BLP modely Sudoku v tabuľkových procesoroch

Štefan PEŠKO
pesko@frcatel.fri.uniza.sk

http://frcatel.fri.uniza.sk/users/pesko/

OSSConf
2. – 4. júl 2024, Žilina

Revidované 8.7.2024

O čom ?

Na podnet kolegu Pavla Stříža som si zaspomínal na moje začiatky riešenia štandartného puzzle Sudoku. [1] [2]

- Štandartné puzzle (Sudoku puzzle)
- Štandartné diagonálne puzzle (Sudoku X puzzle)
- 13blokové puzzle (Windoku puzzle)
- Diagonálne 13blokové puzzle (Windoku X puzzle)
- Izomorfizmus zadaní puzzle a jeho vlastnosť
- Otvorené problémy a hypotézy

[1] Š.Peško (2007), Riešenie Sudoku v tabuľkových procesoroch, In: 5. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických s mezinárodní účastí, Brno 13. září 2007, Univerzita obrany, ISBN 978-80-7231-274-0,516-522, 516-522.

[2] Š.Peško (2008), Sudoku - hra alebo lokačná úloha? In: Aplimat, 7th international conference : February 5-8, 2008, Bratislava, Slovak University of Technology, ISBN 978-80-89313-04-4, 41-51.

Štandartné puzzle Sudoku

		6			4	9		
	4						7	
			9		1		4	5
	9		8	3				
8								9
				1	9		3	
7	8		5		2			
	2						8	
		4	6			2		

Table 1: *Diabolské puzzle*

Základné pravidlá: *Do každého hracieho poľa* 9×9 *puzzle sa doplĺňajú čisla od* 1 *do* 9 *tak, aby každý riadok, sĺpec a blok* 3×3 *obsahoval každé číslo práve raz.*

Nech $N = \{1, 2, \ldots, 9\}$ je množina čísel. Treba ich uložiť na voľné miesta tabuľky $A = (a_{ij})$. Čísla blokov sú v tabuľke $B = (b_{ij})$)

1	1	1	2	2	2	3	3	3
1	1	1	2	2	2	3	3	3
1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	4	4	5	5	5	6	6	6
4	4	4	5	5	5	6	6	6
4	4	4	5	5	5	6	6	6
7	7	7	8	8	8	9	9	9
7	7	7	8	8	8	9	9	9
7	7	7	8	8	8	9	9	9

Table 2: *Bloky puzzle*

Tabuľka $C = (c_{ijk})$ udáva polohy zadaných čísel z N

$$c_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ak } a_{ij} = k \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

Model BLP puzzle → Sudoku.ods

Nech premenná $x_{ijk} = 1$ ak na mieste (i, j) puzzle je umiestnené číslo $k \in N$, ináč $x_{ijk} = 0$.

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in N} c_{ijk} \cdot x_{ijk} \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ijk} = 1 \qquad \forall (i,k) \in N \times N \tag{2}$$

$$\sum_{i\in N} x_{ijk} = 1 \qquad \forall (j,k) \in N \times N \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in N\times N: b_{ij}=t} x_{ijk} = 1 \qquad \forall (t,k) \in N \times N \tag{4}$$

$$\sum_{k\in N} x_{ijk} = 1 \qquad \forall (i,j) \in N \times N \tag{5}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j,k) \in N \times N \times N \tag{6}$$

Ak označíme $S = (s_{ij}), i \in N, j \in N$ riešenie puzzle, potom

$$s_{ij} = \sum_{k\in N} k \cdot x_{ijk}.$$

Štandartné diagonálne puzzle

Pravidlá: *Zostávajú v platnosti požiadavky na štandartné puzzle Sudoku naviac však aj hlavná i vedľajšia diagonála má obsahovať každé číslo práve raz.*

2	5	9	6	1	3	8	4	7
3	8	1	9	4	7	2	6	5
6	7	4	5	2	8	9	1	3
8	9	6	3	7	1	4	5	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	4	5	2	8	9	1	3	6
5	1	8	7	3	2	6	9	4
9	3	2	1	6	4	5	7	8
4	6	7	8	9	5	3	2	1

Table 3: *Riešenie štandartného diagonálneho puzzle*

Model BLP diagonálneho puzzle → DSudoku.ods

Stačí doplniť obmedzujúce podmienky (2)–(5) o hlavnú diagonálu (7) a vedľajšiu diagonálu (8).

$$\sum_{i \in N} x_{iik} = 1 \qquad \forall k \in N \tag{7}$$

$$\sum_{i \in N} x_{10-i,10-i,k} = 1 \qquad \forall k \in N \tag{8}$$

A to je všetko ;-).

13blokové puzzle

Pravidlá: *Zostávajú v platnosti požiadavky na štandartné puzzle Sudoku naviac však pribudnú ďalšie štyri bloky* $(1, 2, 3, 4)$*, ktoré majú obsahovať každé číslo práve raz.*

	1	1	1		2	2	2	
	1	1	1		2	2	2	
	1	1	1		2	2	2	
	3	3	3		4	4	4	
	3	3	3		4	4	4	
	3	3	3		4	4	4	

Table 4: *Nové bloky* $\overline{B} = (\overline{b}_{ij})$ *puzzle*

Nevyplnené políčka považujem opäť za 0.

Generátor 13blokového puzzle

dostaneme z prázdneho zadania $a_{ij} = 0, (i,j) \in N \times N$.

2	1	9	3	6	7	8	5	4
4	5	6	1	2	8	3	9	7
3	7	8	4	9	5	2	1	6
5	2	3	9	1	4	7	6	8
1	8	4	2	7	6	9	3	5
6	9	7	8	5	3	4	2	1
7	3	1	5	4	9	6	8	2
8	4	2	6	3	1	5	7	9
9	6	5	7	8	2	1	4	3

Table 5: *Riešenie 13blokového puzzle*

Poznámka: Túto fintu môžeme použiť pre ľubovoľné puzzle Sudoku. Nasledujúci model bude hľadať len nejaké prípustné riešenie.

Model BLP 13blokové puzzle → 13BSudoku.ods

Stačí doplniť obmedzujúce podmienky (2)–(5) o ďalšiu podmienku

$$\sum_{(i,j)\in N\times N:\overline{b}_{ij}=t} x_{ijk} = 1 \qquad \forall k \in N, t \in \{1,2,3,4\} \tag{9}$$

A to je opäť všetko ;-).

Diagonálne 13blokové puzzle → D13BSudoku.ods

Pravidlá: *Zostávajú v platnoti požiadavky na 13.blokové aj diagonálne puzzle Sudoku.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	4	8	2	7	9	6	1	3
6	7	9	3	1	8	5	2	4
2	1	6	5	9	7	4	3	8
3	9	7	1	8	4	2	5	6
8	5	4	6	3	2	9	7	1
7	8	2	9	6	1	3	4	5
9	3	1	7	4	5	8	6	2
4	6	5	8	2	3	1	9	7

Table 6: *Riešenie diagonálneho 13blokového puzzle*

Tu stačí doplniť obmedzujúce podmienky (2)–(5) o podmienky (7),(8) a (9)

Izomorfizmus zadaní puzzle

Puzzle A a $\overline{A}$ nazveme izomorfné ak existuje taká neidentická permutácia čísel π na N, že pre každú dvojicu $(i, j) \in N \times N$ platí

$$\overline{a}_{ij} = \begin{cases} \pi(a_{ij}) & \text{ak } a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{ináč} \end{cases} \tag{10}$$

Ak taká permutácia π neexistuje hovoríme že puzzle A a $\overline{A}$ sú neizomorfné.

Príklad: Majme permutáciu $\pi = (1, 8, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 9)$, potom sú puzzle A a $\overline{A}$ izomorfné.

		6			4	9		
	4						7	
			9		1		4	5
	9		8	3				
8								9
				1	9		3	
7	8		5		2			
	2						8	
		4	6			2		

A

		6			4	9		
	4						7	
			9		1		4	5
	9		2	3				
2								9
				1	9		3	
7	2		5		8			
	8						2	
		4	6			8		

$\overline{A}$

Vlastnosť izomorfných puzzle

Tvrdenie *Ak sú riešiteľné puzzle A a $\overline{A}$ izomorfné potom sú aj zodpovedajúce riešenia S a $\overline{S}$ izomorfné.*

V našom príklade sa 2 premenovala na 8 a 8 premenovala na 2.

1	5	6	3	7	4	9	2	8
3	4	9	2	5	8	1	7	6
2	7	8	9	6	1	3	4	5
4	9	7	8	3	6	5	1	2
8	1	3	7	2	5	4	6	9
5	6	2	4	1	9	8	3	7
7	8	1	5	4	2	6	9	3
6	2	5	1	9	3	7	8	4
9	3	4	6	8	7	2	5	1

S

1	5	6	3	7	4	9	8	2
3	4	9	8	5	2	1	7	6
8	7	2	9	6	1	3	4	5
4	9	7	2	3	6	5	1	8
2	1	3	7	8	5	4	6	9
5	6	8	4	1	9	2	3	7
7	2	1	5	4	8	6	9	3
6	8	5	1	9	3	7	2	4
9	3	4	6	2	7	8	5	1

$\overline{S}$

Otvorené problémy a hypotézy

- OP1: Pri akom minimálnom počte zadaných čísel má puzzle s danými obmedzeniami jediné riešenie? Je tento počet závislý aj od ich umiestnenia?
- H1: Možno pomôže *Tvrdenie: Nech je* $X^0 = (x^0_{ijk})$ *nejaké riešenie Sudoku. Ak má Sudoku doplnené podmienkou* $\sum_{(i,j,k)\in N\times N\times N} x^0_{ijk} \cdot x_{ijk} \leq 80$, *potom riešenie nie je určené jednoznačne.* Overené aj dokázané aj pre rozšírené modely.
- OP2: Aký je počet neizomorfných puzzle pre ich rôzne verzie?
- H2: Ak p je počet všetkých puzzle daného typu, potom $p/9!$ udáva hľadaný počet. Treba nájsť dobrý horny odhad p.
- OP3: Sú poznatky získané pri riešení puzzle s blokmi 2×2 a $N = \{1, 2, 3, 4\}$ (tzv. miniSudoku) prenesiteľné na štandartné puzzle?
- H3: Pravdepodobne ano, nenachádzam dôvod prečo nie.

Ďakujem za pozornosť a trpezlivosť

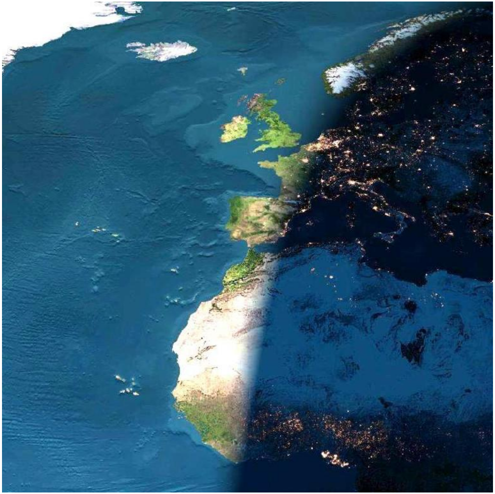

Figure 1: Posledný východ slnka...