

Matematická analýza 1

2026/2027

3. Číselné rady

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

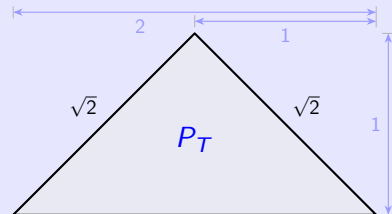
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Základné vlastnosti
- 2 Príklady
- 3 Rady s nezápornými členmi
- 4 Alternujúce rady
- 5 Riešené príklady
- 6 Konštrukcia radu s predpísaným súčtom

Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

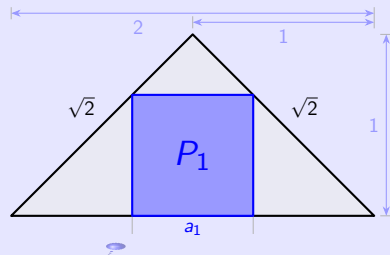


Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Do trojuholníka postupne vložíme:

- Jeden štvorec so stranou $a_1 = \frac{2}{3}$, obsahom $P_1 = a_1^2 = \frac{4}{9}$.

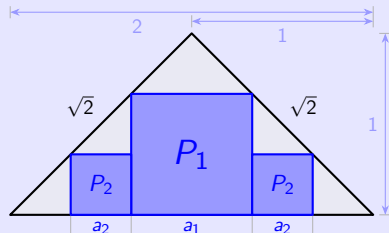


Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Do trojuholníka postupne vložíme:

- Jeden štvorec so stranou $a_1 = \frac{2}{3}$, obsahom $P_1 = a_1^2 = \frac{4}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2}$, obsahom $P_2 = 2a_2^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}$.

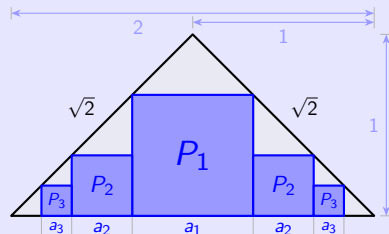


Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Do trojuholníka postupne vložíme:

- Jeden štvorec so stranou $a_1 = \frac{2}{3}$, obsahom $P_1 = a_1^2 = \frac{4}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$, obsahom $P_2 = 2a_2^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^2} = \frac{2}{12}$, obsahom $P_3 = 2a_3^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^2} = \frac{2}{9 \cdot 4}$.

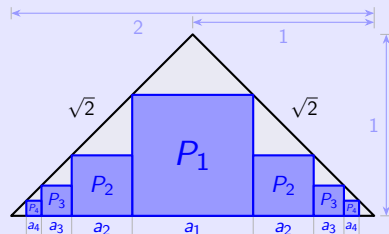


Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Do trojuholníka postupne vložíme:

- Jeden štvorec so stranou $a_1 = \frac{2}{3}$, obsahom $P_1 = a_1^2 = \frac{4}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$, obsahom $P_2 = 2a_2^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^2} = \frac{2}{12}$, obsahom $P_3 = 2a_3^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^2} = \frac{2}{9 \cdot 4}$.
- Dva štvorce so stranami $a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^3} = \frac{2}{24}$, obsahom $P_4 = 2a_4^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^3} = \frac{2}{9 \cdot 4^2}$.

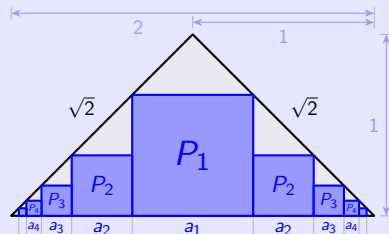


Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Do trojuholníka postupne vložíme:

- Jeden štvorec so stranou $a_1 = \frac{2}{3}$, obsahom $P_1 = a_1^2 = \frac{4}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$, obsahom $P_2 = 2a_2^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^2} = \frac{2}{12}$, obsahom $P_3 = 2a_3^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^2} = \frac{2}{9 \cdot 4}$.
- Dva štvorce so stranami $a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^3} = \frac{2}{24}$, obsahom $P_4 = 2a_4^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^3} = \frac{2}{9 \cdot 4^2}$.
- Dva štvorce so stranami $a_5 = \frac{a_4}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^4} = \frac{2}{48}$, obsahom $P_5 = 2a_5^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^4} = \frac{2}{9 \cdot 4^3}$.

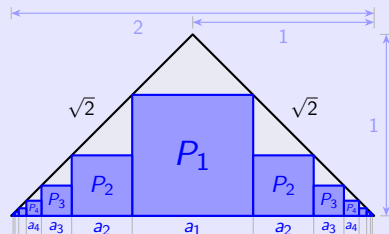


Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Do trojuholníka postupne vložíme:

- Jeden štvorec so stranou $a_1 = \frac{2}{3}$, obsahom $P_1 = a_1^2 = \frac{4}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2}$, obsahom $P_2 = 2a_2^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^2}$, obsahom $P_3 = 2a_3^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^2} = \frac{2}{9 \cdot 4}$.
- Dva štvorce so stranami $a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^3}$, obsahom $P_4 = 2a_4^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^3} = \frac{2}{9 \cdot 4^2}$.
- Dva štvorce so stranami $a_5 = \frac{a_4}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^4}$, obsahom $P_5 = 2a_5^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^4} = \frac{2}{9 \cdot 4^3}$.
- ...
- Dva štvorce so stranami $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^{n-2}}$, obsahom $P_n = 2a_n^2 = \frac{2}{9 \cdot 4^{n-2}}$ pre $n \in \mathbb{N}$.



Základné vlastnosti – 1. Motivačný príklad

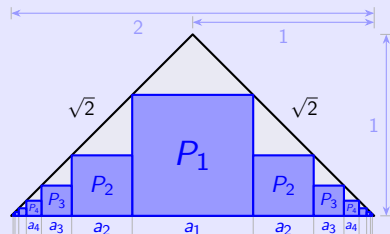
- Uvažujme pravouhlý rovnoramenný trojuholník T
s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}$ a preponou dlhou 2.
- Obsah trojuholníka T je $P_T = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Do trojuholníka postupne vložíme:

- Jeden štvorec so stranou $a_1 = \frac{2}{3}$, obsahom $P_1 = a_1^2 = \frac{4}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2}$, obsahom $P_2 = 2a_2^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}$.
- Dva štvorce so stranami $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^2}$, obsahom $P_3 = 2a_3^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^2} = \frac{2}{9 \cdot 4}$.
- Dva štvorce so stranami $a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^3}$, obsahom $P_4 = 2a_4^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^3} = \frac{2}{9 \cdot 4^2}$.
- Dva štvorce so stranami $a_5 = \frac{a_4}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^4}$, obsahom $P_5 = 2a_5^2 = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4^4} = \frac{2}{9 \cdot 4^3}$.
- ...
- Dva štvorce so stranami $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2^{n-2}}$, obsahom $P_n = 2a_n^2 = \frac{2}{9 \cdot 4^{n-2}}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

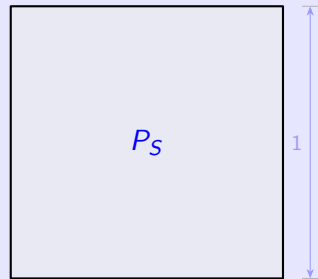
Pre súčet obsahov $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$

týchto štvorcov platí $\bullet 1 = P_T > P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{9 \cdot 4^{n-2}} + \dots$



Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

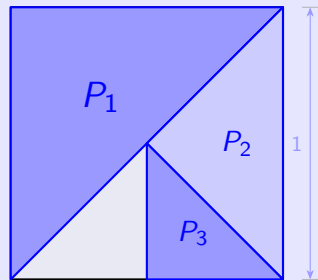


Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnoramenné trojuholníky:

- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.
- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S (t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice), jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).

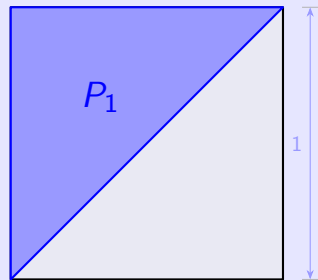


Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnoramenné trojuholníky:

- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.
- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S (t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice), jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

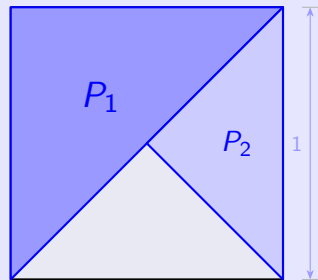
- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$.

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnostranné trojuholníky:

- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.
- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S (t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice), jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

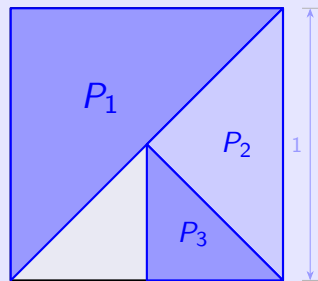
- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$.
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$.

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnostranné trojuholníky:

- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.
- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S (t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice), jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

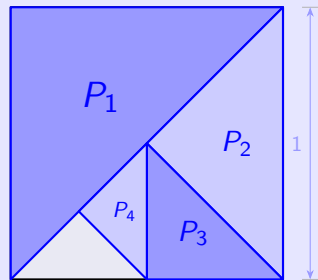
- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$.
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$.
- $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_S}{2^3} = \frac{1}{2^3}$.

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnostranné trojuholníky:

- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.
- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S (t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice), jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$.
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$.
- $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_S}{2^3} = \frac{1}{2^3}$.
- $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{P_S}{2^4} = \frac{1}{2^4}$.

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnostranné trojuholníky:

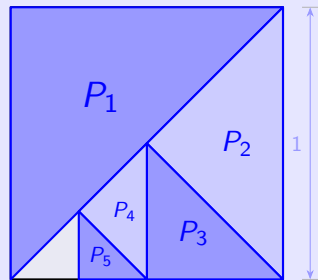
- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S

uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.

- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S

(t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice),

jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

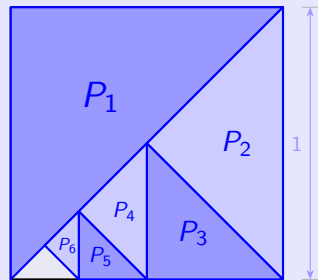
- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$
- $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_S}{2^3} = \frac{1}{2^3}$
- $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{P_S}{2^4} = \frac{1}{2^4}$
- $P_5 = \frac{P_4}{2} = \frac{P_S}{2^5} = \frac{1}{2^5}$

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnostranné trojuholníky:

- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.
- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S (t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice), jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$
- $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_S}{2^3} = \frac{1}{2^3}$
- $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{P_S}{2^4} = \frac{1}{2^4}$
- $P_5 = \frac{P_4}{2} = \frac{P_S}{2^5} = \frac{1}{2^5}$
- $P_6 = \frac{P_5}{2} = \frac{P_S}{2^6} = \frac{1}{2^6}$

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnostranné trojuholníky:

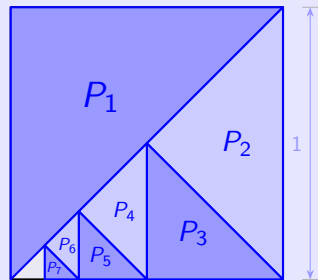
- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S

uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.

- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S

(t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice),

jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$
- $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_S}{2^3} = \frac{1}{2^3}$
- $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{P_S}{2^4} = \frac{1}{2^4}$
- $P_5 = \frac{P_4}{2} = \frac{P_S}{2^5} = \frac{1}{2^5}$
- $P_6 = \frac{P_5}{2} = \frac{P_S}{2^6} = \frac{1}{2^6}$
- $P_7 = \frac{P_6}{2} = \frac{P_S}{2^7} = \frac{1}{2^7}$

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnoramenné trojuholníky:

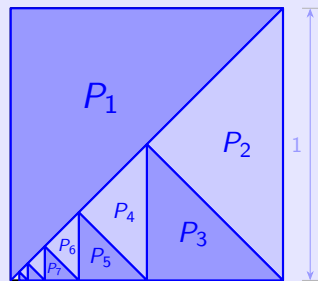
- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S

uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.

- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S

(t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice),

jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$
- $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_S}{2^3} = \frac{1}{2^3}$
- $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{P_S}{2^4} = \frac{1}{2^4}$
- $P_5 = \frac{P_4}{2} = \frac{P_S}{2^5} = \frac{1}{2^5}$
- $P_6 = \frac{P_5}{2} = \frac{P_S}{2^6} = \frac{1}{2^6}$
- $P_7 = \frac{P_6}{2} = \frac{P_S}{2^7} = \frac{1}{2^7}$
- $\dots$
- $P_n = \frac{P_{n-1}}{2} = \frac{P_S}{2^n} = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

Základné vlastnosti – 2. Motivačný príklad

- Uvažujme štvorec S so stranou dlhou 1, jeho obsah je $P_S = 1 \cdot 1 = 1$.

Štvorec S postupne rozdelíme na pravouhlé rovnostranné trojuholníky:

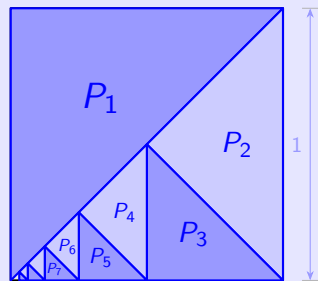
- Prvý trojuholník T_1 vznikne rozdelením štvorca S

uhlopriečkou na polovicu, jeho obsah je $P_1 = \frac{S}{2}$.

- Každý trojuholník T_n , $n \in \mathbb{N}$ vznikne rozdelením zvyšku štvorca S

(t. j. novovzniknutého trojuholníka) na dva rovnaké trojuholníky (polovice),

jeho obsah je $P_n = \frac{P_{n-1}}{2}$ (polovica obsahu trojuholníka T_{n-1}).



Postupne platí:

- $P_1 = \frac{P_S}{2} = \frac{1}{2}$
- $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P_S}{2^2} = \frac{1}{2^2}$
- $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_S}{2^3} = \frac{1}{2^3}$
- $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{P_S}{2^4} = \frac{1}{2^4}$
- $P_5 = \frac{P_4}{2} = \frac{P_S}{2^5} = \frac{1}{2^5}$
- $P_6 = \frac{P_5}{2} = \frac{P_S}{2^6} = \frac{1}{2^6}$
- $P_7 = \frac{P_6}{2} = \frac{P_S}{2^7} = \frac{1}{2^7}$
- $\dots$
- $P_n = \frac{P_{n-1}}{2} = \frac{P_S}{2^n} = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

Pre súčet obsahov $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$

trojuholníkov platí: $\bullet 1 = P_S = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_S}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

Základné vlastnosti – Definícia číselného radu

- Číselné rady *úzko súvisia* s číselnými postupnosťami
a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov.

Základné vlastnosti – Definícia číselného radu

- Číselné rady *úzko súvisia* s číselnými postupnosťami

a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom (nekonečným) číselným radom (stručne radom) nazývame

nekonečný súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$. [Rad je jednoznačne určený postupnosťou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Základné vlastnosti – Definícia číselného radu

- Číselné rady *úzko súvisia* s číselnými postupnosťami

a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom (nekonečným) číselným radom (stručne radom) nazývame

nekonečný súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$. [Rad je jednoznačne určený postupnosťou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

- Pre sčítavanie nekonečného počtu sčítancov neplatia všetky pravidlá platné pre konečné počty sčítancov.

Základné vlastnosti – Definícia číselného radu

- Číselné rady *úzko súvisia* s číselnými postupnosťami
a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom (nekonečným) číselným radom (stručne radom) nazývame

nekonečný súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$. [Rad je jednoznačne určený postupnosťou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

- Pre sčítavanie nekonečného počtu sčítancov neplatia všetky pravidlá platné pre konečné počty sčítancov.

Zátvorky nemôžeme ľubovoľne meniť, pridávať alebo odoberať.

Základné vlastnosti – Definícia číselného radu

- Číselné rady *úzko súvisia* s číselnými postupnosťami

a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom (nekonečným) číselným radom (stručne radom) nazývame

nekonečný súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$. [Rad je jednoznačne určený postupnosťou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

- Pre sčítavanie nekonečného počtu sčítancov neplatia všetky pravidlá platné pre konečné počty sčítancov.

Zátvorky nemôžeme ľubovoľne meniť, pridávať alebo odoberať.

- Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ nemá súčet (osciluje). [Vid' príklad 02-II.]

Základné vlastnosti – Definícia číselného radu

- Číselné rady *úzko súvisia* s číselnými postupnosťami

a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom **(nekonečným) číselným radom** (stručne **radom**) nazývame

nekonečný súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. [Rad je jednoznačne určený postupnosťou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

- Pre sčítavanie nekonečného počtu sčítancov *neplatia* všetky pravidlá *platné* pre konečné počty sčítancov.

Zátvorky *nemôžeme ľubovoľne* **meniť, pridávať** *alebo* **odoberať**.

- Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ nemá súčet (osciluje). [Vid' príklad 02-II.]

- Ak pridáme zátvorky, *dostaneme nové* číselné rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} \bullet (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ \bullet 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \end{cases}$$

Základné vlastnosti – Definícia číselného radu

- Číselné rady *úzko súvisia* s číselnými postupnosťami

a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom **(nekonečným) číselným radom** (stručne **radom**) nazývame

nekonečný súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$. [Rad je jednoznačne určený postupnosťou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

- Pre sčítavanie nekonečného počtu sčítancov *neplatia* všetky pravidlá *platné* pre konečné počty sčítancov.

Zátvorky *nemôžeme ľubovoľne* **meniť, pridávať** alebo **odoberať**.

[Vo všeobecnosti neplatí asociatívny zákon.]

- Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ nemá súčet (osciluje). [Vid' príklad 02-II.]

- Ak pridáme zátvorky, *dostaneme nové* číselné rady *s novými* súčtami:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \stackrel{?}{=} \begin{cases} \bullet (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0, \\ \bullet 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1. \end{cases}$$

[Pridaním, odobraním alebo výmenou zátvoriek sa súčet radu môže zmeniť.]

Základné vlastnosti – Postupnosť čiastočných súčtov

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$.

Základné vlastnosti – Postupnosť čiastočných súčtov

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{s_n = \sum_{k=1}^n a_k} + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ nazývame:

- $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (konečný súčet) n -tým čiastočným súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Základné vlastnosti – Postupnosť čiastočných súčtov

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots}_{r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}.$

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ nazývame:

- $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$ (nekonečný súčet) n -tým zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Základné vlastnosti – Postupnosť čiastočných súčtov

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{s_n = \sum_{k=1}^n a_k} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots}_{r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}$.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ nazývame:

- $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (konečný súčet) n -tým čiastočným súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$ (nekonečný súčet) n -tým zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Základné vlastnosti – Postupnosť čiastočných súčtov

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{s_n = \sum_{k=1}^n a_k} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots}_{r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}$.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ nazývame:

- $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (konečný súčet) n -tým čiastočným súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$ (nekonečný súčet) n -tým zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Postupnosťou čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame

postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

$$[\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots\}].$$

Základné vlastnosti – Postupnosť čiastočných súčtov

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}_{s_n = \sum_{k=1}^n a_k} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots}_{r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}$.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ nazývame:

- $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (konečný súčet) n -tým čiastočným súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$ (nekonečný súčet) n -tým zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Postupnosťou čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame

postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

$$[\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots\}.]$$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n + r_n = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$.

Základné vlastnosti – Konvergencia, divergencia, súčet radu

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má **súčet** $s \in \mathbb{R}^*$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$,

ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, t. j. platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s$.

Základné vlastnosti – Konvergenca, divergencia, súčet radu

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má **súčet** $s \in \mathbb{R}^*$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$,

ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, t. j. platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathbb{R} \\ \text{konečný} \\ \text{súčet} \\ \hline \pm \infty \\ \text{nekonečný} \\ \text{súčet} \\ \hline \nexists \end{array} \right.$$

Základné vlastnosti – Konvergenca, divergencia, súčet radu

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má **súčet** $s \in \mathbb{R}^*$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$,

ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, t. j. platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} s \in \mathbb{R} \\ \text{konečný} \\ \text{súčet} \end{array} & \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje k súčtu } s \\ \text{označenie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s \\ \text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \pm\infty \\ \text{nekonečný} \\ \text{súčet} \end{array} & \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje do } \pm\infty \\ \text{označenie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty \\ \text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \end{array} \\ \hline \nexists & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ osciluje} \end{array} \right.$$

Základné vlastnosti – Konvergenca, divergencia, súčet radu

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má **súčet** $s \in \mathbb{R}^*$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$,

ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, t. j. platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} s \in \mathbb{R} \\ \text{konečný} \\ \text{súčet} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje k súčtu } s \\ \text{označenie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s \\ \text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ \text{označenie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \end{array} \right. \\ \hline \left. \begin{array}{l} \pm \infty \\ \text{nekonečný} \\ \text{súčet} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje do } \pm \infty \\ \text{označenie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm \infty \\ \text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm \infty \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \\ \text{označenie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \nrightarrow \end{array} \right. \\ \hline \left. \begin{array}{l} \nexists \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ osciluje} \end{array} \right\} \left\{ \right.$$

Základné vlastnosti – Rad a jeho postupnosť čiastočných súčtov

Vzťah medzi radom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.

Základné vlastnosti – Rad a jeho postupnosť čiastočných súčtov

Vzťah medzi radom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **vzájomne jednoznačný**.

- Ak je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Základné vlastnosti – Rad a jeho postupnosť čiastočných súčtov

Vzťah medzi radom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **vzájomne jednoznačný**.

• Ak je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\Rightarrow$ • $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pre $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

• $s_1 = a_1$

• $s_2 = a_1 + a_2$

• $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

• $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

• $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Základné vlastnosti – Rad a jeho postupnosť čiastočných súčtov

Vzťah medzi radom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **vzájomne jednoznačný**.

- Ak je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\Rightarrow$ • $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pre $n \in \mathbb{N}$.
- Ak je daná postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N}.$$

- $s_1 = a_1$
- $s_2 = a_1 + a_2$
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

pre $n \in \mathbb{N}$.

Základné vlastnosti – Rad a jeho postupnosť čiastočných súčtov

Vzťah medzi radom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **vzájomne jednoznačný**.

- Ak je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\Rightarrow$ • $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pre $n \in \mathbb{N}$.
- Ak je daná postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1})$, kde (definitoricky) $s_0 = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N}.$$

- | | | |
|--|-------------------|--|
| • $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$. | $\Leftrightarrow$ | • $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$. |
| • $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$. | $\Leftrightarrow$ | • $a_2 = s_2 - s_1$. |
| • $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$. | $\Leftrightarrow$ | • $a_3 = s_3 - s_2$. |
| • $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_3 + a_4$. | $\Leftrightarrow$ | • $a_4 = s_4 - s_3$. |
| • $\dots$ | | • $\dots$ |
| • $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$. | $\Leftrightarrow$ | • $a_n = s_n - s_{n-1}$ pre $n \in \mathbb{N}$. |

Základné vlastnosti – Nutná podmienka konverencie radu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (číselný rad konverguje).

[Nutná podmienka konverencie radu – NP.]

$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

[Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$ (postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 0).]



Základné vlastnosti – Nutná podmienka konverencie radu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (číselný rad konverguje).

[Nutná podmienka konverencie radu – NP.]

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

[Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$ (postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 0).]

Dôkaz.

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = s_n - s_{n-1}$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (rad konverguje), t. j. existuje $s \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$



Základné vlastnosti – Nutná podmienka konverencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \text{(číslný rad konverguje).}$$

[Nutná podmienka konverencie radu – NP.]

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

[Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$ (postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 0).]

Dôkaz.

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = s_n - s_{n-1}$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (rad konverguje), t. j. existuje $s \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Tvrdenie sa nedá obrátiť.

• Zo vzťahu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nemusí vyplývať $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

[Například Harmonický rad.]

Základné vlastnosti – Nutná podmienka konverencie radu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (číselný rad konverguje).

[Nutná podmienka konverencie radu – NP.]

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

[Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$ (postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 0).]

Dôkaz.

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = s_n - s_{n-1}$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (rad konverguje), t. j. existuje $s \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Tvrdenie sa nedá obrátiť.

• Zo vzťahu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nemusí vyplývať $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

[Napríklad Harmonický rad.]

Existuje (nenulová) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ alebo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje.

[Neplatí rovnosť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.]

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$$

[Rad nekonverguje, t. j. diverguje. Diverguje do $\pm\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$) alebo osciluje ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje).]

Základné vlastnosti – Cauchy–Bolzanov princíp konverencie

- O konvergencii alebo divergencii radu, resp. postupnosti
môžeme niekedy rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali súčet radu, resp. limitu postupnosti.
[Kritéria konverencie radov v nasledujúcej časti, resp. Cauchy–Bolzanov princíp konverencie.]

Základné vlastnosti – Cauchy–Bolzanov princíp konverencie

- O konvergencii alebo divergencii radu, resp. postupnosti

môžeme niekedy rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali súčet radu, resp. limitu postupnosti.

[Kritéria konverencie radov v nasledujúcej časti, resp. Cauchy–Bolzanov princíp konverencie.]

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \text{(postupnosť konverguje).}$$

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie postupnosti.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \text{(rad konverguje).}$$

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie radu.]

Základné vlastnosti – Cauchy–Bolzanov princíp konverencie

- O konvergencii alebo divergencii radu, resp. postupnosti
môžeme niekedy rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali súčet radu, resp. limitu postupnosti.
[Kritéria konverencie radov v nasledujúcej časti, resp. Cauchy–Bolzanov princíp konverencie.]

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$ (postupnosť konverguje).

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie postupnosti.]

$\Leftrightarrow$ • Pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (rad konverguje).

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie radu.]

$\Leftrightarrow$ • Pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$

Základné vlastnosti – Cauchy–Bolzanov princíp konverencie

- O konvergencii alebo divergencii radu, resp. postupnosti
môžeme niekedy rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali súčet radu, resp. limitu postupnosti.
[Kritéria konverencie radov v nasledujúcej časti, resp. Cauchy–Bolzanov princíp konverencie.]

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$ (postupnosť konverguje).

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie postupnosti.]

$\Leftrightarrow$ • Pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také,

že pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (rad konverguje).

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie radu.]

$\Leftrightarrow$ • Pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také,

že pre všetky $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

Základné vlastnosti – Cauchy–Bolzanov princíp konverencie

- O konvergencii alebo divergencii radu, resp. postupnosti
môžeme niekedy rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali súčet radu, resp. limitu postupnosti.
[Kritéria konverencie radov v nasledujúcej časti, resp. Cauchy–Bolzanov princíp konverencie.]

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$ (postupnosť konverguje).

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie postupnosti.]

$\Leftrightarrow$ • Pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také,

že pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (rad konverguje).

[Cauchy–Bolzanov princíp konverencie radu.]

$\Leftrightarrow$ • Pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také,

že pre všetky $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

- Ak položíme $m = n + k$, potom platí

$$|s_m - s_n| = |s_{n+k} - s_n|$$

$$= |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)|$$

$$= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Základné vlastnosti – Operácie s radmi

- Súčtom, rozdielom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a súčinom (násobkom) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s číslom $c \in \mathbb{R}$
nazývame rady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$.

Základné vlastnosti – Operácie s radmi

- Súčtom, rozdielom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a súčinom (násobkom) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s číslom $c \in \mathbb{R}$
nazývame rady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \text{ sú rady, pričom } s, t \in \mathbb{R}^* \text{ a } c \in \mathbb{R} \text{ (reálne číslo).}$$

Základné vlastnosti – Operácie s radmi

- Súčtom, rozdielom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a súčinom (násobkom) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s číslom $c \in R$
nazývame rady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \text{ sú rady, pričom } s, t \in R^* \text{ a } c \in R \text{ (reálne číslo).}$$

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú dané výrazy zmysel.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cs.$

[Ak $s, t \in R$ (reálne čísla), t. j. rady majú konečné súčty, potom platia aj opačné tvrdenia, t. j. ekvivalencie.]

Základné vlastnosti – Operácie s radmi

- Súčtom, rozdielom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a súčinom (násobkom) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s číslom $c \in \mathbb{R}$
nazývame rady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \text{ sú rady, pričom } s, t \in \mathbb{R}^* \text{ a } c \in \mathbb{R} \text{ (reálne číslo).}$$

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú dané výrazy zmysel.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cs.$

[Ak $s, t \in \mathbb{R}$ (reálne čísla), t. j. rady majú konečné súčty, potom platia aj opačné tvrdenia, t. j. ekvivalencie.]

Opačné tvrdenia neplatia.

[s a t, resp. $s \pm t$, cs nemusia existovať, ale súčet/rozdiel radov, resp. súčin radu s reálnym číslom existovať môžu.]

- Rady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ oscilujú,
- Rady $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow \infty$,
- Súčin $0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n = 0 \cdot \infty$ neexistuje,

Základné vlastnosti – Operácie s radmi

- **Súčtom**, **rozdielom** radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a **súčinom** (násobkom) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s číslom $c \in R$
nazývame rady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \text{ sú rady, pričom } s, t \in R^* \text{ a } c \in R \text{ (reálne číslo).}$$

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú dané výrazy zmysel.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cs.$

[Ak $s, t \in R$ (reálne čísla), t. j. rady majú konečné súčty, potom platia aj opačné tvrdenia, t. j. ekvivalencie.]

Opačné tvrdenia neplatia.

[s a t, resp. $s \pm t$, cs nemusia existovať, ale súčet/rozdiel radov, resp. súčin radu s reálnym číslom existovať môžu.]

- Rady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ oscilujú, ale súčet $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \rightarrow 0$ (konverguje).
- Rady $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow \infty$, ale rozdiel $\sum_{n=1}^{\infty} [(n+1) - n] = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow 1$ (konverguje).
- Súčin $0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n = 0 \cdot \infty$ neexistuje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} [0 \cdot n] = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \rightarrow 0$ (konverguje).

Základné vlastnosti – Nulové členy radu

- Ak existuje súčet číselného radu (konečný aj nekonečný), potom preň platí asociatívny zákon. [Vid časť 01-Def.]

Základné vlastnosti – Nulové členy radu

- Ak existuje súčet číselného radu (konečný aj nekonečný), potom preň platí asociatívny zákon. [Vid' časť 01-Def.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \in R^* \quad (\text{t. j. číselný rad má súčet}).$$

Základné vlastnosti – Nulové členy radu

- Ak existuje súčet číselného radu (konečný aj nekonečný), potom preň platí asociatívny zákon. [Vid' časť 01-Def.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \in R^* \quad (\text{t. j. číselný rad má súčet}).$$

- Do radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vložíme zátvorky (ľubovoľný aj nekonečne spočítateľný počet). $\Rightarrow$ • Súčet radu sa nezmení.

- Z radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vynecháme nulové body (ľubovoľný počet aj všetky). $\Rightarrow$ • Súčet radu sa nezmení.

- Do radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vložíme nulové body (ľubovoľný aj nekonečne spočítateľný počet). $\Rightarrow$ • Súčet radu sa nezmení.

Základné vlastnosti – Nulové členy radu

- Ak existuje súčet číselného radu (konečný aj nekonečný), potom preň platí asociatívny zákon. [Vid' časť 01-Def.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \in R^* \quad (\text{t. j. číselný rad má súčet}).$$

- Do radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vložíme zátvorky (ľubovoľný aj nekonečne spočítateľný počet). $\Rightarrow$ • Súčet radu sa nezmení.

Uvažujme rastúcu postupnosť indexov $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ a zátvorky vložme medzi členy a_{k_n} , t. j. $(a_1 + \cdots + a_{k_1}), (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}), \dots, (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}), \dots$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_1}}_{c_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{c_2} + \cdots + \underbrace{a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}}_{c_n} + \cdots \\ &= \underbrace{(a_1 + \cdots + a_{k_1})}_{c_1} + \underbrace{(a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2})}_{c_2} + \cdots + \underbrace{(a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n})}_{c_n} + \cdots \\ &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = s. \end{aligned}$$

- Z radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vynecháme nulové body (ľubovoľný počet aj všetky). $\Rightarrow$ • Súčet radu sa nezmení.

- Do radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vložíme nulové body (ľubovoľný aj nekonečne spočítateľný počet). $\Rightarrow$ • Súčet radu sa nezmení.

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_1 = a_1 = 0$.
- $s_2 = a_1 + a_2 = 0 + 0 = 0$.
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 0 + 0 = 0$.
- ...
- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= a_1 = 0. & \bullet s_2 &= a_1 + a_2 = 0 + 0 = 0. & \bullet s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 0 + 0 = 0. \\ & & \bullet \dots & \bullet s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= a_1 = 0. & \bullet s_2 &= a_1 + a_2 = 0 + 0 = 0. & \bullet s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 0 + 0 = 0. \\ & & \bullet \dots & \bullet s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= a_1 = 1. & \bullet s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2. & \bullet s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3. \\ & & \bullet \dots & \bullet s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n. \end{aligned}$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= a_1 = 0. & \bullet s_2 &= a_1 + a_2 = 0 + 0 = 0. & \bullet s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 0 + 0 = 0. \\ & & \bullet \dots & \bullet s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= a_1 = 1. & \bullet s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2. & \bullet s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3. \\ & & \bullet \dots & \bullet s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_1 = a_1 = -1$.
- $s_2 = a_1 + a_2 = -1 - 1 = -2$.
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -1 - 1 - 1 = -3$.
- ...
- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = -1 - 1 - \cdots - 1 = -n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) = -\infty$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet s_1 = a_1 = -1. \quad \bullet s_2 = a_1 + a_2 = -1 - 1 = -2.$$

$$\bullet s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -1 - 1 - 1 = -3.$$

$$\bullet \dots \quad \bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = -1 - 1 - \dots - 1 = -n.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) = -\infty$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_1 = a_1 = -1$. • $s_2 = a_1 + a_2 = -1 - 1 = -2$.
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -1 - 1 - 1 = -3$.
- ... • $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = -1 - 1 - \dots - 1 = -n$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_1 = a_1 = -1$. • $s_2 = s_1 + 1 = 0$. • $s_3 = s_2 - 1 = -1$. • $s_4 = s_3 + 1 = 0$.
- ... • $s_n = s_{n-1} + 1 = 0$ pre párne n . • $s_n = s_{n-1} - 1 = -1$ pre nepárne n .

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) = -\infty$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_1 = a_1 = -1$. • $s_2 = a_1 + a_2 = -1 - 1 = -2$.
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -1 - 1 - 1 = -3$.
- ... • $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = -1 - 1 - \dots - 1 = -n$.

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ súčet neexistuje (rad osciluje).}$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_1 = a_1 = -1$. • $s_2 = s_1 + 1 = 0$. • $s_3 = s_2 - 1 = -1$. • $s_4 = s_3 + 1 = 0$.
- ... • $s_n = s_{n-1} + 1 = 0$ pre párne n . • $s_n = s_{n-1} - 1 = -1$ pre nepárne n .

$$\Rightarrow \bullet \{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots\} \text{ má dva hromadné body } 0 \text{ a } -1. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ neexistuje.}$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= a_1 = 1 - \frac{1}{2}. & [s_1 &= 1 - \frac{1}{2}.] \\ \bullet s_2 &= a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}. & [s_2 = s_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}.] \\ \bullet s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}. & [s_3 = s_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}.] \\ \bullet & \dots \\ \bullet s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ pre } n \in \mathbb{N}. \\ & [s_n = s_{n-1} + a_n = 1 - \frac{1}{n-1} + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ pre } n \in \mathbb{N}.] \end{aligned}$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_1 &= a_1 = 1 - \frac{1}{2}. & [s_1 &= 1 - \frac{1}{2}.] \\ \bullet s_2 &= a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}. & [s_2 = s_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}.] \\ \bullet s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}. & [s_3 = s_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}.] \\ \bullet & \dots \\ \bullet s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ pre } n \in \mathbb{N}. \\ & [s_n = s_{n-1} + a_n = 1 - \frac{1}{n-1} + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ pre } n \in \mathbb{N}.] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1.$$

Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

[Harmonický rad.]

Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu. 



Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu.

Označme $s_0 = 1$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet \quad s_2 = s_1 = 1 = s_0 \qquad \geq s_0 + 0 \cdot \frac{1}{2} \qquad = 1 + \frac{0}{2}.$$

Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu.

Označme $s_0 = 1$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad s_{2^0} &= s_1 = 1 = s_0 && \geq s_0 + 0 \cdot \frac{1}{2} && = 1 + \frac{0}{2}. \\ \bullet \quad s_{2^1} &= s_2 = s_1 + \frac{1}{2} && \geq s_1 + 1 \cdot \frac{1}{2} && \geq \underbrace{1 + \frac{0}{2}}_{s_1 \geq 1 + \frac{0}{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu.

Označme $s_0 = 1$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad s_{2^0} &= s_1 = 1 = s_0 && \geq s_0 + 0 \cdot \frac{1}{2} && = 1 + \frac{0}{2}. \\
 \bullet \quad s_{2^1} &= s_2 = s_1 + \frac{1}{2} && \geq s_1 + 1 \cdot \frac{1}{2} && \geq 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}. \\
 \bullet \quad s_{2^2} &= s_4 = s_2 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} && \geq s_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} && \geq \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{s_2 \geq 1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}.
 \end{aligned}$$

Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu.

Označme $s_0 = 1$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad s_2^0 &= s_1 = 1 = s_0 && \geq s_0 + 0 \cdot \frac{1}{2} && = 1 + \frac{0}{2}. \\
 \bullet \quad s_2^1 &= s_2 = s_1 + \frac{1}{2} && \geq s_1 + 1 \cdot \frac{1}{2} && \geq 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}. \\
 \bullet \quad s_2^2 &= s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} && \geq s_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} && \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}. \\
 \bullet \quad s_2^3 &= s_8 = s_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} && \geq s_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} && \geq \underbrace{1 + \frac{2}{2}}_{s_4 \geq 1 + \frac{2}{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu.

Označme $s_0 = 1$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad s_{2^0} &= s_1 = 1 = s_0 && \geq s_0 + 0 \cdot \frac{1}{2} && = 1 + \frac{0}{2}. \\
 \bullet \quad s_{2^1} &= s_2 = s_1 + \frac{1}{2} && \geq s_1 + 1 \cdot \frac{1}{2} && \geq 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}. \\
 \bullet \quad s_{2^2} &= s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} && \geq s_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} && \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}. \\
 \bullet \quad s_{2^3} &= s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} && \geq s_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} && \geq 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}. \\
 &&& \dots && \\
 \bullet \quad s_{2^n} &= s_{2^{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\geq \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}} && \geq s_{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^n} && \geq \underbrace{1 + \frac{n-1}{2}}_{s_{2^{n-1}} \geq 1 + \frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.
 \end{aligned}$$



Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu.

Označme $s_0 = 1$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_{2^0} &= s_1 = 1 = s_0 && \geq s_0 + 0 \cdot \frac{1}{2} && = 1 + \frac{0}{2}. \\ \bullet s_{2^1} &= s_2 = s_1 + \frac{1}{2} && \geq s_1 + 1 \cdot \frac{1}{2} && \geq 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}. \\ \bullet s_{2^2} &= s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} && \geq s_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} && \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}. \\ \bullet s_{2^3} &= s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} && \geq s_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} && \geq 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}. \\ &&& \dots && \\ \bullet s_{2^n} &= s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} && \geq s_{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^n} && \geq 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Pre podpostupnosť $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{n}{2}) = \infty$.

Príklady – Harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$$

[Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu. 

Označme $s_0 = 1$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet s_{2^0} &= s_1 = 1 = s_0 && \geq s_0 + 0 \cdot \frac{1}{2} && = 1 + \frac{0}{2}. \\ \bullet s_{2^1} &= s_2 = s_1 + \frac{1}{2} && \geq s_1 + 1 \cdot \frac{1}{2} && \geq 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}. \\ \bullet s_{2^2} &= s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} && \geq s_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} && \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}. \\ \bullet s_{2^3} &= s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} && \geq s_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} && \geq 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}. \\ &&& \dots && \\ \bullet s_{2^n} &= s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} && \geq s_{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^n} && \geq 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Pre podpostupnosť $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{n}{2}) = \infty$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Príklady – Geometrický rad

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \quad \text{pre } q \in R.$$

[Geometrický rad.]

Príklady – Geometrický rad

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \quad \text{pre } q \in R.$$

[Geometrický rad.]

Pre všetky $q \in R$, $q \neq 1$, $n \in N$ platí $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q(\frac{1}{q}-q^n)}{1-q}$.



Príklady – Geometrický rad

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \quad \text{pre } q \in \mathbb{R}.$$

[Geometrický rad.]

Pre všetky $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q(\frac{1}{q}-q^n)}{1-q}$.

• $q > 1$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty. \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^n) = \infty.$

$\Rightarrow$ • $S = \infty$ pre $q > 1$.

Príklady – Geometrický rad

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \geq 1, \end{cases} \quad [\text{Geometrický rad.}]$$

Pre všetky $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q(\frac{1}{q}-q^n)}{1-q}$.

• $q > 1$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty. \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^n) = \infty.$

• $q = 1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \dots + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$

$\Rightarrow \bullet S = \infty$ pre $q \geq 1$.

Príklady – Geometrický rad

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q} & \text{pre } q \in (-1; 1), \end{cases} \quad [\text{Geometrický rad.}]$$

Pre všetky $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q(\frac{1}{q} - q^n)}{1-q}$.

• $q > 1$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty. \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^n) = \infty.$

• $q = 1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \dots + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$

• $q \in (-1; 1)$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0. \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$



$$\Rightarrow \bullet S = \infty \text{ pre } q \geq 1. \bullet S = \frac{1}{1-q} \text{ pre } q \in (-1; 1).$$

Príklady – Geometrický rad

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q} & \text{pre } q \in (-1; 1), \end{cases} \quad [\text{Geometrický rad.}]$$

Pre všetky $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q(\frac{1}{q} - q^n)}{1-q}$.

- $q > 1$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty. \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^n) = \infty.$

- $q = 1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \dots + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$

- $q \in (-1; 1)$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0. \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$

- $q = -1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ osciluje, pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1+1}{1+1} = 1 & \text{pre } n \text{ nepárne,} \\ \frac{1-1}{1+1} = 0 & \text{pre } n \text{ párne.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \bullet S = \infty \text{ pre } q \geq 1. \quad \bullet S = \frac{1}{1-q} \text{ pre } q \in (-1; 1). \quad \bullet S \text{ osciluje pre } q = -1.$$

Príklady – Geometrický rad

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q} & \text{pre } q \in (-1; 1), \\ \text{súčet } \nexists & \text{pre } q \leq -1. \end{cases} \quad [\text{Geometrický rad.}]$$

Pre všetky $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q(\frac{1}{q} - q^n)}{1-q}$.

• $q > 1$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^n) = \infty$.

• $q = 1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \dots + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

• $q \in (-1; 1)$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

• $q = -1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ osciluje, pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1+1}{1+1} = 1 & \text{pre } n \text{ nepárne,} \\ \frac{1-1}{1+1} = 0 & \text{pre } n \text{ párne.} \end{cases}$

• $q < -1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ osciluje, pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(\frac{1}{q} - q^n)}{1-q} = \begin{cases} \frac{q(\frac{1}{q} + \infty)}{1-q} = \infty & \text{pre } n \text{ nepárne,} \\ \frac{q(\frac{1}{q} - \infty)}{1-q} = -\infty & \text{pre } n \text{ párne.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ • $S = \infty$ pre $q \geq 1$. • $S = \frac{1}{1-q}$ pre $q \in (-1; 1)$. • S osciluje pre $q \leq -1$.

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ap^n + bq^n}{p^n q^n}$$

pre $a, b \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q > 1$.

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ap^n + bq^n}{p^n q^n}$$

pre $a, b \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q > 1$.

$$\begin{aligned} \bullet &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ap^n}{p^n q^n} + \frac{bq^n}{p^n q^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{q^n} + \frac{b}{p^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{q^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{p^n} \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n + b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \end{aligned}$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ap^n + bq^n}{p^n q^n}$$

pre $a, b \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q > 1$.

$$\begin{aligned} \bullet &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ap^n}{p^n q^n} + \frac{bq^n}{p^n q^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{q^n} + \frac{b}{p^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{q^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{p^n} \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n + b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \left[\begin{array}{l} \text{Konvergentné geometrické rady} \\ \text{s kvocientami v intervale } (0; 1). \end{array} \right] \end{aligned}$$

$p > 1$ a $q > 1$, t. j. $1 < p < \infty$ a $1 < q < \infty$. $\Rightarrow 0 < \frac{1}{p} < 1$ a $0 < \frac{1}{q} < 1$, t. j. $\frac{1}{p} \in (0; 1)$ a $\frac{1}{q} \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ Geometrické rady konvergujú.

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{q-1}{q}} = \frac{q}{q-1} \cdot \bullet \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1}.$$

Príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ap^n + bq^n}{p^n q^n} = \frac{a}{q-1} + \frac{b}{p-1} \quad \text{pre } a, b \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q > 1.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ap^n}{p^n q^n} + \frac{bq^n}{p^n q^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{q^n} + \frac{b}{p^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{q^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{p^n} \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n + b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \left[\begin{array}{l} \text{Konvergentné geometrické rady} \\ \text{s kvocientami v intervale } (0; 1). \end{array} \right] = \frac{a}{q-1} + \frac{b}{p-1}. \end{aligned}$$

$p > 1$ a $q > 1$, t. j. $1 < p < \infty$ a $1 < q < \infty$. $\Rightarrow 0 < \frac{1}{p} < 1$ a $0 < \frac{1}{q} < 1$, t. j. $\frac{1}{p} \in (0; 1)$ a $\frac{1}{q} \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ Geometrické rady konvergujú.

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{q-1}{q}} = \frac{q}{q-1}. \bullet \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1}.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n = \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \right)^3 + \dots = \frac{1}{q} \cdot \left[1 + \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{q} \cdot \frac{q}{q-1} = \frac{1}{q-1},$$

$$\begin{aligned} \text{resp. } \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n &= \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \right)^3 + \dots = -1 + \left[1 + \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \right)^3 + \dots \right] \\ &= -1 + \frac{q}{q-1} = \frac{-q}{q-1} + \frac{q-1}{q-1} = \frac{1}{q-1}. \end{aligned}$$

Analogicky dostaneme:

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p} \right)^2 + \left(\frac{1}{p} \right)^3 + \dots = \frac{1}{p-1}.$$

Rady s nezápornými členmi – Konečná zmena členov (okpč)

- Každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ (nezáporné členy), má (konečný alebo nekonečný) súčet.



Rady s nezápornými členmi – Konečná zmena členov (okpč)

- Každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ (nezáporné členy), má (konečný alebo nekonečný) súčet.

Postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a má limitu (konverguje alebo diverguje do ∞).

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}_0^+$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow s$ ($s \geq 0$).
- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Konečná zmena členov (okpč)

- Každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ (nezáporné členy), má (konečný alebo nekonečný) súčet.

Postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a má limitu (konverguje alebo diverguje do ∞).

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in R_0^+$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow s$ ($s \geq 0$).
- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti také, že pre všetky $n \in N$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

$\Rightarrow$ • Oba nekonečné súčty existujú a platí $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Konečná zmena členov (okpč)

- Každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ (nezáporné členy), má (konečný alebo nekonečný) súčet.

Postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a má limitu (konverguje alebo diverguje do ∞).

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}_0^+$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow s$ ($s \geq 0$).
- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Oba nekonečné súčty existujú a platí } 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty.$$

Ak z radu s nezápornými členmi, t. j. kde $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$:

- Vylúčime všetky nulové členy radu. $\Rightarrow$ • Súčet nového radu sa nezmení.

Rady s nezápornými členmi – Konečná zmena členov (okpč)

- Každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ (nezáporné členy), má (konečný alebo nekonečný) súčet.

Postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a má limitu (konverguje alebo diverguje do ∞).

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in R_0^+$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow s$ ($s \geq 0$).
- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená zhora. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti také, že pre všetky $n \in N$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Oba nekonečné súčty existujú a platí } 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty.$$

Ak z radu s nezápornými členmi, t. j. kde $a_n \geq 0, n \in N$:

- Vylúčime všetky nulové členy radu. $\Rightarrow$ • Súčet nového radu sa nezmení.
- Zmeníme (pridáme, vylúčime, zmeníme poradie ap.) konečný počet členov. [Hovoríme „okrem konečného počtu“, ozn. (okpč).]
 - $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ tak, že pre všetky $n \in N, n \geq n_0$ platia pôvodné vlastnosti.
 - $\Rightarrow$ • Konvergenca, resp. divergencia nového radu sa nezmenia, súčet sa môže zmeniť.
 - $\Rightarrow$ • Kritéria pre vyšetovanie konvergenzie/divergencie ostávajú v platnosti aj pre nový rad.

Rady s nezápornými členmi – Porovnávacie kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

[Porovnávacie kritérium.]

Potom platí: • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow . \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$

[Ak rad s väčším súčtom konverguje.
 $\Rightarrow$ Aj rad s menším súčtom konverguje.]

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty . \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty .$

[Ak rad s menším súčtom diverguje (do nekonečna).
 $\Rightarrow$ Aj rad s väčším súčtom diverguje (do nekonečna).]

Rady s nezápornými členmi – Porovnávacie kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

[Porovnávacie kritérium.]

Potom platí: $\bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$

[Ak rad s väčším súčtom konverguje.
 $\Rightarrow$ Aj rad s menším súčtom konverguje.]

$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

[Ak rad s menším súčtom diverguje (do nekonečna).
 $\Rightarrow$ Aj rad s väčším súčtom diverguje (do nekonečna).]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $0 < a_n \leq b_n$,

[Porovnávacie kritérium – limitný tvar.]

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, pričom $c \in (0; \infty)$, t. j. $c \neq 0$, $c \neq \infty$.

$\Rightarrow \bullet$ Rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ súčasne konvergujú alebo divergujú (do nekonečna).

Rady s nezápornými členmi – Porovnávacie kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

[Porovnávacie kritérium.]

Potom platí: $\bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow . \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$

[Ak rad s väčším súčtom konverguje.
 $\Rightarrow$ Aj rad s menším súčtom konverguje.]

$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

[Ak rad s menším súčtom diverguje (do nekonečna).
 $\Rightarrow$ Aj rad s väčším súčtom diverguje (do nekonečna).]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $0 < a_n \leq b_n$,

[Porovnávacie kritérium – limitný tvar.]

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, pričom $c \in (0; \infty)$, t. j. $c \neq 0$, $c \neq \infty$.

$\Rightarrow \bullet$ Rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ súčasne konvergujú alebo divergujú (do nekonečna).

$\bullet$ Pozor na podmienku $0 < a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Vždy ju musíme overiť (aj pri limitnom tvare).

Rady s nezápornými členmi – Porovnávacie kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

[Porovnávacie kritérium.]

Potom platí: $\bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow . \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$

[Ak rad s väčším súčtom konverguje.
 $\Rightarrow$ Aj rad s menším súčtom konverguje.]

$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

[Ak rad s menším súčtom diverguje (do nekonečna).
 $\Rightarrow$ Aj rad s väčším súčtom diverguje (do nekonečna).]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $0 < a_n \leq b_n$,

[Porovnávacie kritérium – limitný tvar.]

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, pričom $c \in (0; \infty)$, t. j. $c \neq 0, c \neq \infty$.

$\Rightarrow \bullet$ Rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ súčasne konvergujú alebo divergujú (do nekonečna).

$\bullet$ Pozor na podmienku $0 < a_n \leq b_n, n \in \mathbb{N}$. Vždy ju musíme overiť (aj pri limitnom tvare).

$\bullet$ Ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, c \in (0; \infty)$. $\Rightarrow \bullet$ Existuje aj $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c}$, pričom $\frac{1}{c} \in (0; \infty)$.

$\Rightarrow \bullet$ Nezáleží na tom, či vyšetrujeme $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ alebo vyšetrujeme $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ pomocí řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

[Vid' Harmonický rad.]

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pomocí řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 1$.

[Vid' příklad 02-III.]

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ pomocí radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

[Vid' Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ platí:

$$\bullet 0 < \sqrt{n} < n, \text{ t. j. } 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty.$$

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pomocí radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 1$.

[Vid' příklad 02-III.]

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřte konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ pomocí řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

[Vid' Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ platí:

$$\bullet 0 < \sqrt{n} < n, \text{ t. j. } 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty.$$

Limitný tvar porovnávacieho kritéria nemôžeme použiť, pretože:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0. \quad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Vyšetřte konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pomocí řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 1$.

[Vid' příklad 02-III.]

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetrite konvergencií radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ pomocou radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

[Vid' Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ platí:

$$\bullet 0 < \sqrt{n} < n, \text{ t. j. } 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty.$$

Limitný tvar porovnávacieho kritéria nemôžeme použiť, pretože:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0. \quad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Vyšetrite konvergencií radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pomocou radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 1$.

[Vid' príklad 02-III.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: $\bullet 0 < n^2 < n^2 + n = n(n+1), \text{ t. j. } 0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ pomocou radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

[Vid' Harmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ platí:

$$\bullet 0 < \sqrt{n} < n, \text{ t. j. } 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty.$$

Limitný tvar porovnávacieho kritéria nemôžeme použiť, pretože:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0. \quad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pomocou radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 1$.

[Vid' príklad 02-III.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: $\bullet 0 < n^2 < n^2 + n = n(n+1), \text{ t. j. } 0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$

Konvergentný rad má menší súčet. Musíme použiť limitný tvar porovnávacieho kritéria.

$$\text{Platí: } \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ (} 1 \neq 0, 1 \neq \infty \text{)}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow.$$

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2}$

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n}$



Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2}$

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x$.
 - Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.
- $\Rightarrow$ Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$.

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n}$



Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2} \longrightarrow$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x$.
 - Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.
- $$\left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty}} \right\} \Rightarrow \text{Pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } 0 < \sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Porovnávacie kritérium.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2} \longrightarrow.$$

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n}$



Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2} \longrightarrow$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x$.
 - Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.
- $$\left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2}} \right\} \Rightarrow \text{Pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } 0 < \sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Porovnávacie kritérium.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2} \longrightarrow.$$

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n}$

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x$.
 - Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.
- $$\left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n}} \right\} \Rightarrow \text{Pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } 0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$



Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2} \longrightarrow$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x$.
 - Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.
- $$\left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2}} \right\} \Rightarrow \text{Pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } 0 < \sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Porovnávacie kritérium.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n^2} \longrightarrow.$$

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n} \longrightarrow \infty$.

- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x$.
 - Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.
- $$\left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n}} \right\} \Rightarrow \text{Pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } 0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Porovnávacie kritérium (limitný tvar).

[Vid' kapitola 6. limity: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.]

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ (} 1 \neq 0, 1 \neq \infty \text{)}, \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n} \longrightarrow \infty.$$

Rady s nezápornými členmi – D'Alembertovo kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$.

[D'Alembertovo (podielové) kritérium. – Ratio test.]

- Ak existuje $q \in (0; 1)$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – D'Alembertovo kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$.

[D'Alembertovo (podielové) kritérium. – Ratio test.]

- Ak existuje $q \in (0; 1)$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$,

[D'Alembertovo (podielové) kritérium – limitný tvar.]

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, pričom $p \in \mathbb{R}^*$, $p \geq 0$.

Potom platí: • $p < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$.

• $p = 1$. $\Rightarrow$ • Nevieme rozhodnúť o konvergencii, resp. divergencii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [Rad môže konvergovať i divergovať.]

• $p > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – D'Alembertovo kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$.

[D'Alembertovo (podielové) kritérium. – Ratio test.]

- Ak existuje $q \in (0; 1)$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$,

[D'Alembertovo (podielové) kritérium – limitný tvar.]

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, pričom $p \in \mathbb{R}^*$, $p \geq 0$.

- Potom platí:
- $p < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.
 - $p = 1$. $\Rightarrow$ • Nevieme rozhodnúť o konvergencii, resp. divergencii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [Rad môže konvergovať i divergovať.]
 - $p > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

$$\bullet \quad p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1, \text{ ale } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

$$\bullet \quad p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{ ale } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

Rady s nezápornými členmi – Cauchyho kritérium

Pre všetky $n \in N$ (okpč) platí $a_n \geq 0$.

[Cauchyho (odmocninové) kritérium. – Root test.]

- Ak existuje $q \in (0; 1)$ tak, že pre všetky $n \in N$ (okpč) platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- Ak pre všetky $n \in N$ (okpč) platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Cauchyho kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n \geq 0$.

[Cauchyho (odmocninové) kritérium. – Root test.]

- Ak existuje $q \in (0; 1)$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n \geq 0$,

[Cauchyho (odmocninové) kritérium – limitný tvar.]

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, pričom $p \in \mathbb{R}^*$, $p \geq 0$.

Potom platí: • $p < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.

• $p = 1$. $\Rightarrow$ • Nevieme rozhodnúť o konvergencii, resp. divergencii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [Rad môže konvergovať i divergovať.]

• $p > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Cauchyho kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n \geq 0$.

[Cauchyho (odmocninové) kritérium. – Root test.]

- Ak existuje $q \in (0; 1)$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n \geq 0$,

[Cauchyho (odmocninové) kritérium – limitný tvar.]

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, pričom $p \in \mathbb{R}^*$, $p \geq 0$.

Potom platí: • $p < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.

• $p = 1$. $\Rightarrow$ • Nevieme rozhodnúť o konvergencii, resp. divergencii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [Rad môže konvergovať i divergovať.]

• $p > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

• $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$.

• $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.



Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^0}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^1}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{6^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^k}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{6^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$



Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^0}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^1}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{6^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^k}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{6^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$

D'Alembertovo (podielové) kritérium.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} > 0$, $a_{2k} > 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$.]

$$\left. \begin{aligned} \bullet n = 2k. &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 6^k}}{\frac{1}{6^k}} = \frac{6^k}{2 \cdot 6^k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1. \\ \bullet n = 2k + 1. &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{\frac{1}{6^{k+1}}}{\frac{1}{2 \cdot 6^k}} = \frac{2 \cdot 6^k}{6 \cdot 6^k} = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} < 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$$

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^0}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^1}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{6^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^k}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{6^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$

D'Alembertovo (podielové) kritérium.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} > 0$, $a_{2k} > 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$.]

$$\left. \begin{aligned} \bullet n = 2k. &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 6^k}}{\frac{1}{6^k}} = \frac{6^k}{2 \cdot 6^k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1. \\ \bullet n = 2k + 1. &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{\frac{1}{6^{k+1}}}{\frac{1}{2 \cdot 6^k}} = \frac{2 \cdot 6^k}{6 \cdot 6^k} = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} < 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$$

Cauchyho (odmocninové) kritérium – limitný tvar.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} \geq 0$, $a_{2k} \geq 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$.]

$$\left. \begin{aligned} \bullet n = 2k. &\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[2k]{a_{2k}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{6^k}} = \frac{1}{6^{\frac{k}{2k}}} = \frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \\ \bullet n = 2k + 1. &\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2 \cdot 6^k}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2} \cdot \sqrt[2k+1]{6^k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2} \cdot 6^{\frac{k}{2k+1}}} = \left[\frac{\sqrt[2k+1]{2} \rightarrow 1}{6^{\frac{k}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2}}} \right] \longrightarrow \frac{1}{1 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ pre } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$$

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřite konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^0}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^1}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{6^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^{k-1}}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{6^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 6^k}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{6^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$

D'Alembertovo (podielové) kritérium.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} > 0$, $a_{2k} > 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$.]

$$\left. \begin{aligned} \bullet n = 2k. &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 6^k}}{\frac{1}{6^k}} = \frac{6^k}{2 \cdot 6^k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1. \\ \bullet n = 2k + 1. &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{\frac{1}{6^{k+1}}}{\frac{1}{2 \cdot 6^k}} = \frac{2 \cdot 6^k}{6 \cdot 6^k} = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} < 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow.$$

Cauchyho (odmocninové) kritérium – limitný tvar.

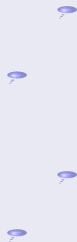
[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} \geq 0$, $a_{2k} \geq 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$.]

$$\left. \begin{aligned} \bullet n = 2k. &\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[2k]{a_{2k}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{6^k}} = \frac{1}{6^{\frac{k}{2k}}} = \frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \\ \bullet n = 2k + 1. &\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2 \cdot 6^k}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2} \cdot \sqrt[2k+1]{6^k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2} \cdot 6^{\frac{k}{2k+1}}} = \left[\frac{\sqrt[2k+1]{2} \rightarrow 1}{6^{\frac{k}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2}}} \right] \rightarrow \frac{1}{1 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ pre } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow.$$

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřete konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$, $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.



Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřete konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$, $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2^1}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2^2}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{3^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{3^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$



Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřite konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$, $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2^1}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2^2}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{3^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{3^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$

D'Alembertovo (podielové) kritérium.

$$\bullet n = 2k - 1. \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{2^k}{3^k} < 1.$$

$$\bullet n = 2k. \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \frac{3^k}{2^{k+1}} = \frac{3^k}{2 \cdot 2^k} > 1 \text{ pre } k > 1.$$

} Kritérium nemožno použiť.

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřete konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$, $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2^1}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2^2}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{3^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{3^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$

D'Alembertovo (podielové) kritérium.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} > 0$, $a_{2k} > 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$.]

$$\bullet n = 2k - 1. \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{2^k}{3^k} < 1.$$

$$\bullet n = 2k. \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \frac{3^k}{2^{k+1}} = \frac{3^k}{2 \cdot 2^k} > 1 \text{ pre } k > 1.$$

} Kritérium nemožno použiť.

Cauchyho (odmocninové) kritérium.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} \geq 0$, $a_{2k} \geq 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$.]

$$\bullet n = 2k - 1. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = {}^{2k-1}\sqrt{a_{2k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}\sqrt[2k-1]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2k-1}}} \leq \frac{1}{2^{\frac{k}{2k}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

$$\bullet n = 2k. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = {}^{2k}\sqrt{a_{2k}} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2k}}\sqrt[2k]{3}} = \frac{1}{3^{\frac{k}{2k}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow.$$

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Vyšetřete konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$, $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\frac{1}{2^1}}_{a_{2 \cdot 1 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^1}}_{a_{2 \cdot 1}} + \underbrace{\frac{1}{2^2}}_{a_{2 \cdot 2 - 1}} + \underbrace{\frac{1}{3^2}}_{a_{2 \cdot 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{a_{2k-1}} + \underbrace{\frac{1}{3^k}}_{a_{2k}} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{a_{2k+1}} + \underbrace{\frac{1}{3^{k+1}}}_{a_{2k+2}} + \cdots$$

D'Alembertovo (podielové) kritérium.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} > 0$, $a_{2k} > 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$.]

$$\bullet n = 2k - 1. \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{2^k}{3^k} < 1.$$

$$\bullet n = 2k. \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \frac{3^k}{2^{k+1}} = \frac{3^k}{2 \cdot 2^k} > 1 \text{ pre } k > 1.$$

} Kritérium nemožno použiť.

Cauchyho (odmocninové) kritérium.

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} \geq 0$, $a_{2k} \geq 0$, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$.]

$$\bullet n = 2k - 1. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = {}^{2k-1}\sqrt{a_{2k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}\sqrt[2k-1]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2k-1}}} \leq \frac{1}{2^{\frac{k}{2k}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

$$\bullet n = 2k. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = {}^{2k}\sqrt{a_{2k}} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2k}}\sqrt[2k]{3}} = \frac{1}{3^{\frac{k}{2k}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow.$$

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřte konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Nech $a > 0$. Vyšetřte konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{n^n}{n!} > 0$.

Nech $a > 0$. Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty$.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{n^n}{n!} > 0$.

Limitný tvar D'Alembertovho (podielového) kritéria.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nech $a > 0$. Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty$.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{n^n}{n!} > 0$.

Limitný tvar D'Alembertovho (podielového) kritéria.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty.$$

Nech $a > 0$. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{n^n}{n!} > 0$.

Rady s nezápornými členmi – Příklady

Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty$.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{n^n}{n!} > 0$.

Limitný tvar D'Alembertovho (podielového) kritéria.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nech $a > 0$. Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \rightarrow$.

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{n^n}{n!} > 0$.

Limitné tvary D'Alembertovho (podielového) kritéria a Cauchyho (odmocninového) kritéria.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \rightarrow.$$

Rady s nezápornými členmi – Raabeho kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$.

[Raabeho kritérium.]

- Ak existuje $q > 1$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \gamma$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Raabeho kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$.

[Raabeho kritérium.]

- Ak existuje $q > 1$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$. $\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$. $\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, pretože pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right] = n + 1 - n = 1$.

Rady s nezápornými členmi – Raabeho kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$.

[Raabeho kritérium.]

- Ak existuje $q > 1$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$. $\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$. $\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \infty$, pretože pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} - 1\right] = n + 1 - n = 1$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = s \in \mathbb{R}^*$.

[Raabeho kritérium – limitný tvar.]

- Potom platí:
- $s > 1$. $\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$.
 - $s = 1$. $\Rightarrow \bullet$ Nevieme rozhodnúť o konvergencii, resp. divergencii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [Rad môže konvergovať i divergovať.]
 - $s < 1$. $\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

Rady s nezápornými členmi – Raabeho kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$.

[Raabeho kritérium.]

- Ak existuje $q > 1$ tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$.
- Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \infty$, pretože pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right] = n + 1 - n = 1$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ (okpč) platí $a_n > 0$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = s \in \mathbb{R}^*$.

[Raabeho kritérium – limitný tvar.]

- Potom platí:
- $s > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$.
 - $s = 1$. $\Rightarrow$ • Nevieme rozhodnúť o konvergencii, resp. divergencii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [Rad môže konvergovať i divergovať.]
 - $s < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$, pretože platí $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2} = 2$.

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Nech $a > 0$. Vyšetřete konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}.$

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Nech $a > 0$. Vyšetřte konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)}}{\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \frac{n+1}{a+n+1} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a+n+1}{n+1} - 1 = \frac{a}{n+1}$.

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Nech $a > 0$. Vyšetřte konvergenci řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)}}{\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \frac{n+1}{a+n+1} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a+n+1}{n+1} - 1 = \frac{a}{n+1}$.

Limitné tvary D'Alembertovho (podielového) kritéria a Cauchyho (odmocninového) kritéria:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a+n+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{a}{n}+1+\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{0+1+0} = 1. \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \end{aligned} \right\} \text{Nevieme rozhodnúť.}$$

Rady s nezápornými členmi – Príklad

Nech $a > 0$. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}}{\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \frac{n+1}{a+n+1} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a+n+1}{n+1} - 1 = \frac{a}{n+1}$.

Limitné tvary D'Alembertovho (podielového) kritéria a Cauchyho (odmocninového) kritéria:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a+n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{a}{n}+1+\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{0+1+0} = 1. \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \end{aligned} \right\} \text{Nevieme rozhodnúť.}$$

Limitný tvar Raabeho kritéria:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1+\frac{1}{n}} = a \begin{cases} \text{rad} \longrightarrow \text{pre } a > 1, \\ \text{rad} \nrightarrow, \text{ t. j. } \longrightarrow \infty \text{ pre } a < 1. \end{cases}$$

Rady s nezápornými členmi – Příklad

Nech $a > 0$. Vyšetřte konvergenci radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}}{\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \frac{n+1}{a+n+1} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a+n+1}{n+1} - 1 = \frac{a}{n+1}$.

Limitné tvary D'Alembertovho (podielového) kritéria a Cauchyho (odmocninového) kritéria:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a+n+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{a}{n}+1+\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{0+1+0} = 1. \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \end{aligned} \right\} \text{Nevieme rozhodnúť.}$$

Limitný tvar Raabeho kritéria:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1+\frac{1}{n}} = a \begin{cases} \text{rad} \rightarrow \text{pre } a > 1, \\ \text{rad} \not\rightarrow, \text{ t. j. } \rightarrow \infty \text{ pre } a < 1. \end{cases}$$

$\bullet$ Pre $a = 1$ platí $a_n = \frac{n!}{1(1+1)\cdots(1+n)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$,
t. j. Harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \text{pre } a > 1. \quad \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \infty \text{ pre } a \leq 1.$$

Alternujúce rady – Absolútna a relatívna konvergencia

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ má vždy súčet, t. j. konverguje k číslu $s \geq 0$ alebo diverguje do ∞ .
 $\Rightarrow$ • Rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ (členy môžu byť aj záporné) pre $n \in \mathbb{N}$, má vždy súčet.

Alternujúce rady – Absolútna a relatívna konvergencia

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ má vždy súčet, t. j. konverguje k číslu $s \geq 0$ alebo diverguje do ∞ .
 $\Rightarrow$ • Rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ (členy môžu byť aj záporné) pre $n \in \mathbb{N}$, má vždy súčet.

Konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, t. j. rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$, nazývame:

- Absolútne konvergentný (rad konverguje absolútne),

ak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$. $\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow a \text{ súčasne } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \right]$

- Relatívne konvergentný (rad konverguje relatívne, resp. neabsolútne),

ak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R}$. $\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow a \text{ súčasne } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty \right]$

Alternujúce rady – Absolútna a relatívna konvergencia

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ má vždy súčet, t. j. konverguje k číslu $s \geq 0$ alebo diverguje do ∞ .
 $\Rightarrow$ • Rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ (členy môžu byť aj záporné) pre $n \in \mathbb{N}$, má vždy súčet.

Konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, t. j. rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$, nazývame:

- Absolútne konvergentný (rad konverguje absolútne),

ak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow a \text{ súčasne } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow. \right]$$

- Relatívne konvergentný (rad konverguje relatívne, resp. neabsolútne),

ak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R}$.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow a \text{ súčasne } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty. \right]$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad, potom platí:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$ (rad konverguje absolútne). $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ (rad konverguje).

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow. \right]$$

Alternujúce rady – Príklad

Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \cdots$

Alternujúce rady – Príklad

Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \cdots$

Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_{2n} = \underbrace{1 - 1}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_0 + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}_0 = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$
- $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{n+1} = 0 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$.

Alternujúce rady – Príklad

Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \cdots$

Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad s_{2n} &= \underbrace{1 - 1}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_0 + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}_0 = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0. \\ \bullet \quad s_{2n+1} &= s_{2n} + \frac{1}{n+1} = 0 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ pre } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = 0. \Rightarrow \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0. \Rightarrow \bullet \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0.$$

$$\bullet \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0.$$

Alternujúce rady – Príklad

Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \dots$

Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet s_{2n} &= \underbrace{1 - 1}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_0 + \dots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}_0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \\ \bullet s_{2n+1} &= s_{2n} + \frac{1}{n+1} = 0 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ pre } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots \\ &\geq 1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \dots + \frac{1}{n} + 0 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty \text{ (Harmonický rad)}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0. \quad \bullet \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty.$$

Alternujúce rady – Príklad

Vyšetrite konvergenciu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \dots \xrightarrow{R}.$

Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet s_{2n} &= \underbrace{1 - 1}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_0 + \dots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}_0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \\ \bullet s_{2n+1} &= s_{2n} + \frac{1}{n+1} = 0 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ pre } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots \\ &\geq 1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \dots + \frac{1}{n} + 0 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty \text{ (Harmonický rad)}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0. \bullet \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow \infty. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R} \text{ (rad konverguje relatívne).}$$

Alternujúce rady – Rozklad na nezáporné a nekladné členy

- Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ označme: $a_n^+ = \max \{a_n, 0\}$,
 $a_n^- = \max \{-a_n, 0\} = -\min \{a_n, 0\}$.

Alternujúce rady – Rozklad na nezáporné a nekladné členy

- Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ označme: $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$,
 $a_n^- = \max\{-a_n, 0\} = -\min\{a_n, 0\}$.

Potom platí: • $a_n^+ \geq 0$ a $a_n^- \geq 0$. • $a_n = a_n^+ - a_n^-$. • $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.

Vždy existujú súčty: • $s^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, pričom $0 \leq s^+ \leq \infty$. • $s^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, pričom $0 \leq s^- \leq \infty$.

Alternujúce rady – Rozklad na nezáporné a nekladné členy

- Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in R$, $n \in N$. Pre každé $n \in N$ označme: $a_n^+ = \max \{a_n, 0\}$,
 $a_n^- = \max \{-a_n, 0\} = -\min \{a_n, 0\}$.

Potom platí: • $a_n^+ \geq 0$ a $a_n^- \geq 0$. • $a_n = a_n^+ - a_n^-$. • $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.

Vždy existujú súčty: • $s^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, pričom $0 \leq s^+ \leq \infty$. • $s^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, pričom $0 \leq s^- \leq \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad, kde $a_n \in R$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú výrazy zmysel.) • $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = s^+ - s^-$, pričom $s \in R^*$.

• $c = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = s^+ + s^-$, pričom $0 \leq c \leq \infty$.

Alternujúce rady – Rozklad na nezáporné a nekladné členy

- Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in R$, $n \in N$. Pre každé $n \in N$ označme: $a_n^+ = \max \{a_n, 0\}$,
 $a_n^- = \max \{-a_n, 0\} = -\min \{a_n, 0\}$.

Potom platí: • $a_n^+ \geq 0$ a $a_n^- \geq 0$. • $a_n = a_n^+ - a_n^-$. • $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.

Vždy existujú súčty: • $s^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, pričom $0 \leq s^+ \leq \infty$. • $s^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, pričom $0 \leq s^- \leq \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad, kde $a_n \in R$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú výrazy zmysel.) • $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = s^+ - s^-$, pričom $s \in R^*$.

• $c = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = s^+ + s^-$, pričom $0 \leq c \leq \infty$.

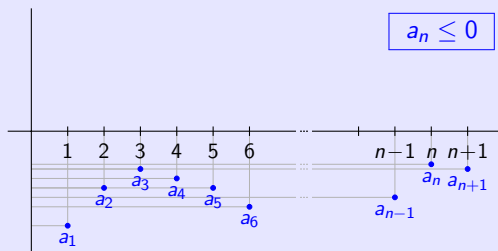
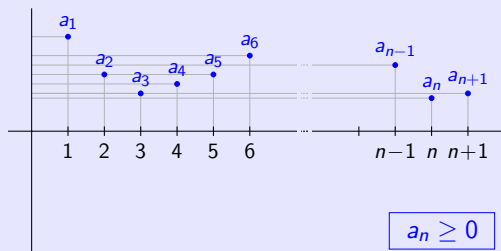
• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} \cdot \Rightarrow$ • $s \in R$ a $c \in R$. $\Rightarrow$ • $s^+ = \frac{c+s}{2} \in R$ a $s^- = \frac{c-s}{2} \in R$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R} \cdot \Rightarrow$ • $s \in R$ a $c = \infty$. $\Rightarrow$ • $s^+ = \frac{c+s}{2} = \infty$ a $s^- = \frac{c-s}{2} = \infty$.

Alternujúce rady – Definícia

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ alebo platí $a_n \leq 0$,

).

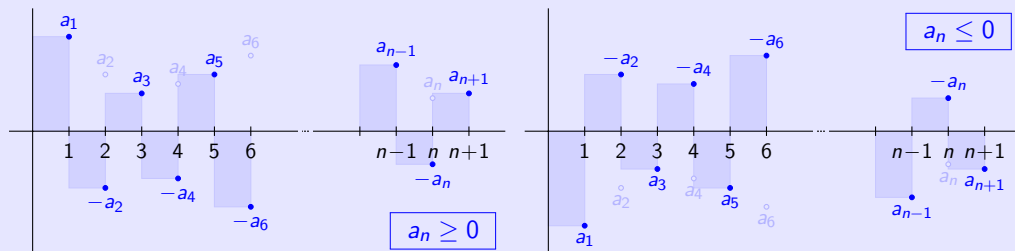


Alternujúce rady – Definícia

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ alebo platí $a_n \leq 0$,

t. j. rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$

sa nazýva **rad so striedavými znamienkami** (alternujúci rad).

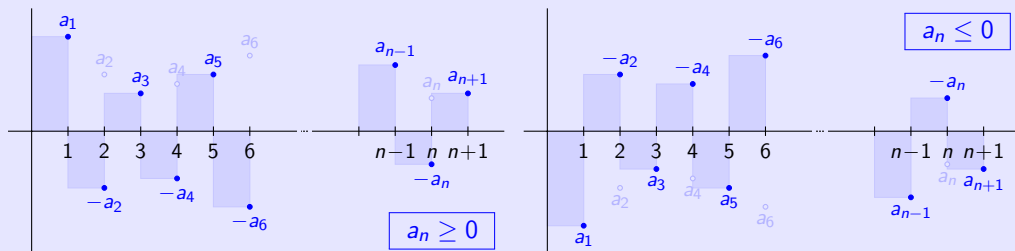


Alternujúce rady – Definícia

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ alebo platí $a_n \leq 0$,

t. j. rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$

sa nazýva **rad so striedavými znamienkami** (alternujúci rad).



Ak položíme $b_n = -a_n$, potom platí $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, pričom:

• $a_n \geq 0. \Rightarrow$ • $b_n \leq 0.$

• $a_n \leq 0. \Rightarrow$ • $b_n \geq 0.$

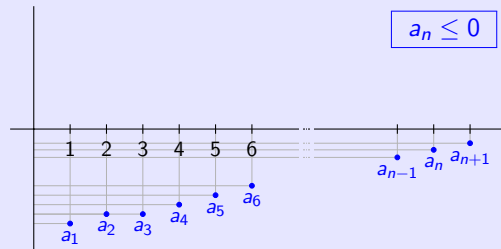
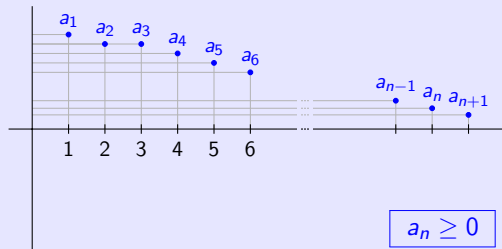
Alternujúce rady – Leibnizovo kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$.

[Leibnizovo kritérium.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq 0$.

[Leibnizovo kritérium.]

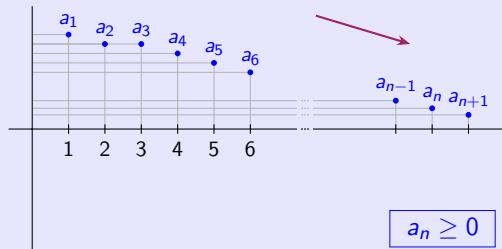


Alternujúce rady – Leibnizovo kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$.

[Leibnizovo kritérium.]

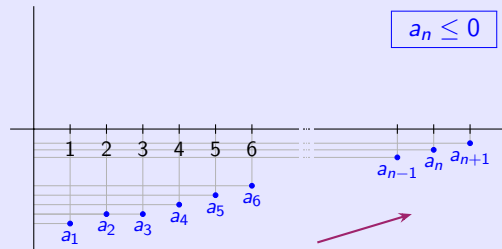
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.



Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq 0$.

[Leibnizovo kritérium.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.



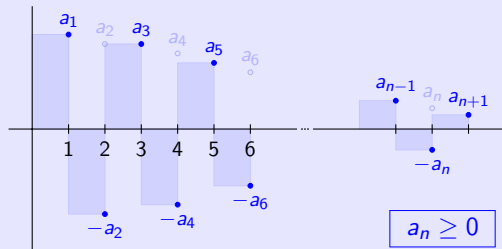
Alternujúce rady – Leibnizovo kritérium

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$.

[Leibnizovo kritérium.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$

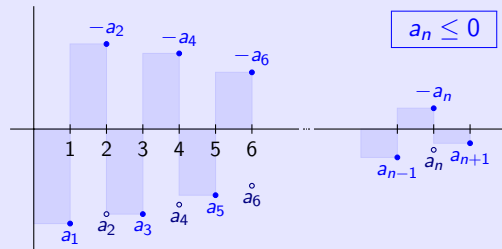


Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq 0$.

[Leibnizovo kritérium.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$



Alternujúce rady – Anharmonický rad

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

[Anharmonický rad.]

Alternujúce rady – Anharmonický rad

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

[Anharmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n} > 0$.

Alternujúce rady – Anharmonický rad

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

[Anharmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n} > 0$.

Leibnizovo kritérium.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\}$ je klesajúca.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow.$$

Alternujúce rady – Anharmonický rad

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

[Anharmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n} > 0$.

Leibnizovo kritérium.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\}$ je klesajúca.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow.$$

Rad absolútnych hodnôt členov:

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

[Harmonický rad.]

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow. \quad \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

Alternujúce rady – Anharmonický rad

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow{R}.$

[Anharmonický rad.]

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n} > 0.$

Leibnizovo kritérium.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\}$ je klesajúca.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow{R}.$$

Rad absolútnych hodnôt členov:

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

[Harmonický rad.]

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow{R}. \quad \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow{R} \text{ (rad konverguje relatívne).}$$

[Rad sa nazýva anharmonický a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow \ln 2.$]

Alternujúce rady – Dôležité rady a prerovnanie radov

Dôležité rady (Naspamäť!):

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty \quad \text{pre } q \geq 1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow \quad \text{pre } p > 1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{pre } q \in (-1; 1).$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad (\text{t. j. } p = 1).$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ osciluje pre } q \leq -1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty \quad \text{pre } p \leq 1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Alternujúce rady – Dôležité rady a prerovnanie radov

Dôležité rady (Naspamäť!):

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty \quad \text{pre } q \geq 1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow \infty \quad \text{pre } p > 1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{pre } q \in (-1; 1).$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad (\text{t. j. } p = 1).$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ osciluje pre } q \leq -1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty \quad \text{pre } p \leq 1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

• Prerovnaným radom (prerovnaním) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame

$$\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + a_{k_4} + \cdots + a_{k_n} + \cdots, \text{ kde } \{k_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je bijekcia } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}.$$

[Postupnosť indexov $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bijekcia $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, t. j. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje každé prirodzené číslo práve raz.]

Alternujúce rady – Dôležité rady a prerovnanie radov

Dôležité rady (Naspamäť!):

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$ pre $q \geq 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow$ pre $p > 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pre $q \in (-1; 1)$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (t. j. $p = 1$).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ osciluje pre $q \leq -1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ pre $p \leq 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} = e^{-1}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

- Prerovnaným radom (prerovnaním) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame
 $\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + a_{k_4} + \dots + a_{k_n} + \dots$, kde $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bijekcia $N \rightarrow N$.
 [Postupnosť indexov $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bijekcia $N \rightarrow N$, t. j. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje každé prirodzené číslo práve raz.]

- Pri prerovnaní radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ meníme iba poradie členov, pričom nemeníme hodnoty členov.

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a komutatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \ln 2.$



Alternujúce rady – Prerovnanie radu a komutatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \ln 2.$

- Kladné (nepárne) členy: $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}.$
- Záporné (párne) členy: $\{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{10}, \frac{-1}{12}, \dots, \frac{-1}{2 \cdot (2k-1)}, \frac{-1}{2 \cdot 2k}, \dots\}.$



Alternujúce rady – Prerovnanie radu a komutatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \ln 2.$

- Kladné (nepárne) členy: $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}.$
- Záporné (párne) členy: $\{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{10}, \frac{-1}{12}, \dots, \frac{-1}{2 \cdot (2k-1)}, \frac{-1}{2 \cdot 2k}, \dots\}.$

Vymeníme poradie členov:

Postupne pripočítavame 1 nepárny člen a odpočítavame 2 párne členy a dostaneme nový (prerovnaný) rad:

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)}}_{\frac{1}{2(2k-1)}} - \frac{1}{2 \cdot 2k} + \dots$$

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a komutatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \ln 2.$

- Kladné (nepárne) členy: $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}.$
- Záporné (párne) členy: $\{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \dots, -\frac{1}{2 \cdot (2k-1)}, -\frac{1}{2 \cdot 2k}, \dots\}.$

Vymeníme poradie členov:

Postupne pripočítavame 1 nepárny člen a odpočítavame 2 párne členy a dostaneme nový (prerovnaný) rad:

$$\begin{aligned}
 \bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{\frac{1}{10}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k}}_{\frac{1}{2(2k-1)}} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k} + \dots \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad (\text{iný súčet}).
 \end{aligned}$$

[Prerovnaním radu sa zmenil súčet radu.]

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a komutatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \ln 2.$

- Kladné (nepárne) členy: $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}.$
- Záporné (párne) členy: $\{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \dots, -\frac{1}{2 \cdot (2k-1)}, -\frac{1}{2 \cdot 2k}, \dots\}.$

Vymeníme poradie členov:

Postupne pripočítavame 1 nepárny člen a odpočítavame 2 párne členy a dostaneme nový (prerovnaný) rad:

$$\begin{aligned}
 \bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{\frac{1}{10}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k}}_{\frac{1}{2(2k-1)}} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k} + \dots \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad (\text{iný súčet}).
 \end{aligned}$$

[Prerovnaním radu sa zmenil súčet radu.]

- Vo všeobecnosti pri nekonečných radoch neplatí komutatívny zákon.

[Prerovnaním radu sa môže zmeniť nielen jeho súčet, ale aj jeho konvergencia, divergencia, resp. oscilácia.]

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a asociatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \not\rightarrow$ (osciluje).

Rad osciluje (nemá súčet), pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \not\rightarrow$ (osciluje).

[Vid' časť 01-Def, resp. príklad 02-II.]

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 + 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$ (konverguje, má konečný súčet).

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a asociatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \not\rightarrow$ (osciluje).

Rad osciluje (nemá súčet), pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \not\rightarrow$ (osciluje).

[Viď časť 01-Def, resp. príklad 02-II.]

Pridáme zátvorky:

- $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$

[Nový rad má súčet 0.]

- $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$

[Nový rad má súčet 1.]

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 + 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$ (konverguje, má konečný súčet).

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a asociatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \not\rightarrow$ (osciluje).

Rad osciluje (nemá súčet), pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \not\rightarrow$ (osciluje).

[Viď časť 01-Def, resp. príklad 02-II.]

Pridáme zátvorky:

$$\bullet (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

[Nový rad má súčet 0.]

$$\bullet 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

[Nový rad má súčet 1.]

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 + 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$ (konverguje, má konečný súčet).

Vynecháme zátvorky.

$$\bullet 1 - 1 + 1 + \frac{1}{2^2} - 1 + 1 + \dots + \frac{1}{n^2} - 1 + 1 + \dots$$

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a asociatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \not\rightarrow$ (osciluje).

Rad osciluje (nemá súčet), pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \not\rightarrow$ (osciluje).

[Viď časť 01-Def, resp. príklad 02-II.]

Pridáme zátvorky:

$$\bullet (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

[Nový rad má súčet 0.]

$$\bullet 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

[Nový rad má súčet 1.]

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 + 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$ (konverguje, má konečný súčet).

Vynecháme zátvorky.

$$\bullet 1 - 1 + 1 + \frac{1}{2^2} - 1 + 1 + \dots + \frac{1}{n^2} - 1 + 1 + \dots \not\rightarrow$$
 (osciluje).

[Nový rad súčet nemá.]

Nový rad osciluje, pretože osciluje $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre $k \in \mathbb{N}$ platí:

$$\bullet s_{3k} = 1 - 1 + 1 + \frac{1}{2^2} - 1 + 1 + \dots + \frac{1}{k^2} - 1 + 1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\bullet s_{3k+1} = s_{3k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\bullet s_{3k+2} = s_{3k+1} - 1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} - 1 \longrightarrow \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje.]

Alternujúce rady – Prerovnanie radu a asociatívny zákon

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \not\rightarrow$ (osciluje).

Rad osciluje (nemá súčet), pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \not\rightarrow$ (osciluje).

[Vid' časť 01-Def, resp. príklad 02-II.]

Pridáme zátvorky:

- $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$

[Nový rad má súčet 0.]

- $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$

[Nový rad má súčet 1.]

Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 + 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$ (konverguje, má konečný súčet).

Vynecháme zátvorky.

- $1 - 1 + 1 + \frac{1}{2^2} - 1 + 1 + \dots + \frac{1}{n^2} - 1 + 1 + \dots \not\rightarrow$ (osciluje).

[Nový rad súčet nemá.]

Nový rad osciluje, pretože osciluje $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $s_{3k} = 1 - 1 + 1 + \frac{1}{2^2} - 1 + 1 + \dots + \frac{1}{k^2} - 1 + 1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}.$

- $s_{3k+1} = s_{3k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}.$

- $s_{3k+2} = s_{3k+1} - 1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} - 1 \longrightarrow \frac{\pi^2}{6} - 1.$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje.]

• Vo všeobecnosti pri nekonečných radoch neplatí asociatívny zákon.

[Vid' časť 01-Def.]

Alternujúce rady – Pravidlá pre prerovnanie radov

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s$ (konverguje absolútne).

[Je zrejmé, že $s \in \mathbb{R}$.]

$\Rightarrow$ • Každé prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s.$

[Každé prerovnanie absolútne konvergentného radu má ten istý súčet $s \in \mathbb{R}$.]

Alternujúce rady – Pravidlá pre prerovnanie radov

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s \text{ (konverguje absolútne).}$$

[Je zrejmé, že $s \in \mathbb{R}$.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Každé prerovnanie } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s.$$

[Každé prerovnanie absolútne konvergentného radu má ten istý súčet $s \in \mathbb{R}$.]

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R} s \in \mathbb{R} \text{ (konverguje relatívne), } s^* \in \mathbb{R}^* \text{ je ľubovoľné.}$$

[Princíp konštrukcie – viď riešené príklady 05-I, 05-II.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje prerovnanie } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s^*.$$

[Relatívne konvergentný rad môžeme prerovnať k ľubovoľnému súčtu $s \in \mathbb{R}^*$.]

Alternujúce rady – Pravidlá pre prerovnanie radov

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s \text{ (konverguje absolútne).}$$

[Je zrejmé, že $s \in R$.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Každé prerovnanie } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s.$$

[Každé prerovnanie absolútne konvergentného radu má ten istý súčet $s \in R$.]

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R} s \in R \text{ (konverguje relatívne), } s^* \in R^* \text{ je ľubovoľné.}$$

[Princíp konštrukcie – viď riešené príklady 05-I, 05-II.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje prerovnanie } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s^*.$$

[Relatívne konvergentný rad môžeme prerovnať k ľubovoľnému súčtu $s \in R^*$.]

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je taký, že pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } a_n \geq 0 \text{ (iba nezáporné členy), resp. } a_n \leq 0 \text{ (iba nekladné členy).}$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s, \text{ kde } s \in R^*.$$

[Súčet radu sa iba zväčšuje alebo iba znižuje, t. j. rad konverguje alebo diverguje do $\pm\infty$.]

Alternujúce rady – Pravidlá pre prerovnanie radov

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s \text{ (konverguje absolútne).}$$

[Je zrejmé, že $s \in \mathbb{R}$.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Každé prerovnanie } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s.$$

[Každé prerovnanie absolútne konvergentného radu má ten istý súčet $s \in \mathbb{R}$.]

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R} s \in \mathbb{R} \text{ (konverguje relatívne), } s^* \in \mathbb{R}^* \text{ je ľubovoľné.}$$

[Princíp konštrukcie – viď riešené príklady 05-I, 05-II.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje prerovnanie } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s^*.$$

[Relatívne konvergentný rad môžeme prerovnať k ľubovoľnému súčtu $s \in \mathbb{R}^*$.]

$$\text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je taký, že pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } a_n \geq 0 \text{ (iba nezáporné členy), resp. } a_n \leq 0 \text{ (iba nekladné členy).}$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s, \text{ kde } s \in \mathbb{R}^*. \quad \Rightarrow \bullet \text{ Každé prerovnanie } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \longrightarrow s.$$

[Súčet radu sa iba zväčšuje alebo iba znižuje, t. j. rad konverguje alebo diverguje do $\pm\infty$.

$\Rightarrow$ Konvergenca radu s iba nezápornými, resp. nekladnými členmi predstavuje súčasne absolútnu konvergenciu.]

Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajte rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow s = \frac{5}{4} = 1,25$.



Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajzte rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow s = \frac{5}{4} = 1,25$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2$.
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty$.
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty$.
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}$.
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{10}, \frac{-1}{12}, \frac{-1}{14}, \dots, \frac{-1}{2k}, \dots\}$.



Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajme rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow s = \frac{5}{4} = 1,25$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2$.
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty$.
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty$.
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}$.
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{2k}, \dots\}$.

Vymeníme poradie členov:

1. Z postupnosti P vyberieme od začiatku toľko členov, aby ich súčet $s^* > s$. $[1 + \frac{1}{3} \approx 1,33 > 1,25]$
2. K nim pridáme od začiatku toľko členov z postupnosti N , aby ich spoločný súčet $s^* < s$. $[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0,83 < 1,25]$

$$\bullet s^* = 1 + \frac{1}{3} (\approx 1,333 > 1,25) - \frac{1}{2} (\approx 0,833 < 1,25)$$



Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajme rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow s = \frac{5}{4} = 1,25$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2$.
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty$.
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty$.
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}$.
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{2k}, \dots\}$.

Vymeníme poradie členov:

1. Z postupnosti P vyberieme od začiatku toľko členov, aby ich súčet $s^* > s$. $[1 + \frac{1}{3} \approx 1,33 > 1,25]$
2. K nim pridáme od začiatku toľko členov z postupnosti N , aby ich spoločný súčet $s^* < s$. $[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0,83 < 1,25]$
3. K doteraz vybraným členom pridáme toľko nevybraných členov z P (od začiatku), aby ich spoločný súčet $s^* > s$.
4. K doteraz vybraným členom pridáme toľko nevybraných členov zo N (od začiatku), aby ich spoločný súčet $s^* < s$.

$$\bullet s^* = 1 + \frac{1}{3} (\approx 1,333 > 1,25) - \frac{1}{2} (\approx 0,833 < 1,25) + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} (\approx 1,287 > 1,25) - \frac{1}{4} (\approx 1,037 < 1,25)$$



Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajme rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow s = \frac{5}{4} = 1,25$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2$.
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty$.
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty$.
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}$.
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{2k}, \dots\}$.

Vymeníme poradie členov:

1. Z postupnosti P vyberieme od začiatku toľko členov, aby ich súčet $s^* > s$. [$1 + \frac{1}{3} \approx 1,33 > 1,25$]
2. K nim pridáme od začiatku toľko členov z postupnosti N , aby ich spoločný súčet $s^* < s$. [$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0,83 < 1,25$]
3. K doteraz vybraným členom pridáme toľko nevybraných členov z P (od začiatku), aby ich spoločný súčet $s^* > s$.
4. K doteraz vybraným členom pridáme toľko nevybraných členov zo N (od začiatku), aby ich spoločný súčet $s^* < s$.

Posledné dva kroky 3. a 4. opakujeme do nekonečna a súčet prerovnania $s^* \longrightarrow \frac{5}{4}$.

[V praxi pokračujeme po požadovanú presnosť.]

$$\begin{aligned}
 \bullet s^* &= 1 + \frac{1}{3} (\approx 1,333 > 1,25) - \frac{1}{2} (\approx 0,833 < 1,25) + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} (\approx 1,287 > 1,25) - \frac{1}{4} (\approx 1,037 < 1,25) \\
 &+ \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} (\approx 1,272 > 1,25) - \frac{1}{6} (\approx 1,105 < 1,25) + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} (\approx 1,264 > 1,25) \\
 &- \frac{1}{8} (\approx 1,139 < 1,25) + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} (\approx 1,260 > 1,25) - \frac{1}{10} (\approx 1,160 < 1,25) \\
 &+ \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} (\approx 1,257 > 1,25) - \frac{1}{12} (\approx 1,173 < 1,25) + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} + \frac{1}{39} (\approx 1,255 > 1,25) \\
 &- \frac{1}{14} (\approx 1,183 < 1,25) + \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} (\approx 1,253 > 1,25) - (< 1,25) \cdots \longrightarrow 1,25.
 \end{aligned}$$

Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajzte rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow \infty$.



Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajzte rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2.$
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty.$
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty.$
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}.$
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{2k}, \dots\}.$

Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajate rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2$.
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty$.
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty$.
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}$.
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{2k}, \dots\}$.

Vymeníme poradie členov:

0. Zvolíme si krok $\Delta s > 0$, o ktorý budeme zväčšovať súčet vybraných členov s^* , napr. $\Delta s = 0,1$.

1. Vyberieme prvý člen zo Z a k nemu pridáme od začiatku toľko členov z P tak, aby ich spoločný súčet $s^* > \Delta s$. $[-\frac{1}{2} + 1 = 0,5 > 0,1]$

$$\bullet s^* = -\frac{1}{2} + 1 (= 0,5 > 0,1)$$

Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajate rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2$.
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty$.
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty$.
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}$.
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{2k}, \dots\}$.

Vymeníme poradie členov:

0. Zvolíme si krok $\Delta s > 0$, o ktorý budeme zväčšovať súčet vybraných členov s^* , napr. $\Delta s = 0,1$.

1. Vyberieme prvý člen zo Z a k nemu pridáme od začiatku toľko členov z P tak, aby ich spoločný súčet $s^* > \Delta s$. $[-\frac{1}{2} + 1 = 0,5 > 0,1]$
2. Vyberieme prvý nevybraný člen zo Z a k nemu pridáme od začiatku toľko nevybraných členov z P tak, aby sa ich spoločný súčet s^* zväčšil aspoň o hodnotu Δs oproti predchádzajúcemu súčtu.

$$\bullet s^* = -\frac{1}{2} + 1 (= 0,5 > 0,1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} (\approx 0,783 > 0,6)$$



Riešené príklady – Prerovnanie radu ku konečnému súčtu

Prerovnajme rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby $\longrightarrow \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \xrightarrow{R} \ln 2$.
- $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty$.
- $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \infty$.
- Kladné (nepárne) členy: $P = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \dots\}$.
- Záporné (párne) členy: $N = \{-a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{2k}, \dots\}$.

Vymeníme poradie členov:

0. Zvolíme si krok $\Delta s > 0$, o ktorý budeme zväčšovať súčet vybraných členov s^* , napr. $\Delta s = 0,1$.

1. Vyberieme prvý člen zo Z a k nemu pridáme od začiatku toľko členov z P tak, aby ich spoločný súčet $s^* > \Delta s$. $[-\frac{1}{2} + 1 = 0,5 > 0,1]$
2. Vyberieme prvý nevybraný člen zo Z a k nemu pridáme od začiatku toľko nevybraných členov z P tak, aby sa ich spoločný súčet s^* zväčšil aspoň o hodnotu Δs oproti predchádzajúcemu súčtu.

Posledný krok 2. opakujeme do nekonečna a súčet prerovnania $s^* \longrightarrow \infty$.

[V praxi pokračujeme po požadovanú presnosť.]

$$\begin{aligned}
 \bullet s^* &= -\frac{1}{2} + 1 (= 0,5 > 0,1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} (\approx 0,783 > 0,6) - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} (\approx 0,962 > 0,883) \\
 &\quad - \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} (\approx 1,092 > 1,062) - \frac{1}{10} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} (\approx 1,194 > 1,192) \\
 &\quad - \frac{1}{12} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} + \frac{1}{39} + \frac{1}{41} + \frac{1}{43} (\approx 1,302\,320 > 1,294) \\
 &\quad - \frac{1}{14} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} + \frac{1}{51} + \frac{1}{53} + \frac{1}{55} + \frac{1}{57} + \frac{1}{59} + \frac{1}{61} (\approx 1,402\,342 > 1,402\,320) \\
 &\quad - \dots \longrightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ kde } a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ pre } n \text{ nepárne, } a_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \text{ pre } n \text{ párne.}$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ kde } a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ pre } n \text{ nepárne, } a_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \text{ pre } n \text{ párne.}$$

- Pre nepárne $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1+1}} = \frac{1}{2^{2k}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k}$.
- Pre párne $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k} = -\frac{1}{2^{2k-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ kde } a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ pre } n \text{ nepárne, } a_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \text{ pre } n \text{ párne.}$$

- Pre nepárne $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1+1}} = \frac{1}{2^{2k}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k}$.
- Pre párne $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k} = -\frac{1}{2^{2k-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k-1}} + \dots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \dots \end{aligned}$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ kde } a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ pre } n \text{ nepárne, } a_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \text{ pre } n \text{ párne.}$$

- Pre nepárne $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1+1}} = \frac{1}{2^{2k}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k}$.
- Pre párne $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k} = -\frac{1}{2^{2k-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k-1}} + \dots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \dots \end{aligned}$$

Rad je prerovnaním geometrického radu s kvocientom $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{3}, \text{ kde } a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ pre } n \text{ nepárne, } a_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \text{ pre } n \text{ párne.}$$

- Pre nepárne $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1+1}} = \frac{1}{2^{2k}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k}$.
- Pre párne $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k} = -\frac{1}{2^{2k-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k-1}} + \dots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \dots \end{aligned}$$

Rad je prerovnaním geometrického radu s kvocientom $-\frac{1}{2}$, ktorý konverguje absolútne.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2-1} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xrightarrow{A} -\frac{1}{3}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\frac{1}{3}.$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{2n-(2n-1)}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0$.
- Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$$

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{2n-(2n-1)}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0$.

• Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

• Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ anharmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ platí:

• $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \ln 2$ a • $t_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$$

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{2n-(2n-1)}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0$.

• Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

• Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ anharmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ platí:

• $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \ln 2$ a • $t_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

• $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}$
 $= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = t_{2n} > 0$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} = \ln 2$$

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{2n-(2n-1)}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0$.

• Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

• Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ anharmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ platí:

• $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \ln 2$ a • $t_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

• $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}$
 $= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = t_{2n} > 0$ pre $n \in \mathbb{N}$.

• Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podpostupnosťou $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \ln 2$.

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ln 2$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} \ln 2$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{(2n+1)-2n}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} > 0$.
- Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{(2n+1)-2n}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} > 0$.

• Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

• Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ anharmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\ln 2$ platí:

• $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\ln 2$ a • $t_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{(2n+1)-2n}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} > 0$.

• Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

• Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ anharmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\ln 2$ platí:

• $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\ln 2$ a • $t_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

• $s_n = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$
 $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = t_{2n} + 1 > 0$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 1 - \ln 2$$

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{(2n+1)-2n}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} > 0$.

• Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

• Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ anharmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\ln 2$ platí:

• $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\ln 2$ a • $t_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

• $s_n = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$
 $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = t_{2n} + 1 > 0$ pre $n \in \mathbb{N}$.

• Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podpostupnosťou $\{t_n + 1\}_{n=1}^{\infty}$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n + 1) = 1 - \ln 2$.

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 - \ln 2$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 1 - \ln 2$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0$.
- Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0$.
- Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).
- Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ platí:
 - $t_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ pre $n \in \mathbb{N}$ a
 - $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

• Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0$.

• Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

• Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ platí:

• $t_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ pre $n \in \mathbb{N}$ a • $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$.

• $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots$

• $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$

• $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots$

Riešené príklady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 1 - \ln 2$$

- Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0$.

- Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a existuje súčet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s > 0$ ($s \in \mathbb{R}^*$).

- Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ platí:

- $t_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ pre $n \in \mathbb{N}$ a
- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots \xrightarrow{A} 1$ [Vid' príklad 02-III.]

- $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \xrightarrow{A} \ln 2$ [Vid' príklad 05-IV.]

- $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots \xrightarrow{A} s$

Potom platí: $\bullet r = c + s. \Rightarrow \bullet s = r - c = 1 - \ln 2$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Prvý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in \mathbb{R}^*$.



Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Prvý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in \mathbb{R}^*$.

Zvoľme (ľubovoľne) postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow s$ a označme $s_0 = 0$.

$$\Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1}, n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Prvý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in \mathbb{R}^*$.

Zvoľme (ľubovoľne) postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow s$ a označme $s_0 = 0$.

$$\Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1}, n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

$$\bullet a_1 = s_1 - s_0.$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s_1 - s_0.$$

$$\bullet a_2 = s_2 - s_1.$$

$$\bullet s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + (s_2 - s_1).$$

$$\bullet a_3 = s_3 - s_2.$$

$$\bullet s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2).$$

$$\bullet \dots$$

$$\bullet \dots$$

$$\bullet a_n = s_n - s_{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1}), n \in \mathbb{N}.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Prvý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in R^*$.

Zvoľme (ľubovoľne) postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow s$ a označme $s_0 = 0$.

$$\Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1}, n \in N. \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

- $a_1 = s_1 - s_0.$
- $a_2 = s_2 - s_1.$
- $a_3 = s_3 - s_2.$
- $\dots$
- $a_n = s_n - s_{n-1}, n \in N.$
- $s_1 = a_1 = s_1 - s_0.$
- $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + (s_2 - s_1).$
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2).$
- $\dots$
- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 $= s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1}), n \in N.$

Ak je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ navyše monotónna a $s \in R$, potom hľadaný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s$ (konverguje absolútne).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ nerastie, } s \in R. \Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1} \geq 0 \text{ pre } n \in N. \\ \bullet \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ neklesá, } s \in R. \Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1} \leq 0 \text{ pre } n \in N. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Druhý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in \mathbb{R}$.



Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Druhý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in R$.

Zvoľme (ľubovoľne) postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, označme $b_0 = 0$ a položíme $s_n = s + b_n$, $n \in N$.

$$\Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1} = (s + b_n) - (s + b_{n-1}) = b_n - b_{n-1}, \quad n \in N.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s + b_n) = s + 0 = s.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Druhý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in \mathbb{R}$.

Zvoľme (ľubovoľne) postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, označme $b_0 = 0$ a položíme $s_n = s + b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1} = (s + b_n) - (s + b_{n-1}) = b_n - b_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s + b_n) = s + 0 = s.$$

$$\bullet a_1 = b_1 - b_0.$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s + b_1.$$

$$\bullet a_2 = b_2 - b_1.$$

$$\bullet s_2 = a_1 + a_2 = s + b_1 + (b_2 - b_1).$$

$$\bullet a_3 = b_3 - b_2.$$

$$\bullet s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2).$$

$$\bullet \dots$$

$$\bullet \dots$$

$$\bullet a_n = b_n - b_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Druhý spôsob

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, kde $s \in \mathbb{R}$.

Zvoľme (ľubovoľne) postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, označme $b_0 = 0$ a položme $s_n = s + b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \bullet a_n = s_n - s_{n-1} = (s + b_n) - (s + b_{n-1}) = b_n - b_{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s + b_n) = s + 0 = s.$$

$$\bullet a_1 = b_1 - b_0.$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s + b_1.$$

$$\bullet a_2 = b_2 - b_1.$$

$$\bullet s_2 = a_1 + a_2 = s + b_1 + (b_2 - b_1).$$

$$\bullet a_3 = b_3 - b_2.$$

$$\bullet s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2).$$

$$\bullet \dots$$

$$\bullet \dots$$

$$\bullet a_n = b_n - b_{n-1}, n \in \mathbb{N}. \bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}), n \in \mathbb{N}.$$

Ak je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ navyše monotónna, potom hľadaný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s$ (konverguje absolútne).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ nerastie.} \Rightarrow \bullet a_n = b_n - b_{n-1} \geq 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}, n > 1. \\ \bullet \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ neklesá.} \Rightarrow \bullet a_n = b_n - b_{n-1} \leq 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}, n > 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} s.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{(n+1)n} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, n \in N - \{1\}$.
- $a_1 = s_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$.
- $a_2 = s_2 - s_1 = \frac{2}{2+1} - \frac{2-1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$. • ...
- $s_1 = a_1 = \frac{1}{2}$. • ...
- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$
 $= \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1}\right) + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}, n \in N$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

$$\bullet a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{(n+1)n} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, n \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

$$\bullet a_1 = s_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}.$$

$$\bullet a_2 = s_2 - s_1 = \frac{2}{2+1} - \frac{2-1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_1 = a_1 = \frac{1}{2}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1}) \\ = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1}\right) + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)}_{s_n - s_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{s_n} = 1. \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 1. \right]$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n-1)} = \frac{(n^2-1) - n^2}{(n-1)n} = -\frac{1}{(n-1)n} < 0, \quad n \in N - \{1\}.$
- $a_1 = s_1 = 2.$
- $a_2 = s_2 - s_1 = \frac{2+1}{2} - \frac{2}{2-1} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1 \cdot 2}.$ • ...
- $s_1 = a_1 = 2.$ • ...
- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$
 $= 2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n-1} - \frac{n-1}{n-2}\right) + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1}\right) = \frac{n+1}{n}, \quad n \in N - \{1\}.$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n-1)} = \frac{(n^2-1) - n^2}{(n-1)n} = -\frac{1}{(n-1)n} < 0, \quad n \in N - \{1\}.$

- $a_1 = s_1 = 2.$

- $a_2 = s_2 - s_1 = \frac{2+1}{2} - \frac{2}{2-1} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1 \cdot 2}.$ • ...

- $s_1 = a_1 = 2.$ • ...

- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$
 $= 2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n-1} - \frac{n-1}{n-2}\right) + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1}\right) = \frac{n+1}{n}, \quad n \in N - \{1\}.$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(n-1)n}}_{a_n} = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1}\right)}_{s_n - s_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{s_n} = 1. \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 1 \right]$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} - \dots = 1.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)-n}{n(n-1)} = -\frac{1}{(n-1)n} < 0, n \in N - \{1\}$.
- $a_1 = s_1 = 1$.
- $a_2 = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1 \cdot 2}$. • ...
- $s_1 = a_1 = 1$. • ...
- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$
 $= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n}, n \in N - \{1\}$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 0$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)-n}{n(n-1)} = -\frac{1}{(n-1)n} < 0, n \in N - \{1\}.$

- $a_1 = s_1 = 1.$

- $a_2 = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1 \cdot 2}. \quad \bullet \dots$

- $s_1 = a_1 = 1. \quad \bullet \dots$

- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$
 $= 1 + (\frac{1}{2} - 1) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n}, n \in N - \{1\}.$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}}_{a_n} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)}_{s_n - s_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{s_n} = 0. \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 0 \right]$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} - \dots = 0.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

$$\bullet a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)-n}{(n-1)n} = -\frac{1}{(n-1)n} < 0, n \in N - \{1\}.$$

$$\bullet a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2.$$

$$\bullet a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1 \cdot 2}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2. \quad \bullet \dots$$

$$\begin{aligned} \bullet s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}) \\ &= 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = 1 + \frac{1}{n}, n \in N - \{1\}. \end{aligned}$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)-n}{(n-1)n} = -\frac{1}{(n-1)n} < 0, n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

- $a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2$.

- $a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1 \cdot 2}$. • ...

- $s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2$. • ...

- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$
 $= 1 + 1 + (\frac{1}{2} - 1) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}) = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}}_{a_n} = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1})}_{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{s_n} = 1. \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 1. \right]$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} - \dots = 1.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

[Príklad 06-I.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} - \cdots = 1.$$

[Príklad 06-II a príklad 06-IV.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} - \cdots = 0.$$

[Príklad 06-III.]

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

[Príklad 06-I.]

Ak položíme $n = k - 1$, dostaneme $k = n + 1$. Potom pre $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ platí: $\bullet a_n = a_{k-1} = \frac{1}{(k-1)(k-1+1)} = \frac{1}{(k-1)k}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} - \cdots = 1.$$

[Príklad 06-II a príklad 06-IV.]

$$\bullet 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1. \Rightarrow \bullet \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} - \cdots = 0.$$

[Príklad 06-III.]

$$\bullet 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 0. \Rightarrow \bullet \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

$$\bullet a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n}, \quad n \in N - \{1\}.$$

$$\bullet a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2.$$

$$\bullet a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{1 \cdot 2}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$$

$$= 1 + 1 + \left[-\frac{1}{2} - 1\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1}\right] = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in N - \{1\}.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n} = 1$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

$$\bullet a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n},$$

$$\bullet a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2.$$

$$\bullet a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{1 \cdot 2}.$$

$$\bullet \dots$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 + 1 = 2. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$$

$$= 1 + 1 + \left[-\frac{1}{2} - 1\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1}\right] = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} - \frac{7}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n} + \dots = 1.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n}, n \in N - \{1\}.$

- $a_1 = s_1 = 1.$

- $a_2 = s_2 - s_1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{1 \cdot 2}. \quad \bullet \dots$

- $s_1 = a_1 = 1. \quad \bullet \dots$

- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$
 $= 1 + \left[-\frac{1}{2} - 1\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \in N - \{1\}.$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n} = 0$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$.

Zvoľme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n}, n \in \mathbb{N} - \{1\}.$

- $a_1 = s_1 = 1.$

- $a_2 = s_2 - s_1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{1 \cdot 2}. \quad \bullet \dots$

- $s_1 = a_1 = 1. \quad \bullet \dots$

- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$
 $= 1 + \left[-\frac{1}{2} - 1\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \in \mathbb{N} - \{1\}.$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n}}_{a_n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1}\right]}_{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{s_n} = 0. \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 1 \right]$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} - \frac{7}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1)n} + \dots = 0.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

$$\bullet a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{1 \cdot 2}.$$

$$\bullet a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{2+3}{3 \cdot 2} = -\frac{5}{2 \cdot 3}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right] + \dots + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}.$

- $a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{1 \cdot 2}.$
- $a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{2+3}{3 \cdot 2} = -\frac{5}{2 \cdot 3}.$ • ...

- $s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$ • ...

- $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$
 $= 1 + \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right] + \dots + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{N}.$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n}\right]}_{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right]}_{s_n} = 1. \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 1\right]$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

- $a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{-1}{(n+1)^2} - \frac{-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$
- $a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$
- $a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{-4+9}{9 \cdot 4} = -\frac{5}{4 \cdot 9}.$ • ...

- $s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$ • ...

- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1})$
 $= 1 - \frac{1}{2^2} + \left[-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2}\right] + \left[-\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2}\right] + \cdots + \left[-\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, n \in \mathbb{N}.$

Konštrukcia radu s predpísaným súčtom – Príklad

Zostrojte číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$ tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow 1$.

Zvoľme $s = 1$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,

potom postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$.

$$\bullet a_n = s_n - s_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \frac{-1}{(n+1)^2} - \frac{-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet a_1 = s_1 = s + b_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\bullet a_2 = s_2 - s_1 = b_2 - b_1 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{-4+9}{9 \cdot 4} = -\frac{5}{4 \cdot 9}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_1 = a_1 = s + b_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s + b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \left[-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2}\right] + \left[-\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2}\right] + \dots + \left[-\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[-\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}\right]}_{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]}_{s_n} = 1. \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A} 1\right]$$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots = 1.$$

Koniec 3. časti

Ďakujem za pozornosť.