+2t} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2}$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x-e^{-x}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = e^x & x = \ln t & \sinh x \neq -1, & t \neq e^{\ln(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 \quad x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}-1) \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (\sqrt{2}-1; \infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2-2}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & t \neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1} = 1-\sqrt{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (-1; 1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x \neq -1 & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (1-\sqrt{2}; 1) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2+2t} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + c_1$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x-e^{-x}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = e^x & x = \ln t & \sinh x \neq -1, & t \neq e^{\ln(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 \quad x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}-1) \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (\sqrt{2}-1; \infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2-2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + c_2$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & t \neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1} = 1-\sqrt{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (-1; 1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x \neq -1 & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (1-\sqrt{2}; 1) \end{array}\right]$$

  $$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2+2t} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + c_1$$

  $$= \left[\begin{array}{l} t \neq 1 \pm \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \notin (-1; 1) \end{array}\right]$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x - e^{-x}}$$

  $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = e^x & x = \ln t & \sinh x \neq -1, & t \neq e^{\ln(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 \quad x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}-1) \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (\sqrt{2}-1; \infty) \end{array}\right]$$

  $$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2-2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + c_2$$

  $$= \left[\begin{array}{l} t \neq -1 \pm \sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \notin (0; \infty) \end{array}\right]$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS: } t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x=\frac{2t}{1-t^2} & t\neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2}=\frac{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1}=\frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1}=1-\sqrt{2} & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1))\Rightarrow t\in(-1;1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x\neq -1 & x\neq \operatorname{argsinh}(-1)=\ln(-1+\sqrt{1+1})=\ln(\sqrt{2}-1) & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty)\Rightarrow t\in(1-\sqrt{2};1) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2+2t} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} t\neq 1\pm\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2}\notin(-1;1) \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right| + c_1$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x-e^{-x}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=e^x & x=\ln t & \sinh x\neq -1, & t\neq e^{\ln(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1 \quad x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1))\Rightarrow t\in(0;\sqrt{2}-1) \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t}{t} & x\neq \operatorname{argsinh}(-1)=\ln(-1+\sqrt{1+1})=\ln(\sqrt{2}-1) & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty)\Rightarrow t\in(\sqrt{2}-1;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2-2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l} t\neq -1\pm\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2}\notin(0;\infty) \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + c_2$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tgh}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tgh}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}} \right| + c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\mathrm{e}^x+1-\sqrt{2}}{\mathrm{e}^x+1+\sqrt{2}} \right| + c_2$$

- $$= \left[ \begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & t \neq \operatorname{tgh}\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2}-1)}-1}{\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2}-1)}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-1}{\sqrt{2}-1+1} = 1-\sqrt{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (-1; 1-\sqrt{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x \neq -1 & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (1-\sqrt{2}; 1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2+2t} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + c_1$$

$$= \left[ \begin{array}{l} t \neq 1 \pm \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \notin (-1; 1) \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} \right| + c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tgh}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tgh}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}} \right| + c_1,$$

$$x \in R,\ x \neq \ln(\sqrt{2}-1),\ c_1 \in R.$$

---

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & \sinh x \neq -1, & t \neq \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 \quad x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}-1) \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & x \neq \operatorname{argsinh}(-1) = \ln(-1+\sqrt{1+1}) = \ln(\sqrt{2}-1) & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty) \Rightarrow t \in (\sqrt{2}-1; \infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2-2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + c_2$$

$$= \left[ \begin{array}{l} t \neq -1 \pm \sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \notin (0; \infty) \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\mathrm{e}^x+1-\sqrt{2}}{\mathrm{e}^x+1+\sqrt{2}} \right| + c_2,$$

$$x \in R,\ x \neq \ln(\sqrt{2}-1),\ c_2 \in R.$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{dx}{1+\cosh x}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \in R \Rightarrow t \in (-1;1) \end{array} \right]$

- $= \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}$

- $= \displaystyle\int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x + 1)(\cosh x - 1)}$

- $= \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \in R \Rightarrow t \in (-1;1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in R \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in R \end{array} \right]$

- $= \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x + 1)(\cosh x - 1)} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{r|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \in R \Rightarrow t \in (-1;1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \mathrm{d}t$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in R \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t}$

- $= \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x + 1)(\cosh x - 1)} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in R \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array} \right]$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x}$$

- $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \in R \Rightarrow t \in (-1;1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \mathrm{d}t = t + c_1$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in R \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c_1$

- $= \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x + 1)(\cosh x - 1)} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$

  $= \left[ \begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (0;\infty) \end{array} \right]$

- $= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in R \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t+\frac{1}{t})}$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{r|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \in R \Rightarrow t \in (-1;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \mathrm{d}t = t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,$$
  $x \in R,\ c_1 \in R.$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in R \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x + 1)(\cosh x - 1)} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$$
  $$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in R \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$$
  $$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \in R \Rightarrow t \in (-1;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \mathrm{d}t = t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,$$
  $$x \in R,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in R \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x + 1)(\cosh x - 1)} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$$
  $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \frac{t^{-1}}{-1} - \operatorname{cotgh} x + c_2$$
  $$= c_2 - \frac{1}{t} - \operatorname{cotgh} x$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in R \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$$
  $$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = 2\int (t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x \in R \Rightarrow t \in (-1;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \mathrm{d}t = t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,$$
  $$x \in R,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in R \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ c_1 \in R.$$

- $$= \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x + 1)(\cosh x - 1)} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x - 1} = \int \frac{(\cosh x - 1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$$
  $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x \in (-\infty;0) \Rightarrow t \in (-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & x \in (0;\infty) \Rightarrow t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \frac{t^{-1}}{-1} - \operatorname{cotgh} x + c_2$$
  $$= c_2 - \frac{1}{t} - \operatorname{cotgh} x = c_2 - \frac{1}{\sinh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x \in R \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$$
  $$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = 2\int (t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{2(t+1)^{-1}}{-1} + c_3 = c_3 - \frac{2}{t+1}$$

# Integrovanie hyperbolických funkcií – Príklad

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1 = c_2 - \frac{1+\cosh x}{\sinh x} = c_3 - \frac{2}{\mathrm{e}^x+1}$$

- $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x\in R \Rightarrow t\in(-1;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \mathrm{d}t = t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,$$
  $x\in R,\ c_1\in R.$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x\in R \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t\in R \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

- $$= \int \frac{(\cosh x-1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x+1)(\cosh x-1)} = \int \frac{(\cosh x-1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x-1} = \int \frac{(\cosh x-1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$$
  $$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x\in(-\infty;0) \Rightarrow t\in(-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & x\in(0;\infty) \Rightarrow t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \frac{t^{-1}}{-1} - \operatorname{cotgh} x + c_2$$
  $$= c_2 - \frac{1}{t} - \operatorname{cotgh} x = c_2 - \frac{1}{\sinh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = c_2 - \frac{1+\cosh x}{\sinh x},\ x\in R,\ x\neq 0,\ c_2\in R.$$

- $$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x = \ln t & x\in R \\ \mathrm{e}^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$$
  $$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = 2\int (t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{2(t+1)^{-1}}{-1} + c_3 = c_3 - \frac{2}{t+1} = c_3 - \frac{2}{\mathrm{e}^x+1},\ x\in R,\ c_3\in R.$$

# Koniec 10. časti

Ďakujem za pozornosť.