CHAPTER I

MATEMATICKÝ MODEL ROZVRHOV

1.0 Úvod

V praktickom živote veľmi často vznikajú úlohy typu ktorú operáciu kedy, kde a na čom urobiť. Operáciou tu môže byť technologická operácia (strojárska, stavebná, chemická atď.), dopravná operácia ako vykonanie autobusového spoja v doprave, prepojenie telefonického hovoru, obslúženie zákazníka v obchode, umiestnenie skladu či súčiastky na doske plošných spojov, alebo vykonanie prednášky pre nejakú študijnú skupinu. Vo všetkých takýchto prípadoch kvalita výsledku závisí od časového alebo priestorového rozmiestnenia alebo dokonca od oboch. Niektoré príklady:

Ktoré z lietadiel žiadajúcich o pristátie v ktorom čase nechať pristáť na ktorú pristávaciu dráhu a ktorú bránu letiskovej budovy mu prideliť.

Ktorú výučbu v ktorom čase v ktorej učebni prideliť ktorému učiteľovi.

Pri viacprocesorových a viacúlohových počítačových systémoch ktorú úlohu v ktorom čase urobiť na ktorom procesore.

V pravidelnej autobusovej doprave ktorý spoj realizovať ktorým autobusom.

Všetky rozvrhovacie úlohy chceme urobiť nie hocijako, ale z istého hľadiska optimálne. Na to je nevyhnutné, aby sme mali k dispozícii funkciu, ktorá číselne ohodnotí kvalitu každého možného riešenia. Túto funkciu budeme volať kritérium optimality. Na základe tejto funkcie – kritéria optimality – už možno matematickými prostriedkami hľadať riešenie minimalizujúce (alebo maximalizujúce) túto funkciu – tzv. optimálne riešenie.

1.1 Základné pojmy teórie rozvrhov

Základnými pojmai teórie rozvrhov sú *stroj, operácia* a *úloha.*

Operácia o je základný technologický úkon, ktorý už ďalej nie je deliteľný na čiastočné technologické úkony.

Úloha J (anglicky *job*) je postupnosť operácii $\{o_1, o_2 \dots, o_g\}$, ktoré treba vykonať v rámci jednej zakázky.

Stroj M je zariadenie schopné vykonať jednu alebo niekoľko operácií. Anglický termín pre stroj je *machine*, v českej a slovenskej terminológii sa používa tiež termín *procesor.*

Pri rozvrhovacom probléme treba pre každú operáciu o_{ij} každej úlohy J_i z danej množiny úloh $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ určiť stroj M_j z danej množiny strojov $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$, na ktorom sa operácia o_{ij} vykoná a časový interval jej vykonávania (resp. niekoľko časových intervalov v prípade, keď je dovolené prerušenie operácií) .

Vo väčšine rozvrhovacích modelov platia dva základné predpoklady:

1. Každý stroj v jednom časovom okamžiku môže vykonávať nanavýš jednu operáciu.
2. V jednom časovom okamžiku sa nemôžu vykonávať dve alebo viac operácií jednej úlohy.

Z hľadiska teórie rozvrhov je operácia nedeliteľná, niektoré modely však pripúšťajú prerušenie operácie a po nejakom čase pokračovanie v jej vykonávaní. Vo väčšine modelov sa pri ďalšom pokračovaní prerušenej operácie pokračuje tam, kde bola daná operácia prerušená. Sú však modely, v ktorých sa prerušená operácia musí vykonať odznovu.

Stroje z množiny $\mathcal{M}$ môžu byť univerzálne alebo špecializované. Univerzálne stroje môžu spracovávať ľubovoľnú operáciu ľubovoľnej úlohy. Jednotlivé stroje z množiny $\mathcal{M}$ sa môžu líšiť dobou spracovania operácií. Súčasťou riešenia rozvrhovacieho problému je v takom prípade i priradenie strojov jednotlivývm operáciám. Špecializovné stroje sú určené len na spracovanie niektorých operácií – každá operácia už má priradený stroj, na ktorom sa bude spracovávať. Stroj nemusí byť k dispozícii kedykoľvek. V dôsledku striedania zmien, pravidelnej údržby či iných technologických prestávok môžu existovať obdobia, kedy stroj nemôže vykonávať ziadnu činnosť. Dôležitou charakterizáciou každého stroja sú teda intervaly jeho dostupnosti.

Majme úlohu $J = \{o_1, o_2, \ldots, o_k\}$. Pri niektorých úlohách nezávisí na poradí vykonávania týchto operácií. Pri iných z technológie vylýva, že niektoré operácie možno robiť až po vykonaní iných (napr. najprv je nutné postaviť základy domu, potom je možné stavať múry a až potom strechu). Túto skutočnosť modelujeme tak, že v rámci jednotlivej úlohy alebo i celého rozvrhovacieho problému môže byť daná precedenčná relácia $\prec$ medzi jednotlivými operáciami. Ak operáciu y možno začať vykonávať až po skončení operácie x, budeme hovoriť, že operácia x predchádza operáciu y a písať $x \prec y$. Relácia $\prec$ je tranzitívna, t.j.

$$\text{ak} \quad x \prec y \quad \text{a} \quad y \prec z \quad \text{potom} \quad x \prec z$$

Budeme hovoriť, že operácia x bezprostredne predchádza operáciu y, ak $x \prec y$ a neexistuje operácia z taká, že $x \prec z \prec y$. Túto skutočnosť budeme označovať ako $x \prec\!\prec y$.

Často býva vhodné vyjadriť si následnosť operácii jednej úlohy vo forme digrafu $\mathbb{G}_\prec = (V, H)$, ktorého množinou vrcholov je množina všetkých operácií danej úlohy a množinou orientovaných hrán je $H = \{[x, y] |\ x \prec y\}$. Digraf $\mathbb{G}_\prec$ nazveme precedenčným digrafom precedencie $\prec$ na príslušnej množine operácii. (Iným – podobným, ale nie totožným – spôsobom je vytvorenie sieťového digrafu danej úlohy, tam sa však operácie – elementárne činnosti modelujú hranami).

Analogicky môže byť definovaná operácia precedencie $\prec$ i bezprostrednej precedencie $\prec\!\prec$ i na množine úloh $\mathcal{J}$. Ak je nutné pred začiatkom vykonania úlohy J_k ukončiť vykonávanie úlohy J_i, budem hovoriť, že úloha J_i predchádza úlohu J_k a písať $J_i \prec J_k$. Úloha J_i bezprostredne predchádza úlohu J_k, ak $J_i \prec J_k$ a neexistuje úloha J_m taká, že $J_i \prec J_m$ a $J_m \prec J_k$. Potom budeme písať $J_i \prec\!\prec J_k$. Graf $\mathbb{G}_{\prec} = (\mathcal{J}, H)$, kde $H = \{[J_i, J_k]|\ J_i \prec J_k\}$ nazveme precedenčným digrafom precedencie $\prec$ na množine $\mathcal{J}$. Možno tiež definovať graf bezprostrednej precedencie na množine $\mathcal{J}$ ako $\mathbb{G}_{\prec\prec} = (\mathcal{J}, H)$, kde $H = \{[J_i, J_k]|\ J_i \prec\!\prec J_k\}$

Pri rozvrhovacom probléme máme daných niekoľko úloh (úloha – job). Tieto úlohy budeme označovať $J_1, J_2, \dots J_n$. Každá úloha J_i pozostáva z vykonania niekoľkých operácií $o_{i1}, o_{i2} \dots, o_{ig_i}$.

Ďalej máme danú množinu strojov $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$. Pre každú operáciu o_{ij} ľubovoľnej úlohy i je daná jej dĺžka $p(o_{ij})$ (časová náročnosť) a stroj $\mu_{ij} \in \mathcal{M}$, na ktorom sa môže táto operácia vykonať.

Zostaviť rozvrh pre úlohy $J_1, J_2, \dots, J_n$, kde úloha J_i pozostáva z operácií $o_{i1}, o_{i2} \dots, o_{ig_i}$ znamená pre každú operáciu $o_{ij} = x$ určiť jeden (v prípade, keď nie je dovolené prerušenie operácií) alebo viac (v prípade, keď prerušenie operácií je dovolené) časových intervalov $(b_{1x}, c_{1x}), (b_{2x}, c_{2x}), \dots, (b_{q_x x}, c_{q_x x})$, kde $b_{ix} \le c_{ix}$, (v ktorých sa bude operácia x vykonávať na príslušnom stroji) takých, že

1. $\sum_i (c_{ix} - b_{ix}) \ge p(x)$ — súčet čiastkových dôb vykonávania operácie x je väčší alebo rovný než jej dĺžka
2. Ak x, y sú dve operácie, pre ktoré je $x \prec y$, potom $c_{1x} \le b_{1y}$ — ak operácia x predchádza operáciu y, potom sa vykonávanie operácie y nezačne skôr, ne sa ukončí vykonávanie operácie x.
3. Každý interval (b_{ix}, c_{ix}) padne do niektorého intervalu dostupnosti príslušného stroja

Rozvrhovací problém považujeme za daný ak sú dané:

1) Množina strojov $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$.
2) Množina úloh $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ a pre každú úlohu J_i príslušná postupnosť operácií $o_{i1}, o_{i2} \dots, o_{ig_i}$ a funkcia $\mathcal{F}$, ktorá každej operácii priradí stroj, na ktorom sa má táto operácia vykonať.
3) Precedenčná relácia $\prec$ na množine operácií.
4) Kriteriálna funkcia rozvrhu.

1.2 Vstupné dáta rozvrhovacieho problému

Pre každú úlohu J_i môžu byť špecifikované tieto dáta:

- počet g_i a postupnosť operácií $\{o_{i1}, o_{i2}, \dots, o_{ig_i}\}$ úlohy J_i.
- g_i strojov $\{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ig_i}\}$ takých, že operácia o_{ij} sa má vykonať na stroji s_{ij}.
- g_i časov na spracovanie p_{ij}, $j = 1, 2, \dots, g_i$ ktoré majú operácie o_{ij} stráviť v príslušných strojoch, na ktorých potrebujú byť spracované. Potom P_i celkový

čas spracovania úlohy J_i sa vypočíta ako $\sum_{j=1}^{g_i} p_{ij}$.
Ak úloha J_i pozostáva z jedinej operácie stačí jediný čas p_i.

- r_i najskôr možný začiatok spracovania úlohy J_i. Tento údaj možno chápať ako čas vstupu úlohy J_i do systému (release date).
- d_i požadovaný čas ukončenia úlohy J_i.
- $a_i = d_i - r_i$ maximálna prípustná doba pobytu úlohy J_i v systéme.
- w_i váha úlohy J_i. Vyjadruje jej relatívnu dôležitosť.
- f_i nákladová funkcia – neklesajúca reálna funkcia, ktorá odmeriava náklady $f_i(t)$, vynaložené na to, aby úloha J_i bola ukončená v čase t. Vo všeobecnosti g_i, p_i, resp. p_{ij} a w_i sú celočíselné premenné.

1.3 Výstupné dáta rozvrhovacieho problému

Pri danom rozvrhu môžeme spočítať pre každú úlohu J_i nasledujúce veličiny:

– C_i čas ukončenia úlohy J_i (Completion time)

– F_i doba pobytu úlohy J_i v systéme

– W_i celková doba čakania úlohy J_i v systéme

– $L_i = C_i - d_i$ časová odchýlka od plánovaného času ukončenia úlohy J_i

– $Ti = \max\{0, L_i = C_i - d_i\}$ oneskorenie úlohy J_i

– $Ei = \max\{0, -L_i\}$ predstih úlohy J_i

– $U_i = 0$, ak $C_i \leq d_i$, inak $U_i = 1$ penalizačná jednotka úlohy J_i

Vidíme, že veličiny L_i, T_i, E_i, U_i sú definované ako funkcie času ukončenia C_i. Dobu pobytu F_i úlohy J_i v systéme možno vyjadriť ako $F_i = C_i - r_i$, kde r_i je čas vstupu úlohy J_i do systému. Ak p_i je čistá doba spracovania úlohy J_i, potom pre jej celkovú dobu čakania v systéme platí $W_i = F_i - p_i = C_i - r_i - p_i$. Všetky vyššie spomenuté výstupné dáta rozvrhovacieho problému sú teda funkciami základnej veličiny C_i.

1.4 Kritériá optimality rozvrhovacieho problému.

V literatúre sa pre hodnotenie rozvrhov používajú relatívne jednoduché minimalizačné kritériá optimality. Najlepšie riešenia bude mať minimálnu hodnotu príslušného kritéria.

Jednou skupinou kritérií sú maximá z časov ukončenia jednotlivých úloh (resp. ich časových diferencií, oneskorení, doby pobytu v systéme atď.)

$$C_{\max} = \max_i\{C_i\} \quad L_{\max} = \max_i\{L_i\} \quad T_{\max} = \max_i\{T_i\} \quad F_{\max} = \max_i\{F_i\}$$

Kritérium $C_{\max}$ použijeme v prípade, keď odberateľ zadá istú množinu úloh $\mathcal{J}$, vykonané úlohy odoberie a zaplatí až po ukončení poslednej z nich. Analogicky možno nájsť praktickú motiváciu i pre ostatné kritériá z tejto skupiny.

Nerovnakú dôležitosť úloh možno vyjadriť váhami w_i. Tomu zodpovedá minimalizácia kritérií

$$(Cw)_{\max} = \max_i\{C_i w_i\} \quad (Lw)_{\max} = \max_i\{L_i w_i\}$$
$$(Tw)_{\max} = \max_i\{T_i w_i\} \quad (Fw)_{\max} = \max_i\{F_i w_i\}$$

Druhou skupinou kritérií tvoria súčty časov ukončenia jednotlivých úloh (resp. ich časových diferencií, oneskorení, pobytu v systéme atď.)

$$\sum C_i = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad \sum L_i = \sum_{i=1}^{n} L_i \quad \sum T_i = \sum_{i=1}^{n} T_i \quad \sum U_i = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

V prípade nerovnakého významu jednotlivých úloh môžeme použiť ako kritériá vážené sumy predchádzajúcich veličín:

$$\sum w_i C_i = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i \quad \sum w_i L_i = \sum_{i=1}^{n} w_i L_i \quad \sum w_i T_i = \sum_{i=1}^{n} w_i T_i \quad \sum w_i U_i = \sum_{i=1}^{n} w_i U_i$$

Praktickou motiváciou pre použitie týchto kritérií je snaha znižovať náklady spojené s pobytom úloh v systéme (prvé dve kritériá), pokút za oneskorené dodávky, či počet omeškaných úloh.

V niektorej literatúre sa ako kritériá objavuje priemerná hodnota časov ukončenia úloh $J_1, J_2, \ldots, J_n$ označovaná ako $\overline{C}$, či priemerné hodnoty ich časovej diferencie, omeškania, doby pobytu v systéme, čakania atď. označované ako $\overline{L}$, $\overline{T}$, $\overline{F}$, $\overline{W}$ počítané ako

$$\overline{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i \quad \overline{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i \quad \overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \quad \overline{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

Keďže počet úloh n je konštanta je kritérium $\sum C_i$ n–násobkom kritéria $\overline{C}$, a preto sú obe kritéria ekvivalentné. Analogicky sú ekvivalentné $\sum L_i$ s $\overline{L}$, $\sum T_i$ s $\overline{T}$ atď.

Ďalej poznamenajme, že

$$\sum_{i=1}^{n} w_i L_i = \sum_{i=1}^{n} w_i (C_i - d_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i - \sum w_i d_i,$$

čiže $\sum w_i C_i$ a $\sum w_i L_i$ sa líšia konštantou a teda sú ekvivalentné.

Ďalej vidíme, že všetky doteraz spomenuté funkcie používané ako kritériá optimality boli v konečnom dôsledku funkciami časových okamžikov ukončenia $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Teória rozvrhov pracuje i so zložitejšími kritériami tvaru $\mathbf{M} = f(C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Medzi nimi zaujímajú zvláštne postavenie tzv. regulárne kritériá. Kritérium $\mathbf{Z} = f(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ nazveme regulárnym, keď je minimalizačné a keď je neklesajúcou funkciou každej svojej premennej $C_1, C_2, \ldots, C_n$). Ak je teda kritérium f regulárne a platí $\mathbf{Z} = f(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $\mathbf{Z}' = f(C_1', C_2', \ldots, C_n')$ a $\mathbf{Z} < \mathbf{Z}'$, potom musí existovať aspoň jedno i, $1 \leq i \leq n$, pre ktoré je $C_i < C_i'$. Naopak, ak $C_1' \leq C_1$, $C_2' \leq C_2, \ldots,$ $C_n' \leq C_n$, potom $\mathbf{Z}' = f(C_1', C_2', \ldots, C_n') \leq \mathbf{Z} = f(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Ľahko možno ukázať, že $C_{\max}$, $\overline{C}$, $\overline{W}$, $L_{\max}$, $\overline{L}$, $T_{\max}$, $\overline{T}$ patria k triede regulárnych kritérií.

Praktické úlohy však často vyžadujú i zložitejšie kritériá optimality súvisiace s minimalizáciou celkovj ceny spracovania, ktorú možno počítať ako súčet cien spracovania jednotlivých operácií na jednotlivých strojoch plus súčet cien prestavovania strojov medzi jednotlivými operáciami a do ktorej môžu byť zahrnuté i pokuty za neskoré spracovanie dodávky súvisiace s vymenovanými kritériami. Takéto praktické úlohy sú veľmi špecifické, je ťažké pre ne formulovať všeobecný model, a preto sa musia príslušné matematické modely a algoritmy riešenia vypracovávať priamo na mieru daného problému.

1.5 Klasifikácia systémov rozvrhovania podľa Conwaya

V závislosti od vstupu úloh do rozvrhovacieho systému delíme rozvrhovacie problémy na *statické* a *dynamické*.

Statické rozvrhovacie problémy sú také, kedy do systému, v ktorom nie sú žiadne úlohy vstupuje naraz celá množina $\mathcal{J}$ úloh. Ďalšia dávka úloh vstúpi do systému až po spracovaní všetkých úloh množiny $\mathcal{J}$. Doba spracovania jednotlivých operácií je spravidla deterministická.

V dynamických systémoch úlohy vstupujú do systému priebežne. Okamžiky vstupu jednotlivých úloh možno popísať iba štatisticky pomocou pravdepodobnostného rozdelenia intervalu medzi jednotlivými vstupmi. Doba spracovania operácie býva tiež náhodná veličina. Ako príklady jednoduchých dynamických rozvrhovacích systémov môžu slúžiť systémy hromadnej obsluhy.

Špeciálnym prípadom rozvrhovacích systémov sú *pásové* rozvrhovacie systémy, kde všetky J_i úlohy majú rovnaký počet operácií k, platí $o_{i1} \prec\prec o_{i2} \prec\prec \ldots \prec\prec o_{ik}$ a operácie každej úlohy J_i vyžadujú to isté poradie strojov – t.j. každá úloha prechádza strojmi v tom istom poradí.

Pre klasifikáciu rozvrhovacích problémov sa používa štvormiestná schéma $A|B|C|D$ kde

A charakterizuje proces vstupu požiadaviek do systému. Pre dynamické systémy na mieste A stojí distribučná funkcia rozdelenia intervalu medzi vstupmi úloh do systému. Pre statické systémy na mieste A stojí prirodzené číslo vyjadrujúce počet úloh naraz vstupujúcich do systému. Symbol n vyjadruje ľubovoľný konečný počet úloh.

B charakterizuje počet strojov v systéme; symbol m vyjadruje ľubovoľný konečný počet strojov.

C charakterizuje poradie spracovávania operácií na jednotlivých spojoch. Ak na mieste C stojí F, všetky úlohy prechádzajú strojmi v rovnakom poradí (pásový systém), R znamená náhodné poradie spracovania operácií, G ľubovoľné poradie.

D charakterizuje kriteriálnu funkciu. (O kriteriálnych funkciach už bolo pojednané v časti xxx.xxx)

Klasifikácia podľa Conwaya sa už prežila, možno ju však nájsť v niektorých starších prácach, preto ju tu uvádzam.

1.6 Klasifikácia systémov rozvrhovania podľa LLRK

Klasifikácia systémov podľa LLRK (Lawler, Lenstra, Rinoy Kan) je určená len pre statické systémy, kedy jednotlivé úlohy prichádzajú do prázdneho systému po dávkach $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$. Táto klasifikácia sa v súčasnosti používa s istými modifikáciami takmer vo všetkých prácach týkajúcich sa rozvrhovania.

Rôzne úlohy, stroje a rozvrhovovacie systémy budeme popisovať 3–položkovou klasifikáciou problému $\alpha|\beta|\gamma$.

Dvojmiestna položka $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ charakterizuje množinu strojov M_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Druhá pložka $\beta = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots$ charakterizuje množinu úloh J_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. V pôvodnej práci mala 6 miest, avšak s vývojom teórie rozvrhov neustále pribúdajú ďalšie. Tretia položka γ vyjadruje (podobne ako posledná položka v Conwayovej klasifikácii) optimalizačné kritérium.

Prostredie stroja

Prostredie stroja popisuje dvojmiestna položka $\alpha = \alpha, \alpha_2$. Parameter α_2 bude popisovať počet strojov, parameter α_1 vlastnosti množiny strojov. Nech $\star$ je prázdný symbol. Je $\alpha_1 \in \{\star, P, Q, R, O, F, J\}$. Týmto zápisom vlastne vyjadrujeme, že parameter α_1 nadobudne práve jednu z hodnôt $\star, P, Q, R, O, F, J$.

Ak $\alpha_1 \in \{\star, P, Q, R\}$, každá úloha J_i pozostáva z jedinej operácie, ktorá môže byť vykonaná na ľubovolnom strojí M_j, pričom čas spracovania úlohy J_i na stroji M_j je p_{ij}. Tieto štyri hodnoty sú charakterizované následovne:

$\star$ máme jeden stroj $p_{i,1} = p_i$

P máme m identických paralelných strojov $p_{ij} = p_{i1} = p_i$

Q máme m uniformných paralelných strojov. Uniformita tu znamená, že všetky stroje sú rovnaké až na rýchlosť. Preto existujú čísla p_i, q_j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ také, že $p_{ij} = p_i \times q_j$. Číslo q_j sa volá faktor rýchlosti stroja M_j.

R máme m ľubovoľných paralelných strojov

Ďalšie tri hodnoty parametra α_1 sú určené pre situácie, kedy každá úloha J_i , (kde m je počet strojov).

O máme "open shop", kde každá úloha je tvaru $J_i = \{o_{i1}, o_{i2} \ldots, o_{im}\}$, kde každá operácia o_{ij} má byť vykonaná na stroji M_j za $_{pij}$ časových jednotiek, pričom na poradí operacií nezáleží.

F máme "flow shop", v ktorom každá úloha je tvaru $J_i = \{o_{i1}, o_{i2} \dots, o_{im}\}$, kde každá operácia o_{ij} má byť vykonaná na stroji M_j za p_{ij} časových jednotiek, pričom všetky úlohy prechádzajú strojmi v určenom rovnakom poradí. Vhodnou indexáciou operácií a strojov možno dosiahnuť, že úlohy prechádzajú strojmi v poradí $M_1, M_2, \dots, M_m$, ktoré postupne vykonávajú operácie $o_{i1}, o_{i2} \dots, o_{im}$

J "job shop", v ktorom každá úloha je tvaru $J_i = \{o_{i1}, o_{i2} \dots, o_{im_i}\}$, operácie majú byť vykonané v poradí $o_{i1}, o_{i2} \dots, o_{im_i}$ a každá operácia o_{ij} má byť vykonaná na pridelenom stroji μ_{ij} za p_{ij} časových jednotiek, pričom $\mu i(j-1) \neq \mu_{ij}$ pre $j = 2, \dots, m_i$

Ak α_2 je kladne číslo, potom počet strojov m je konštanta a $\alpha_2 = m$. Ak $\alpha_2 = \star$, potom sa predpokladá, že m je premenná. J zrejmé, že $\alpha_1 = \star$ (rozhodovacie problémy s jedným strojom) vtedy a len vtedy ak $\alpha_2 = 1$.

Druhá položka $\beta = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \dots$ označuje charakteristiky úlohy, ktoré sú definované nasledovne:

1) $\beta_1 \in \{\text{pmtn}, *\}$ charakterizuje možnosť prerušenia operácie.

$\beta_1 = \text{pmtn}$ prerušenie (preemption) je dovolené, t.j. spracovanie ľubovolnej operácie môže byť prerušené a obnovené neskôr.

$\beta_1 = \star$ prerušenie nie je dovolené.

2) $\beta_2 \in \{\text{res}, \text{res1}, \star\}$ charakterizuje existenciu obmedzených zdrojov (resources).

$\beta_2 = \text{res}$ predpokladá sa prítomnosť S obmedzených zdrojov $R_1, R_2, \dots, R_S$ s takými vlastosťami, že každý úloha J_j vyžaduje počas svojho vykonávania použitie r_{hj} jednotiek zo zdroja R_h. Predpokladá sa, že v danom čase sa zo žiadneho zdroja nemôže využiť viac ako 100

$\beta_2 = \text{res1}$ predpokladá sa prítomnosť len jediného obmedzeného zdroja.

$\beta_2 = 0$ nepredpokladá sa existencia obmedzených zdrojov.

3) $\beta_3 \in \{prec, tree, *\}$ charakterizuje precedenčnú reláciu na množine úloh $\mathcal{J}$.

$\beta_3 = \text{prec}$ na množine úloh $\mathcal{J}$ je špecifikovaná relácia precedencie $\prec$ s príslušným digrafom bezprostrednej precedencie $\mathbb{G}_{\prec\prec}$. Ak $\mathbb{G}$ obsahuje orientovanú cestu z J_i do J_k, znamená to, že $J_i \prec J_k$ a vtedy sa požaduje, aby úloha J_ij bola úplne dokončená skôr než začne vykonávanie úlohy J_k.

$\beta_3 = \text{tree}$ $\mathbb{G}_{\prec\prec}$ je koreňový strom, v ktorom sú buď výstupné stupne všetkých vrcholov najviac 1, alebo vstupné stupne všetkých vrcholov sú najviac 1.

$\beta_3 = \star$ nie je špecifikovaná precedencia.

4) $\beta_4 \in \{r, \star\}$ charakterizuje vstupné okamžiky $r_1, r_2, \dots, r_n$ úloh $J_1, J_2, \dots, J_n$ do systému.

$\beta_4 = r$ sú špecifikované vstupné časy $r_1, r_2, \dots, r_n$, ktoré môžu byť pre každú úlohu odlišné.

$\beta_4 = \star$ predpokladáme, že $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$

5) $\beta_5 \in \{g_i \leq g, \star\}$ charakterizuje množinu úloh $\mathcal{J}$ z hľadiska počtu operácií jednotlivých úloh.

$\beta_5 = g_j \leq g$ je špecifikovaná konštantná horná hranica pre počty operácií g_i (len pre job shop – t.j. ak $\alpha_1 = J$).

$\beta_5 = \star$ nie je špecifikovaná horná hranica počtu operácií úloh vchádzajúcich do systému.

6) $\beta_6 \in \{p_{ij} = 1, p \leq pij \leq p, \star\}$ charakterizuje doby trvania operácií úloh vchádzajúcich do systému.

$\beta_6 = p_{ij} = 1$ každá operácia má jednotkový čas spracovania.

$\beta_6 = p \leq pij \leq p$ je špecifikovaná konštantná horná aj dolná hranica pre p_{ij}.

$\beta_6 = \star$ trvania operácií nie sú časovo obmedzené.

Príklady:

$1||C_{\max}$ – systém s jedným strojom, v ktorom minimalizujem čas výstupu poslednej úlohy zo systému.

$1|r_i|(Fw)_{\max}$ – systém s jedným strojom, v ktorom každá z úloha prichádza do systému v čase r_i a v ktorom minimalizujem maximum z vážených pobytov úloh v systéme.

$P3|pmtn|\sum F_i$ – systém s troma paralelnými identickými strojmi, kde je povolené prerušenie operácií, a v ktorom minimalizujeme celkovú dobu pobytu úloh v systéme.

$P\infty|prec|C_{\max}$ – systém s neobmedzeným počtom strojov, medzi úlohami je precedenčná relácia, minimalizujeme čas výstupu poslednej úlohy zo systému. Toto je vlastne úloha sieťového plánovania, ktorá sa dá riešiť metódou CPM.

$F2||C_{\max}$ – Flow Shop s dvoma strojmi s minimalizáciou času výstupu poslednej úlohy zo systému. Každá z úloh pozostáva z dvoch operácií, všetky úlohy prechádzajú najprv strojom M_1, potom strojom M_2. Úloha známa ako Johnsonov problém. Pre jej riešenie existuje polynomiálny Johnsonov algoritmus. Analogická úloha s troma strojmi je už NP–ťažká.

$Jm|prec|\sum F_i$ – Job Shop s m strojmi, medzi úlohami existuje precedenčná relácia, minimalizuje sa celková doba pobytu úloh v systéme. Úloha je NP–ťažká.