

Matematická analýza 1

2026/2027

1. Zopár základných pojmov

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Základné symboly
- 2 Dôkazy
- 3 Dôkaz matematickou indukciou
- 4 Množiny – základné vlastnosti
- 5 Binárne relácie a zobrazenia
- 6 Axiómy reálnych čísel
- 7 Číselné množiny a ich vlastnosti
- 8 Topologické vlastnosti čísel

Základné symboly – Kvantifikátory

Všeobecný kvantifikátor označujeme $\forall$ a vyjadruje:

Pre všetky, každý, ľubovoľný, žiadny (v zápore), ...

Existenčný kvantifikátor označujeme $\exists$ a vyjadruje:

Existuje, aspoň jeden, niektorý, ...

Základné symboly – Kvantifikátory

Všeobecný kvantifikátor označujeme $\forall$ a vyjadruje:

Pre všetky, každý, ľubovoľný, žiadny (v zápore), ...

Existenčný kvantifikátor označujeme $\exists$ a vyjadruje:

Existuje, aspoň jeden, niektorý, ...

- $\exists!$ vyjadruje: Existuje práve jeden (aspoň jeden a súčasne najviac jeden).

Základné symboly – Kvantifikátory

Všeobecný kvantifikátor označujeme $\forall$ a vyjadruje:

Pre všetky, každý, ľubovoľný, žiadny (v zápore), ...

Napr. výrok „ $\forall n \in \mathbb{N}: a > 0 \Rightarrow a^n > 0$.“

Existenčný kvantifikátor označujeme $\exists$ a vyjadruje:

Existuje, aspoň jeden, niektorý, ...

- $\exists!$ vyjadruje: Existuje práve jeden (aspoň jeden a súčasne najviac jeden).

Napr. výrok „ $\exists n \in \mathbb{N}: a > 0 \Rightarrow a^n > 0$.“

Základné symboly – Kvantifikátory

Všeobecný kvantifikátor označujeme $\forall$ a vyjadruje:

Pre všetky, každý, ľubovoľný, žiadny (v zápore), ...

Napr. výrok „ $\forall n \in \mathbb{N}: a > 0 \Rightarrow a^n > 0$.“ čítame:

- „Ak $a > 0$, potom $a^n > 0$ pre všetky prirodzené čísla n .“
- „Pre všetky n prirodzené platí, že ak $a > 0$, potom $a^n > 0$.“

[A podobne.]

Existenčný kvantifikátor označujeme $\exists$ a vyjadruje:

Existuje, aspoň jeden, niektorý, ...

- $\exists!$ vyjadruje: Existuje práve jeden (aspoň jeden a súčasne najviac jeden).

Napr. výrok „ $\exists n \in \mathbb{N}: a > 0 \Rightarrow a^n > 0$.“ čítame:

- „Ak $a > 0$, potom $a^n > 0$ pre nejaké prirodzené číslo n .“
- „Existuje n prirodzené také, že ak $a > 0$, potom $a^n > 0$.“

[A podobne.]

Základné symboly – Kvantifikátory a výroky

$$\forall x \in R \exists n \in Z: n < x.$$

Pre každé $x \in R$ existuje $n \in Z$ také, že $n < x$.

$$\exists n \in Z \forall x \in R: n < x.$$

Existuje $n \in Z$ také, že pre každé $x \in R$ platí $n < x$.

Základné symboly – Kvantifikátory a výroky

$$\forall x \in R \exists n \in Z: n < x.$$

[Pravdivý výrok]

Pre každé $x \in R$ existuje $n \in Z$ také, že $n < x$.

Zmenou poradia **všeobecného kvantifikátora** a **existenčného kvantifikátora**:

- Zmení sa význam pôvodného výroku.
- Môžeme dostať **z pravdivého výroku nepravdivý výrok** a naopak.

$$\exists n \in Z \forall x \in R: n < x.$$

[Nepravdivý výrok]

Existuje $n \in Z$ také, že pre každé $x \in R$ platí $n < x$.

Základné symboly – Kvantifikátory a výroky

$$\forall x \in R \exists n \in Z: n < x.$$

[Pravdivý výrok]

Pre každé $x \in R$ existuje $n \in Z$ také, že $n < x$.

Zmenou poradia všeobecného kvantifikátora a existenčného kvantifikátora:

- Zmení sa význam pôvodného výroku.
- Môžeme dostať z pravdivého výroku nepravdivý výrok a naopak.

$$\exists n \in Z \forall x \in R: n < x.$$

[Nepravdivý výrok]

Existuje $n \in Z$ také, že pre každé $x \in R$ platí $n < x$.

Je potrebné si uvedomiť:

- Záleží na vzájomnom poradí kvantifikátorov!
- Zámenou poradia kvantifikátorov sa môže zmeniť význam výroku.

Základné symboly – Sumátory a multiplikátory

Symbol sčítavania Σ

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Konečný súčet ($n \in \mathbb{N}$)

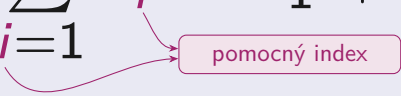
$$\sum_{j=3}^{\infty} a_j = a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

Nekonečný súčet

Základné symboly – Sumátory a multiplikátory

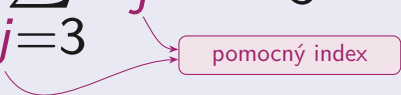
Symbol sčítavania Σ

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

pomocný index

Konečný súčet ($n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{j=3}^{\infty} a_j = a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

pomocný index

Nekonečný súčet

Základné symboly – Sumátory a multiplikátory

Symbol sčítavania Σ

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

pomocný index

postupne nadobúda hodnoty od prvého indexu

prvý index

začiatok indexovania

Konečný súčet ($n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{j=3}^{\infty} a_j = a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

pomocný index

postupne nadobúda hodnoty od prvého indexu

prvý index

začiatok indexovania

Nekonečný súčet

Základné symboly – Sumátory a multiplikátory

Symbol sčítavania Σ

n —————> posledný index koniec indexovania
 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 $i=1$ —————> prvý index začiatok indexovania
 pomocný index postupne nadobúda hodnoty od prvého indexu po posledný index
 Konečný súčet ($n \in \mathbb{N}$)

∞ —————> posledný index indexovanie pokračuje do nekonečna
 $\sum_{j=3}^{\infty} a_j = a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$
 $j=3$ —————> prvý index začiatok indexovania
 pomocný index postupne nadobúda hodnoty od prvého indexu do nekonečna
 Nekonečný súčet

Základné symboly – Sumátory a multiplikátory

Symbol sčítavania Σ

[Čítame suma, resp. súčet od... po...]

n —————> posledný index koniec indexovania
 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 $i=1$ —————> prvý index začiatok indexovania
 pomocný index postupne nadobúda hodnoty od prvého indexu po posledný index
 Konečný súčet ($n \in \mathbb{N}$)

∞ —————> posledný index indexovanie pokračuje do nekonečna
 $\sum_{j=3}^{\infty} a_j = a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$
 $j=3$ —————> prvý index začiatok indexovania
 pomocný index postupne nadobúda hodnoty od prvého indexu do nekonečna
 Nekonečný súčet

- Analogicky pre násobenie Π a prienik $\cap$ a zjednotenie $\cup$.

Základné symboly – Príklady sumátorov

Súčet

- $\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{\alpha=1}^{10} a_{\alpha} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}.$
- $\sum_{i=1}^n a_k = a_k + \cdots + a_k = na_k.$
- $\sum_{k=7}^{\infty} a_k = a_7 + a_8 + \cdots + a_k + \cdots.$

Prienik

- $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_3 \cap \cdots.$

Základné symboly – Príklady sumátorov

Súčet a súčin prvkov.

$$\bullet \sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{\alpha=1}^{10} a_{\alpha} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10}.$$

$$\bullet \sum_{i=1}^n a_k = a_k + \dots + a_k = na_k.$$

$$\bullet \sum_{k=7}^{\infty} a_k = a_7 + a_8 + \dots + a_k + \dots$$

$$\bullet \prod_{k=1}^i a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i.$$

$$\bullet \prod_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \dots$$

$$\bullet \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Prienik a zjednotenie množín.

$$\bullet \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

$$\bullet \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_3 \cap \dots$$

$$\bullet \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

$$\bullet \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Dôkazy

Matematika

(ako každá vedná disciplína) je budovaná axiomaticky od najjednoduchších (primitívnych) pojmov
a axióm (nedokazovaných tvrdení) k zložitejším záverom a celkom.

Dôkazy

Matematika

(ako každá vedná disciplína) je budovaná axiomaticky od najjednoduchších (primitívnych) pojmov
a axióm (nedokazovaných tvrdení) k zložitejším záverom a celkom.

- Výber systému primitívnych pojmov a axióm nie je ľubovoľný.
- Výber pojmov a axióm je ovplyvnený rôznymi podmienkami
a hlavne účelom, pre ktorý sa disciplína buduje.

Dôkazy

Matematika

(ako každá vedná disciplína) je budovaná axiomaticky od najjednoduchších (primitívnych) pojmov
a axióm (nedokazovaných tvrdení) k zložitejším záverom a celkom.

- Výber systému primitívnych pojmov a axióm nie je ľubovoľný.
- Výber pojmov a axióm je ovplyvnený rôznymi podmienkami
a hlavne účelom, pre ktorý sa disciplína buduje.

Bezspornosť systému

Najdôležitejšia je podmienka bezspornosti systému,
t. j. v systéme nemôžeme odvodiť výrok a súčasne jeho negáciu.

Dôkazy

Matematika

(ako každá vedná disciplína) je budovaná axiomaticky od najjednoduchších (primitívnych) pojmov
a axióm (nedokazovaných tvrdení) k zložitejším záverom a celkom.

- Výber systému primitívnych pojmov a axióm nie je ľubovoľný.
- Výber pojmov a axióm je ovplyvnený rôznymi podmienkami
a hlavne účelom, pre ktorý sa disciplína buduje.

Bezspornosť systému

Najdôležitejšia je podmienka bezspornosti systému,
t. j. v systéme nemôžeme odvodiť výrok a súčasne jeho negáciu.

- Na tomto základe definujeme pomocou definícií nové pojmy
a pomocou už dokázaných (t. j. dovtedy platných) viet formulujeme a dokazujeme vety nové.

Dôkazy

Axióma.

Definícia.

Veta (tvrdenie, poučka, zákon, lema, pomocná veta).

Dôkaz (dôkaz vety, tvrdenia, lemy, ...).

Dôkazy

Axióma.

- Tvrdenie, o ktorom sa predpokladá, že platí.

Nedokazuje sa!

Definícia.

Veta (tvrdenie, poučka, zákon, lema, pomocná veta).

Dôkaz (dôkaz vety, tvrdenia, lemy, ...).

Dôkazy

Axióma.

- Tvrdenie, o ktorom sa predpokladá, že platí.

Nedokazuje sa!

Definícia.

- Určuje (definuje) význam nového (zavádzaného) pojmu, pomocou známych pojmov.
- Má tvar ekvivalencie „práve vtedy, ak“, skrátene „ak“.

Veta (tvrdenie, poučka, zákon, lema, pomocná veta).

Dôkaz (dôkaz vety, tvrdenia, lemy, ...).

Dôkazy

Axióma.

- Tvrdenie, o ktorom sa predpokladá, že platí.

Nedokazuje sa!

Definícia.

- Určuje (definuje) význam nového (zavádzaného) pojmu, pomocou známych pojmov.
- Má tvar ekvivalencie „práve vtedy, ak“, skrátené „ak“.

Veta (tvrdenie, poučka, zákon, lema, pomocná veta).

- Pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi,
ktorý je dokázaný (nie sú o ňom pochybnosti).

Vždy sa musí dokázať!

- Obsahuje predpoklady P , z ktorých vyplývajú závery Z .

[Napr. $P \Rightarrow Z$, $P \Leftrightarrow Z$, $P \Rightarrow (Z_1 \Leftrightarrow Z_2)$, $P \Leftrightarrow Z_1 \Leftrightarrow Z_2$.]

Dôkaz (dôkaz vety, tvrdenia, lemy, ...).

Dôkazy

Axióma.

- Tvrdenie, o ktorom sa predpokladá, že platí.

Nedokazuje sa!

Definícia.

- Určuje (definuje) význam nového (zavádzaného) pojmu, pomocou známych pojmov.
- Má tvar ekvivalencie „práve vtedy, ak“, skrátené „ak“.

Veta (tvrdenie, poučka, zákon, lema, pomocná veta).

- Pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný (nie sú o ňom pochybnosti).
- Obsahuje predpoklady P , z ktorých vyplývajú závery Z .

Vždy sa musí dokázať!

[Např. $P \Rightarrow Z$, $P \Leftrightarrow Z$, $P \Rightarrow (Z_1 \Leftrightarrow Z_2)$, $P \Leftrightarrow Z_1 \Leftrightarrow Z_2$.]

Dôkaz (dôkaz vety, tvrdenia, lemy, ...).

- Logický proces, ktorého cieľom je ukázať pravdivosť vety (tvrdenia, lemy, ...) pomocou axióm, definícií a už predtým dokázaných tvrdení.

Dôkazy – Priamy, nepriamy a dôkaz sporom

Priamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

Nepriamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

Dôkaz sporom tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

Dôkazy – Priamy, nepriamy a dôkaz sporom

Priamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje priamo

Nepriamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje nepriamo.

Dôkaz sporom tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje nepriamo,

Dôkazy – Priamy, nepriamy a dôkaz sporom

Priamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje priamo

Nepriamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje nepriamo.
- Dokazuje sa ekvivalentná implikácia, napr. obrátená implikácia $\text{non } Z \Rightarrow \text{non } P$

Dôkaz sporom tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje nepriamo, predpokladá sa neplatnosť $P \Rightarrow Z$.
- Z predpokladu $\text{non}(P \Rightarrow Z)$, najčastejšie $P \wedge \text{non } Z$, sa dospeje k sporu

Dôkazy – Priamy, nepriamy a dôkaz sporom

Priamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje priamo

podľa schémy

$$P \Rightarrow \text{definície, axiómy, dokázané vety} \Rightarrow Z$$

Nepriamy dôkaz tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje nepriamo.
- Dokazuje sa ekvivalentná implikácia, napr. obrátená implikácia $\text{non } Z \Rightarrow \text{non } P$

podľa schémy

$$\text{non } Z \Rightarrow \text{definície, axiómy, dokázané vety} \Rightarrow \text{non } P$$

Dôkaz sporom tvrdenia $P \Rightarrow Z$.

- Tvrdenie sa dokazuje nepriamo, predpokladá sa neplatnosť $P \Rightarrow Z$.
- Z predpokladu $\text{non}(P \Rightarrow Z)$, najčastejšie $P \wedge \text{non } Z$, sa dospeje k sporu

podľa schémy

$$\text{non}(P \Rightarrow Z) \Rightarrow \text{definície, axiómy, dokázané vety} \Rightarrow \text{SPOR}$$

Dôkazy – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Ak je prirodzené číslo n deliteľné číslom 4, potom je deliteľné číslom 2.

Dôkazy – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Ak je prirodzené číslo n deliteľné číslom 4, potom je deliteľné číslom 2.

Dokazujeme tvrdenie:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n.$$

Dôkazy – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Ak je prirodzené číslo n deliteľné číslom 4, potom je deliteľné číslom 2.

Dokazujeme tvrdenie:

[Dokážeme rôznymi spôsobmi.]

$$\forall n \in \mathbb{N}: 4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n.$$

- Priamy dôkaz, t. j. $4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n$.
- Nepriamy dôkaz (obrátená implikácia), t. j. $2 \nmid n \Rightarrow 4 \nmid n$.
- Dôkaz sporom, (negácia), t. j. $4 \mid n \wedge 2 \nmid n \Rightarrow \text{spor}$.

Dôkazy – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Ak je prirodzené číslo n deliteľné číslom 4, potom je deliteľné číslom 2.

Dokazujeme tvrdenie:

[Dokážeme rôznymi spôsobmi.]

$$\forall n \in \mathbb{N}: 4|n \Rightarrow 2|n.$$

- Priamy dôkaz, t. j. $4|n \Rightarrow 2|n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: 4|n. \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 4k = 2 \cdot 2k = 2(2k). \Rightarrow 2|n.$$

- Nepriamy dôkaz (obrátená implikácia), t. j. $2 \nmid n \Rightarrow 4 \nmid n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n. \Rightarrow (2 \cdot 2) \nmid n, \text{ t. j. } 4 \nmid n.$$

- Dôkaz sporom, (negácia), t. j. $4|n \wedge 2 \nmid n \Rightarrow \text{spor.}$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 4|n \text{ a súčasne } 2 \nmid n. \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 4k = 2(2k) \text{ a súčasne } 2 \nmid n.$$

$$\Rightarrow 2|n \text{ a súčasne } 2 \nmid n, \text{ t. j. spor.}$$

Dôkaz matematickou indukciou

- **Matematická indukcia** je dôležitý nástroj na dokazovanie tvrdení na izolovaných množinách, t. j. „Prvky n nejakej izolovanej množiny majú určitú vlastnosť $F(n)$.“
- Najčastejšie sa používa na dokazovanie pravdivosti výrokov tvaru:
„Pre každé $n \in N$, $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$, platí tvrdenie $F(n)$.“

Dôkaz matematickou indukciou

- **Matematická indukcia** je dôležitý nástroj na dokazovanie tvrdení na izolovaných množinách, t. j. „Prvky n nejakej izolovanej množiny majú určitú vlastnosť $F(n)$.“
- Najčastejšie sa používa na dokazovanie pravdivosti výrokov tvaru:
„Pre každé $n \in N$, $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$, platí tvrdenie $F(n)$.“

Dôkaz **matematickou indukciou** pozostáva z krokov 1, 2 a záveru.

Krok 1.

Krok 2.

Záver.

Dôkaz matematickou indukciou

- **Matematická indukcia** je dôležitý nástroj na dokazovanie tvrdení na izolovaných množinách, t. j. „Prvky n nejakej izolovanej množiny majú určitú vlastnosť $F(n)$.“
- Najčastejšie sa používa na dokazovanie pravdivosti výrokov tvaru:
„Pre každé $n \in N$, $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$, platí tvrdenie $F(n)$.“

Dôkaz matematickou indukciou pozostáva z krokov 1, 2 a záveru.

Krok 1. Ukážeme, že F platí pre prvý prvok $n = n_0$,

Krok 2. Predpokladáme, že F platí pre nejaké prirodzené číslo $n = k$, $k \geq n_0$ [Indukčný predpoklad.]
a (za tohto predpokladu) dokážeme, že F platí pre $n = k + 1$ (nasledovník), [Indukčný záver.]

Záver.

Dôkaz matematickou indukciou

- **Matematická indukcia** je dôležitý nástroj na dokazovanie tvrdení na izolovaných množinách, t. j. „Prvky n nejakej izolovanej množiny majú určitú vlastnosť $F(n)$.“
- Najčastejšie sa používa na dokazovanie pravdivosti výrokov tvaru:
„Pre každé $n \in N$, $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$, platí tvrdenie $F(n)$.“

Dôkaz **matematickou indukciou** pozostáva z krokov 1, 2 a záveru.

Krok 1. Ukážeme, že F platí pre prvý prvok $n = n_0$, t. j. dokážeme platnosť $F(n_0)$.

Krok 2. Predpokladáme, že F platí pre nejaké prirodzené číslo $n = k$, $k \geq n_0$ [Indukčný predpoklad.]
a (za tohto predpokladu) dokážeme, že F platí pre $n = k + 1$ (nasledovník), [Indukčný záver.]
t. j. dokážeme platnosť implikácie $F(k) \Rightarrow F(k + 1)$.

Záver.

Dôkaz matematickou indukciou

- **Matematická indukcia** je dôležitý nástroj na dokazovanie tvrdení na izolovaných množinách, t. j. „Prvky n nejakej izolovanej množiny majú určitú vlastnosť $F(n)$.“
- Najčastejšie sa používa na dokazovanie pravdivosti výrokov tvaru:
„Pre každé $n \in N$, $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$, platí tvrdenie $F(n)$.“

Dôkaz **matematickou indukciou** pozostáva z krokov 1, 2 a záveru.

Krok 1. Ukážeme, že F platí pre prvý prvok $n = n_0$, t. j. dokážeme platnosť $F(n_0)$.

[Máme začiatok, kde matematickú indukciu odštartujeme.]

Krok 2. Predpokladáme, že F platí pre nejaké prirodzené číslo $n = k$, $k \geq n_0$ [Indukčný predpoklad.]

a (za tohto predpokladu) dokážeme, že F platí pre $n = k + 1$ (nasledovník), [Indukčný záver.]

t. j. dokážeme platnosť implikácie $F(k) \Rightarrow F(k + 1)$.

[Máme zabezpečený prechod z ľubovoľného prirodzeného čísla na nasledujúce prirodzené číslo.]

Záver. Z kroku 1 vyplýva platnosť $F(n_0)$, z kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0 + 1)$, z kroku 2 opäť vyplýva platnosť $F(n_0 + 2)$, $F(n_0 + 3)$, $\dots$, potom F platí pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$.

[Na základe krokov 1, 2 sa dostaneme po určitom konečnom počte na ľubovoľné prirodzené číslo.]

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ platí $2^n > n^2$.

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ platí $2^n > n^2$.

Označme vlastnosť $F(n) : 2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1. $F(5) : 2^5 > 5^2$.

Krok 2. $F(k) : 2^k > k^2 \Rightarrow F(k+1) : 2^{k+1} > (k+1)^2$.

Záver.

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ platí $2^n > n^2$.

Označme vlastnosť $F(n) : 2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1. $F(5) : 2^5 > 5^2$.

Vzťah je splnený triviálne, pretože $F(5) : 32 = 2^5 > 5^2 = 25$.

Krok 2. $F(k) : 2^k > k^2 \Rightarrow F(k+1) : 2^{k+1} > (k+1)^2$.

Pre $k \geq 5$ platí $(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 \geq (5-1)^2 = 16$.

$$\Rightarrow k^2 \geq 16 + 2k - 1 = 2k + 15 > 2k + 1.$$

Záver.

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ platí $2^n > n^2$.

Označme vlastnosť $F(n) : 2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1. $F(5) : 2^5 > 5^2$.

Vzťah je splnený triviálne, pretože $F(5) : 32 = 2^5 > 5^2 = 25$.

Krok 2. $F(k) : 2^k > k^2 \Rightarrow F(k+1) : 2^{k+1} > (k+1)^2$.

Pre $k \geq 5$ platí $(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 \geq (5-1)^2 = 16$.

$$\Rightarrow k^2 \geq 16 + 2k - 1 = 2k + 15 > 2k + 1.$$

Ak platí $F(k) : 2^k > k^2$ (indukčný predpoklad), potom pre $F(k+1)$ platí:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

$$\Rightarrow F(k+1) : 2^{k+1} > (k+1)^2 \quad (\text{indukčný záver}).$$

Záver. Na základe krokov 1, 2 dané tvrdenie platí.

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Označme $F(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$, $n \in \mathbb{N}$,

t. j. vlastnosť F má tvar $F(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1. $F(1) = 1^2$.

Krok 2. $F(k) = k^2 \Rightarrow F(k + 1) = (k + 1)^2$.

Záver.

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in N$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Označme $F(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$, $n \in N$,

t. j. vlastnosť F má tvar $F(n) = n^2$, $n \in N$.

Krok 1. $F(1) = 1^2$.

Vzťah je splnený triviálne, pretože $F(1) = 1 = 1^2$.

Krok 2. $F(k) = k^2 \Rightarrow F(k + 1) = (k + 1)^2$.

Platí $F(k) = 1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$ pre $k \in N$ (indukčný predpoklad).

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(k + 1) &= 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= F(k) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \quad (\text{indukčný záver}). \end{aligned}$$

Záver.

Dôkaz matematickou indukciou – Príklad

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Označme $F(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$, $n \in \mathbb{N}$,

t. j. vlastnosť F má tvar $F(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1. $F(1) = 1^2$.

Vzťah je splnený triviálne, pretože $F(1) = 1 = 1^2$.

Krok 2. $F(k) = k^2 \Rightarrow F(k + 1) = (k + 1)^2$.

Platí $F(k) = 1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$ pre $k \in \mathbb{N}$ (indukčný predpoklad).

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(k + 1) &= 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= F(k) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \quad (\text{indukčný záver}). \end{aligned}$$

Záver. Na základe krokov 1, 2 dané tvrdenie platí.

Dôkaz matematickou indukciou – Priame dôkazy

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Dôkaz matematickou indukciou – Priame dôkazy

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ je konečná aritmetická.

- Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí $a_i = 2i - 1$, t. j. $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$.
- Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n$ má n členov a diferenciu $d = 2$.

Dôkaz matematickou indukciou – Priame dôkazy

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ je konečná aritmetická.

- Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí $a_i = 2i - 1$, t. j. $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$.
- Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n$ má n členov a diferenciu $d = 2$.
- Pre súčet s jej členov platí:

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Dôkaz matematickou indukciou – Priame dôkazy

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ je konečná aritmetická.

- Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí $a_i = 2i - 1$, t. j. $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$.
- Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n$ má n členov a diferenciu $d = 2$.
- Pre súčet s jej členov platí:

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Iné riešenie.

Označme $s = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, potom platí:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & (2n - 3) & + & (2n - 1) & = & s \\ (2n - 1) & + & (2n - 3) & + & (2n - 5) & + & \dots & + & 3 & + & 1 & = & s \end{array}$$

Dôkaz matematickou indukciou – Priame dôkazy

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ je konečná aritmetická.

- Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí $a_i = 2i - 1$, t. j. $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$.
- Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n$ má n členov a diferenciu $d = 2$.
- Pre súčet s jej členov platí:

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Iné riešenie.

Označme $s = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, potom platí:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & (2n-3) & + & (2n-1) & = & s \\ (2n-1) & + & (2n-3) & + & (2n-5) & + & \dots & + & 3 & + & 1 & = & s \\ \hline 2n & + & 2n & + & 2n & + & \dots & + & 2n & + & 2n & = & n \cdot 2n \end{array}$$

Dôkaz matematickou indukciou – Priame dôkazy

Dokážte tvrdenie:

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ je konečná aritmetická.

- Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí $a_i = 2i - 1$, t. j. $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$.
- Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^n$ má n členov a diferenciu $d = 2$.
- Pre súčet s jej členov platí:

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Iné riešenie.

Označme $s = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, potom platí:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & (2n-3) & + & (2n-1) & = & s \\ (2n-1) & + & (2n-3) & + & (2n-5) & + & \dots & + & 3 & + & 1 & = & s \\ \hline 2n & + & 2n & + & 2n & + & \dots & + & 2n & + & 2n & = & n \cdot 2n \end{array}$$

$$\Rightarrow 2s = n \cdot 2n = 2n^2. \Rightarrow s = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Množiny – základné vlastnosti

Množina

je neusporiadaný súbor (skupina, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...),

ktoré nazývame **prvky množiny** (t. j. nezáleží na poradí prvkov).



Množiny – základné vlastnosti

Množina

je neusporiadaný súbor (skupina, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...),

ktoré nazývame **prvky množiny** (t. j. nezáleží na poradí prvkov).

- Prvky danej množiny sa obvykle ohraničujú zloženými zátvorkami { }.
- Množina je jednoznačne určená svojimi prvkami.

Množiny – základné vlastnosti

Množina

je neusporiadaný súbor (skupina, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...),

ktoré nazývame **prvky množiny** (t. j. nezáleží na poradí prvkov).

- Prvky danej množiny sa obvykle ohraničujú zloženými zátvorkami { }.
 - Množina je jednoznačne určená svojimi prvkami.
-
- **Prázdna množina** neobsahuje žiadne prvky, označenie $\emptyset$, resp. $\{\}$.
 - **Konečná množina** má konečný počet prvkov.
 - **Nekonečná množina** nemá konečný počet prvkov (nie je konečná).

Množiny – základné vlastnosti

Množina

je neusporiadaný súbor (skupina, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...),

ktoré nazývame **prvky množiny** (t. j. nezáleží na poradí prvkov).

- Prvky danej množiny sa obvykle ohraničujú zloženými zátvorkami { }.
- Množina je jednoznačne určená svojimi prvkami.

- **Prázdna množina** neobsahuje žiadne prvky, označenie $\emptyset$, resp. {}.
- **Konečná množina** má konečný počet prvkov.
- **Nekonečná množina** nemá konečný počet prvkov (nie je konečná).

- Prázdna množina je konečná. Neexistuje prvok, ktorý by patrilo do $\emptyset$.
- $\{\emptyset\}$ nie je prázdna množina, ale jednoprvková množina s prvkom $\emptyset$.

Množiny – základné vlastnosti

Množina

je neusporiadaný súbor (skupina, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...),

ktoré nazývame **prvky množiny** (t. j. nezáleží na poradí prvkov).

- Prvky danej množiny sa obvykle ohraničujú zloženými zátvorkami { }.
- Množina je jednoznačne určená svojimi prvkami.

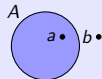
- **Prázdna množina** neobsahuje žiadne prvky, označenie $\emptyset$, resp. {}.
- **Konečná množina** má konečný počet prvkov.
- **Nekonečná množina** nemá konečný počet prvkov (nie je konečná).

- Prázdna množina je konečná. Neexistuje prvok, ktorý by patril do $\emptyset$.
- $\{\emptyset\}$ nie je prázdna množina, ale jednoprvková množina s prvkom $\emptyset$.

$A \neq \emptyset$ čítame:

„Množina A nie je prázdna“, resp. „Množina A je neprázdna“.

Množiny – základné vlastnosti

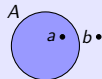
 $a \in A$ $b \notin A$ 

- Prvok a **patrí** do množiny A .
- Prvok b **nepatrí** do množiny A .

[Neexistuje x také, že $x \in \emptyset$.]

[Pre všetky x platí $x \notin \emptyset$.]

Množiny – základné vlastnosti

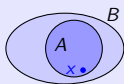
 $a \in A$
 $b \notin A$


- Prvok a **patrí** do množiny A .

[Neexistuje x také, že $x \in \emptyset$.]

- Prvok b **nepatrí** do množiny A .

[Pre všetky x platí $x \notin \emptyset$.]

 $A \subset B$


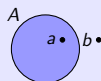
- Množina A **je podmnožinou** množiny B ,

ak každý prvok množiny A **patrí aj** do množiny B .

T. j. $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$.

[$\emptyset \subset B$ pre každú množinu B .]

Množiny – základné vlastnosti

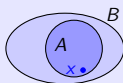
 $a \in A$
 $b \notin A$


- Prvok a **patrí** do množiny A .

[Neexistuje x také, že $x \in \emptyset$.]

- Prvok b **nepatrí** do množiny A .

[Pre všetky x platí $x \notin \emptyset$.]

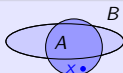
 $A \subset B$


- Množina A **je podmnožinou** množiny B ,

ak každý prvok množiny A **patrí aj** do množiny B .

T. j. $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$.

[$\emptyset \subset B$ pre každú množinu B .]

 $A \not\subset B$


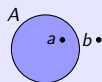
- Množina A **nie je podmnožinou** množiny B , ak **neplatí** $A \subset B$.

T. j. $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$.

Množiny – základné vlastnosti

$$a \in A$$

$$b \notin A$$



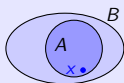
- Prvok a **patrí** do množiny A .

[Neexistuje x také, že $x \in \emptyset$.]

- Prvok b **nepatrí** do množiny A .

[Pre všetky x platí $x \notin \emptyset$.]

$$A \subset B$$



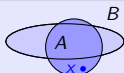
- Množina A **je podmnožinou** množiny B ,

ak každý prvok množiny A **patrí aj** do množiny B .

$$\text{T. j. } A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

[$\emptyset \subset B$ pre každú množinu B .]

$$A \not\subset B$$



- Množina A **nie je podmnožinou** množiny B , ak **neplatí** $A \subset B$.

$$\text{T. j. } A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B).$$

$$A = B$$



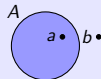
- Množiny A a B **sa rovnajú** (sú **totožné**),

ak majú tie isté prvky, t. j. ak $(A \subset B \wedge B \subset A)$.

Množiny – základné vlastnosti

$$a \in A$$

$$b \notin A$$



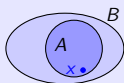
- Prvok a **patrí** do množiny A .

[Neexistuje x také, že $x \in \emptyset$.]

- Prvok b **nepatrí** do množiny A .

[Pre všetky x platí $x \notin \emptyset$.]

$$A \subset B$$



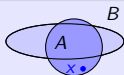
- Množina A **je podmnožinou** množiny B ,

ak každý prvok množiny A **patrí aj** do množiny B .

$$\text{T. j. } A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

[$\emptyset \subset B$ pre každú množinu B .]

$$A \not\subset B$$



- Množina A **nie je podmnožinou** množiny B , ak **neplatí** $A \subset B$.

$$\text{T. j. } A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B).$$

$$A = B$$



- Množiny A a B **sa rovnajú** (sú **totožné**),

ak majú tie isté prvky, t. j. ak $(A \subset B \wedge B \subset A)$.

$$A \neq B$$

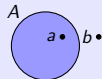


- Množiny A a B sú **rôzne**, ak sa **nerovnajú**,

$$\text{t. j. ak } (A \not\subset B \vee B \not\subset A).$$

Množiny – základné vlastnosti

$a \in A$
 $b \notin A$

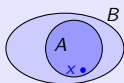


- Prvok a **patrí** do množiny A .
- Prvok b **nepatrí** do množiny A .

[Neexistuje x také, že $x \in \emptyset$.]

[Pre všetky x platí $x \notin \emptyset$.]

$A \subset B$

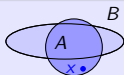


- Množina A **je podmnožinou** množiny B ,
 ak každý prvok množiny A **patrí aj** do množiny B .

t. j. $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$.

[$\emptyset \subset B$ pre každú množinu B .]

$A \not\subset B$



- Množina A **nie je podmnožinou** množiny B , ak **neplatí** $A \subset B$.

t. j. $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$.

$A = B$



- Množiny A a B **sa rovnajú** (sú **totožné**),
 ak majú tie isté prvky, t. j. ak $(A \subset B \wedge B \subset A)$.

$A \neq B$

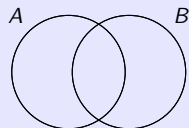


- Množiny A a B sú **rôzne**, ak sa **nerovnajú**,
 t. j. ak $(A \not\subset B \vee B \not\subset A)$.

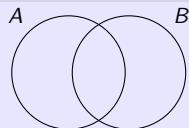
Dokázať rovnosť dvoch množín $A = B$,

znamená dokázať **obidve** inklúzie $A \subset B$ a $B \subset A$.

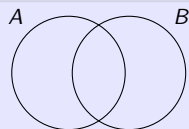
Množiny – základné vlastnosti



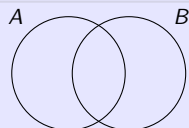
- Prienik množín $A \cap B$



- Zjednotenie množín $A \cup B$

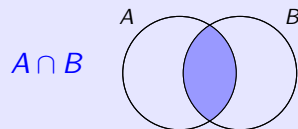


- Rozdiel množín $A \setminus B$

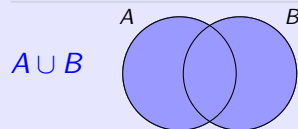


- Symetrický rozdiel množín $A \Delta B$

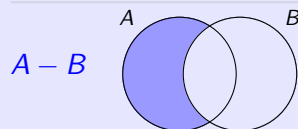
Množiny – základné vlastnosti



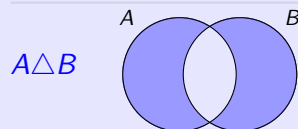
- **Prienik** množín A a B :
 $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}.$



- **Zjednotenie** množín A a B :
 $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}.$



- **Rozdiel** množín A a B :
 $A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}.$

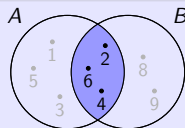


- **Symetrický rozdiel** množín A a B :
 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$

Množiny – základné vlastnosti

Napríklad pre $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6,8,9\}$ platí:

$A \cap B$

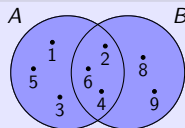


- **Prienik** množín A a B :

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{2,4,6\}.$$

$A \cup B$

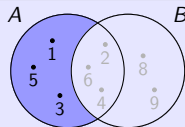


- **Zjednotenie** množín A a B :

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}.$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,9\}.$$

$A - B$

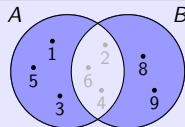


- **Rozdiel** množín A a B :

$$A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}.$$

$$A - B = \{1,3,5\}.$$

$A \Delta B$



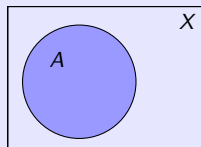
- **Symetrický rozdiel** množín A a B :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

$$A \Delta B = \{1,3,5,8,9\}.$$

Množiny – základné vlastnosti

$$X \neq \emptyset$$



doplnok

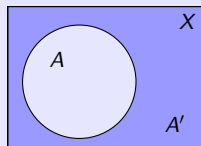
(komplement, *resp.* doplnková, komplementárna množina)
množiny A do množiny $X \neq \emptyset$.

[Celok $X \neq \emptyset$ musí existovať, aby sme mali do čoho dopĺňať množinu $A \subset X$.]

Množiny – základné vlastnosti

$$A' = X - A$$

$$X \neq \emptyset$$



- Množina $X - A$ sa nazýva **doplnok**

(komplement, *resp.* doplnková, komplementárna množina)

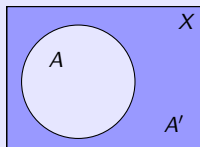
množiny A do množiny $X \neq \emptyset$. Označenie A' , *resp.* A'_X .

[Celok $X \neq \emptyset$ musí existovať, aby sme mali do čoho dopĺňať množinu $A \subset X$.]

Množiny – základné vlastnosti

$$A' = X - A$$

$$X \neq \emptyset$$



- Množina $X - A$ sa nazýva **doplnok**

(komplement, resp. doplnková, komplementárna množina)
množiny A do množiny $X \neq \emptyset$. Označenie A' , resp. A'_X .

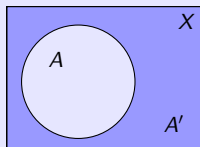
[Celok $X \neq \emptyset$ musí existovať, aby sme mali do čoho dopĺňať množinu $A \subset X$.]

- Množiny A a $A' = X - A$ sú **doplnkové** (komplementárne) **vzhľadom na X** .
- Každý bod $x \in X$ patrí do práve jednej z množín A, A' , t. j. platí $A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = X$.

Množiny – základné vlastnosti

$$A' = X - A$$

$$X \neq \emptyset$$



- Množina $X - A$ sa nazýva **doplnok** (komplement, resp. doplnková, komplementárna množina) množiny A do množiny $X \neq \emptyset$. Označenie A' , resp. A'_X .

[Celok $X \neq \emptyset$ musí existovať, aby sme mali do čoho dopĺňať množinu $A \subset X$.]

- Množiny A a $A' = X - A$ sú **doplnkové** (komplementárne) vzhľadom na X .
- Každý bod $x \in X$ patrí do práve jednej z množín A, A' , t. j. platí $A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = X$.

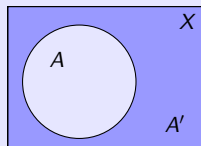
Potenčná množina (množina všetkých podmnožín) množiny $X \neq \emptyset$, označenie 2^X ,

je množina obsahujúca všetky podmnožiny množiny X , t. j. $2^X = \{A; A \subset X\}$.

Množiny – základné vlastnosti

$$A' = X - A$$

$$X \neq \emptyset$$



- Množina $X - A$ sa nazýva **doplnok** (komplement, resp. doplnková, komplementárna množina) množiny A do množiny $X \neq \emptyset$. Označenie A' , resp. A'_X .

[Celok $X \neq \emptyset$ musí existovať, aby sme mali do čoho dopĺňať množinu $A \subset X$.]

- Množiny A a $A' = X - A$ sú **doplnkové** (komplementárne) vzhľadom na X .
- Každý bod $x \in X$ patrí do práve jednej z množín A, A' , t. j. platí $A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = X$.

Potenčná množina (množina všetkých podmnožín) množiny $X \neq \emptyset$, označenie 2^X ,

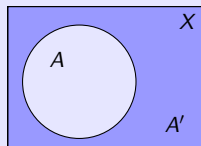
je množina obsahujúca všetky podmnožiny množiny X , t. j. $2^X = \{A; A \subset X\}$.

- Ak X je konečná a má $n \in \mathbb{N}$ prvkov. $\Rightarrow 2^X$ má 2^n prvkov.

Množiny – základné vlastnosti

$$A' = X - A$$

$$X \neq \emptyset$$



- Množina $X - A$ sa nazýva **doplnok** (komplement, resp. doplnková, komplementárna množina) množiny A do množiny $X \neq \emptyset$. Označenie A' , resp. A'_X .

[Celok $X \neq \emptyset$ musí existovať, aby sme mali do čoho dopĺňať množinu $A \subset X$.]

- Množiny A a $A' = X - A$ sú **doplnkové** (komplementárne) vzhľadom na X .
- Každý bod $x \in X$ patrí do práve jednej z množín A, A' , t. j. platí $A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = X$.

Potenčná množina (množina všetkých podmnožín) množiny $X \neq \emptyset$, označenie 2^X ,

je množina obsahujúca všetky podmnožiny množiny X , t. j. $2^X = \{A; A \subset X\}$.

- Ak X je konečná a má $n \in \mathbb{N}$ prvkov. $\Rightarrow 2^X$ má 2^n prvkov.

- $X = \{0\}$. $\Rightarrow 2^X = \{\emptyset, X\}$. [$2^1 = 2$ prvky.]
- $X = \{0, 1\}$. $\Rightarrow 2^X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$. [$2^2 = 4$ prvky.]
- $X = \{0, 1, 2\}$. $\Rightarrow 2^X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, X\}$. [$2^3 = 8$ prvkov.]

Množiny – základné vlastnosti

Usporiadaná dvojica prvkov x a y , označenie $[x; y]$,

je dvojica týchto prvkov x, y , v ktorej záleží na ich poradí.

[Výrazy $[1; 2]$, $[2; 1]$ sú rôzne usporiadané dvojice, ale výrazy $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$ predstavujú rovnakú množinu!]

Množiny – základné vlastnosti

Usporiadaná dvojica prvkov x a y , označenie $[x; y]$,

je dvojica týchto prvkov x, y , v ktorej záleží na ich poradí.

[Výrazy $[1; 2]$, $[2; 1]$ sú rôzne usporiadané dvojice, ale výrazy $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$ predstavujú rovnakú množinu!]

- Usporiadané dvojice **sa rovnajú** (t. j. $[x_1; y_1] = [x_2; y_2]$), ak platí $x_1 = x_2$, a súčasne $y_1 = y_2$.

Množiny – základné vlastnosti

Usporiadaná dvojica prvkov x a y , označenie $[x; y]$,

je dvojica týchto prvkov x, y , v ktorej záleží na ich poradí.

[Výrazy $[1; 2]$, $[2; 1]$ sú rôzne usporiadané dvojice, ale výrazy $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$ predstavujú rovnakú množinu!]

- Usporiadané dvojice sa rovnajú (t. j. $[x_1; y_1] = [x_2; y_2]$), ak platí $x_1 = x_2$, a súčasne $y_1 = y_2$.

Karteziánskym súčinom množín $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$

je množina $A \times B = \{[x; y]; x \in A \wedge y \in B\} = \{[x; y]; x \in A, y \in B\}$.

[Pre $A \neq B$ neplatí $A \times B = B \times A$, t. j. vo všeobecnosti platí $A \times B \neq B \times A$.]

Množiny – základné vlastnosti

Usporiadaná dvojica prvkov x a y , označenie $[x; y]$,

je dvojica týchto prvkov x, y , v ktorej záleží na ich poradí.

[Výrazy $[1; 2]$, $[2; 1]$ sú rôzne usporiadané dvojice, ale výrazy $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$ predstavujú rovnakú množinu!]

- Usporiadané dvojice sa rovnajú (t. j. $[x_1; y_1] = [x_2; y_2]$), ak platí $x_1 = x_2$, a súčasne $y_1 = y_2$.

Karteziánskym súčinom množín $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$

je množina $A \times B = \{[x; y]; x \in A \wedge y \in B\} = \{[x; y]; x \in A, y \in B\}$.

[Pre $A \neq B$ neplatí $A \times B = B \times A$, t. j. vo všeobecnosti platí $A \times B \neq B \times A$.]

Karteziánsky súčin množín $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset, A_3 \neq \emptyset, \dots, A_n \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$:

- $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{[x_1; x_2; x_3]; x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3\}$. [Usporiadané trojice.]
- $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[x_1; x_2; \dots; x_n]; x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$. [Usporiadané n -tice.]

Množiny – základné vlastnosti

Usporiadaná dvojica prvkov x a y , označenie $[x; y]$,

je dvojica týchto prvkov x, y , v ktorej záleží na ich poradí.

[Výrazy $[1; 2]$, $[2; 1]$ sú rôzne usporiadané dvojice, ale výrazy $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$ predstavujú rovnakú množinu!]

- Usporiadané dvojice sa rovnajú (t. j. $[x_1; y_1] = [x_2; y_2]$), ak platí $x_1 = x_2$, a súčasne $y_1 = y_2$.

Karteziánskym súčinom množín $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$

je množina $A \times B = \{[x; y]; x \in A \wedge y \in B\} = \{[x; y]; x \in A, y \in B\}$.

[Pre $A \neq B$ neplatí $A \times B = B \times A$, t. j. vo všeobecnosti platí $A \times B \neq B \times A$.]

Karteziánsky súčin množín $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset, A_3 \neq \emptyset, \dots, A_n \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$:

- $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{[x_1; x_2; x_3]; x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3\}$. [Usporiadané trojice.]
- $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[x_1; x_2; \dots; x_n]; x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$. [Usporiadané n -tice.]

Pre $A \neq \emptyset$ definujeme $A \times A \times \dots \times A = A^n, n \in \mathbb{N}, \dots, A \times A = A^2, A = A^1$.

- $R = \{x_1; x_1 \in R\}$ [priamka].
- $R^2 = R \times R = \{[x_1; x_2]; x_1, x_2 \in R\}$ [rovina].
- $R^3 = R \times R \times R = \{[x_1; x_2; x_3]; x_1, x_2, x_3 \in R\}$ [3-rozmerný priestor].

Binárne relácie a zobrazenia – Binárna relácia

f je binárnou reláciou z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak $f \subset A \times B$.

[Relácia f je množina usporiadaných dvojíc $[x; y]$, $x \in A$, $y \in B$.]



Binárne relácie a zobrazenia – Binárna relácia

f je binárnou reláciou z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak $f \subset A \times B$.

[Relácia f je množina usporiadaných dvojíc $[x; y]$, $x \in A$, $y \in B$.]

- Skutočnosť, že prvok $[x; y]$ patrí do relácie f , označujeme $[x; y] \in f$, resp. xfy .



Binárne relácie a zobrazenia – Binárna relácia

f je **binárnou reláciou** z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak $f \subset A \times B$.

[Relácia f je množina usporiadaných dvojíc $[x; y]$, $x \in A$, $y \in B$.]

- Skutočnosť, že prvok $[x; y]$ patrí do relácie f , označujeme $[x; y] \in f$, resp. xfy .

Binárna relácia $f \subset A \times B$ je **zobrazením (funkciou)** z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$.

[Zobrazenie (funkcia) f je množina usporiadaných dvojíc, pričom každý vzor $x \in A$ má najviac jeden obraz $y \in B$.]



Binárne relácie a zobrazenia – Binárna relácia

f je **binárnou reláciou** z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak $f \subset A \times B$.

[Relácia f je množina usporiadaných dvojíc $[x; y]$, $x \in A$, $y \in B$.]

- Skutočnosť, že prvok $[x; y]$ patrí do relácie f , označujeme $[x; y] \in f$, resp. xfy .

Binárna relácia $f \subset A \times B$ je **zobrazením (funkciou)** z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$.

[Zobrazenie (funkcia) f je množina usporiadaných dvojíc, pričom každý vzor $x \in A$ má najviac jeden obraz $y \in B$.]

Funkciu (zobrazenie) f zapisujeme:

[Uvedené zápisy sú ekvivalentné.]

$$\bullet [x; y] \in f,$$

resp. $\bullet y = f(x),$

resp. $\bullet f: x \mapsto y,$

resp. $\bullet y = f(x), x \in D(f),$

resp. $\bullet f = \{[x; y] \in A \times B, y = f(x)\},$

resp. $\bullet y = f(x), x \in A,$

resp. $\bullet y = f(x): A \rightarrow B, \dots$

Binárne relácie a zobrazenia – Binárna relácia

f je **binárnou reláciou** z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak $f \subset A \times B$.

[Relácia f je množina usporiadaných dvojíc $[x; y]$, $x \in A$, $y \in B$.]

- Skutočnosť, že prvok $[x; y]$ patrí do relácie f , označujeme $[x; y] \in f$, resp. xfy .

Binárna relácia $f \subset A \times B$ je **zobrazením (funkciou)** z množiny $A \neq \emptyset$ do množiny $B \neq \emptyset$,

ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$.

[Zobrazenie (funkcia) f je množina usporiadaných dvojíc, pričom každý vzor $x \in A$ má najviac jeden obraz $y \in B$.]

Funkciu (zobrazenie) f zapisujeme:

[Uvedené zápisy sú ekvivalentné.]

- | | | | | | |
|-------|-------------------------------|-------|---|-------|----------------------|
| | • $[x; y] \in f$, | resp. | • $y = f(x)$, | resp. | • $f: x \mapsto y$, |
| resp. | • $y = f(x)$, $x \in D(f)$, | resp. | • $f = \{[x; y] \in A \times B, y = f(x)\}$, | | |
| resp. | • $y = f(x)$, $x \in A$, | resp. | • $y = f(x): A \rightarrow B$, | ... | |

$y = f(x)$, $x \in D(f)$ je zobrazenie, množina $C \subset D(f)$.

Množina $f(C) = \{f(x); x \in C\}$ sa nazýva **obraz množiny C** v zobrazení f .

Binárne relácie a zobrazenia – Zobrazenie (funkcia)

Funkcia (zobrazenie) $f : y = f(x), A \rightarrow B$.

- $x \in A$ nazývame **vzor** (nezávislá premenná) v zobrazení f .
- $y \in B$ nazývame **obraz** (závislá premenná, funkčná hodnota) v zobrazení f .

Binárne relácie a zobrazenia – Zobrazenie (funkcia)

Funkcia (zobrazenie) $f : y = f(x), A \rightarrow B$.

- $x \in A$ nazývame **vzor** (nezávislá premenná) v zobrazení f .
- $D(f) = \{x \in A; \exists y \in B, [x; y] \in f\}$ nazývame **definičný obor** (zobrazenia) f .

[$D(f)$ je množina všetkých vzorov zobrazenia (funkcie) f .]

- $y \in B$ nazývame **obraz** (závislá premenná, funkčná hodnota) v zobrazení f .
- $H(f) = \{y \in B; \exists x \in A, [x; y] \in f\}$ nazývame **obor hodnôt** (zobrazenia) f .

[$H(f) = \{f(x); x \in D(f)\}$ je množina všetkých obrazov zobrazenia (funkcie) f .]

Binárne relácie a zobrazenia – Zobrazenie (funkcia)

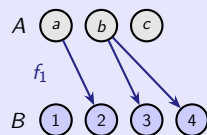
Funkcia (zobrazenie) $f : y = f(x), A \rightarrow B$.

- $x \in A$ nazývame **vzor** (nezávislá premenná) v zobrazení f .
- $D(f) = \{x \in A; \exists y \in B, [x; y] \in f\}$ nazývame **definičný obor** (zobrazenia) f .

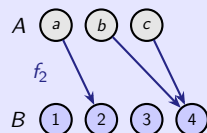
$[D(f)]$ je množina všetkých vzorov zobrazenia (funkcie) f .

- $y \in B$ nazývame **obraz** (závislá premenná, funkčná hodnota) v zobrazení f .
- $H(f) = \{y \in B; \exists x \in A, [x; y] \in f\}$ nazývame **obor hodnôt** (zobrazenia) f .

$[H(f) = \{f(x); x \in D(f)\}]$ je množina všetkých obrazov zobrazenia (funkcie) f .



- $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, f_1 : A \rightarrow B,$
 $f_1 = \{[a; 2], [b; 3], [b; 4]\}.$
 $D(f_1) = \{a, b, c\}, H(f_1) = \{2, 3\}.$



- $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, f_2 : A \rightarrow B,$
 $f_2 = \{[a; 2], [b; 4], [c; 4]\}.$
 $D(f_2) = \{a, b, c\}, H(f_2) = \{2, 4\}.$

Binárne relácie a zobrazenia – Zobrazenie (funkcia)

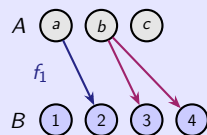
Funkcia (zobrazenie) $f : y = f(x), A \rightarrow B$.

- $x \in A$ nazývame **vzor** (nezávislá premenná) v zobrazení f .
- $D(f) = \{x \in A; \exists y \in B, [x; y] \in f\}$ nazývame **definičný obor** (zobrazenia) f .

$[D(f)]$ je množina všetkých vzorov zobrazenia (funkcie) f .

- $y \in B$ nazývame **obraz** (závislá premenná, funkčná hodnota) v zobrazení f .
- $H(f) = \{y \in B; \exists x \in A, [x; y] \in f\}$ nazývame **obor hodnôt** (zobrazenia) f .

$[H(f) = \{f(x); x \in D(f)\}]$ je množina všetkých obrazov zobrazenia (funkcie) f .

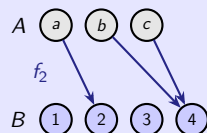


- $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, f_1 : A \rightarrow B,$

$[f_1 \text{ je relácia.}]$

$$f_1 = \{[a; 2], [b; 3], [b; 4]\}.$$

$[f_1 \text{ nie je zobrazenie (nie je funkcia).}]$



- $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, f_2 : A \rightarrow B,$

$[f_2 \text{ je relácia.}]$

$$f_2 = \{[a; 2], [b; 4], [c; 4]\}.$$

$[f_2 \text{ je zobrazenie (je funkcia).}]$

$$D(f_2) = \{a, b, c\}, H(f_2) = \{2, 4\}.$$

Binárne relácie a zobrazenia – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva

- injektívna (injekcia, *prostá*),
- surjektívna (surjekcia, „na“ množinu),
- bijektívna (bijekcia, *prostá na*),



Binárne relácie a zobrazenia – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva

- **injektívna** (**injekcia**, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Resp. ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$ platí $x_1 = x_2$.

- **surjektívna** (**surjekcia**, „na“ množinu), ak pre každé $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$.

- **bijektívna** (**bijekcia**, **prostá na**), ak je injektívna a súčasne surjektívna.

Binárne relácie a zobrazenia – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva

- **injektívna** (injekcia, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom z množiny A prislúchajú rôzne obrazy z množiny B .]

Resp. ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$ platí $x_1 = x_2$.

[Obrátená implikácia: Rovnaké obrazy majú rovnaké vzory.]

- **surjektívna** (surjekcia, „na“ množinu), ak pre každé $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$.

[Ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A , t. j. $f(A) = B$.]

- **bijektívna** (bijekcia, **prostá na**), ak je injektívna a súčasne surjektívna.

Binárne relácie a zobrazenia – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva

- **injektívna** (injekcia, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom z množiny A prislúchajú rôzne obrazy z množiny B .]

Resp. ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$ platí $x_1 = x_2$.

[Obrátená implikácia: Rovnaké obrazy majú rovnaké vzory.]

- **surjektívna** (surjekcia, „na“ množinu), ak pre každé $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$.

[Ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A , t. j. $f(A) = B$.]

- **bijektívna** (bijekcia, **prostá na**), ak je injektívna a súčasne surjektívna. 

Rovnosť funkcií $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$.

- $f = g$,

- $f = g$ na množine $M \subset D(f) \cap D(g)$,

Binárne relácie a zobrazenia – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva

- **injektívna** (injekcia, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom z množiny A prislúchajú rôzne obrazy z množiny B .]

Resp. ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$ platí $x_1 = x_2$.

[Obrátená implikácia: Rovnaké obrazy majú rovnaké vzory.]

- **surjektívna** (surjekcia, „na“ množinu), ak pre každé $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$.

[Ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A , t. j. $f(A) = B$.]

- **bijektívna** (bijekcia, **prostá na**), ak je injektívna a súčasne surjektívna.

Rovnosť funkcií $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$.

- $f = g$, ak platí ekvivalencia $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$, t. j. ak platí $y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x)$.

[Rovnosť na ich definičných oboroch.]

- $f = g$ na množine $M \subset D(f) \cap D(g)$, ak pre všetky $x \in M$ platí $f(x) = g(x)$.

Binárne relácie a zobrazenia – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva

- **injektívna** (injekcia, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom z množiny A prislúchajú rôzne obrazy z množiny B .]

Resp. ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$ platí $x_1 = x_2$.

[Obrátená implikácia: Rovnaké obrazy majú rovnaké vzory.]

- **surjektívna** (surjekcia, „na“ množinu), ak pre každé $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$.

[Ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A , t. j. $f(A) = B$.]

- **bijektívna** (bijekcia, **prostá na**), ak je injektívna a súčasne surjektívna. 

Rovnosť funkcií $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$.

- $f = g$, ak platí ekvivalencia $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$, t. j. ak platí $y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x)$.

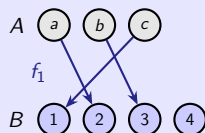
[Rovnosť na ich definičných oboroch.]

V praxi to znamená, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

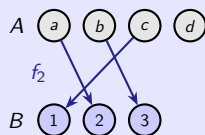
[Zobrazenia f, g sú množiny. Rovnosť $f = g$ musíme chápať ako rovnosť množín, t. j. $f \subset g$, $g \subset f$.]

- $f = g$ na množine $M \subset D(f) \cap D(g)$, ak pre všetky $x \in M$ platí $f(x) = g(x)$.

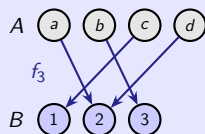
Binárne relácie a zobrazenia – Príklad



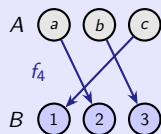
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_1 : A \rightarrow B$,
 $f_1 = \{[a; 2], [b; 1], [c; 1]\}$,
 $D(f_1) = \{a, b, c\}$, $H(f_1) = \{1, 2, 3\}$.



- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_2 : A \rightarrow B$,
 $f_2 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_2) = \{a, b, c\}$, $H(f_2) = \{1, 2, 3\}$.

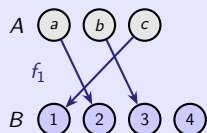


- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_3 : A \rightarrow B$,
 $f_3 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1], [d; 2]\}$,
 $D(f_3) = \{a, b, c, d\}$, $H(f_3) = \{1, 2, 3\}$.



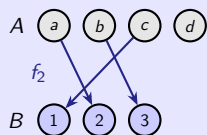
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_4 : A \rightarrow B$,
 $f_4 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_4) = \{a, b, c\}$, $H(f_4) = \{1, 2, 3\}$.

Binárne relácie a zobrazenia – Príklad

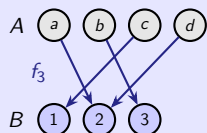


- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_1 : A \rightarrow B$,
 $f_1 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_1) = \{a, b, c\}$, $H(f_1) = \{1, 2, 3\}$.

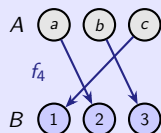
[f_1 je injekcia (prsté zobrazenie).]



- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_2 : A \rightarrow B$,
 $f_2 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_2) = \{a, b, c\}$, $H(f_2) = \{1, 2, 3\}$.



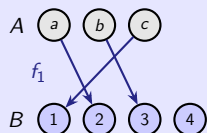
- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_3 : A \rightarrow B$,
 $f_3 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1], [d; 2]\}$,
 $D(f_3) = \{a, b, c, d\}$, $H(f_3) = \{1, 2, 3\}$.



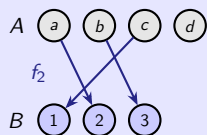
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_4 : A \rightarrow B$,
 $f_4 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_4) = \{a, b, c\}$, $H(f_4) = \{1, 2, 3\}$.

[f_4 je injekcia (prsté zobrazenie).]

Binárne relácie a zobrazenia – Príklad

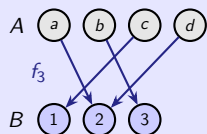


- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_1 : A \rightarrow B$,
 $f_1 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_1) = \{a, b, c\}$, $H(f_1) = \{1, 2, 3\}$.



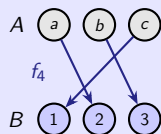
- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_2 : A \rightarrow B$,
 $f_2 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_2) = \{a, b, c\}$, $H(f_2) = \{1, 2, 3\}$.

[f_2 je surjekcia (zobrazenie na).]



- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_3 : A \rightarrow B$,
 $f_3 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1], [d; 2]\}$,
 $D(f_3) = \{a, b, c, d\}$, $H(f_3) = \{1, 2, 3\}$.

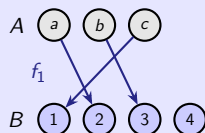
[f_3 je surjekcia (zobrazenie na).]



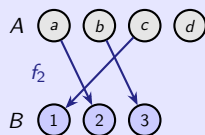
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_4 : A \rightarrow B$,
 $f_4 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_4) = \{a, b, c\}$, $H(f_4) = \{1, 2, 3\}$.

[f_4 je surjekcia (zobrazenie na).]

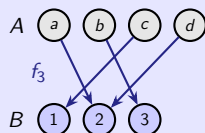
Binárne relácie a zobrazenia – Príklad



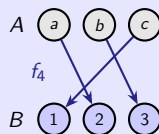
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_1 : A \rightarrow B$,
 $f_1 = \{[a; 2], [b; 1], [c; 3]\}$,
 $D(f_1) = \{a, b, c\}$, $H(f_1) = \{1, 2, 3\}$.



- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_2 : A \rightarrow B$,
 $f_2 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_2) = \{a, b, c\}$, $H(f_2) = \{1, 2, 3\}$.



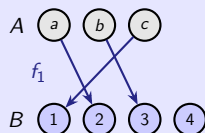
- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_3 : A \rightarrow B$,
 $f_3 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1], [d; 2]\}$,
 $D(f_3) = \{a, b, c, d\}$, $H(f_3) = \{1, 2, 3\}$.



- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_4 : A \rightarrow B$,
 $f_4 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_4) = \{a, b, c\}$, $H(f_4) = \{1, 2, 3\}$.

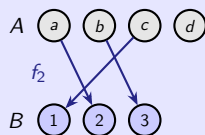
[f_4 je bijekcia (prsté zobrazenie na).]

Binárne relácie a zobrazenia – Príklad



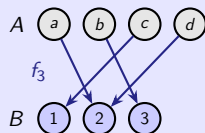
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_1 : A \rightarrow B$,
 $f_1 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_1) = \{a, b, c\}$, $H(f_1) = \{1, 2, 3\}$.

[f_1 je injekcia (prsté zobrazenie).]



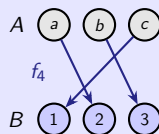
- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_2 : A \rightarrow B$,
 $f_2 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_2) = \{a, b, c\}$, $H(f_2) = \{1, 2, 3\}$.

[f_2 je surjekcia (zobrazenie na).]



- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_3 : A \rightarrow B$,
 $f_3 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1], [d; 2]\}$,
 $D(f_3) = \{a, b, c, d\}$, $H(f_3) = \{1, 2, 3\}$.

[f_3 je surjekcia (zobrazenie na).]



- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_4 : A \rightarrow B$,
 $f_4 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$,
 $D(f_4) = \{a, b, c\}$, $H(f_4) = \{1, 2, 3\}$.

[f_4 je bijekcia (prsté zobrazenie na).]

Binárne relácie a zobrazenia – Zložené zobrazenie (funkcia)

Zloženým zobrazením (kompozíciou, zložením, zloženou funkciou)

zobrazení (funkcií) $f: A \rightarrow B$ a $g: C \rightarrow D$, pričom $H(f) \subset C$, sa nazýva

zobrazenie (funkcia) $F = g(f) : A \rightarrow D$, ktoré každému $x \in A$

priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, t. j. hodnotu $z = g(f(x))$.

- Zapisujeme $F = g(f) = f \circ g$, resp. $F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x)$, $x \in D(f)$.

Binárne relácie a zobrazenia – Zložené zobrazenie (funkcia)

Zloženým zobrazením (kompozíciou, zložením, zloženou funkciou)

zobrazení (funkcií) $f: A \rightarrow B$ a $g: C \rightarrow D$, pričom $H(f) \subset C$, sa nazýva

zobrazenie (funkcia) $F = g(f) : A \rightarrow D$, ktoré každému $x \in A$

priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, t. j. hodnotu $z = g(f(x))$.

- f sa nazýva **vnútorná zložka** $g(f)$.
- g sa nazýva **vonkajšia zložka** $g(f)$.
- Zapisujeme $F = g(f) = f \circ g$, resp. $F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x)$, $x \in D(f)$.

Binárne relácie a zobrazenia – Zložené zobrazenie (funkcia)

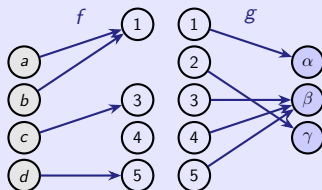
Zloženým zobrazením (kompozíciou, zložením, zloženou funkciou)

zobrazení (funkcií) $f: A \rightarrow B$ a $g: C \rightarrow D$, pričom $H(f) \subset C$, sa nazýva

zobrazenie (funkcia) $F = g(f): A \rightarrow D$, ktoré každému $x \in A$

priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, t. j. hodnotu $z = g(f(x))$.

- f sa nazýva **vnútorná zložka** $g(f)$.
- g sa nazýva **vonkajšia zložka** $g(f)$.
- Zapisujeme $F = g(f) = f \circ g$, resp. $F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x)$, $x \in D(f)$.
- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$.
- $f = \{[a; 1], [b; 1], [c; 3], [d; 5]\}: A \rightarrow B$.
- $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.
- $g = \{[1; \alpha], [2; \gamma], [3; \beta], [4; \beta], [5; \beta]\}: C \rightarrow D$.



Binárne relácie a zobrazenia – Zložené zobrazenie (funkcia)

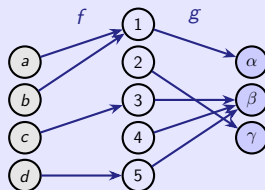
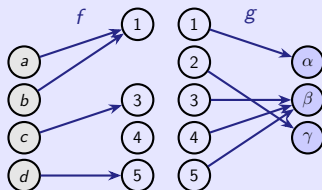
Zloženým zobrazením (kompozíciou, zložením, zloženou funkciou)

zobrazení (funkcií) $f: A \rightarrow B$ a $g: C \rightarrow D$, pričom $H(f) \subset C$, sa nazýva

zobrazenie (funkcia) $F = g(f): A \rightarrow D$, ktoré každému $x \in A$

priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, t. j. hodnotu $z = g(f(x))$.

- f sa nazýva **vnútorná zložka** $g(f)$.
- g sa nazýva **vonkajšia zložka** $g(f)$.
- Zapisujeme $F = g(f) = f \circ g$, resp. $F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x)$, $x \in D(f)$.
- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$.
- $f = \{[a; 1], [b; 1], [c; 3], [d; 5]\}: A \rightarrow B$.
- $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.
- $g = \{[1; \alpha], [2; \gamma], [3; \beta], [4; \beta], [5; \beta]\}: C \rightarrow D$.



Binárne relácie a zobrazenia – Zložené zobrazenie (funkcia)

Zloženým zobrazením (kompozíciou, zložením, zloženou funkciou)

zobrazení (funkcií) $f: A \rightarrow B$ a $g: C \rightarrow D$, pričom $H(f) \subset C$, sa nazýva

zobrazenie (funkcia) $F = g(f): A \rightarrow D$, ktoré každému $x \in A$

priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, t. j. hodnotu $z = g(f(x))$.

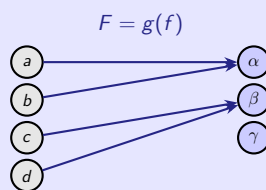
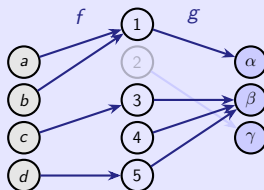
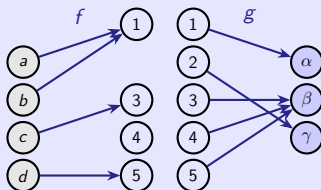
- f sa nazýva **vnútorná zložka** $g(f)$.
- g sa nazýva **vonkajšia zložka** $g(f)$.
- Zapisujeme $F = g(f) = f \circ g$, resp. $F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x)$, $x \in D(f)$.

• $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

• $f = \{[a; 1], [b; 1], [c; 3], [d; 5]\}: A \rightarrow B$.

• $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

• $g = \{[1; \alpha], [2; \gamma], [3; \beta], [4; \beta], [5; \beta]\}: C \rightarrow D$.

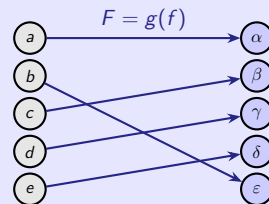
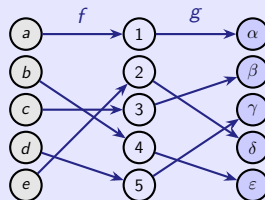
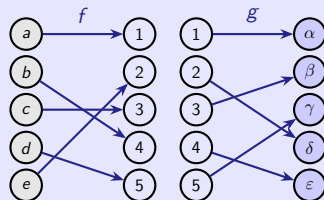


• $F = g(f) = \{[a; \alpha], [b; \alpha], [c; \beta], [d; \beta]\}: A \rightarrow D$.

Binárne relácie a zobrazenia – Zloženie dvoch bijekcií

Funkcie (zobrazenia) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú bijekcie.

$\Rightarrow$ • Funkcia (zobrazenie) $F = g[f]: A \rightarrow C$ je bijekcia.



Binárne relácie a zobrazenia – Zloženie dvoch bijekcií

Funkcie (zobrazenia) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú bijekcie.

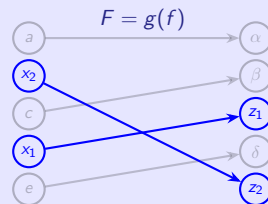
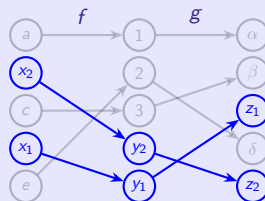
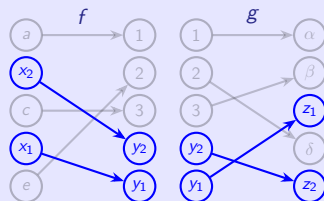
$\Rightarrow$ • Funkcia (zobrazenie) $F = g[f]: A \rightarrow C$ je bijekcia.

Dôkaz.

• f, g sú injekcie, $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$.

$\Rightarrow z_1 = g(y_1) \neq z_2 = g(y_2)$.

$\Rightarrow g(y_1) = g[f(x_1)] = F(x_1) \neq g(y_2) = g[f(x_2)] = F(x_2)$, t. j. F je injekcia.



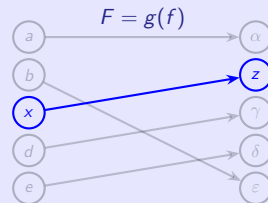
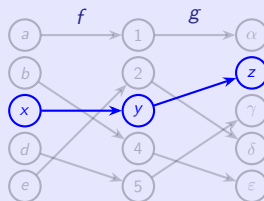
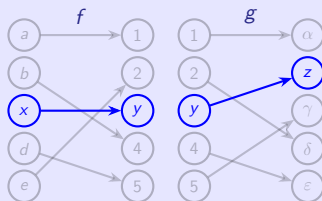
Binárne relácie a zobrazenia – Zloženie dvoch bijekcií

Funkcie (zobrazenia) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú bijekcie.

$\Rightarrow$ • Funkcia (zobrazenie) $F = g[f]: A \rightarrow C$ je bijekcia.

Dôkaz.

• g, f sú surjekcie, $z \in C$. $\Rightarrow$ Existuje $y \in B$: $z = g(y)$. $\Rightarrow$ Existuje $x \in A$: $y = f(x)$.
 $\Rightarrow$ Existuje $x \in A$: $z = g(y) = g[f(x)] = F(x)$, t. j. F je surjekcia.



Binárne relácie a zobrazenia – Zloženie dvoch bijekcií

Funkcie (zobrazenia) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú bijekcie.

$\Rightarrow$ • Funkcia (zobrazenie) $F = g[f]: A \rightarrow C$ je bijekcia.

Dôkaz.

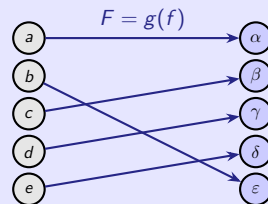
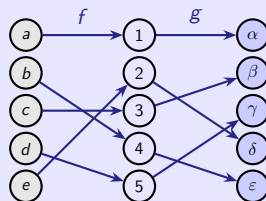
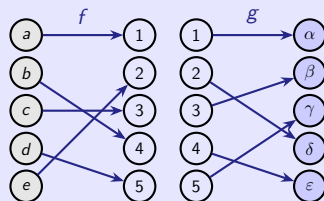
• f, g sú injekcie, $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. $\Rightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$.

$\Rightarrow z_1 = g(y_1) \neq z_2 = g(y_2)$.

$\Rightarrow g(y_1) = g[f(x_1)] = F(x_1) \neq g(y_2) = g[f(x_2)] = F(x_2)$, t. j. F je injekcia.

• g, f sú surjekcie, $z \in C$. $\Rightarrow$ Existuje $y \in B$: $z = g(y)$. $\Rightarrow$ Existuje $x \in A$: $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Existuje $x \in A$: $z = g(y) = g[f(x)] = F(x)$, t. j. F je surjekcia.



Binárne relácie a zobrazenia – Identita, inverzné zobrazenie

Identitou (identickou funkciou, identickým zobrazením) nazývame

takú funkciu (zobrazenie) f , v ktorej sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom,

t. j. platí $x = f(x)$, $x \in D(f)$, $D(f) = H(f)$, $f = \{[x; x], x \in D(f)\}$.

Binárne relácie a zobrazenia – Identita, inverzné zobrazenie

Identitou (identickou funkciou, identickým zobrazením) nazývame

takú funkciu (zobrazenie) f , v ktorej sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom,

$$\text{t. j. platí } x = f(x), x \in D(f), D(f) = H(f), f = \{[x; x], x \in D(f)\}.$$

Inverznou funkciou (zobrazením) $f: A \rightarrow B$, označenie f^{-1} , nazývame

funkciu (zobrazenie) $x = f^{-1}(y): B \rightarrow A$ takú, že platí $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$,

$$\text{t. j. platí } y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Binárne relácie a zobrazenia – Identita, inverzné zobrazenie

Identitou (identickou funkciou, identickým zobrazením) nazývame

takú funkciu (zobrazenie) f , v ktorej sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom,

$$\text{t. j. platí } x = f(x), x \in D(f), D(f) = H(f), f = \{[x; x], x \in D(f)\}.$$

Inverznou funkciou (zobrazením) $f: A \rightarrow B$, označenie f^{-1} , nazývame

funkciu (zobrazenie) $x = f^{-1}(y): B \rightarrow A$ takú, že platí $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$,

$$\text{t. j. platí } y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

[Aby existovala inverzná funkcia f^{-1} , musí byť $f: A \rightarrow B$ bijekcia.]

Binárne relácie a zobrazenia – Identita, inverzné zobrazenie

Identitou (identickou funkciou, identickým zobrazením) nazývame

takú funkciu (zobrazenie) f , v ktorej sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom,

$$\text{t. j. platí } x = f(x), x \in D(f), D(f) = H(f), f = \{[x; x], x \in D(f)\}.$$

Inverznou funkciou (zobrazením) $f: A \rightarrow B$, označenie f^{-1} , nazývame

funkciu (zobrazenie) $x = f^{-1}(y): B \rightarrow A$ takú, že platí $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$,

$$\text{t. j. platí } y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

[Aby existovala inverzná funkcia f^{-1} , musí byť $f: A \rightarrow B$ bijekcia.]

Funkcia (zobrazenie) $f: A \rightarrow B$ je bijekcia. Potom platí:

- Inverzná funkcia (zobrazenie) $f^{-1}: B \rightarrow A$ je bijekcia.

Binárne relácie a zobrazenia – Identita, inverzné zobrazenie

Identitou (identickou funkciou, identickým zobrazením) nazývame

takú funkciu (zobrazenie) f , v ktorej sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom,

$$\text{t. j. platí } x = f(x), x \in D(f), D(f) = H(f), f = \{[x; x], x \in D(f)\}.$$

Inverznou funkciou (zobrazením) $f: A \rightarrow B$, označenie f^{-1} , nazývame

funkciu (zobrazenie) $x = f^{-1}(y): B \rightarrow A$ takú, že platí $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$,

$$\text{t. j. platí } y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

[Aby existovala inverzná funkcia f^{-1} , musí byť $f: A \rightarrow B$ bijekcia.]

Funkcia (zobrazenie) $f: A \rightarrow B$ je bijekcia. Potom platí:

- Inverzná funkcia (zobrazenie) $f^{-1}: B \rightarrow A$ je bijekcia.
- $(f^{-1})^{-1} = f$.

[Inverzná funkcia k inverznej funkcii je pôvodná funkcia.]

Binárne relácie a zobrazenia – Identita, inverzné zobrazenie

Identitou (identickou funkciou, identickým zobrazením) nazývame

takú funkciu (zobrazenie) f , v ktorej sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom,

$$\text{t. j. platí } x = f(x), x \in D(f), D(f) = H(f), f = \{[x; x], x \in D(f)\}.$$

Inverznou funkciou (zobrazením) k $f: A \rightarrow B$, označenie f^{-1} , nazývame

funkciu (zobrazenie) $x = f^{-1}(y): B \rightarrow A$ takú, že platí $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$,

$$\text{t. j. platí } y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

[Aby existovala inverzná funkcia f^{-1} , musí byť $f: A \rightarrow B$ bijekcia.]

Funkcia (zobrazenie) $f: A \rightarrow B$ je bijekcia. Potom platí:

- Inverzná funkcia (zobrazenie) $f^{-1}: B \rightarrow A$ je bijekcia.

- $(f^{-1})^{-1} = f$.

[Inverzná funkcia k inverznej funkcii je pôvodná funkcia.]

- Pre všetky $x \in A$ platí $f^{-1}[f(x)] = x$.

- Pre všetky $y \in B$ platí $f[f^{-1}(y)] = y$.

Binárne relácie a zobrazenia – Ekvivalentnosť množín

Množiny A, B sú **ekvivalentné** (majú **rovnakú mohutnosť**), označenie $A \sim B$,

ak existuje bijekcia $f: A \rightarrow B$.

Binárne relácie a zobrazenia – Ekvivalentnosť množín

Množiny A, B sú **ekvivalentné** (majú **rovnakú mohutnosť**), označenie $A \sim B$,

ak existuje bijekcia $f: A \rightarrow B$.

- Ekvivalentné množiny majú rovnaký počet prvkov.

Binárne relácie a zobrazenia – Ekvivalentnosť množín

Množiny A, B sú **ekvivalentné** (majú **rovnakú mohutnosť**), označenie $A \sim B$,

ak existuje bijekcia $f: A \rightarrow B$.

- Ekvivalentné množiny majú rovnaký počet prvkov.

Množina A je $\left\{ \begin{array}{l} \text{konečná ak, je} \\ \text{prázdna, t. j. } A = \emptyset \\ \text{alebo konečne spočítateľná,} \\ \text{t. j. } A \sim \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$

- Prázdna množina má 0 prvkov (nemá prvky).
- Konečne spočítateľná množina má $n \in \mathbb{N}$ prvkov (konečne veľa prvkov).

Binárne relácie a zobrazenia – Ekvivalentnosť množín

Množiny A, B sú **ekvivalentné** (majú **rovnakú mohutnosť**), označenie $A \sim B$,

ak existuje bijekcia $f: A \rightarrow B$.

- Ekvivalentné množiny majú rovnaký počet prvkov.

Množina A je $\left\{ \begin{array}{l} \text{nekonečná} \text{ ak, je } \left\{ \begin{array}{l} \text{nekonečne spočítateľná, t. j. } A \sim N \\ \text{alebo nespočítateľná, t. j. nie je spočítateľná.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

- **Nekonečne spočítateľná množina** má ∞ prvkov (spočítateľne nekonečne veľa prvkov).
- **Nespočítateľná množina** má ∞ prvkov (nespočítateľne nekonečne veľa prvkov).

Binárne relácie a zobrazenia – Ekvivalentnosť množín

Množiny A, B sú **ekvivalentné** (majú **rovnakú mohutnosť**), označenie $A \sim B$,

ak existuje bijekcia $f: A \rightarrow B$.

- Ekvivalentné množiny majú rovnaký počet prvkov.

Množina A je $\left\{ \begin{array}{l} \text{konečná ak, je} \left\{ \begin{array}{l} \text{prázdna, t. j. } A = \emptyset \\ \text{alebo konečne spočítateľná,} \\ \text{t. j. } A \sim \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \\ \text{nekonečná ak, je} \left\{ \begin{array}{l} \text{nekonečne spočítateľná, t. j. } A \sim \mathbb{N} \\ \text{alebo nespočítateľná, t. j. nie je spočítateľná.} \end{array} \right. \end{array} \right\}$ spočítateľná.

- Prázdna množina má 0 prvkov (nemá prvky).
- Konečne spočítateľná množina má $n \in \mathbb{N}$ prvkov (konečne veľa prvkov).
- Nekonečne spočítateľná množina má ∞ prvkov (spočítateľne nekonečne veľa prvkov).
- Nespočítateľná množina má ∞ prvkov (nespočítateľne nekonečne veľa prvkov).

Axiómy reálnych čísel – Binárna operácia

Binárnou operáciou na množine $A \neq \emptyset$ nazývame

zobrazenie $\varphi: A^2 \rightarrow A$, t. j. zobrazenie, ktoré priradí každej usporiadanej dvojici $[a; b] \in A^2$ nejaký prvok $c \in A$.

• Označenie $c = \varphi(a, b)$, resp. $c = a\varphi b$.

[Např. $c = a + b$, $c = a \cdot b$, $C = A \cup B$, ap.]

Axiómy reálnych čísel – Binárna operácia

Binárnou operáciou na množine $A \neq \emptyset$ nazývame

zobrazenie $\varphi: A^2 \rightarrow A$, t. j. zobrazenie, ktoré priradí každej usporiadanej dvojici $[a; b] \in A^2$ nejaký prvok $c \in A$.

- Označenie $c = \varphi(a, b)$, resp. $c = a\varphi b$.

[Napr. $c = a + b$, $c = a \cdot b$, $C = A \cup B$, ap.]

- Číslo je jedným zo základných pojmov, s ktorým sa neustále stretávame.

- Množina komplexných čísel C je najvšeobecnejšou číselnou množinou,

obsahuje imaginárnu jednotku i s vlastnosťou $i^2 = -1$, t. j. $i = \sqrt{-1}$.

Axiómy reálnych čísel – Binárna operácia

Binárnou operáciou na množine $A \neq \emptyset$ nazývame

zobrazenie $\varphi: A^2 \rightarrow A$, t. j. zobrazenie, ktoré priradí každej usporiadanej dvojici $[a; b] \in A^2$ nejaký prvok $c \in A$.

- Označenie $c = \varphi(a, b)$, resp. $c = a\varphi b$.

[Napr. $c = a + b$, $c = a \cdot b$, $C = A \cup B$, ap.]

- Číslo je jedným zo základných pojmov, s ktorým sa neustále stretávame.

- Množina komplexných čísel C je najvšeobecnejšou číselnou množinou,

obsahuje imaginárnu jednotku i s vlastnosťou $i^2 = -1$, t. j. $i = \sqrt{-1}$.

Množina reálnych čísel R

je podmnožinou množiny C a súčasne je najdôležitejšou číselnou množinou.

Axiómy reálnych čísel – Binárna operácia

Binárnou operáciou na množine $A \neq \emptyset$ nazývame

zobrazenie $\varphi: A^2 \rightarrow A$, t. j. zobrazenie, ktoré priradí každej usporiadanej dvojici $[a; b] \in A^2$ nejaký prvok $c \in A$.

- Označenie $c = \varphi(a, b)$, resp. $c = a\varphi b$. [Napr. $c = a + b$, $c = a \cdot b$, $C = A \cup B$, ap.]

- Číslo** je jedným zo základných pojmov, s ktorým sa neustále stretávame.
- Množina komplexných čísel C** je najvšeobecnejšou číselnou množinou, obsahuje imaginárnu jednotku i s vlastnosťou $i^2 = -1$, t. j. $i = \sqrt{-1}$.

Množina reálnych čísel R

je podmnožinou množiny C a súčasne je najdôležitejšou číselnou množinou.

- R definujeme ako celok s reláciami, operáciami a ich vlastnosťami, ktoré zadávame pomocou tzv. **axióm reálnych čísel**.

Axiómy reálnych čísel – Binárna operácia

Binárnou operáciou na množine $A \neq \emptyset$ nazývame

zobrazenie $\varphi: A^2 \rightarrow A$, t. j. zobrazenie, ktoré priradí každej usporiadanej dvojici $[a; b] \in A^2$ nejaký prvok $c \in A$.

- Označenie $c = \varphi(a, b)$, resp. $c = a\varphi b$. [Napr. $c = a + b$, $c = a \cdot b$, $C = A \cup B$, ap.]

- Číslo je jedným zo základných pojmov, s ktorým sa neustále stretávame.
- Množina komplexných čísel C je najvšeobecnejšou číselnou množinou, obsahuje imaginárnu jednotku i s vlastnosťou $i^2 = -1$, t. j. $i = \sqrt{-1}$.

Množina reálnych čísel R

je podmnožinou množiny C a súčasne je najdôležitejšou číselnou množinou.

- R definujeme ako celok s reláciami, operáciami a ich vlastnosťami, ktoré zadávame pomocou tzv. **axióm reálnych čísel**.
- Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom **číslo** rozumieť číslo reálne.

Axiómy reálných čísel – Rovnosť čísel

Axiómy reálnych čísel

vyjadrujú základné vlastnosti reálnych čísel.

Axiómy reálnych čísel – Rovnosť čísel

Axiómy reálnych čísel

vyjadrujú základné vlastnosti reálnych čísel.

- Rovnosť čísel a a b (základný vzťah medzi číslami).

Číslo a sa rovná číslu b (čísla a , b sa rovnajú), označenie $a = b$,

ak výrazy a , b vyjadrujú to isté číslo.

Číslo a sa nerovná číslu b (čísla a , b sa nerovnajú), označenie $a \neq b$,

ak neplatí, že sa a , b rovnajú.

Axiómy reálnych čísel – Rovnosť čísel

Axiómy reálnych čísel

vyjadrujú základné vlastnosti reálnych čísel.

- Rovnosť čísel a a b (základný vzťah medzi číslami).

Číslo a sa rovná číslu b (čísla a , b sa rovnajú), označenie $a = b$,

ak výrazy a , b vyjadrujú to isté číslo.

Číslo a sa nerovná číslu b (čísla a , b sa nerovnajú), označenie $a \neq b$,

ak neplatí, že sa a , b rovnajú.

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

[Rovnosť je reláciou ekvivalencie na R .]

- $a = a$.

[Reflexívnosť.]

- $a = b \Leftrightarrow b = a$.

[Symetria.]

- $a = b, b = c \Rightarrow a = c$.

[Tranzitívnosť.]

Axiómy reálnych čísel – Axiómy sčítania a násobenia

- Axiómy sčítania a násobenia.

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

- $a + b = b + a$.
- $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- $\exists! 0 \in R \forall a \in R: a = a + 0$.
- $\forall a \in R \exists! x \in R: 0 = a + x$.

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

- $a \cdot b = b \cdot a$.
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- $\exists! 1 \in R \forall a \in R: a = a \cdot 1$.
- $\forall a \in R, a \neq 0 \exists! x \in R: 1 = a \cdot x$.

Axiómy reálnych čísel – Axiómy sčítania a násobenia

• Axiómy sčítania a násobenia.

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí: $[(R; +)]$ je komutatívna grupa.

• $a + b = b + a.$ [Komutatívny zákon.]

• $(a + b) + c = a + (b + c).$ [Asociatívny zákon.]

• $\exists! 0 \in R \forall a \in R: a = a + 0.$
[Existuje jediný neutrálny prvok operácie +, t. j. prvok nula 0.]

• $\forall a \in R \exists! x \in R: 0 = a + x.$
[Ku každému prvku $a \in R$ existuje symetrizačný prvok,
t. j. opačný prvok $x = -a$.]

$[(R; +; \cdot)]$ je komutatívne teleso, t. j. pole.]

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí: $[(R - \{0\}; \cdot)]$ je komutatívna grupa.

• $a \cdot b = b \cdot a.$ [Komutatívny zákon.]

• $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$ [Asociatívny zákon.]

• $\exists! 1 \in R \forall a \in R: a = a \cdot 1.$
[Existuje jediný neutrálny prvok operácie ·, t. j. prvok jednotka 1.]

• $\forall a \in R, a \neq 0 \exists! x \in R: 1 = a \cdot x.$
[Ku každému prvku $a \in R, a \neq 0$ existuje symetrizačný prvok,
t. j. inverzný (obrátený) prvok $x = a^{-1} = \frac{1}{a}$.]

Axiómy reálnych čísel – Axiómy sčítania a násobenia

• Axiómy sčítania a násobenia.

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí: $[(R; +)]$ je komutatívna grupa.]

• $a + b = b + a.$ [Komutatívny zákon.]

• $(a + b) + c = a + (b + c).$ [Asociatívny zákon.]

• $\exists! 0 \in R \forall a \in R: a = a + 0.$
[Existuje jediný neutrálny prvok operácie +, t. j. prvok nula 0.]

• $\forall a \in R \exists! x \in R: 0 = a + x.$
[Ku každému prvku $a \in R$ existuje symetrizačný prvok,
t. j. opačný prvok $x = -a$.]

• Odčítanie $a - b = a + (-b).$
[Opačná (symetrizačná) operácia k sčítaniu +.]

$[(R; +; \cdot)]$ je komutatívne teleso, t. j. pole.]

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí: $[(R - \{0\}; \cdot)]$ je komutatívna grupa.]

• $a \cdot b = b \cdot a.$ [Komutatívny zákon.]

• $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$ [Asociatívny zákon.]

• $\exists! 1 \in R \forall a \in R: a = a \cdot 1.$
[Existuje jediný neutrálny prvok operácie $\cdot$, t. j. prvok jednotka 1.]

• $\forall a \in R, a \neq 0 \exists! x \in R: 1 = a \cdot x.$
[Ku každému prvku $a \in R, a \neq 0$ existuje symetrizačný prvok,
t. j. inverzný (obrátený) prvok $x = a^{-1} = \frac{1}{a}$.]

• Delenie $\frac{a}{b} = a/b = a : b = a \cdot b^{-1}.$
[Inverzná (symetrizačná) operácia k násobeniu $\cdot$.]

Axiómy reálnych čísel – Axiómy sčítania a násobenia

• Axiómy sčítania a násobenia.

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí: $[(R; +)]$ je komutatívna grupa.]

• $a + b = b + a.$ [Komutatívny zákon.]

• $(a + b) + c = a + (b + c).$ [Asociatívny zákon.]

• $\exists! 0 \in R \forall a \in R: a = a + 0.$
[Existuje jediný neutrálny prvok operácie +, t. j. prvok nula 0.]

• $\forall a \in R \exists! x \in R: 0 = a + x.$
[Ku každému prvku $a \in R$ existuje symetrizačný prvok,
t. j. opačný prvok $x = -a$.]

• Odčítanie $a - b = a + (-b).$
[Opačná (symetrizačná) operácia k sčítaniu +.]

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

• $(a + b)c = (ac) + (bc) = ac + bc.$

$[(R; +; \cdot)]$ je komutatívne teleso, t. j. pole.]

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí: $[(R - \{0\}; \cdot)]$ je komutatívna grupa.]

• $a \cdot b = b \cdot a.$ [Komutatívny zákon.]

• $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$ [Asociatívny zákon.]

• $\exists! 1 \in R \forall a \in R: a = a \cdot 1.$
[Existuje jediný neutrálny prvok operácie $\cdot$, t. j. prvok jednotka 1.]

• $\forall a \in R, a \neq 0 \exists! x \in R: 1 = a \cdot x.$
[Ku každému prvku $a \in R, a \neq 0$ existuje symetrizačný prvok,
t. j. inverzný (obrátený) prvok $x = a^{-1} = \frac{1}{a}$.]

• Delenie $\frac{a}{b} = a/b = a : b = a \cdot b^{-1}.$
[Inverzná (symetrizačná) operácia k násobeniu $\cdot$.]

[Distributívny zákon násobenia vzhľadom na sčítanie.]

Axiómy reálnych čísel – Axiómy usporiadania

- Axiómy usporiadania.

Reálne čísla porovnávame pomocou relácií usporiadania **menší** $<$, resp. **väčší** $>$. 

Axiómy reálnych čísel – Axiómy usporiadania

- Axiómy usporiadania.

Reálne čísla porovnávame pomocou relácií usporiadania **menší** $<$, resp. **väčší** $>$.
[$a < b$, $a > b$ sú ostré nerovnosti.]

- $a \leq b$ vyjadruje $a = b$ alebo $a < b$ (a je menšie alebo rovné b).

- $a \geq b$ vyjadruje $a = b$ alebo $a > b$ (a je väčšie alebo rovné b).

[$a \leq b$, $a \geq b$ sú neostré nerovnosti.]

Axiómy reálnych čísel – Axiómy usporiadania

- Axiómy usporiadania.

Reálne čísla porovnávame pomocou relácií usporiadania **menší** $<$, resp. **väčší** $>$.

[$a < b$, $a > b$ sú ostré nerovnosti.]

- $a \leq b$ vyjadruje $a = b$ alebo $a < b$ (a je menšie alebo rovné b).

- $a \geq b$ vyjadruje $a = b$ alebo $a > b$ (a je väčšie alebo rovné b).

[$a \leq b$, $a \geq b$ sú neostré nerovnosti.]

Pre všetky $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí:

[Relácie $<$, $>$ definujú usporiadanie na množine $\mathbb{R}$.]

- Platí práve jeden zo vzťahov $a < b$, $a = b$, $a > b$.

- $a < b$, $b < c. \Rightarrow a < c$.

- $a \not< a$, t. j. neplatí $a < a$.

- $a < b. \Rightarrow a + c < b + c$.

- $a < b$, $c > 0. \Rightarrow ac < bc$.

Axiómy reálnych čísel – Axiómy usporiadania

• Axiómy usporiadania.

Reálne čísla porovnávame pomocou relácií usporiadania **menší** $<$, resp. **väčší** $>$.
[$a < b$, $a > b$ sú ostré nerovnosti.]

• $a \leq b$ vyjadruje $a = b$ alebo $a < b$ (a je menšie alebo rovné b).

• $a \geq b$ vyjadruje $a = b$ alebo $a > b$ (a je väčšie alebo rovné b).
[$a \leq b$, $a \geq b$ sú neostre nerovnosti.]

Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

[Relácie $<$, $>$ definujú usporiadanie na množine R .]

• Platí práve jeden zo vzťahov $a < b$, $a = b$, $a > b$.

• $a < b$, $b < c$. $\Rightarrow$ • $a < c$.

• $a \not< a$, t. j. neplatí $a < a$.

• $a < b$. $\Rightarrow$ • $a + c < b + c$.

• $a < b$, $c > 0$. $\Rightarrow$ • $ac < bc$.

Reálne číslo $x \in R$ sa nazýva:

• **Kladné**, ak platí $x > 0$.

• **Záporné**, ak platí $x < 0$.

• **Nezáporné**, ak platí $x \geq 0$.

• **Nekladné**, ak platí $x \leq 0$.

• Číslo 0 je nezáporné a súčasne nekladné.

Axiómy reálnych čísel – Ohraničenosť

$A \subset \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Číslo (reálne číslo) $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva:

- **Horné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $x \leq a$.
- **Dolné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $a \leq x$.

Axiómy reálnych čísel – Ohraničenosť

$A \subset \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Číslo (reálne číslo) $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva:

- **Horné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $x \leq a$.
- **Dolné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $a \leq x$.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva:

- **Ohraničená zhora**, ak existuje aspoň jedno jej horné ohraničenie.
 - **Ohraničená zdola**, ak existuje aspoň jedno jej dolné ohraničenie.
-
- **Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.
 - **Neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola.

Axiómy reálnych čísel – Ohraničenosť

$A \subset \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Číslo (reálne číslo) $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva:

- **Horné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $x \leq a$.
- **Dolné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $a \leq x$.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva:

- **Ohraničená**, ak je ohraničená zhora a súčasne je ohraničená zdola.
-
- **Neohraničená**, ak nie je ohraničená, t. j. nie je ohraničená zhora alebo nie je ohraničená zdola.

Axiómy reálnych čísel – Ohraničenosť

$A \subset \mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Číslo (reálne číslo) $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva:

- **Horné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $x \leq a$.
- **Dolné ohraničenie** množiny A , ak pre všetky $x \in A$ platí $a \leq x$.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva:

- **Ohraničená zhora**, ak existuje aspoň jedno jej horné ohraničenie.
 - **Ohraničená zdola**, ak existuje aspoň jedno jej dolné ohraničenie.
 - **Ohraničená**, ak je ohraničená zhora a súčasne je ohraničená zdola.
-
- **Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.
 - **Neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola.
 - **Neohraničená**, ak nie je ohraničená, t. j. nie je ohraničená zhora alebo nie je ohraničená zdola.

Axiómy reálnych čísel – Axióma o supréme – AH

Horné ohraničenie $a \in R$ (zhora ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:



Dolné ohraničenie $a \in R$ (zdola ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:



Axiómy reálnych čísel – Axióma o suprémě – AH

Horné ohraničenie $a \in R$ (zhora ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Maximum** (najväčší prvok, maximálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \max A$.

Dolné ohraničenie $a \in R$ (zdola ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Minimum** (najmenší prvok, minimálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \min A$.

Axiómy reálnych čísel – Axióma o suprémě – AH

Horné ohraničenie $a \in R$ (zhora ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- Najmenšie z horných ohraničení A sa nazýva **suprémum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \sup A$.

Dolné ohraničenie $a \in R$ (zdola ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- Najväčšie z dolných ohraničení A sa nazýva **infimum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \inf A$.

Axiómy reálnych čísel – Axióma o suprémě – AH

Horné ohraničenie $a \in R$ (zhora ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Maximum** (najväčší prvok, maximálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \max A$.
- **Najmenšie** z horných ohraničení A sa nazýva **suprémum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \sup A$.

Dolné ohraničenie $a \in R$ (zdola ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Minimum** (najmenší prvok, minimálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \min A$.
- **Najväčšie** z dolných ohraničení A sa nazýva **infimum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \inf A$.

Axiómy reálnych čísel – Axióma o suprémě – AH

Horné ohraničenie $a \in R$ (zhora ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Maximum** (najväčší prvok, maximálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \max A$.
- **Najmenšie** z horných ohraničení A sa nazýva **suprémum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \sup A$.

Dolné ohraničenie $a \in R$ (zdola ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Minimum** (najmenší prvok, minimálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \min A$.
- **Najväčšie** z dolných ohraničení A sa nazýva **infimum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \inf A$.

- **Axióma o najmenšom hornom ohraničení.** [Jedna zo základných axióm.]

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$ je zhora ohraničená.

[Axióma o najmenšom hornom ohraničení – AH]

$\Rightarrow$ • Existuje $\sup A = a$ také, že $a \in R$. [Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má reálne suprémum.]

Axiómy reálnych čísel – Axióma o suprémě – AH

Horné ohraničenie $a \in R$ (zhora ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Maximum** (najväčší prvok, maximálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \max A$.
- **Najmenšie** z horných ohraničení A sa nazýva **suprémum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \sup A$.

Dolné ohraničenie $a \in R$ (zdola ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Minimum** (najmenší prvok, minimálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \min A$.
- **Najväčšie** z dolných ohraničení A sa nazýva **infimum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \inf A$.

- **Axióma o najmenšom hornom ohraničení.**

[Jedna zo základných axióm.]

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$ je zhora ohraničená.

[Axióma o najmenšom hornom ohraničení – AH]

$\Rightarrow$ • Existuje $\sup A = a$ také, že $a \in R$. [Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má reálne suprémum.]

- $A = \langle 0; 1 \rangle$. $\Rightarrow$ • $\max A$ neexistuje, $\sup A = 1$, $\min A = 0$, $\inf A = 0$.

- $A = \{0, 1, 6, 3\}$. $\Rightarrow$ • $\max A = 6$, $\sup A = 6$, $\min A = 0$, $\inf A = 0$.

Axiómy reálnych čísel – Axióma o suprémě – AH

Horné ohraničenie $a \in R$ (zhora ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Maximum** (najväčší prvok, maximálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \max A$.
- **Najmenšie** z horných ohraničení A sa nazýva **suprémum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \sup A$.

Dolné ohraničenie $a \in R$ (zdola ohraničenej) množiny $A \subset R$ sa nazýva:

- **Minimum** (najmenší prvok, minimálny prvok) množiny A , ak $a \in A$. Označenie $a = \min A$.
- **Najväčšie** z dolných ohraničení A sa nazýva **infimum** množiny A . [Môže byť aj $\pm\infty$.] Označenie $a = \inf A$.

- **Axióma o najmenšom hornom ohraničení.**

[Jedna zo základných axióm.]

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$ je zhora ohraničená.

[Axióma o najmenšom hornom ohraničení – AH]

$\Rightarrow$ • Existuje $\sup A = a$ také, že $a \in R$. [Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má reálne suprémum.]

- $A = \langle 0; 1 \rangle$. $\Rightarrow$ • $\max A$ neexistuje, $\sup A = 1$, $\min A = 0$, $\inf A = 0$.

[Každé $a \geq 1$ je horné ohraničenie A a každé $a \leq 0$ je dolné ohraničenie A .]

- $A = \{0, 1, 6, 3\}$. $\Rightarrow$ • $\max A = 6$, $\sup A = 6$, $\min A = 0$, $\inf A = 0$.

[Každé $a \geq 6$ je horné ohraničenie A a každé $a \leq 0$ je dolné ohraničenie A .]

Číselné množiny a ich vlastnosti

Prirodzené čísla.

Celé čísla.

Racionálne čísla.

Iracionálne čísla.

Číselné množiny a ich vlastnosti

Prirodzené čísla.

$[1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, \dots, n = (n - 1) + 1, \dots]$

- Množinou všetkých prirodzených čísel nazývame množinu

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots\}.$$

Celé čísla.

Racionálne čísla.

Iracionálne čísla.

Číselné množiny a ich vlastnosti

Prirodzené čísla.

[$1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, \dots, n = (n - 1) + 1, \dots$]

- Množinou všetkých prirodzených čísel nazývame množinu

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots\}.$$

Celé čísla.

[Dajú sa zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel.]

- Množinou všetkých celých čísel nazývame množinu

$$Z = \{m - n; m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\} = \{0\} \cup \{\pm n, n \in N\}.$$

Racionálne čísla.



Iracionálne čísla.



Číselné množiny a ich vlastnosti

Prirodzené čísla.

[$1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, \dots, n = (n - 1) + 1, \dots$]

- Množinou všetkých prirodných čísel nazývame množinu

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots\}.$$

Celé čísla.

[Dajú sa zapísať ako rozdiel dvoch prirodných čísel.]

- Množinou všetkých celých čísel nazývame množinu

$$Z = \{m - n; m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\} = \{0\} \cup \{\pm n, n \in N\}.$$

Racionálne čísla.

[Dajú sa vyjadriť ako $\frac{m}{n}$, kde $m \in Z, n \in N$.]

- Množinou všetkých racionálnych čísel nazývame množinu

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}; m \in Z, n \in N \right\}.$$

Iracionálne čísla.

Číselné množiny a ich vlastnosti

Prirodzené čísla.

[$1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, \dots, n = (n - 1) + 1, \dots$]

- Množinou všetkých prirodzených čísel nazývame množinu

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots\}.$$

Celé čísla.

[Dajú sa zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel.]

- Množinou všetkých celých čísel nazývame množinu

$$Z = \{m - n; m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\} = \{0\} \cup \{\pm n, n \in N\}.$$

Racionálne čísla.

[Dajú sa vyjadriť ako $\frac{m}{n}$, kde $m \in Z, n \in N$.]

- Množinou všetkých racionálnych čísel nazývame množinu

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}; m \in Z, n \in N \right\}.$$

Iracionálne čísla.

[Reálne čísla, ktoré nie sú racionálnymi číslami.]

- Množinou všetkých iracionálnych čísel nazývame množinu

$$I = R - Q.$$

Číselné množiny a ich vlastnosti – Rozšírená množina R

- Množina R je nekonečná (nespočítateľná), ale všetky jej prvky sú konečné.
- Počet prvkov množiny R nemôžeme vyjadriť číslom, R má ∞ (nekonečne veľa) prvkov.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Rozšírená množina R

- Množina R je nekonečná (nespočítateľná), ale všetky jej prvky sú konečné.
- Počet prvkov množiny R nemôžeme vyjadriť číslom, R má ∞ (nekonečne veľa) prvkov.

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$.

- $\min A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\min A = \inf A$.
- $\max A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\max A = \sup A$.

[Pokiaľ existuje $\min A$, potom $\min A = \inf A$.]

[Pokiaľ existuje $\max A$, potom $\max A = \sup A$.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Rozšírená množina R

- Množina R je nekonečná (nespočítateľná), ale všetky jej prvky sú konečné.
- Počet prvkov množiny R nemôžeme vyjadriť číslom, R má ∞ (nekonečne veľa) prvkov.

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$.

- $\min A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\min A = \inf A$.
- $\max A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\max A = \sup A$.

[Pokiaľ existuje $\min A$, potom $\min A = \inf A$.]

[Pokiaľ existuje $\max A$, potom $\max A = \sup A$.]

Rozšírenou množinou reálnych čísel nazývame

$$\text{množinu } R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}.$$

[Množinu R rozšírime o prvky $\pm\infty$.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Rozšírená množina R

- Množina R je nekonečná (nespočítateľná), ale všetky jej prvky sú konečné.
- Počet prvkov množiny R nemôžeme vyjadriť číslom, R má ∞ (nekonečne veľa) prvkov.

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$.

- $\min A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\min A = \inf A$. [Pokiaľ existuje $\min A$, potom $\min A = \inf A$.]
- $\max A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\max A = \sup A$. [Pokiaľ existuje $\max A$, potom $\max A = \sup A$.]

Rozšírenou množinou reálnych čísel nazývame

množinu $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$. [Množinu R rozšírime o prvky $\pm\infty$.]

- Prvky $-\infty$ (mínus nekonečno), $\infty = +\infty$ (nekonečno, plus nekonečno) nie sú čísla!
- Pod pojmom číslo rozumieme konečné číslo. [$-\infty \notin R$, $\infty \notin R$.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Rozšírená množina R

- Množina R je nekonečná (nespočítateľná), ale všetky jej prvky sú konečné.
- Počet prvkov množiny R nemôžeme vyjadriť číslom, R má ∞ (nekonečne veľa) prvkov.

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$.

- $\min A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\min A = \inf A$. [Pokiaľ existuje $\min A$, potom $\min A = \inf A$.]
- $\max A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\max A = \sup A$. [Pokiaľ existuje $\max A$, potom $\max A = \sup A$.]

Rozšírenou množinou reálnych čísel nazývame

množinu $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$. [Množinu R rozšírime o prvky $\pm\infty$.]

- Prvky $-\infty$ (mínus nekonečno), $\infty = +\infty$ (nekonečno, plus nekonečno) nie sú čísla!
- Pod pojmom číslo rozumieme konečné číslo. [$-\infty \notin R$, $\infty \notin R$.]

- $R^- = \{x \in R; x < 0\}$. [Množina všetkých záporných čísel.]
- $R_0^- = \{x \in R; x \leq 0\}$. [Množina všetkých nekladných čísel.]
- $R^+ = \{x \in R; x > 0\}$. [Množina všetkých kladných čísel.]
- $R_0^+ = \{x \in R; x \geq 0\}$. [Množina všetkých nezáporných čísel.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Rozšírená množina R

- Množina R je nekonečná (nespočítateľná), ale všetky jej prvky sú konečné.
- Počet prvkov množiny R nemôžeme vyjadriť číslom, R má ∞ (nekonečne veľa) prvkov.

Množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$. Potom platí:

- $\min A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\min A = \inf A$. [Pokiaľ existuje $\min A$, potom $\min A = \inf A$.]
- $\max A$ existuje. $\Rightarrow$ • $\max A = \sup A$. [Pokiaľ existuje $\max A$, potom $\max A = \sup A$.]

Rozšírenou množinou reálnych čísel nazývame

množinu $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$. [Množinu R rozšírime o prvky $\pm\infty$.]

- Prvky $-\infty$ (mínus nekonečno), $\infty = +\infty$ (nekonečno, plus nekonečno) nie sú čísla!
- Pod pojmom číslo rozumieme konečné číslo. [$-\infty \notin R$, $\infty \notin R$.]

- $R^- = \{x \in R; x < 0\}$. [Množina všetkých záporných čísel.] Pre množinu $A \subset R$ a číslo $c \in R$ definujeme:
- $R_0^- = \{x \in R; x \leq 0\}$. [Množina všetkých nekladných čísel.] • $-A = \{-x; x \in A\}$.
- $R^+ = \{x \in R; x > 0\}$. [Množina všetkých kladných čísel.] • $cA = \{c \cdot x; x \in A\}$.
- $R_0^+ = \{x \in R; x \geq 0\}$. [Množina všetkých nezáporných čísel.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Operácie s nekonečnom

- Operácie a relácie definované v množine R , môžeme čiastočne rozšíriť na množinu R^* .

$a \in R$ (a je reálne číslo).

- $-\infty < a < \infty$, t. j. $a \in (-\infty; \infty)$.

[Každé reálne číslo je väčšie ako $-\infty$ a menšie ako ∞ .]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Operácie s nekonečnom

- Operácie a relácie definované v množine R , môžeme čiastočne rozšíriť na množinu R^* .

$a \in R$ (a je reálne číslo).

- $-\infty < a < \infty$, t. j. $a \in (-\infty; \infty)$.

[Každé reálne číslo je väčšie ako $-\infty$ a menšie ako ∞ .]

Pre $\pm\infty$ a pre všetky $a, b \in R$, $b > 0$ definujeme:

- $\infty + \infty = \infty$ a $-\infty - \infty = -\infty$.

- $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$.

- $\pm\infty \cdot \infty = \infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$.

- $-\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$.

- $\pm b \cdot \infty = \infty \cdot (\pm b) = \pm\infty$.

- $\pm b \cdot (-\infty) = -\infty \cdot (\pm b) = \mp\infty$.

- $\frac{\infty}{\pm b} = \pm\infty$ a $\frac{-\infty}{\pm b} = \mp\infty$.

- $\frac{a}{\pm\infty} = \frac{0}{\pm\infty} = 0$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Operácie s nekonečnom

- Operácie a relácie definované v množine R , môžeme čiastočne rozšíriť na množinu R^* .

$a \in R$ (a je reálne číslo).

- $-\infty < a < \infty$, t. j. $a \in (-\infty; \infty)$.

[Každé reálne číslo je väčšie ako $-\infty$ a menšie ako ∞ .]

Pre $\pm\infty$ a pre všetky $a, b \in R$, $b > 0$ definujeme:

- $\infty + \infty = \infty$ a $-\infty - \infty = -\infty$.
- $\pm\infty \cdot \infty = \infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$.
- $\pm b \cdot \infty = \infty \cdot (\pm b) = \pm\infty$.
- $\frac{\infty}{\pm b} = \pm\infty$ a $\frac{-\infty}{\pm b} = \mp\infty$.
- $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$.
- $-\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$.
- $\pm b \cdot (-\infty) = -\infty \cdot (\pm b) = \mp\infty$.
- $\frac{a}{\pm\infty} = \frac{0}{\pm\infty} = 0$.

Pre $\pm\infty$ a pre všetky $a \in R$ nedefinujeme:

- $\infty - \infty$ a $-\infty + \infty$.
- $\pm\infty \cdot 0$ a $0 \cdot (\pm\infty)$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a $\frac{\pm\infty}{0}$.
- $\frac{a}{0}$ a $\frac{0}{0}$.

[Nazývame ich neurčité výrazy a počítame ich pomocou limit.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Ohraničenia množiny

- Axiómy zostávajú v platnosti aj v množine R^* .

Číselné množiny a ich vlastnosti – Ohraničenia množiny

- Axiómy zostávajú v platnosti aj v množine R^* .

$A \subset R^*, A \neq \emptyset.$

- A je zhora ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\sup A \in R.$

[Vyplýva z axiómy AH.]

- A je zdola ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\inf A \in R.$

[Vyplýva z axiómy AH.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Ohraničenia množiny

- Axiómy zostávajú v platnosti aj v množine R^* .

$$A \subset R^*, A \neq \emptyset.$$

- A je zhora neohraničená. $\Rightarrow$ • $\sup A = \infty$.

- A je zdora neohraničená. $\Rightarrow$ • $\inf A = -\infty$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Ohraničenia množiny

- Axiómy zostávajú v platnosti aj v množine R^* .

$A \subset R^*$, $A \neq \emptyset$.

[Každá neprázdna množina $A \subset R^*$ má $\sup A \in R^*$, aj $\inf A \in R^*$.]

• A je zhora ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\sup A \in R$.

[Vyplýva z axiómy AH.]

• A je zhora neohraničená. $\Rightarrow$ • $\sup A = \infty$.

• A je zdola ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\inf A \in R$.

[Vyplýva z axiómy AH.]

• A je zdola neohraničená. $\Rightarrow$ • $\inf A = -\infty$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Ohraničenia množiny

- Axiómy zostávajú v platnosti aj v množine R^* .

$$A \subset R^*, A \neq \emptyset.$$

[Každá neprázdna množina $A \subset R^*$ má $\sup A \in R^*$, aj $\inf A \in R^*$.]

- A je zhora ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\sup A \in R$.
- A je zhora neohraničená. $\Rightarrow$ • $\sup A = \infty$.

[Vyplýva z axiómy AH.]

- A je zdola ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\inf A \in R$.
- A je zdola neohraničená. $\Rightarrow$ • $\inf A = -\infty$.

[Vyplýva z axiómy AH.]

Každé $a \in R^*$ je horným a aj dolným ohraničením množiny $\emptyset$.

- $\sup \emptyset = -\infty$.
- $\inf \emptyset = \infty$.

[Najmenšie z horných ohraničení prázdnej množiny je $-\infty$.]

[Najväčšie z dolných ohraničení prázdnej množiny je ∞ .]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Ohraničenia množiny

- Axiómy zostávajú v platnosti aj v množine R^* .

$$A \subset R^*, A \neq \emptyset.$$

[Každá neprázdna množina $A \subset R^*$ má $\sup A \in R^*$, aj $\inf A \in R^*$.]

- A je zhora ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\sup A \in R$.
- A je zhora neohraničená. $\Rightarrow$ • $\sup A = \infty$.

[Vyplýva z axiómy AH.]

- A je zdola ohraničená. $\Rightarrow$ • Existuje $\inf A \in R$.
- A je zdola neohraničená. $\Rightarrow$ • $\inf A = -\infty$.

[Vyplýva z axiómy AH.]

Každé $a \in R^*$ je horným a aj dolným ohraničením množiny $\emptyset$.

- $\sup \emptyset = -\infty$.
- $\inf \emptyset = \infty$.

[Najmenšie z horných ohraničení prázdnej množiny je $-\infty$.]

[Najväčšie z dolných ohraničení prázdnej množiny je ∞ .]

Ak $A \subset R$, potom platí:

- $a = \sup A$. $\Leftrightarrow$ • $-a = \inf (-A)$.
- $a = \inf A$. $\Leftrightarrow$ • $-a = \sup (-A)$.

Ak $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \subset B \subset R$, potom platí:

- $\inf B \leq \inf A$.
- $\sup A \leq \sup B$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Intervaly

Ohraničené intervaly.

[Krajné body intervalov sú $a, b \in R$, $a \leq b$.]

Nedegenerované intervaly, ak platí $a < b$.

Degenerované intervaly, ak platí $a = b$.

Neohraničené intervaly.

[Aspoň jeden z krajných bodov je $-\infty$ alebo ∞ .]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Intervaly

Ohraničené intervaly.

[Krajné body intervalov sú $a, b \in R$, $a \leq b$.]

Nedegenerované intervaly, ak platí $a < b$.

- $(a; b) = \{x \in R; a < x < b\}$,
- $\langle a; b \rangle = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$,
- $\langle a; b \rangle = \{x \in R; a \leq x < b\}$,
- $(a; b) = \{x \in R; a < x \leq b\}$.

Degenerované intervaly, ak platí $a = b$.

- $(a; a) = \emptyset$,
- $\langle a; a \rangle = \{a\}$.

Neohraničené intervaly.

[Aspoň jeden z krajných bodov je $-\infty$ alebo ∞ .]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Intervaly

Ohraničené intervaly.

[Krajné body intervalov sú $a, b \in R$, $a \leq b$.]

Nedegenerované intervaly, ak platí $a < b$.

- $(a; b) = \{x \in R; a < x < b\}$,
- $\langle a; b \rangle = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$,
- $\langle a; b \rangle = \{x \in R; a < x \leq b\}$.

Degenerované intervaly, ak platí $a = b$.

- $(a; a) = \emptyset$,
- $\langle a; a \rangle = \{a\}$.

Neohraničené intervaly.

[Aspoň jeden z krajných bodov je $-\infty$ alebo ∞ .]

- $(-\infty; a) = \{x \in R; x \leq a\}$,
- $\langle a; \infty \rangle = \{x \in R; a \leq x\}$,
- $(-\infty; a) = \{x \in R; x < a\}$,
- $(a; \infty) = \{x \in R; a < x\}$,
- $(-\infty; \infty) = \{x \in R\} = R$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Intervaly

Ohraničené intervaly.

[Krajné body intervalov sú $a, b \in R$, $a \leq b$.]

Nedegenerované intervaly, ak platí $a < b$.

- $(a; b) = \{x \in R; a < x < b\}$,
- $\langle a; b \rangle = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$,
- $\langle a; b \rangle = \{x \in R; a < x \leq b\}$.

Degenerované intervaly, ak platí $a = b$.

- $(a; a) = \emptyset$,
- $\langle a; a \rangle = \{a\}$.
- Dĺžkou ohraničeného intervalu nazývame hodnotu $b - a$.

Neohraničené intervaly.

[Aspoň jeden z krajných bodov je $-\infty$ alebo ∞ .]

- $(-\infty; a) = \{x \in R; x \leq a\}$,
- $\langle a; \infty \rangle = \{x \in R; a \leq x\}$,
- $(-\infty; a) = \{x \in R; x < a\}$,
- $(a; \infty) = \{x \in R; a < x\}$,
- $(-\infty; \infty) = \{x \in R\} = R$.
- Dĺžkou neohraničeného intervalu je hodnota ∞ .

Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

- Každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

[$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, I a ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

- Každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

[$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, I a ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.]

- Množinu $\mathbb{R}$ reprezentujeme priamkou p , ktorú nazývame **reálna číselná os**.



Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

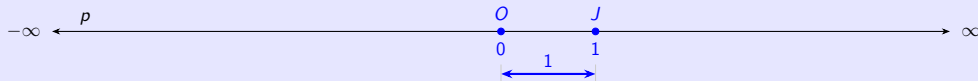
Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

- Každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

[$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ a ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.]

- Množinu $\mathbb{R}$ reprezentujeme priamkou p , ktorú nazývame **reálna číselná os**.
- Čísla 0 a 1 reprezentujeme bodmi $O, J \in p$, ich vzdialenosť definuje jednotkovú vzdialenosť $|OJ| = 1$.
Bod $x_O = O = 0$ nazývame **nulový**, bod $x_J = J = 1$ nazývame **jednotkový**.



Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

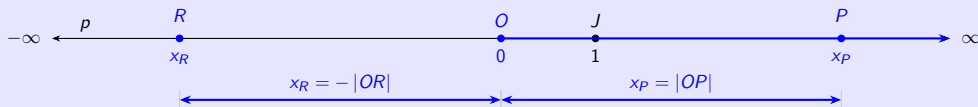
Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

- Každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

[$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, I a ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.]

- Množinu $\mathbb{R}$ reprezentujeme priamkou p , ktorú nazývame **reálna číselná os**.
- Čísla 0 a 1 reprezentujeme bodmi $O, J \in p$, ich vzdialenosť definuje jednotkovú vzdialenosť $|OJ| = 1$.
Bod $x_O = O = 0$ nazývame **nulový**, bod $x_J = J = 1$ nazývame **jednotkový**.
- Bodu $P \in \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_P = |OP|$, bodu $R \notin \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_R = -|OR|$.



Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

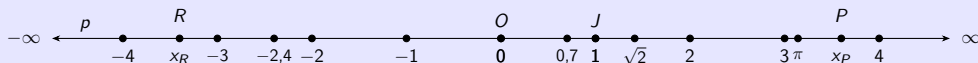
Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

- Každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

[$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ a ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.]

- Množinu $\mathbb{R}$ reprezentujeme priamkou p , ktorú nazývame **reálna číselná os**.
- Čísla 0 a 1 reprezentujeme bodmi $O, J \in p$, ich vzdialenosť definuje jednotkovú vzdialenosť $|OJ| = 1$.
Bod $x_O = O = 0$ nazývame **nulový**, bod $x_J = J = 1$ nazývame **jednotkový**.
- Bodu $P \in \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_P = |OP|$, bodu $R \notin \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_R = -|OR|$.



Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

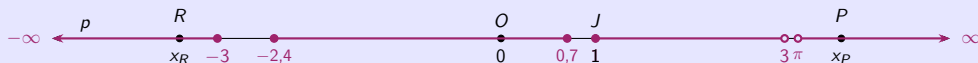
Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

- Každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

[$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ a ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.]

- Množinu $\mathbb{R}$ reprezentujeme priamkou p , ktorú nazývame **reálna číselná os**.
- Čísla 0 a 1 reprezentujeme bodmi $O, J \in p$, ich vzdialenosť definuje jednotkovú vzdialenosť $|OJ| = 1$.
Bod $x_O = O = 0$ nazývame **nulový**, bod $x_J = J = 1$ nazývame **jednotkový**.
- Bodu $P \in \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_P = |OP|$, bodu $R \notin \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_R = -|OR|$.
- Intervaly znázorňujeme ako úsečky, resp. polpriamky, priamky (viď obrázok).



Číselné množiny a ich vlastnosti – Súvislosť množín

Usporiadaná množina $A \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ existuje $c \in A$ také, že $a < c < b$.

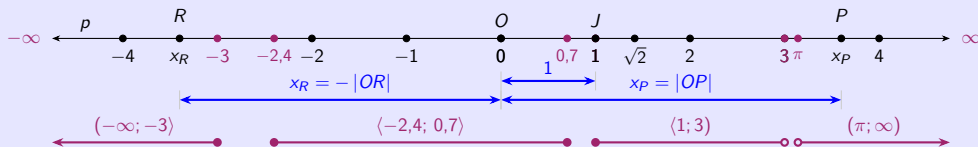
Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva **súvislá**,

ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$ platí, že interval $\langle a; b \rangle \subset A$.

- Každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

[$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, I a ich podmnožiny nie sú súvislé množiny.]

- Množinu $\mathbb{R}$ reprezentujeme priamkou p , ktorú nazývame **reálna číselná os**.
- Čísla 0 a 1 reprezentujeme bodmi $O, J \in p$, ich vzdialenosť definuje jednotkovú vzdialenosť $|OJ| = 1$.
Bod $x_O = O = 0$ nazývame **nulový**, bod $x_J = J = 1$ nazývame **jednotkový**.
- Bodu $P \in \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_P = |OP|$, bodu $R \notin \overrightarrow{OJ}$ priradíme číslo $x_R = -|OR|$.
- Intervaly znázorňujeme ako úsečky, resp. polpriamky, priamky (viď obrázok).



Číselné množiny a ich vlastnosti – Archimedov princíp

$a \in R, x \in R, x > 0$ (ľubovoľné čísla).

$\Rightarrow$ • Existuje číslo $k \in Z$ také, že platí $kx \leq a < (k+1)x$.

• Špeciálne pre $x = 1$ existuje $k \in Z$ také, že platí $k \leq a < k+1$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Archimedov princíp

$a \in R, x \in R, x > 0$ (racionálne čísla).

$\Rightarrow$ • Existuje číslo $k \in \mathbb{Z}$ také, že platí $kx \leq a < (k+1)x$.

• Špeciálne pre $x = 1$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že platí $k \leq a < k+1$.

• Číslo $k \in \mathbb{Z}$ také, že $k \leq a < k+1$, nazývame (dolná) celá časť čísla a a označujeme $\lfloor a \rfloor$, resp. $[a]$.

• Číslo $k \in \mathbb{Z}$ také, že $k < a \leq k+1$, nazývame horná celá časť čísla a a označujeme $\lceil a \rceil$.

• Rozdiel $a - \lfloor a \rfloor$ nazývame lomená časť čísla $a \in R$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Archimedov princíp

$a \in R, x \in R, x > 0$ (ľubovoľné čísla).

[Archimedova vlastnosť reálnych čísel]

$\Rightarrow$ • Existuje číslo $k \in Z$ také, že platí $kx \leq a < (k+1)x$.

• Špeciálne pre $x = 1$ existuje $k \in Z$ také, že platí $k \leq a < k+1$.

• Číslo $k \in Z$ také, že $k \leq a < k+1$, nazývame (dolná) celá časť čísla a a označujeme $\lfloor a \rfloor$, resp. $[a]$.

• Číslo $k \in Z$ také, že $k < a \leq k+1$, nazývame horná celá časť čísla a a označujeme $\lceil a \rceil$.

• Rozdiel $a - \lfloor a \rfloor$ nazývame lomená časť čísla $a \in R$.

$\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ (ľubovoľné $\varepsilon > 0$).

$\Rightarrow$ • Existuje $n \in N$ také, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

[Stačí zvoliť $n \in N$ tak, aby $\frac{1}{\varepsilon} < n$, t. j. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Archimedov princíp

$a \in R, x \in R, x > 0$ (ľubovoľné čísla).

[Archimedova vlastnosť reálnych čísel]

$\Rightarrow$ • Existuje číslo $k \in Z$ také, že platí $kx \leq a < (k+1)x$.

• Špeciálne pre $x = 1$ existuje $k \in Z$ také, že platí $k \leq a < k+1$.

• Číslo $k \in Z$ také, že $k \leq a < k+1$, nazývame (dolná) celá časť čísla a a označujeme $\lfloor a \rfloor$, resp. $[a]$.

• Číslo $k \in Z$ také, že $k < a \leq k+1$, nazývame horná celá časť čísla a a označujeme $\lceil a \rceil$.

• Rozdiel $a - \lfloor a \rfloor$ nazývame lomená časť čísla $a \in R$.

$\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ (ľubovoľné $\varepsilon > 0$).

$\Rightarrow$ • Existuje $n \in N$ také, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

[Stačí zvoliť $n \in N$ tak, aby $\frac{1}{n} < \varepsilon$, t. j. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.]

$a, b \in R, a < b$ (ľubovoľné čísla).

$\Rightarrow$ • Existujú $s \in Q$ a $v \in I$ také, že platí $s \in (a; b)$ a $v \in (a; b)$.

[Medzi dvomi ľubovoľnými reálnymi číslami existuje aspoň jedno racionálne číslo a aspoň jedno iracionálne číslo.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Archimedov princíp

$a \in R, x \in R, x > 0$ (ľubovoľné čísla).

[Archimedova vlastnosť reálnych čísel]

$\Rightarrow$ • Existuje číslo $k \in \mathbb{Z}$ také, že platí $kx \leq a < (k+1)x$.

• Špeciálne pre $x = 1$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že platí $k \leq a < k+1$.

• Číslo $k \in \mathbb{Z}$ také, že $k \leq a < k+1$, nazývame (dolná) celá časť čísla a a označujeme $\lfloor a \rfloor$, resp. $[a]$.

• Číslo $k \in \mathbb{Z}$ také, že $k < a \leq k+1$, nazývame horná celá časť čísla a a označujeme $\lceil a \rceil$.

• Rozdiel $a - \lfloor a \rfloor$ nazývame lomená časť čísla $a \in R$.

$\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ (ľubovoľné $\varepsilon > 0$).

$\Rightarrow$ • Existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

[Stačí zvoliť $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{1}{n} < \varepsilon$, t. j. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.]

$a, b \in R, a < b$ (ľubovoľné čísla).

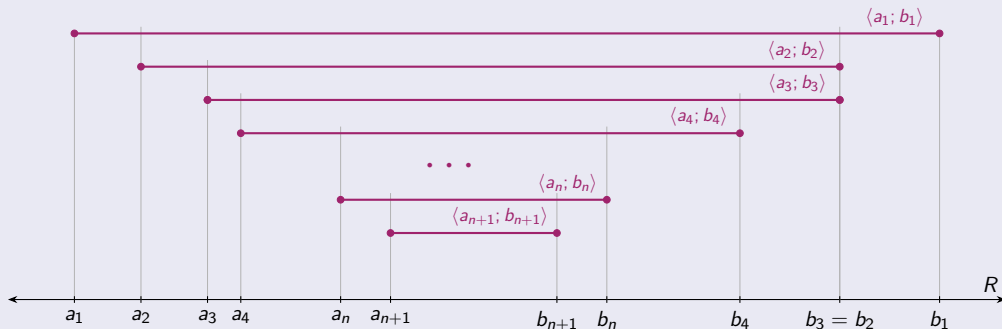
$\Rightarrow$ • Existujú $s \in \mathbb{Q}$ a $v \in I$ také, že platí $s \in (a; b)$ a $v \in (a; b)$.

[Medzi dvomi ľubovoľnými reálnymi číslami existuje aspoň jedno racionálne číslo a aspoň jedno iracionálne číslo.]

• Pre všetky $r \in R$ platí $r = \sup \{s \in \mathbb{Q}, s \leq r\} = \sup \{s \in I, s \leq r\}$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Cantorov princíp

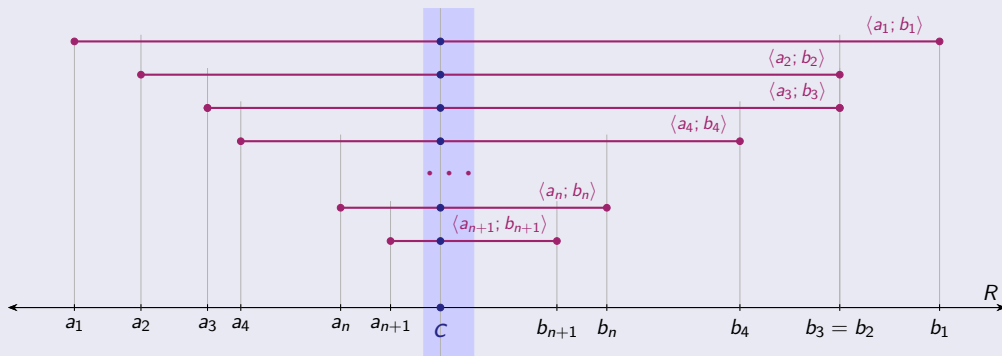
Uzavreté intervaly $\langle a_n; b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ sú také, že $\langle a_{n+1}; b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n; b_n \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.



Číselné množiny a ich vlastnosti – Cantorov princíp

Uzavreté intervaly $\langle a_n; b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ sú také, že $\langle a_{n+1}; b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n; b_n \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n; b_n \rangle$ (t. j. patrí do všetkých intervalov). [Cantorov princíp vložených intervalov]

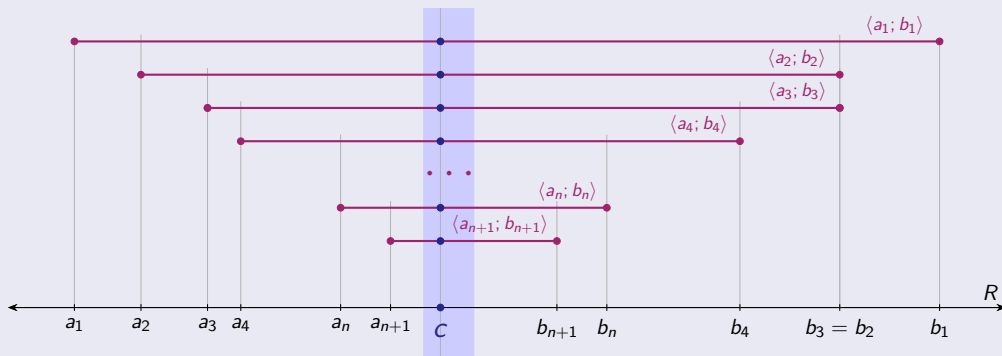


Číselné množiny a ich vlastnosti – Cantorov princíp

Uzavreté intervaly $\langle a_n; b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ sú také, že $\langle a_{n+1}; b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n; b_n \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n; b_n \rangle$ (t. j. patrí do všetkých intervalov). [Cantorov princíp vložených intervalov]

Ak navyše pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n - a_n < \varepsilon$. $\Rightarrow$ • Existuje jediné $c \in \mathbb{R}$, $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n; b_n \rangle$.



Číselné množiny a ich vlastnosti – Absolútna hodnota čísla

- Absolútnou hodnotou čísla $a \in R$ nazývame číslo $|a| = \max \{-a, a\}$. 

Číselné množiny a ich vlastnosti – Absolútna hodnota čísla

- Absolútnou hodnotou čísla $a \in R$ nazývame číslo $|a| = \max \{-a, a\}$.

$a, b \in R$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

- $|a| \geq 0$ a platí $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. [Trojuholníková nerovnosť.]
- $|-a| = |a|$.
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pre $b \neq 0$.
- $|a| - |b| \leq |a + b|$.

Číselné množiny a ich vlastnosti – Absolútna hodnota čísla

- Absolútnou hodnotou čísla $a \in R$ nazývame číslo $|a| = \max \{-a, a\}$.

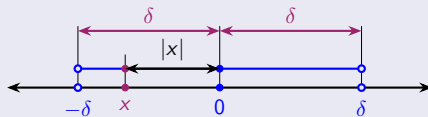
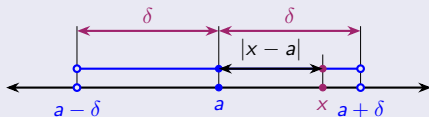
$a, b \in R$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

- $|a| \geq 0$ a platí $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. [Trojuholníková nerovnosť.]
- $|-a| = |a|$.
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pre $b \neq 0$.
- $|a| - |b| \leq |a + b|$.

$a, x \in R, \delta > 0$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

[Výraz $|x - a|$ predstavuje vzdialenosť bodov x, a na číselnej osi.]

- $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow x \in \langle a - \delta; a + \delta \rangle$.
- $|x| \leq \delta \Leftrightarrow x \in \langle -\delta; \delta \rangle$.



Číselné množiny a ich vlastnosti – Absolútna hodnota čísla

- Absolútnou hodnotou čísla $a \in \mathbb{R}$ nazývame číslo $|a| = \max \{-a, a\}$.

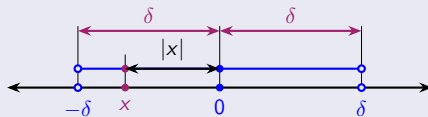
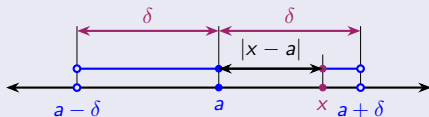
$a, b \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

- $|a| \geq 0$ a platí $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. [Trojuholníková nerovnosť.]
- $|-a| = |a|$.
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pre $b \neq 0$.
- $|a| - |b| \leq |a + b|$.

$a, x \in \mathbb{R}, \delta > 0$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

[Výraz $|x - a|$ predstavuje vzdialenosť bodov x, a na číselnej osi.]

- $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow x \in \langle a - \delta; a + \delta \rangle$.
- $|x| \leq \delta \Leftrightarrow x \in \langle -\delta; \delta \rangle$.



Pre $a \in \mathbb{R}$ označme $a^+ = \max \{0, a\}$, $a^- = \max \{0, -a\}$.

$$\Rightarrow \bullet |a| = a^+ + a^-. \quad \bullet a = a^+ - a^-. \quad \bullet a^+ = \frac{a + |a|}{2}. \quad \bullet a^- = \frac{a - |a|}{2}.$$

Číselné množiny a ich vlastnosti – Signum a mocniny

- Signum čísla $a \in R$ sa nazýva číslo $\text{sgn} a = \begin{cases} -1 & \text{pre } a < 0, \\ 0 & \text{pre } a = 0, \\ 1 & \text{pre } a > 0. \end{cases}$

[Signum predstavuje číslo, nie iba znamienko $\pm$.]

Číselné množiny a ich vlastnosti – Signum a mocniny

- Signum čísla $a \in R$ sa nazýva číslo $\text{sgn} a = \begin{cases} -1 & \text{pre } a < 0, \\ 0 & \text{pre } a = 0, \\ 1 & \text{pre } a > 0. \end{cases}$

[Signum predstavuje číslo, nie iba znamienko $\pm$.]

$a, b \in R$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

- $a = \text{sgn} a \cdot |a|.$
- $|a| = \text{sgn} a \cdot a.$
- $\text{sgn}(ab) = \text{sgn} a \cdot \text{sgn} b.$

Číselné množiny a ich vlastnosti – Signum a mocniny

• Signum čísla $a \in R$ sa nazýva číslo $\text{sgn} a = \begin{cases} -1 & \text{pre } a < 0, \\ 0 & \text{pre } a = 0, \\ 1 & \text{pre } a > 0. \end{cases}$

[Signum predstavuje číslo, nie iba znamienko $\pm$.]

$a, b \in R$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

• $a = \text{sgn} a \cdot |a|.$ • $|a| = \text{sgn} a \cdot a.$ • $\text{sgn}(ab) = \text{sgn} a \cdot \text{sgn} b.$

Pre $n \in N, a \in R$ definujeme:

[a^n čítame n -tá mocnina a (a na n -tú), $\sqrt[n]{a}$ čítame n -tá odmocnina a .]

• $a^n = a \cdot a \cdots a.$ • Špeciálne $a^0 = 1, \infty^n = \infty.$ Nedefinujeme $\infty^0.$

• $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ pre $a \neq 0.$ • Špeciálne definujeme $\infty^{-n} = \frac{1}{\infty^n} = 0.$

• $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{1/n}$ také, že $x \geq 0, x^n = a.$ • Špeciálne zapisujeme $\sqrt{a} = \sqrt{a}.$

Číselné množiny a ich vlastnosti – Signum a mocniny

• Signum čísla $a \in R$ sa nazýva číslo $\text{sgn} a = \begin{cases} -1 & \text{pre } a < 0, \\ 0 & \text{pre } a = 0, \\ 1 & \text{pre } a > 0. \end{cases}$

[Signum predstavuje číslo, nie iba znamienko $\pm$.]

$a, b \in R$ (ľubovoľné čísla). Potom platí:

• $a = \text{sgn} a \cdot |a|.$ • $|a| = \text{sgn} a \cdot a.$ • $\text{sgn}(ab) = \text{sgn} a \cdot \text{sgn} b.$

Pre $n \in N, a \in R$ definujeme:

[a^n čítame n -tá mocnina a (a na n -tú), $\sqrt[n]{a}$ čítame n -tá odmocnina a .]

• $a^n = a \cdot a \cdots a.$ • Špeciálne $a^0 = 1, \infty^n = \infty.$ Nedefinujeme $\infty^0.$

• $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ pre $a \neq 0.$ • Špeciálne definujeme $\infty^{-n} = \frac{1}{\infty^n} = 0.$

• $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{1/n}$ také, že $x \geq 0, x^n = a.$ • Špeciálne zapisujeme $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}.$

Pre $a > 0, r \in R, s = \frac{m}{n} \in Q$ pričom $m \in Z, n \in N$ definujeme:

• $a^s = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$ • Špeciálne $0^s = 0$ pre $s \neq 0.$

• $a^r = \sup \{a^s; s \in Q, s \leq r\}$ pre $a > 1.$ • Špeciálne $1^r = 1.$

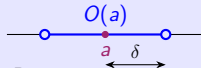
• $a^r = (a^{-1})^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r}$ pre $0 < a < 1, \text{ t. j. } 1 < \frac{1}{a}.$ • Špeciálne $0^r = 0$ pre $r \neq 0.$

Topologické vlastnosti čísel – Okolia

- Okolie bodu a (prvku množiny) je základný topologický pojem.

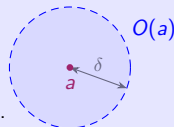
- Okolie $O(a)$ predstavuje v množinách (priestoroch) R, R^2, R^3 vnútro bez hraníc

úsečky,



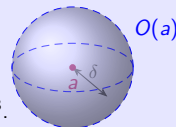
Stred $a \in R$.

kruhu,



Stred $a \in R^2$.

gule.



Stred $a \in R^3$.

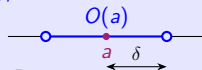
[V n -rozmernom priestore R^n , $n \in N$ predstavuje okolie $O(a)$ vnútro n -rozmernej gule s polomerom $\delta > 0$, t. j. $O(a) = \{x \in R^n, |x - a| < \delta\}$.]

Topologické vlastnosti čísel – Okolia

- Okolie bodu a (prvku množiny) je základný topologický pojem.

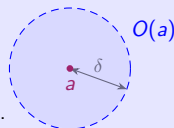
- Okolie $O(a)$ predstavuje v množinách (priestoroch) R , R^2 , R^3 vnútro bez hraníc

úsečky,



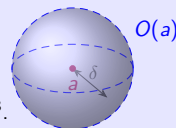
Stred $a \in R$.

kruhu,



Stred $a \in R^2$.

gule.



Stred $a \in R^3$.

[V n -rozmernom priestore R^n , $n \in N$ predstavuje okolie $O(a)$ vnútro n -rozmernej gule s polomerom $\delta > 0$, t. j. $O(a) = \{x \in R^n, |x - a| < \delta\}$.]

Množiny všetkých okolí bodov v R^n , $n \in N$ spĺňajú tzv. Hausdorffove axiomy:

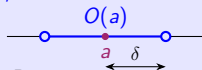
- Pre každý bod $a \in R^n$ existuje aspoň jedno okolie $O(a)$.
- Pre každé okolie $O(a)$ a každý bod $b \in O(a)$ existuje okolie $O(b)$ také, že $O(b) \subset O(a)$.
- Pre všetky okolia $O_1(a)$, $O_2(a)$ existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset O_1(a) \cap O_2(a)$.
- Pre všetky body $a, b \in A$, $a \neq b$ existujú okolia $O(a)$, $O(b)$ také, že $O(a) \cap O(b) = \emptyset$.

Topologické vlastnosti čísel – Okolia

- Okolie bodu a (prvku množiny) je základný topologický pojem.

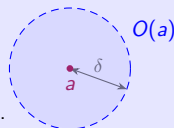
- Okolie $O(a)$ predstavuje v množinách (priestoroch) R , R^2 , R^3 vnútro bez hraníc

úsečky,



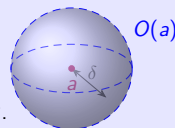
Stred $a \in R$.

kruhu,



Stred $a \in R^2$.

gule.



Stred $a \in R^3$.

[V n -rozmernom priestore R^n , $n \in N$ predstavuje okolie $O(a)$ vnútro n -rozmernej gule s polomerom $\delta > 0$, t. j. $O(a) = \{x \in R^n, |x - a| < \delta\}$.]

Množiny všetkých okolí bodov v R^n , $n \in N$ spĺňajú tzv. Hausdorffove axiomy:

- Pre každý bod $a \in R^n$ existuje aspoň jedno okolie $O(a)$.
- Pre každé okolie $O(a)$ a každý bod $b \in O(a)$ existuje okolie $O(b)$ také, že $O(b) \subset O(a)$.
- Pre všetky okolia $O_1(a)$, $O_2(a)$ existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset O_1(a) \cap O_2(a)$.
- Pre všetky body $a, b \in A$, $a \neq b$ existujú okolia $O(a)$, $O(b)$ také, že $O(a) \cap O(b) = \emptyset$.

Navyše:

- Pre všetky body $a, b \in R^n$, a pre všetky ich okolia $O(a), O(b)$ a každý bod $c \in O(a) \cap O(b)$ existuje okolie $O(c)$ také, že $O(c) \subset O(a) \cap O(b)$.

Topologické vlastnosti čísel – Okolia bodov z R^*

Okolím s polomerom δ (δ -okolím, okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

$$O_\delta(a) = (a - \delta; a + \delta)$$



[Otvorený interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Okolia bodov z R^*

Okolím s polomerom δ (δ -okolím, okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

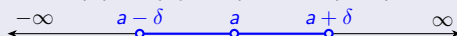
$$O_\delta(a) = (a - \delta; a + \delta)$$



[Otvorený interval.]

Prstencovým δ -okolím (prstencovým okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

$$P_\delta(a) = O_\delta(a) - \{a\} = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$$



[Zjednotenie otvorených intervalov.]

Topologické vlastnosti čísel – Okolia bodov z R^*

Okolím s polomerom δ (δ -okolím, okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

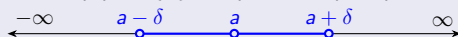
$$O_\delta(a) = (a - \delta; a + \delta)$$



[Otvorený interval.]

Prstencovým δ -okolím (prstencovým okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

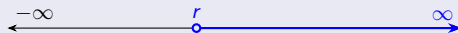
$$P_\delta(a) = O_\delta(a) - \{a\} = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$$



[Zjednotenie otvorených intervalov.]

r -okolím (okolím) bodu ∞ , kde $r \in R$, nazývame

$$O_r(\infty) = (r; \infty)$$



[Otvorený interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Okolia bodov z R^*

Okolím s polomerom δ (δ -okolím, okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

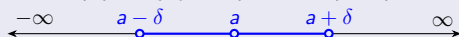
$$O_\delta(a) = (a - \delta; a + \delta)$$



[Otvorený interval.]

Prstencovým δ -okolím (prstencovým okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

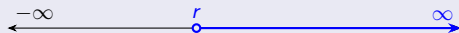
$$P_\delta(a) = O_\delta(a) - \{a\} = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$$



[Zjednotenie otvorených intervalov.]

r -okolím (okolím) bodu ∞ , kde $r \in R$, nazývame

$$O_r(\infty) = (r; \infty)$$



[Otvorený interval.]

r -okolím (okolím) bodu $-\infty$, kde $r \in R$, nazývame

$$O_r(-\infty) = (-\infty; r)$$



[Otvorený interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Okolia bodov z R^*

Okolím s polomerom δ (δ -okolím, okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

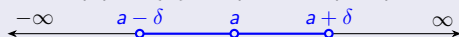
$$O_\delta(a) = (a - \delta; a + \delta) = \{x \in R; a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \in R; |x - a| < \delta\}.$$



[Otvorený interval.]

Prstencovým δ -okolím (prstencovým okolím) bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

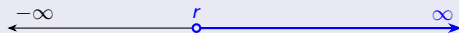
$$P_\delta(a) = O_\delta(a) - \{a\} = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta) = \{x \in R; 0 < |x - a| < \delta\}.$$



[Zjednotenie otvorených intervalov.]

r -okolím (okolím) bodu ∞ , kde $r \in R$, nazývame

$$O_r(\infty) = (r; \infty) = \{x \in R; r < x\}.$$



[Otvorený interval.]

r -okolím (okolím) bodu $-\infty$, kde $r \in R$, nazývame

$$O_r(-\infty) = (-\infty; r) = \{x \in R; x < r\}.$$

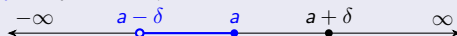


[Otvorený interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Jednostranné okolia

Ľavým δ -okolím bodu $a \in \mathbb{R}$, kde $\delta > 0$, nazývame

$$O_{\delta}^{-}(a) = (a - \delta; a]$$

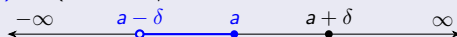


[Zľava otvorený, sprava uzavretý interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Jednostranné okolia

Ľavým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

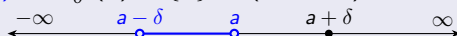
$$O_{\delta}^{-}(a) = (a - \delta; a]$$



[Zľava otvorený, sprava uzavretý interval.]

Ľavým prstencovým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

$$P_{\delta}^{-}(a) = O_{\delta}^{-}(a) - \{a\} = (a - \delta; a)$$

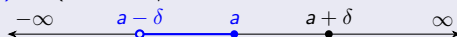


[Otvorený interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Jednostranné okolia

Ľavým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

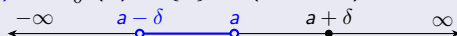
$$O_{\delta}^{-}(a) = (a - \delta; a]$$



[Zľava otvorený, sprava uzavretý interval.]

Ľavým prstencovým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

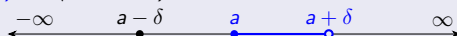
$$P_{\delta}^{-}(a) = O_{\delta}^{-}(a) - \{a\} = (a - \delta; a)$$



[Otvorený interval.]

Pravým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

$$O_{\delta}^{+}(a) = [a; a + \delta)$$

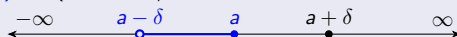


[Zľava uzavretý, sprava otvorený interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Jednostranné okolia

Ľavým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

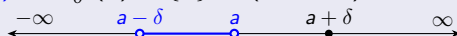
$$O_{\delta}^{-}(a) = (a - \delta; a)$$



[Zľava otvorený, sprava uzavretý interval.]

Ľavým prstencovým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

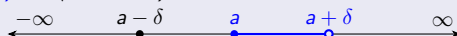
$$P_{\delta}^{-}(a) = O_{\delta}^{-}(a) - \{a\} = (a - \delta; a)$$



[Otvorený interval.]

Pravým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

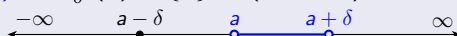
$$O_{\delta}^{+}(a) = \langle a; a + \delta \rangle$$



[Zľava uzavretý, sprava otvorený interval.]

Pravým prstencovým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

$$P_{\delta}^{+}(a) = O_{\delta}^{+}(a) - \{a\} = (a; a + \delta)$$

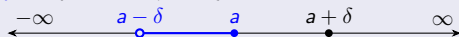


[Otvorený interval.]

Topologické vlastnosti čísel – Jednostranné okolia

Ľavým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

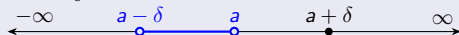
$$O_{\delta}^{-}(a) = (a - \delta; a] = \{x \in R; a - \delta < x \leq a\} = \{x \in R; 0 \leq a - x < \delta\}.$$



[Zľava otvorený, sprava uzavretý interval.]

Ľavým prstencovým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

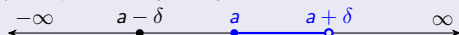
$$P_{\delta}^{-}(a) = O_{\delta}^{-}(a) - \{a\} = (a - \delta; a) = \{x \in R; 0 < a - x < \delta\}.$$



[Otvorený interval.]

Pravým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

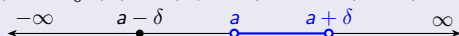
$$O_{\delta}^{+}(a) = \langle a; a + \delta) = \{x \in R; a \leq x < a + \delta\} = \{x \in R; 0 \leq x - a < \delta\}.$$



[Zľava uzavretý, sprava otvorený interval.]

Pravým prstencovým δ -okolím bodu $a \in R$, kde $\delta > 0$, nazývame

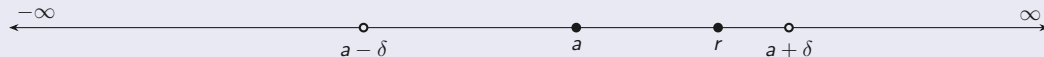
$$P_{\delta}^{+}(a) = O_{\delta}^{+}(a) - \{a\} = (a; a + \delta) = \{x \in R; 0 < x - a < \delta\}.$$



[Otvorený interval.]

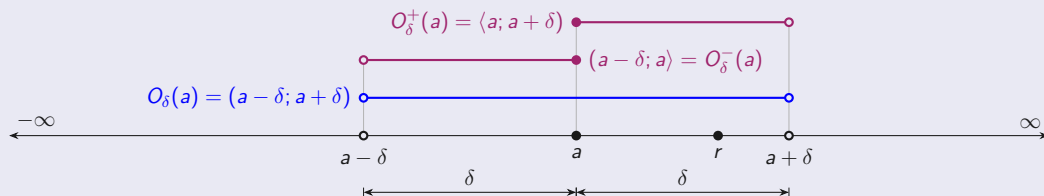
Topologické vlastnosti čísel – Prehľad okolí

Grafický prehľad okolí bodov $a \in \mathbb{R}^*$, kde $\delta > 0$, $r \in \mathbb{R}$.



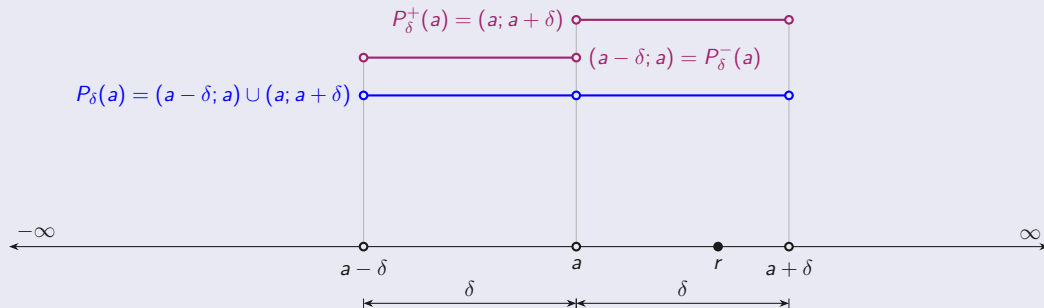
Topologické vlastnosti čísel – Prehľad okolí

Grafický prehľad okolí bodov $a \in \mathbb{R}^*$, kde $\delta > 0$, $r \in \mathbb{R}$.



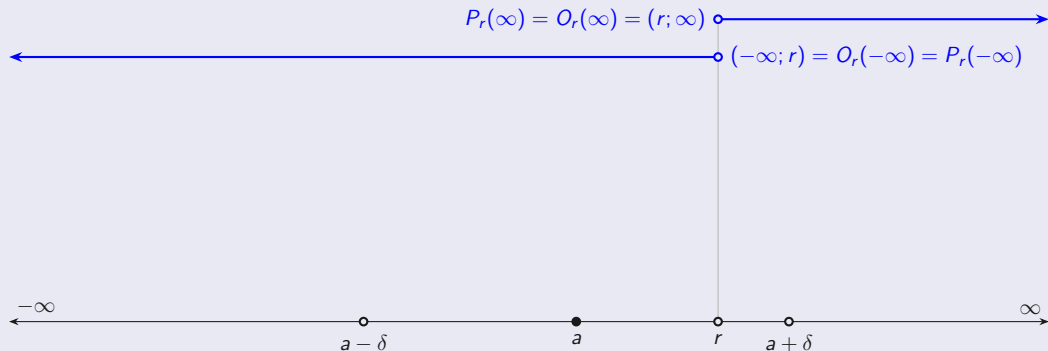
Topologické vlastnosti čísel – Prehľad okolí

Grafický prehľad okolí bodov $a \in \mathbb{R}^*$, kde $\delta > 0$, $r \in \mathbb{R}$.



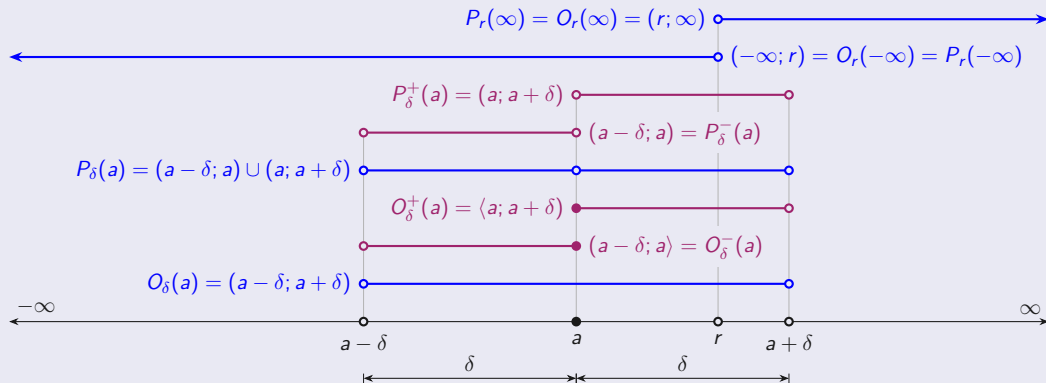
Topologické vlastnosti čísel – Prehľad okolí

Grafický prehľad okolí bodov $a \in \mathbb{R}^*$, kde $\delta > 0$, $r \in \mathbb{R}$.



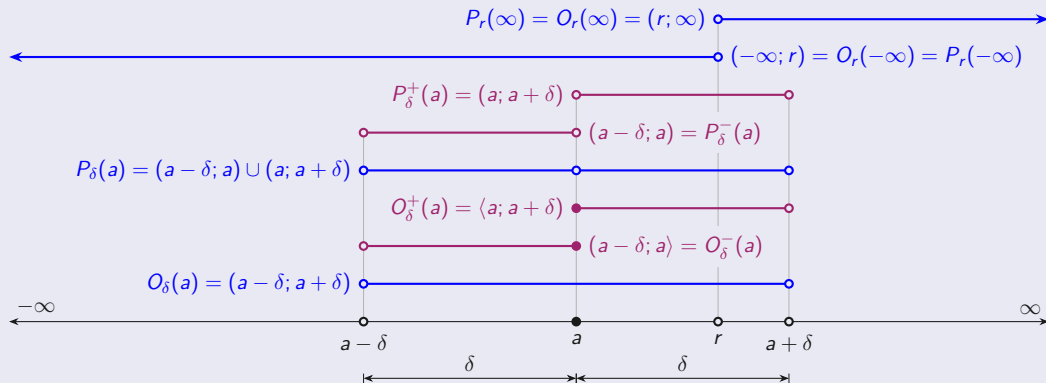
Topologické vlastnosti čísel – Prehľad okolí

Grafický prehľad okolí bodov $a \in \mathbb{R}^*$, kde $\delta > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

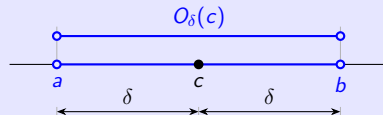


Topologické vlastnosti čísel – Prehľad okolí

Grafický prehľad okolí bodov $a \in R^*$, kde $\delta > 0$, $r \in R$.



- Každý otvorený interval $(a; b)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,
je okolím $O_\delta(c)$ bodu $c = \frac{a+b}{2}$ s polomerom $\delta = \frac{b-a}{2}$,
t. j. $(a; b) = O_\delta(c) = (c - \delta; c + \delta)$.



Topologické vlastnosti čísel – Vnútorný, vonkajší a hraničný bod

Bod $a \in R$ nazývame:

- **Vnútorný bod** množiny $A \subset R$, ak $a \in A$ a existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset A$.
- **Vonkajší bod** množiny $A \subset R$, ak je vnútorným bodom doplnku $A' = R - A$.
- **Hraničný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je ani vnútorným bodom A a ani vonkajším bodom A .

Topologické vlastnosti čísel – Vnútorý, vonkajší a hraničný bod

Bod $a \in R$ nazývame:

- **Vnútorý bod** množiny $A \subset R$, ak $a \in A$ a existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset A$.
- **Vonkajší bod** množiny $A \subset R$, ak je vnútorným bodom doplnku $A' = R - A$.
- **Hraničný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je ani vnútorným bodom A a ani vonkajším bodom A .

$A \subset R$ (ľubovoľná množina).

- Množinu všetkých vnútorných bodov A nazývame **vnútro** A , označenie $\text{int } A$.
- Množinu všetkých vonkajších bodov A nazývame **vonkajšok** A , označenie $\text{ext } A$.
- Množinu všetkých hraničných bodov A nazývame **hranica** A , označenie ∂A .

Topologické vlastnosti čísel – Vnútný, vonkajší a hraničný bod

Bod $a \in R$ nazývame:

- **Vnútný bod** množiny $A \subset R$, ak $a \in A$ a existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset A$.
- **Vonkajší bod** množiny $A \subset R$, ak je vnútorným bodom doplnku $A' = R - A$.
- **Hraničný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je ani vnútorným bodom A a ani vonkajším bodom A .

$A \subset R$ (ľubovoľná množina).

- Množinu všetkých vnútorných bodov A nazývame **vnútro** A , označenie $\text{int } A$.
- Množinu všetkých vonkajších bodov A nazývame **vonkajšok** A , označenie $\text{ext } A$.
- Množinu všetkých hraničných bodov A nazývame **hranica** A , označenie ∂A .

$A \subset R$ (ľubovoľná množina). Potom Platí:

- $\text{int } A \cap \text{ext } A = \text{int } A \cap \partial A = \text{ext } A \cap \partial A = \emptyset$. [Množiny $\text{int } A$, ∂A , $\text{ext } A$ sú disjunktné.]
- $\text{int } A \cup \partial A \cup \text{ext } A = R$. [Zjednotenie množín $\text{int } A$, ∂A , $\text{ext } A$ je celá reálna os.]
- $\partial A = \partial A'$. • $\text{int } A = \text{ext } A'$. • $\text{ext } A = \text{int } A'$.

Topologické vlastnosti čísel – Vnútný, vonkajší a hraničný bod

Bod $a \in R$ nazývame:

- **Vnútný bod** množiny $A \subset R$, ak $a \in A$ a existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset A$.
- **Vonkajší bod** množiny $A \subset R$, ak je vnútorným bodom doplnku $A' = R - A$.
- **Hraničný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je ani vnútorným bodom A a ani vonkajším bodom A .

$A \subset R$ (ľubovoľná množina).

- Množinu všetkých vnútorných bodov A nazývame **vnútro** A , označenie $\text{int } A$.
- Množinu všetkých vonkajších bodov A nazývame **vonkajšok** A , označenie $\text{ext } A$.
- Množinu všetkých hraničných bodov A nazývame **hranica** A , označenie ∂A .

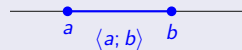
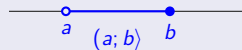
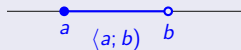
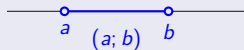
$A \subset R$ (ľubovoľná množina). Potom Platí:

- $\text{int } A \cap \text{ext } A = \text{int } A \cap \partial A = \text{ext } A \cap \partial A = \emptyset$. [Množiny $\text{int } A$, ∂A , $\text{ext } A$ sú disjunktné.]
- $\text{int } A \cup \partial A \cup \text{ext } A = R$. [Zjednotenie množín $\text{int } A$, ∂A , $\text{ext } A$ je celá reálna os.]
- $\partial A = \partial A'$. • $\text{int } A = \text{ext } A'$. • $\text{ext } A = \text{int } A'$.

Špeciálne: • $\text{int } \emptyset = \text{ext } R = \emptyset$. • $\text{ext } \emptyset = \text{int } R = R$. • $\partial \emptyset = \partial R = \emptyset$. • $\partial Q = R$.

Topologické vlastnosti čísel – Příklad

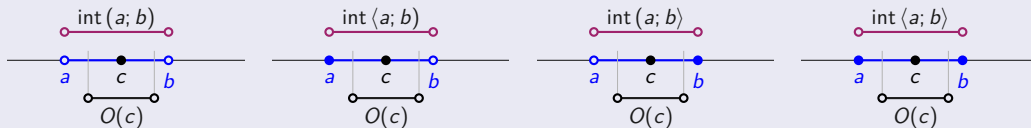
Pre intervaly $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$, $\langle a; b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí:



Topologické vlastnosti čísel – Příklad

Pre intervaly $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$, $\langle a; b\rangle$, kde $a, b \in R$, $a < b$, platí:

- $\text{int}(a; b) = \text{int}\langle a; b) = \text{int}(a; b\rangle = \text{int}\langle a; b\rangle = (a; b)$.



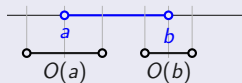
- $\text{int}(a; b) = (a; b)$.
- $\text{int}\langle a; b) = (a; b)$.
- $\text{int}(a; b\rangle = (a; b)$.
- $\text{int}\langle a; b\rangle = (a; b)$.

Topologické vlastnosti čísel – Příklad

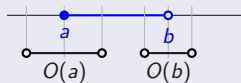
Pre intervaly $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$, $\langle a; b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí:

$$\bullet \quad \partial(a; b) = \partial\langle a; b) = \partial(a; b\rangle = \partial\langle a; b\rangle = \{a, b\}.$$

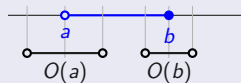
$$\bullet \quad \partial(a; b)$$



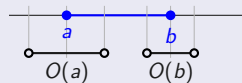
$$\bullet \quad \partial\langle a; b)$$



$$\bullet \quad \partial(a; b\rangle$$



$$\bullet \quad \partial\langle a; b\rangle$$



$$\bullet \quad \partial(a; b) = \{a, b\}.$$

$$\bullet \quad \partial\langle a; b) = \{a, b\}.$$

$$\bullet \quad \partial(a; b\rangle = \{a, b\}.$$

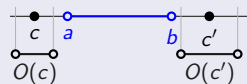
$$\bullet \quad \partial\langle a; b\rangle = \{a, b\}.$$

Topologické vlastnosti čísel – Příklad

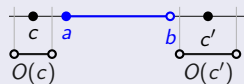
Pre intervaly $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$, $\langle a; b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí:

$$\bullet \text{ ext } (a; b) = \text{ ext } \langle a; b) = \text{ ext } (a; b\rangle = \text{ ext } \langle a; b\rangle = (-\infty; a) \cup (b; \infty) = \mathbb{R} - \langle a; b\rangle.$$

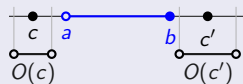
—○ ext $(a; b)$ —○ ext $\langle a; b)$ —○ ext $(a; b\rangle$ —○ ext $\langle a; b\rangle$ —



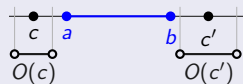
$$\bullet \text{ ext } (a; b) \\ = \mathbb{R} - \langle a; b\rangle.$$



$$\bullet \text{ ext } \langle a; b) \\ = \mathbb{R} - \langle a; b\rangle.$$



$$\bullet \text{ ext } (a; b\rangle \\ = \mathbb{R} - \langle a; b\rangle.$$

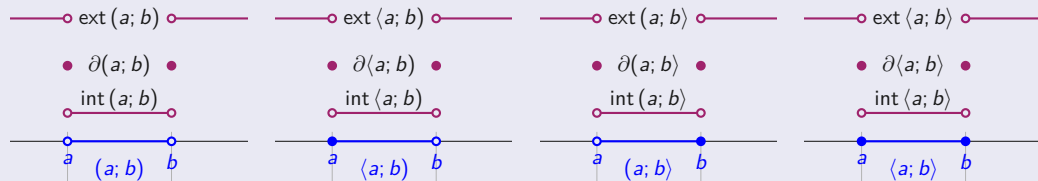


$$\bullet \text{ ext } \langle a; b\rangle \\ = \mathbb{R} - \langle a; b\rangle.$$

Topologické vlastnosti čísel – Příklad

Pre intervaly $(a; b)$, $\langle a; b \rangle$, $(a; b\rangle$, $\langle a; b\rangle$, kde $a, b \in R$, $a < b$, platí:

- $\text{int}(a; b) = \text{int}\langle a; b \rangle = \text{int}(a; b\rangle = \text{int}\langle a; b\rangle = (a; b)$.
- $\partial(a; b) = \partial\langle a; b \rangle = \partial(a; b\rangle = \partial\langle a; b\rangle = \{a, b\}$.
- $\text{ext}(a; b) = \text{ext}\langle a; b \rangle = \text{ext}(a; b\rangle = \text{ext}\langle a; b\rangle = (-\infty; a) \cup (b; \infty) = R - \langle a; b \rangle$.



- | | | | |
|--|--|--|---|
| $\bullet \text{ ext}(a; b)$
$= R - \langle a; b \rangle.$ | $\bullet \text{ ext}\langle a; b \rangle$
$= R - \langle a; b \rangle.$ | $\bullet \text{ ext}(a; b\rangle$
$= R - \langle a; b \rangle.$ | $\bullet \text{ ext}\langle a; b\rangle$
$= R - \langle a; b \rangle.$ |
| $\bullet \partial(a; b) = \{a, b\}.$ | $\bullet \partial\langle a; b \rangle = \{a, b\}.$ | $\bullet \partial(a; b\rangle = \{a, b\}.$ | $\bullet \partial\langle a; b\rangle = \{a, b\}.$ |
| $\bullet \text{ int}(a; b) = (a; b).$ | $\bullet \text{ int}\langle a; b \rangle = (a; b).$ | $\bullet \text{ int}(a; b\rangle = (a; b).$ | $\bullet \text{ int}\langle a; b\rangle = (a; b).$ |

Topologické vlastnosti čísel – Hromadný bod – HB

Bod $a \in R^*$ sa nazýva:

[Hromadný bod – HB]

- **Hromadný bod** množiny $A \subset R^*$,

ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A , ktorý je rôzny od a .

[Pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.]

Topologické vlastnosti čísel – Hromadný bod – HB

Bod $a \in R^*$ sa nazýva:

[Hromadný bod – HB]

- **Hromadný bod** množiny $A \subset R^*$,

ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A , ktorý je rôzny od a .

[Pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.]

- **Izolovaný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je hromadným bodom A a platí $a \in A$.

Topologické vlastnosti čísel – Hromadný bod – HB

Bod $a \in R^*$ sa nazýva:

[Hromadný bod – HB]

- **Hromadný bod** množiny $A \subset R^*$,

ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A , ktorý je rôzny od a .

[Pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.]

- **Izolovaný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je hromadným bodom A a platí $a \in A$.

- **Uzáverom** $\bar{A}$ množiny $A \subset R$ nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých jej HB.

Topologické vlastnosti čísel – Hromadný bod – HB

Bod $a \in R^*$ sa nazýva:

[Hromadný bod – HB]

- **Hromadný bod** množiny $A \subset R^*$,

ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A , ktorý je rôzny od a .

[Pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.]

- **Izolovaný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je hromadným bodom A a platí $a \in A$.

- **Uzáverom** $\bar{A}$ množiny $A \subset R$ nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých jej HB.

Množina $A \subset R$ sa nazýva:

- **Uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje HB, t. j. ak platí $A = \bar{A}$.

- **Izolovaná**, ak obsahuje iba izolované body.

- **Otvorená**, ak každý jej bod je vnútorný, t. j. ak platí $A = \text{int } A$.

Topologické vlastnosti čísel – Hromadný bod – HB

Bod $a \in R^*$ sa nazýva:

[Hromadný bod – HB]

- **Hromadný bod** množiny $A \subset R^*$,

ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A , ktorý je rôzny od a .

[Pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.]

- **Izolovaný bod** množiny $A \subset R$, ak nie je hromadným bodom A a platí $a \in A$.

- **Uzáverom** $\bar{A}$ množiny $A \subset R$ nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých jej HB.

Množina $A \subset R$ sa nazýva:

- **Uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje HB, t. j. ak platí $A = \bar{A}$.

- **Izolovaná**, ak obsahuje iba izolované body.

- **Otvorená**, ak každý jej bod je vnútorný, t. j. ak platí $A = \text{int } A$.

- **Otvorený interval** $(a; b)$, kde $a, b \in R$, $a < b$, je otvorená množina.

- **Uzavretý interval** $\langle a; b \rangle$, kde $a, b \in R$, $a < b$, je uzavretá množina.

Topologické vlastnosti čísel – Otvorené a uzavreté množiny

Množina $A \subset R$. Potom platí:

- Množina A je otvorená. $\Leftrightarrow$
- Doplnok $A' = R - A$ je množina uzavretá.

Topologické vlastnosti čísel – Otvorené a uzavreté množiny

Množina $A \subset R$. Potom platí:

- Množina A je otvorená. $\Leftrightarrow$ • Doplnok $A' = R - A$ je množina uzavretá.

Množiny $A, B \subset R$. Potom platí:

- Množiny A, B sú otvorené. $\Rightarrow$ • Množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ sú otvorené.
- Množiny A, B sú uzavreté. $\Rightarrow$ • Množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ sú uzavreté.

Topologické vlastnosti čísel – Otvorené a uzavreté množiny

Množina $A \subset R$. Potom platí:

- Množina A je otvorená. $\Leftrightarrow$ • Doplnok $A' = R - A$ je množina uzavretá.

Množiny $A, B \subset R$. Potom platí:

- Množiny A, B sú otvorené. $\Rightarrow$ • Množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ sú otvorené.
- Množiny A, B sú uzavreté. $\Rightarrow$ • Množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ sú uzavreté.

Množiny $A_k \subset R, k \in N$. Potom platí:

- Množiny $A_k, k \in N$ sú otvorené. $\Rightarrow$ • $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ je otvorená množina.
- Množiny $A_k, k \in N$ sú uzavreté. $\Rightarrow$ • $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ je uzavretá množina.

Topologické vlastnosti čísel – Otvorené a uzavreté množiny

Množina $A \subset R$. Potom platí:

- Množina A je otvorená. $\Leftrightarrow$ • Doplnok $A' = R - A$ je množina uzavretá.

Množiny $A, B \subset R$. Potom platí:

- Množiny A, B sú otvorené. $\Rightarrow$ • Množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ sú otvorené.
- Množiny A, B sú uzavreté. $\Rightarrow$ • Množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ sú uzavreté.

Množiny $A_k \subset R, k \in N$. Potom platí:

- Množiny $A_k, k \in N$ sú otvorené. $\Rightarrow$ • $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ je otvorená množina.
[Priekop otvorených množín nemusí byť otvorená množina.]

- Množiny $A_k, k \in N$ sú uzavreté. $\Rightarrow$ • $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ je uzavretá množina.
[Zjednotenie uzavretých množín nemusí byť uzavretá množina.]

- Množiny $(-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}), k \in N$ sú otvorené, ale množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} (-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}) = \{0\}$ je uzavretá.

- Množiny $\{\frac{1}{k}\}, k \in N$ sú uzavreté, ale množina $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\frac{1}{k}\} = \{\frac{1}{k}; k \in N\}$ nie je uzavretá.

[Neobsahuje svoj HB 0.]

Koniec 1. časti

Ďakujem za pozornosť.