

Matematická analýza 1

2026/2027

2. Číselné postupnosti

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Postupnosti reálných čísel
- 2 Limita postupnosti
- 3 Výpočet limit
- 4 Riešené príklady

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkciu) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = \mathbb{N}$,

[Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)] , n \in \mathbb{N}\} = \{[1; f(1)], [2; f(2)], [3; f(3)], \dots, [n; f(n)], \dots\}.$



Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkciu) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = \mathbb{N}$,

[Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)] , n \in \mathbb{N}\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \dots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \dots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkciu) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$,

[Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)] , n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \dots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \dots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$, t. j. $f: N \rightarrow R$.

[Všetky členy a_n , $n \in N$ sú reálne čísla.]

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkciu) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$,

[Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)] , n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \dots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \dots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$, t. j. $f: N \rightarrow R$.

[Všetky členy a_n , $n \in N$ sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n .
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n , $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

Postupnosti reálnych čísel – Definícia

Zobrazenie (funkciu) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$,

[Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)] , n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \dots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \dots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$, t. j. $f: N \rightarrow R$.

[Všetky členy a_n , $n \in N$ sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n .
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n , $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.
- Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n - 1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \dots\}$ môžeme definovať explicitne vzťahom $a_n = 2n - 1$, $n \in N$ a rekurentne predpisom $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \in N$.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **sa rovná** postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti **sa rovnajú**),

ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.



Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **sa rovná** postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti **sa rovnajú**),

ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k , kde $k \in \mathbb{Z}$ a zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$.
[Najčastejšie to býva od člena a_0 .]
- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \dots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \dots\}$.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **sa rovná** postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti **sa rovnajú**),

ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k , kde $k \in \mathbb{Z}$ a zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$.
[Najčastejšie to býva od člena a_0 .]
- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \dots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \dots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora**, ak existuje $M \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola**, ak existuje $m \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $m \leq a_n$.
- Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **sa rovná** postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti **sa rovnajú**),

ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k , kde $k \in \mathbb{Z}$ a zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$.
[Najčastejšie to býva od člena a_0 .]
- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \dots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \dots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená**, ak je ohraničená zdola a súčasne je ohraničená zhora.
- Neohraničená** ak nie je ohraničená zdola alebo nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel – Ohraničenosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **sa rovná** postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti **sa rovnajú**),

ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k , kde $k \in \mathbb{Z}$ a zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$.
[Najčastejšie to býva od člena a_0 .]
- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \dots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \dots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora**, ak existuje $M \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola**, ak existuje $m \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $m \leq a_n$.
- Ohraničená**, ak je ohraničená zdola a súčasne je ohraničená zhora.

T. j. ak ak existujú $m, M \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $m \leq a_n \leq M$.

- Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola.
- Neohraničená**, ak nie je ohraničená zdola alebo nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Rastúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.

- **Neklesajúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

- **Konštantná (stacionárna)**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Klesajúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.
- **Nerastúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- **Konštantná (stacionárna)**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Rastúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- **Klesajúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.

- **Neklesajúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- **Nerastúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

- **Konštantná (stacionárna)**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.
 - Klesajúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.
 - Neklesajúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
 - Nerastúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
 - Konštantná (stacionárna), ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$.
- Rýdzo (ostro) monotónna.
- Monotónna.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Rastúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.
 - **Klesajúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.
-
- **Neklesajúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
 - **Nerastúca**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
-
- **Konštantná (stacionárna)**, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$.
- } **Rýdzo (ostro) monotónna.**
} **Monotónna.**

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **podpostupnosť (vybraná postupnosť)** z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel – Monotónnosť, podpostupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.
 - Klesajúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.
 - Neklesajúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
 - Nerastúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
 - Konštantná (stacionárna), ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$.
- $\left. \begin{array}{l} \text{Rýdzo (ostro) monotónna.} \\ \text{Monotónna.} \end{array} \right\}$

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom, rozdielom, súčinom, resp. podielom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

resp. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ v prípade, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \dots, n, \frac{1}{n}, \dots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 („hromadia“ v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ („hromadia“ v bode ∞).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \dots, n, \frac{1}{n}, \dots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 („hromadia“ v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ („hromadia“ v bode ∞).

$a \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva **hromadná hodnota** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

[Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa prvkov a_n takých, že $a_n \in O(a)$.



Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- **Limita** a **limitné procesy** patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \dots, n, \frac{1}{n}, \dots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 („hromadia“ v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ („hromadia“ v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva **hromadná hodnota** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

[Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa prvkov a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- **Vlastná**, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).
- **Nevlastná**, ak $a = -\infty$ alebo $a = \infty$ (nevlastná hromadná hodnota).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- **Limita** a **limitné procesy** patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \dots, n, \frac{1}{n}, \dots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 („hromadia“ v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ („hromadia“ v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva **hromadná hodnota** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

[Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa prvkov a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- **Vlastná**, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).
- **Nevlastná**, ak $a = -\infty$ alebo $a = \infty$ (nevlastná hromadná hodnota).
- Množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme symbolom E .

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in \mathbb{R}^*$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in \mathbb{R}^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in \mathbb{R}^*$.

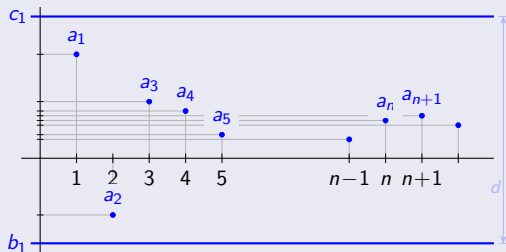
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in \mathbb{R}$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Označme $d = c_1 - b_1$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in \mathbb{R}^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

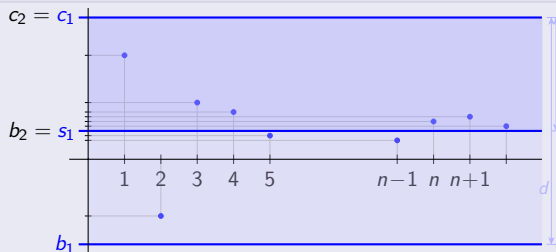
[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in \mathbb{R}$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdelíme $\langle b_1; c_1 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_1; s_1 \rangle, \langle s_1; c_1 \rangle$, kde $s_1 = \frac{b_1 + c_1}{2}$. V aspoň jednom z týchto intervalov leží nekonečne veľa a_n , označme ho $\langle b_2; c_2 \rangle$. $\Rightarrow \langle b_2; c_2 \rangle \subset \langle b_1; c_1 \rangle$ a $c_2 - b_2 = \frac{c_1 - b_1}{2} = \frac{d}{2} = \frac{d}{2^{2-1}}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in \mathbb{R}^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

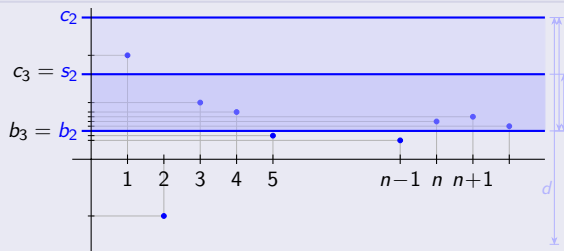
[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in \mathbb{R}$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdelíme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_2; s_2 \rangle, \langle s_2; c_2 \rangle$, kde $s_2 = \frac{b_2 + c_2}{2}$. V aspoň jednom z týchto intervalov leží nekonečne veľa a_n , označme ho $\langle b_3; c_3 \rangle$. $\Rightarrow \langle b_3; c_3 \rangle \subset \langle b_2; c_2 \rangle$ a $c_3 - b_3 = \frac{c_2 - b_2}{2} = \frac{d}{2^2} = \frac{d}{2^{3-1}}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

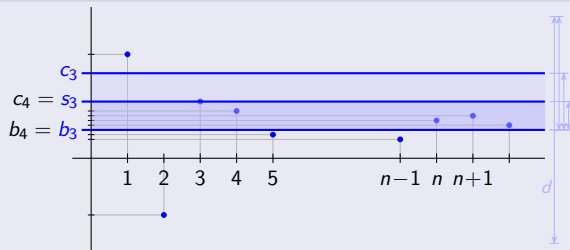
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in \mathbb{R}^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$. [Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$. [Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in \mathbb{R}$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdelíme $\langle b_3; c_3 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_3; s_3 \rangle, \langle s_3; c_3 \rangle$, kde $s_3 = \frac{b_3 + c_3}{2}$. V aspoň jednom z týchto intervalov leží nekonečne veľa a_n , označme ho $\langle b_4; c_4 \rangle$. $\Rightarrow \langle b_4; c_4 \rangle \subset \langle b_3; c_3 \rangle$ a $c_4 - b_4 = \frac{c_3 - b_3}{2} = \frac{d}{2^3} = \frac{d}{2^{4-1}}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in \mathbb{R}^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

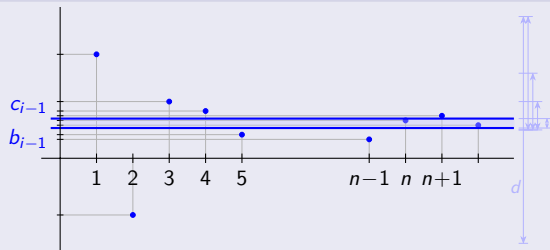
[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in \mathbb{R}$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Označme $d = c_1 - b_1$.

- Takto pokračujeme do nekonečna, v praxi po požadovanú presnosť.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in R$.

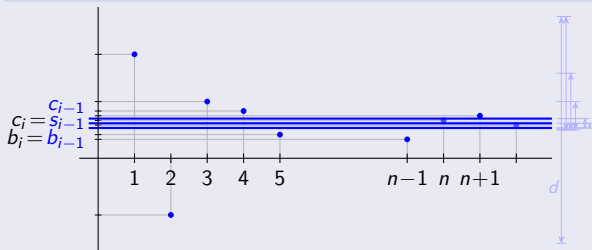
[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in R$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$. Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdelíme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $i \in N$ na rovnaké intervaly v strede $s_{i-1} = \frac{b_{i-1} + c_{i-1}}{2}$. V aspoň jednom z týchto intervalov leží nekonečne veľa a_n , označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$. $\Rightarrow \langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ a $c_i - b_i = \frac{c_{i-1} - b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in R$.

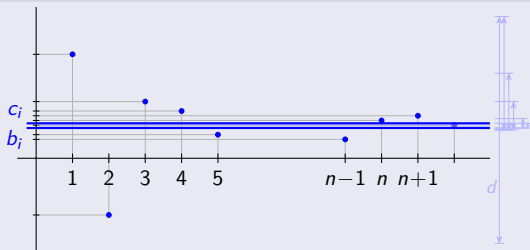
[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in R$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$. Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdelíme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $i \in N$ na rovnaké intervaly v strede $s_{i-1} = \frac{b_{i-1} + c_{i-1}}{2}$. V aspoň jednom z týchto intervalov leží nekonečne veľa a_n , označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$. $\Rightarrow \langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ a $c_i - b_i = \frac{c_{i-1} - b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$, v ktorom leží nekonečne veľa a_n tak, že platí $|a_n - a| \leq c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

Limita postupnosti – Existencia HH

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow a \in R$.

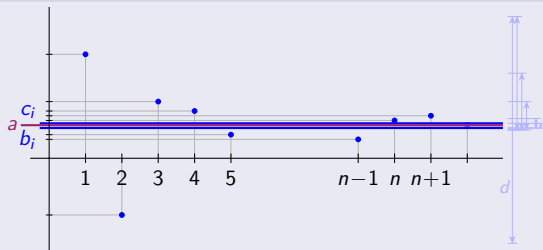
[Môžu samozrejme existovať aj reálne HH.]

[Všetky HH sú reálne.]

Nájdite reálnu HH $a \in R$ ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$. Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdelíme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $i \in N$ na rovnaké intervaly v strede $s_{i-1} = \frac{b_{i-1} + c_{i-1}}{2}$. V aspoň jednom z týchto intervalov leží nekonečne veľa a_n , označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$. $\Rightarrow \langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ a $c_i - b_i = \frac{c_{i-1} - b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$, v ktorom leží nekonečne veľa a_n tak, že platí $|a_n - a| \leq c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

- Potom existuje jediný bod $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \langle b_i; c_i \rangle$, ktorý je hľadanou HH postupnosti.

[Cantorov princíp vložených intervalov.]

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame **horná limita** (**limes superior**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame **dolná limita** (**limes inferior**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- $\inf E = \sup E$ nazývame **limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

• $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

• $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

• $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ \text{vlastná} \\ \text{limita} \\ \hline \pm \infty \\ \text{nevlastná} \\ \text{limita} \\ \hline \emptyset \end{array} \right.$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

• $\sup E$ nazývame **horná limita** (**limes superior**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

• $\inf E$ nazývame **dolná limita** (**limes inferior**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

• $\inf E = \sup E$ nazývame **limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left\{ \begin{array}{ll} a \in \mathbb{R} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \text{vlastná limita} & \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \\ \hline \pm \infty & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje do } \pm \infty \\ \text{nevlastná limita} & \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm \infty \\ \hline \nexists & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ osciluje} \end{array} \right.$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame **horná limita** (**limes superior**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame **dolná limita** (**limes inferior**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- $\inf E = \sup E$ nazývame **limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ \text{vlastná} \\ \text{limita} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje} \\ \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} \pm \infty \\ \text{nevlastná} \\ \text{limita} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje do } \pm \infty \\ \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm \infty \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje} \\ \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \nrightarrow \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} \nexists \\ \text{osciluje} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ osciluje} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1 , t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \dots\} \longrightarrow 1$, $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1 , t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \dots\} \longrightarrow 1$, $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1 , t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \dots\} \rightarrow 1$, $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow -1$.

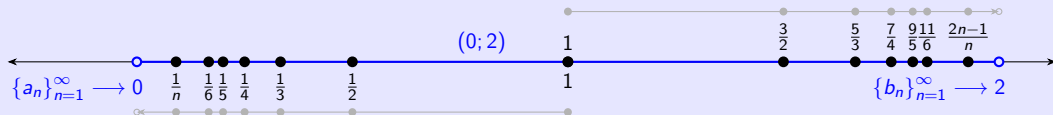
$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

• Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.

Podpostupnosti sú napr. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$, pričom $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$, pričom $b_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} \neq 2$, $n \in \mathbb{N}$.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti, pričom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

[Postupnosti sú rovnaké okrem konečného počtu členov, od indexu n_0 sú rovnaké.]

$\Rightarrow$ • Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti, pričom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

[Postupnosti sú rovnaké okrem konečného počtu členov, od indexu n_0 sú rovnaké.]

$\Rightarrow$ • Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Buď existujú obidve limity alebo ani jedna.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti, pričom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

[Postupnosti sú rovnaké okrem konečného počtu členov, od indexu n_0 sú rovnaké.]

$\Rightarrow$ • Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Buď existujú obidve limity alebo ani jedna.]

• Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neovplyvní niektoré jej vlastnosti:

[Konečné zmeny: vynechanie členov, pridanie členov, zmeny hodnôt členov, zmena poradia členov ap.]

- neovplyvní jej hromadné hodnoty,
- neovplyvní jej konvergenciu, resp. divergenciu.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti, pričom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

[Postupnosti sú rovnaké okrem konečného počtu členov, od indexu n_0 sú rovnaké.]

$\Rightarrow$ • Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Buď existujú obidve limity alebo ani jedna.]

• Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neovplyvní niektoré jej vlastnosti:

[Konečné zmeny: vynechanie členov, pridanie členov, zmeny hodnôt členov, zmena poradia členov ap.]

- neovplyvní jej hromadné hodnoty,
- neovplyvní jej konvergenciu, resp. divergenciu.

• Zmena konečného počtu členov prakticky znamená, že podmienky platia:

- až od nejakého $n_0 \in \mathbb{N}$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
- pre všetky $n \in \mathbb{N}$ okrem konečného počtu členov.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti, pričom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

[Postupnosti sú rovnaké okrem konečného počtu členov, od indexu n_0 sú rovnaké.]

$\Rightarrow$ • Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Buď existujú obidve limity alebo ani jedna.]

• Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neovplyvní niektoré jej vlastnosti:

[Konečné zmeny: vynechanie členov, pridanie členov, zmeny hodnôt členov, zmena poradia členov ap.]

- neovplyvní jej hromadné hodnoty,
- neovplyvní jej konvergenciu, resp. divergenciu.

• Zmena konečného počtu členov prakticky znamená, že podmienky platia:

- až od nejakého $n_0 \in \mathbb{N}$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
- pre všetky $n \in \mathbb{N}$ okrem konečného počtu členov.

Vo všeobecnosti budeme tvrdenia pre postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formulovať pre všetky členy a_n .

V tomto zmysle tvrdenia pre postupnosti ostanú v platnosti, aj keď zmeníme konečný počet ich členov.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0. \Rightarrow$ Pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+k} = 0$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0. \Rightarrow$ Pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+k} = 0$

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

[Postupnosť má aspoň dve hromadné hodnoty a osciluje.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a.$

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0. \Rightarrow$ Pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+k} = 0$

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

[Postupnosť má aspoň dve hromadné hodnoty a osciluje.]

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ osciluje, pretože $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow -1$ a $\{1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

$\bullet \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow \bullet$ Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow \bullet$ Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, t. j. existuje $a \in \mathbb{R}^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, t. j. existuje $a \in \mathbb{R}^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora	$\left\{ \begin{array}{l} \text{neohraničená} \\ \text{neohraničená} \end{array} \right.$	$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow +\infty$.
• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola		$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

$\bullet \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow \bullet$ Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow \bullet$ Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, t. j. existuje $a \in \mathbb{R}^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

$\bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora
 $\bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ohraničená} \end{array} \right. \Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in \mathbb{R}$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

$\bullet \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow \bullet$ Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow \bullet$ Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, t. j. existuje $a \in \mathbb{R}^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

$\bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora	$\left\{ \begin{array}{l} \text{neohraničená} \\ \text{ohraničená} \\ \text{neohraničená} \end{array} \right.$	$\Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow +\infty$.
$\bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola		$\Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in \mathbb{R}$.
		$\Rightarrow \bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty$.

Výpočet limit – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).



Výpočet limit – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).
- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú). [Pre „<“ sa tvrdenie nemení.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).
- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú). [Pre „<“ sa tvrdenie nemení.]
- Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}, \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí $n < n^2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}, n > 1$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).
- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú). [Pre „<“ sa tvrdenie nemení.]
- Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}, \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí $n < n^2$ pre všetky $n \in N, n > 1$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, a \in R^*$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).
- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú). [Pre „<“ sa tvrdenie nemení.]
- Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}, \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí $n < n^2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}, n > 1$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

[Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
 - Existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.
- $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).
- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú). [Pre „<“ sa tvrdenie nemení.]

- Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}, \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí $n < n^2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}, n > 1$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

[Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
 - Existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.
- $\} \Rightarrow$
- Existuje
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$
- a platí
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$
- .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

- Pre $\{\pm \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\sin n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: • $-1 \leq \sin n \leq 1$. $\Rightarrow$ • $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.
- $\Rightarrow$ • $0 = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{n}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Výpočet limit – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti, existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$.



Výpočet limit – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti, existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- Ak platí $a < b$. $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$. 

Výpočet limit – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti, existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- Ak platí $a < b$. $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

[Základné pravidlá pre výpočet limit.]

- $c \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti, existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- Ak platí $a < b$. $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

[Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*. \Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| = |a|.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{1}{b}.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti, existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- Ak platí $a < b$. $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

[Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*. \Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| = |a|.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{1}{b}.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože rozdiel $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti, existujú $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- Ak platí $a < b$. $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

[Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*. \Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| = |a|.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{1}{b}.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = ?.$$

[Postup nemôžeme použiť, pretože rozdiel $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

Ale:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Výpočet limitů – Příklady

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q$, kde $q \in \mathbb{R}$.

Výpočet limít – Příklady

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q$, kde $q \in \mathbb{R}$.

- $q = 0$.
- $q > 0$.
- $q < 0$.

Výpočet limit – Příklady

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q$, kde $q \in \mathbb{R}$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in \mathbb{N}.$

$\Rightarrow$ Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Výpočet limít – Příklady

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q$, kde $q \in \mathbb{R}$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in \mathbb{N}.$

$\Rightarrow$ Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^q}$

Výpočet limít – Příklady

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q$, kde $q \in \mathbb{R}$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in \mathbb{N}.$

$\Rightarrow$ Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q > 0, \text{ t. j. } -q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \text{ t. j. } -q = 0, \\ \infty & \text{pre } q < 0, \text{ t. j. } -q > 0. \end{cases}$

Výpočet limít – Příklady

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q$, kde $q \in \mathbb{R}$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q > 0, \text{ t. j. } -q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \text{ t. j. } -q = 0, \\ \infty & \text{pre } q < 0, \text{ t. j. } -q > 0. \end{cases}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť.

Potom platí: • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \Leftrightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$

Výpočet limit – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, kde $a \in \mathbb{R}$.

[Limita geometrickej postupnosti]

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, kde $a \in \mathbb{R}$.

[Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1; \infty)$.
- $a = 1$.
- $a \in (-1; 1)$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty; -1)$.

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, kde $a \in \mathbb{R}$.

[Limita geometrickej postupnosti]

$$\bullet a \in (1; \infty). \quad \Rightarrow a^n < a^{n+1} \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty.$$

$$\bullet a = 1. \quad \Rightarrow a^n = 1 \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1.$$

$$\bullet a \in (-1; 1). \quad \Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}| \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

$$\bullet a = -1. \quad \Rightarrow a^{2k} = 1, a^{2k+1} = -1 \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \text{ neexistuje.}$$

[Hromadné hodnoty $E = \{-1, 1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]

$$\bullet a \in (-\infty; -1). \quad \Rightarrow a^{2k} \rightarrow \infty, a^{2k+1} \rightarrow -\infty \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \text{ neexistuje.}$$

[Hromadné hodnoty $E = \{-\infty, \infty\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, kde $a \in \mathbb{R}$.

[Limita geometrickej postupnosti]

$$\bullet a \in (1; \infty). \quad \Rightarrow a^n < a^{n+1} \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty.$$

$$\bullet a = 1. \quad \Rightarrow a^n = 1 \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1.$$

$$\bullet a \in (-1; 1). \quad \Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}| \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

$$\bullet a = -1. \quad \Rightarrow a^{2k} = 1, a^{2k+1} = -1 \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \text{ neexistuje.}$$

[Hromadné hodnoty $E = \{-1, 1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]

$$\bullet a \in (-\infty; -1). \quad \Rightarrow a^{2k} \rightarrow \infty, a^{2k+1} \rightarrow -\infty \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \text{ neexistuje.}$$

[Hromadné hodnoty $E = \{-\infty, \infty\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (-1; 1), \\ \nexists & \text{pre } a \in (-\infty; -1). \end{cases} \quad \text{t. j. postupnosť } \{a^n\}_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ \rightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \\ \rightarrow 0 & \text{pre } a \in (-1; 1), \\ \text{osciluje} & \text{pre } a \in (-\infty; -1). \end{cases}$$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{pokiaľ limity existujú}).$$



Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{pokiaľ limity existujú}).$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\bullet \text{ Ak platí: } a < 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\bullet \text{ Ak platí: } a > 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]



Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{pokiaľ limity existujú}).$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\bullet \text{ Ak platí: } a < 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\bullet \text{ Ak platí: } a > 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\bullet \text{ Ak platí: } a < 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\bullet \text{ Ak platí: } a > 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]



Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{pokiaľ limity existujú}).$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\bullet \text{ Ak platí: } a < 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\bullet \text{ Ak platí: } a > 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\bullet \text{ Ak platí: } a < 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\bullet \text{ Ak platí: } a > 1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ale:

$$\bullet \{1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1, \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0, \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{postupnosti konvergujú.}$$

$$\bullet \{n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty, \{n^2\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty \quad \text{postupnosti divergujú.}$$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$ pre $a > 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$ pre $a > 0.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$



Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$ pre $a > 0.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\bullet \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$ pre $a > 0.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\Rightarrow$ • $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ existuje.
- $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e.$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, potom existuje aj limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ a rovnajú sa, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$]

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$

- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$ [1. riešenie.]

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$

- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$ [1. riešenie.]

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$ [2. riešenie.]

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$

- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$ [1. riešenie.]

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$ [2. riešenie.]

- Zvoľme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1) \cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k \cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$
 [3. riešenie.]

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$

- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$ [1. riešenie.]

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$ [2. riešenie.]

- Zvoľme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1) \cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k \cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$
 [3. riešenie.]

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

[Platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$]

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n n!}{n^n} \quad \text{pre } a > 0, a \neq e.$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} \quad \text{pre } q > 0, a > 0.$$



Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n n!}{n^n} = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > e, \\ 0 & \text{pre } a < e. \end{cases}$$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{a n^n}{(n+1)^n} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = a \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{e} > 1 \text{ pre } a > e \\ \frac{a}{e} < 1 \text{ pre } a < e \end{array} \right] \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > e, \\ 0 & \text{pre } a < e. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} \quad \text{pre } q > 0, a > 0.$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n n!}{n^n} = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > e, \\ 0 & \text{pre } a < e. \end{cases}$$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{a n^n}{(n+1)^n} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = a \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{e} > 1 \text{ pre } a > e \\ \frac{a}{e} < 1 \text{ pre } a < e \end{array} \right] \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > e, \\ 0 & \text{pre } a < e. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} \quad \text{pre } q > 0, a > 0.$$

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n^q}{a^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\bullet a = 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty.$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n n!}{n^n} = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > e, \\ 0 & \text{pre } a < e. \end{cases}$$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{a n^n}{(n+1)^n} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = a \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{e} > 1 \text{ pre } a > e \\ \frac{a}{e} < 1 \text{ pre } a < e \end{array} \right] \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > e, \\ 0 & \text{pre } a < e. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q > 0, a \leq 1, \\ 0 & \text{pre } q > 0, a > 1. \end{cases}$$

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n^q}{a^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\bullet a = 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty.$$

$$\bullet a \neq 1. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} > 1 \text{ pre } a < 1 \\ \frac{1}{a} < 1 \text{ pre } a > 1 \end{array} \right] \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a < 1, \\ 0 & \text{pre } a > 1. \end{cases}$$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$.

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

$$\bullet a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 6) = a + 6, \text{ t. j. } a^2 = a + 6.$$

$$\Rightarrow \bullet a \text{ je koreňom rovnice } a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) = 0. \Rightarrow \bullet a = 3 \text{ alebo } a = -2.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{ (pokiaľ existuje).} \quad [\text{Koreň } a = -2 < 0 \text{ nevyhovuje, pretože všetky } a_n \text{ sú kladné, t. j. } a_n > 0.]$$

Musíme ukázať existenciu limity. $\Rightarrow$ Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

$$\bullet a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 6) = a + 6, \text{ t. j. } a^2 = a + 6.$$

$$\Rightarrow \bullet a \text{ je koreňom rovnice } a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) = 0. \Rightarrow \bullet a = 3 \text{ alebo } a = -2.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{ (pokiaľ existuje).} \quad [\text{Koreň } a = -2 < 0 \text{ nevyhovuje, pretože všetky } a_n \text{ sú kladné, t. j. } a_n > 0.]$$

Musíme ukázať existenciu limity. Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená, t. j. $a_n < 3$ pre $n \in \mathbb{N}$.

[Dôkaz matematickou indukciou.]

$$\text{Krok 1. } a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1 + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3.$$

$$\text{Krok 2. } a_k < 3 \text{ pre } k \in \mathbb{N}. \text{ (Indukčný predpoklad.) } \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3 \text{ pre } k + 1.$$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

$$\bullet a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 6) = a + 6, \text{ t. j. } a^2 = a + 6.$$

$$\Rightarrow \bullet a \text{ je koreňom rovnice } a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) = 0. \Rightarrow \bullet a = 3 \text{ alebo } a = -2.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{ (pokiaľ existuje).} \quad [\text{Koreň } a = -2 < 0 \text{ nevyhovuje, pretože všetky } a_n \text{ sú kladné, t. j. } a_n > 0.]$$

Musíme ukázať existenciu limity. Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.

$$\bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je zhora ohraničená, t. j. } a_n < 3 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[Dôkaz matematickou indukciou.]

$$\boxed{\text{Krok 1.}} \quad a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1 + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3.$$

$$\boxed{\text{Krok 2.}} \quad a_k < 3 \text{ pre } k \in \mathbb{N}. \text{ (Indukčný predpoklad.) } \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3 \text{ pre } k + 1.$$

Riešené príklady – Rekurentná postupnosť

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

$$\bullet a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 6) = a + 6, \text{ t. j. } a^2 = a + 6.$$

$$\Rightarrow \bullet a \text{ je koreňom rovnice } a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) = 0. \Rightarrow \bullet a = 3 \text{ alebo } a = -2.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{ (pokiaľ existuje).} \quad [\text{Koreň } a = -2 < 0 \text{ nevyhovuje, pretože všetky } a_n \text{ sú kladné, t. j. } a_n > 0.]$$

Musíme ukázať existenciu limity. Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.

$$\bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je zhora ohraničená, t. j. } a_n < 3 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[Dôkaz matematickou indukciou.]

$$\boxed{\text{Krok 1.}} \quad a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1 + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3.$$

$$\boxed{\text{Krok 2.}} \quad a_k < 3 \text{ pre } k \in \mathbb{N}. \text{ (Indukčný predpoklad.) } \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3 \text{ pre } k + 1.$$

$$\bullet \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je rastúca } (a_n < a_{n+1} \text{ pre } n \in \mathbb{N}).$$

[Pre $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

$$\begin{aligned} \text{Pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } a_n^2 - a_{n+1}^2 &= a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6 \\ &= (a_n + 2)(a_n - 3) < 0. \Rightarrow a_n^2 < a_{n+1}^2. \Rightarrow a_n < a_{n+1}. \end{aligned}$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,2; 0,23; 0,233; \dots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0,2\overline{3}$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,2; 0,23; 0,233; \dots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0,2\overline{3}$

Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

- $0,2\overline{3} = 0,23333\dots = 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + \dots$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,2; 0,23; 0,233; \dots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0,2\overline{3} = \frac{7}{30}$.

Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 0,2\overline{3} &= 0,23333 \dots = 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + \dots \\
 &= 0,2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \dots \\
 &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right) = \left[\begin{array}{l} \text{Geometrický rad s kvociantom } q \\ 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q} \end{array} \right] \\
 &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
 \end{aligned}$$

$$a = 0,2\overline{3} = 0,2333 \dots$$

$$10a = 2,\overline{3} = 2,3333 \dots$$

$$100a = 23,\overline{3} = 23,3333 \dots$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,2; 0,23; 0,233; \dots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0,2\bar{3}$

Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 0,2\bar{3} &= 0,23333 \dots = 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + \dots \\
 &= 0,2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \dots \\
 &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right) = \left[\begin{array}{l} \text{Geometrický rad s kvociantom } q \\ 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q} \end{array} \right] \\
 &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
 \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad a &= 0,2\bar{3} = 0,2333 \dots \\
 \bullet \quad 10a &= 2,\bar{3} = 2,3333 \dots \\
 \bullet \quad 100a &= 23,\bar{3} = 23,3333 \dots
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{aligned}} \right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23,3333 \dots - 2,3333 \dots = 23 - 2 = 21.$$

$$\Rightarrow 21 = 100a - 10a = 90a. \Rightarrow a = \frac{21}{90} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 30} = \frac{7}{30}.$$

Riešené príklady – Periodické číslo

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,2; 0,23; 0,233; \dots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0,2\bar{3} = \frac{7}{30}$.

Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 0,2\bar{3} &= 0,23333 \dots = 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + \dots \\
 &= 0,2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \dots \\
 &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right) = \left[\begin{array}{l} \text{Geometrický rad s kvociantom } q \\ 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q} \end{array} \right] \\
 &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
 \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad a &= 0,2\bar{3} = 0,2333 \dots \\
 \bullet \quad 10a &= 2,\bar{3} = 2,3333 \dots \\
 \bullet \quad 100a &= 23,\bar{3} = 23,3333 \dots
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \bullet \quad a &= 0,2\bar{3} = 0,2333 \dots \\ \bullet \quad 10a &= 2,\bar{3} = 2,3333 \dots \\ \bullet \quad 100a &= 23,\bar{3} = 23,3333 \dots \end{aligned}} \right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23,3333 \dots - 2,3333 \dots = 23 - 2 = 21.$$

$$\Rightarrow \bullet \quad 21 = 100a - 10a = 90a. \Rightarrow \bullet \quad a = \frac{21}{90} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 30} = \frac{7}{30}.$$

Riešené príklady – Kochova vložka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.

Riešené príklady – Kochova vložka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

Riešené príklady – Kochova vložka

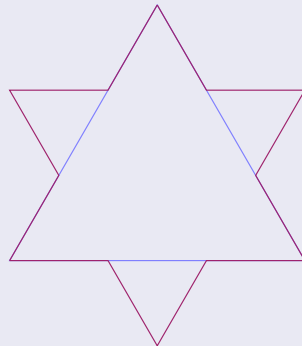
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$ -krát dlhšia.
- Obvod vložky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$ -krát.

Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t .



Riešené príklady – Kochova vložka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.

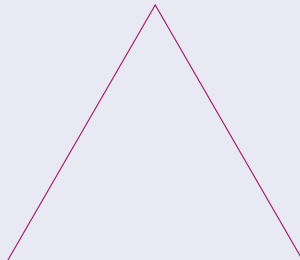


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$ -krát dlhšia.
- Obvod vložky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$ -krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t .

Po prvom kroku bude obvod vložky $d = \frac{4}{3}d_t$.



Riešené príklady – Kochova vložka

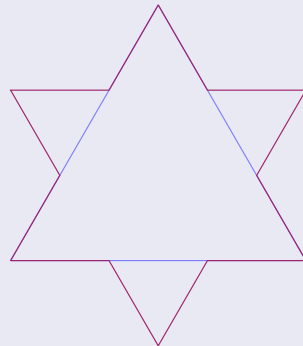
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$ -krát dlhšia.
- Obvod vložky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$ -krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t .
- Po prvom kroku bude obvod vložky $d = \frac{4}{3}d_t$.



Riešené príklady – Kochova vložka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.

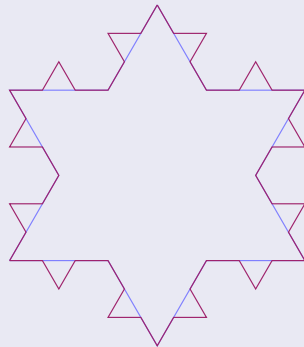


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

• Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$ -krát dlhšia.

• Obvod vložky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$ -krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t .
- Po prvom kroku bude obvod vložky $d = \frac{4}{3}d_t$.
- Po n -tom kroku bude obvod vložky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.



Riešené príklady – Kochova vložka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.

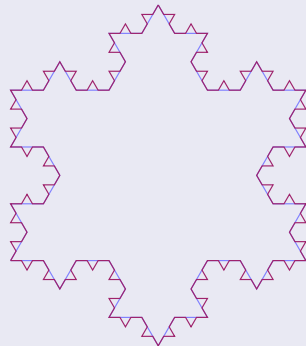


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$ -krát dlhšia.
- Obvod vložky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$ -krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t .
- Po prvom kroku bude obvod vložky $d = \frac{4}{3}d_t$.
- Po n -tom kroku bude obvod vložky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \rightarrow \infty$ môžeme vyjadriť obvod vložky v tvare

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$



Riešené príklady – Kochova vložka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.



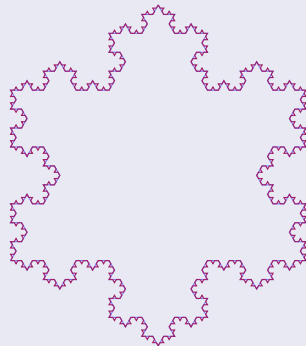
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$ -krát dlhšia.
- Obvod vložky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$ -krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t .
- Po prvom kroku bude obvod vložky $d = \frac{4}{3}d_t$.
- Po n -tom kroku bude obvod vložky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \rightarrow \infty$ môžeme vyjadriť obvod vložky v tvare

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$

[Postupnosť $\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvociantom $\frac{4}{3} > 1$, t. j. platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$.]



Riešené príklady – Kochova vložka

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vložky.



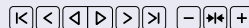
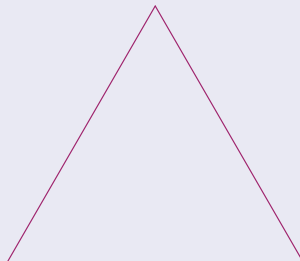
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$ -krát dlhšia.
- Obvod vložky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$ -krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t .
- Po prvom kroku bude obvod vložky $d = \frac{4}{3}d_t$.
- Po n -tom kroku bude obvod vložky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \rightarrow \infty$ môžeme vyjadriť obvod vložky v tvare

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$

[Postupnosť $\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvociantom $\frac{4}{3} > 1$, t. j. platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$.]



Koniec 2. časti

Ďakujem za pozornosť.